线性代数

-6 课　列空间和零空间

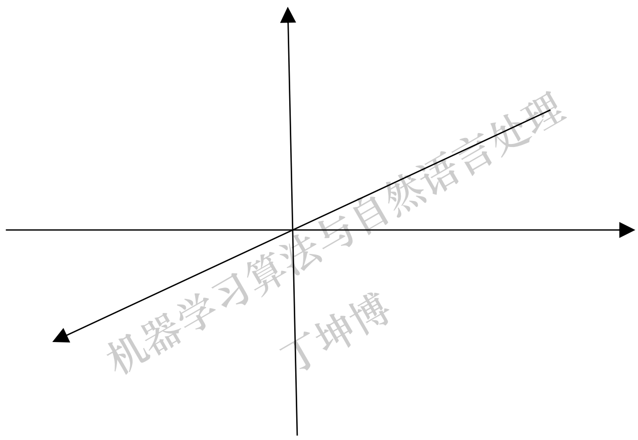
一、知识概要

本节从之前学习的子空间开始，介绍了子空间的部分性质。并重点介绍了列空间与方程 Ax = b 之间的联系。并由此引出了零空间，根据 Ax = b 这个方程给出了两种构建子空间的方法。

二．子空间

2.1 子空间回顾

首先我们回顾一下上次讲到的子空间。首先明确，子空间必须**对线性运算封闭**。我们从一个简单的向量空间：R^3空间开始。其图像如下，整个三维空间皆为R^3空间。



上一节中我们学习过，R^3的子空间就是如下三个：

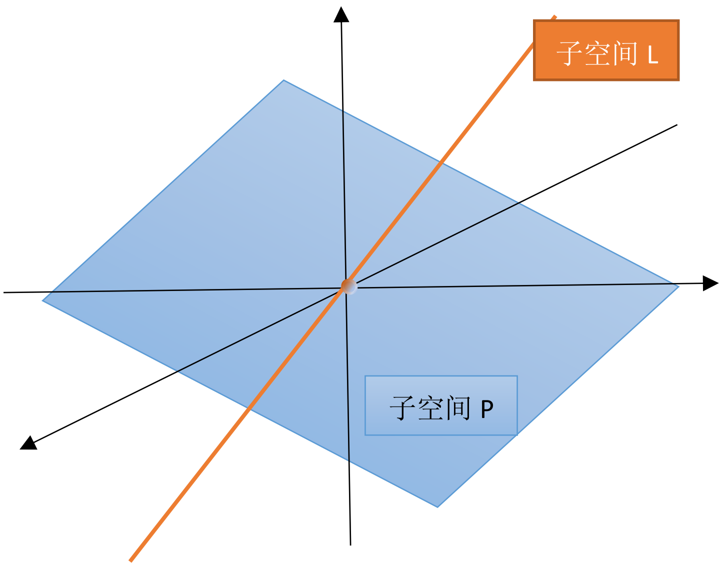
（1）　穿过原点的无限延伸的平面 P

（2）　穿过原点的无限延伸的直线 L

（3）　Z，原点。

注：子空间必须包含原点(零向量)

反映在图像上，即：



很明显，子空间直线 L 或平面 P 上，任取两个向量相加，得到的向量仍在该子空间中。而且将其上的向量做数乘伸长或缩短一定倍数，其结果也还在该子空间中。所以它们都对线性运算封闭。

2.2 子空间的“交”与“并”

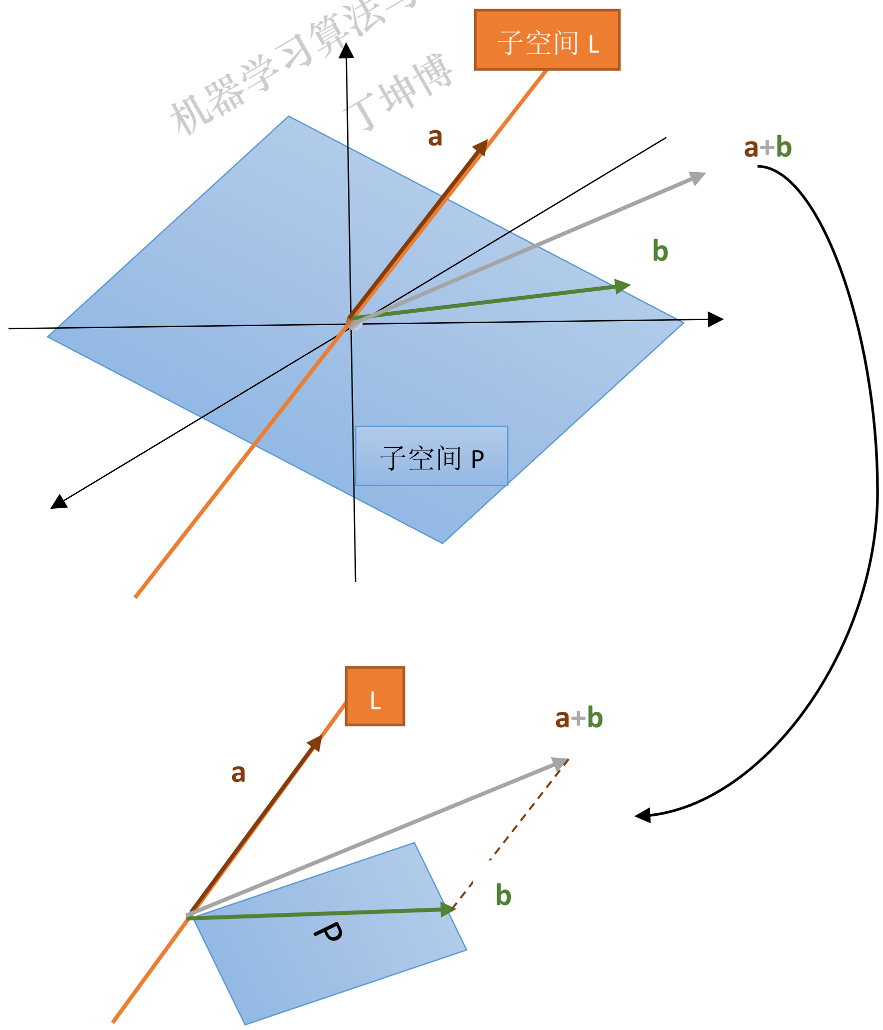
上面我们都是分别研究的两个子空间，那么接下来我们对两个空间之间联系部分展开讨论

2.2.1 P∪L 空间

还是讨论上面R^3的子空间 P 与 L，首先要研究的就是它们的并空间，即：现有一集合，包含了 P 与 L 中的所有向量，那么这个集合是子空间吗？

答案是否定的。

很明显，我们将直线 L 与平面 P 看做同一个集合 P∪L 之后，这个集合对线性运算并不封闭。比如我们随便在直线 L 上取一个向量 a，在平面 P 上取一个向量 b。此时向量 a+b 方向就会夹在直线 L 与平面 P 之间，脱离了 P∪L 的范围。所以 P∪L 无法构成空间。



2.2.2 P∩L 空间

如果看的是两个子空间的交集，那么上面那个R^3的例子再合适不过了。因为平面 P 与直线 L 相交的部分只有一个地方-----原点。而原点显然是R^3的子空间之一。

如果推广到任意两个子空间的交呢？假设现在有子空间 S 和 T，问其交集 S∩T 是否为子空间？

这次答案是肯定的。

为什么呢？抽象层面上来看，S∩T 集合是比 S，T 限制条件更多的集合，相当于一个更小的集合，限制更严格的集合，所以 S∩T 势必满足原本 S 和 T 的条件，所以可以构成一个子空间。

严格证明(对线性运算封闭)思路如下：

（1） 加法封闭：在 S∩T 中取 v，w 向量，单看 S 空间，v，w 均在 S 空间里，由于 S 是子空间，对线性运算封闭，故 v+w 也在 S 中，同样，再单看 T 空间，将上面的步骤中的 S 换成 T，也可以得 v+w 在 T 空间中。这就说明 v+w 在 S∩T 中。所以 S∩T 对向量加法封闭。

（2） 数乘封闭：在 S∩T 中取 a 向量，a 在 S 空间中，所以 n 倍的 a 仍在 S 空间中。同样，a 也在 T 空间中，故 n 倍的 a 也在 T 空间中。也就是 n 倍的 a 仍在 S∩T 中。所以 S∩T 对数乘运算也是封闭的。

三. 列空间

3.1 列空间回顾

我们通过一个例子来回顾之前的内容

现有矩阵 A = $\begin{bmatrix}1&1&2\\2&1&3\\3&1&4\\4&1&5\end{bmatrix}$，矩阵的列向量$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$均是$R^4$中的四维向量，所以 A **的列空间是$R^4$的子空间**。

那么列空间里包含了什么呢？除了$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$三个列向量。列空间里还包含着它们的各种线性组合。也就是说，A 的列空间是由$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}$三个列向量张开的一个子空间。

那么这个子空间有多大呢？这就需要用 Ax = b 方程来解释了。

3.2 Ax = b 的空间解释(从 A 的角度)

还是取 A = $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}$。假设有一个方程 Ax = b 如下：

$$\mathrm{Ax} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix} = \mathrm{b}$$

第一个问题：这个方程是否始终有解？

我们看到，Ax 的本质就是对 A 的列向量进行线性组合：

$$\mathrm{Ax} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = x_1\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$$

或者可以认为，Ax 代表着 A 的列空间。

显然，三个四维向量的线性组合是无法铺满整个四维空间的，就如同两个三维向量无法张开一个三维空间一样。所以，这里的 Ax 只能是R^4空间的部分子空间，也就是说，无法保证任意拿出一个四维向量 b = $\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{bmatrix} \in R^4$，都能找到 A 列向量的一种线性组合，使 Ax = b。

第二个问题：什么样的 b 可以使方程 Ax = b 有解？

上面介绍过，Ax 就表示着 A 列向量的所有线性组合，也就是 A 的列空间。上面的 3.1 中提到过，A 的列空间就是R^4的一个子空间，所以对于一个四维向量 b，只要 b 在**“A 的列空间”**这个R^4的子空间中，那么就可以找到一种 A 列向量的线性组合来构成 b。也就是使得 Ax = b 有解。

第三个问题：能否去掉 A 的一列，却不影响 A 的列空间呢？

先看看这三个列向量：$\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$。显然第三列$\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\\ 5\end{bmatrix}$可以写成前两列的线性组合：$\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 4\\ 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$。也就是说这第三列对线性组合没有贡献。所以我们仅仅

依靠前两列的线性组合就可以构成 A 的列空间。我们称$\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$这样的列为主列。所以去掉第三列，并不影响 A 的列空间的构成。

四、零空间

4.1 零空间介绍

所谓零空间，就是 **Ax = 0 的所有解所构成的一个空间**。

还是以 $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 3\\3 & 1 & 4\\4 & 1 & 5\end{bmatrix}$为例,其零空间就是下面这个方程的解构成的空间:

$$Ax = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 3\\3 & 1 & 4\\4 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix} = 0$$

也就是 $x = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$，可以看到 x 有三个分量，所以其零空间是$R^3$的子空间。

所以，对于 m*n 的矩阵来说，列空间是R^m的子空间，零空间是R^n的子空间。列空间关键在于列向量的维数，零空间的关键在于列向量的个数。

首先来验证这样的$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$为什么能构成向量空间？

（1） 加法封闭：在此零空间中任取两向量 v，w，有 Av = Aw = 0，很显然 A(v+w) = 0,所以(v+w)也属于零空间,加法封闭得证。

（2） 数乘封闭:还是,在此零空间中任取向量 v,Av = 0,则 cAv=0。矩阵 A 与常数 c 位置可交换，所以 A(cv) = 0.所以 cv 也在零空间中。数乘运算封闭得证。

【例】求上面 $A = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\2 & 1 & 3\\3 & 1 & 4\\4 & 1 & 5\end{bmatrix}$的零空间。

我们讨论过，这个 A 的第三列可以写成前两列的线性组合，所以可以写出令 Ax = 0 的一个解: $\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$，而其零空间即为：$C\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$（C 表示任意常数）。反映在图像上，就是$R^3$中的一条穿过原点的直线。

4.2 Ax = b 的空间解释(从 x 的角度)

那如果上面构造零空间的方程右侧变为任意向量的话，其解集 x 还能构成向量空间吗？

如：

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 3\\ 3 & 1 & 4\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$$

这样的所有 x 构成的解集还是向量空间吗？

显然不是。将$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$代入，其显然不是这个方程的解，就是说明这个解集里根本没有零向量。之前我们学过，任何一个向量集合中必须要有零向量。就是说明这个解集连最基本的要求都无法满足，构不成向量空间。

反映在图像上，这里所有的$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$其实构成的是一个不过原点的平面。

这也告诉我们，想从 x 的角度研究 Ax = b 这个方程，则只有 b 是零向量时，x 才能构成空间（零空间），其他情况中连零向量都不在解集中，更别谈向量空间了。

五.学习感悟

这一课我们学习了列空间与零空间.从 Ax = b 入手，给出了两种构建子空间的方法：

1. 从 A 的列向量入手，已知列向量，根据其线性组合构造空间。
2. 从 Ax = 0 方程组入手，一开始并不知道 x 中有什么向量，只是根据 Ax = 0 这个方程构造方程组，让 x 满足特定条件来构造子空间。

这两种构造子空间的方法需要掌握。其实就是一个从 A 的列向量入手，一个从 x 的解集入手构建子空间的问题。

-----by Dkb