线性代数

-1 课　方程组的几何解释

一、知识概要

本节开始，我们一起来学习线性代数的有关知识，首节我们从解方程谈起，学习线性代数的应用之一就是求解复杂方程问题，本节核心之一即为从行图像与列图像的角度解方程。

二．方程组的几何解释基础

2.1 二维的行图像

我们首先通过一个例子来从行图像角度求解方程：

【例 1】

求解方程：$\begin{cases} 2x-y &= 0 \\ -x+2y &= 3 \end{cases}$

我们首先按行将方程写为矩阵形式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{\text{系数矩阵}} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{\text{未知向量}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}_{\text{向量}}$$

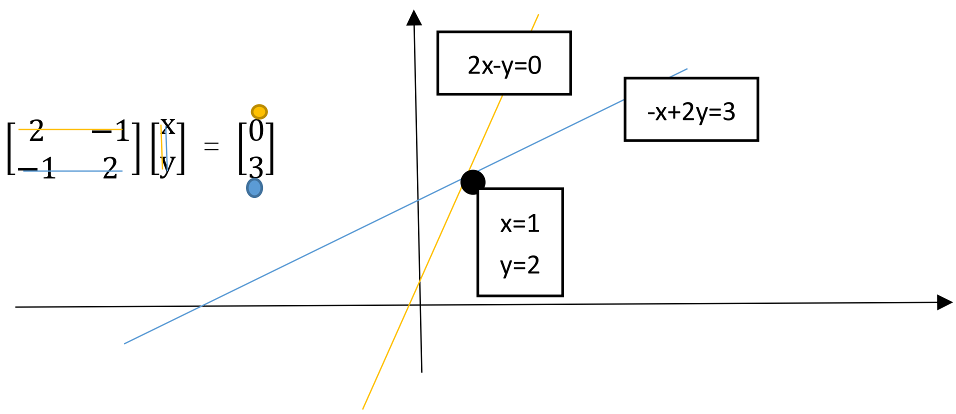
系数矩阵(A)：将方程系数按行提取出来，构成一个矩阵

未知向量(x)：将方程未知数提取出来，按列构成一个向量。

向量(b)　　：将等号右侧结果按列提取，构成一个向量

接下来我们通过行图像来求解这个方程：

所谓行图像，就是在系数矩阵上，一次取一行构成方程，在坐标系上作图。和我们在初等数学中学习的作图求解方程的过程无异。



2.2 二维的列图像

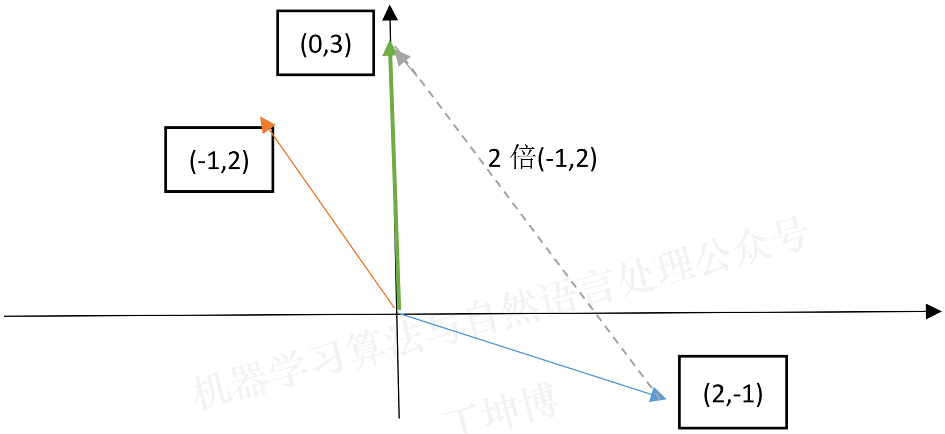
从列图像角度，我们再求解这个方程 $\begin{cases} 2x - y &= 0 \\ -x + 2y &= 3 \end{cases}$

这一次我们求解过程中，我们将方程按列提取，使用的矩阵为：

$$x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$$

如上，我们使用列向量构成系数矩阵，将问题化为：将向量$\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$与向量$\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$正确组合，使得其结果构成$\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$。

接下来我们使用列图像求解此方程：



即寻找合适的 x，y 使得 x 倍的(2,-1) + y 倍的(-1,2)得到最终的向量(0,3)。在很明显能看出来，1 倍(2,-1) + 2 倍(-1,2)即满足条件。反映在图像上，明显结果正确。

我们再想一想，仅仅对于$x\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$这个方程，如果我们任意取 x 和 y，那么我们得到的是什么呢？很明显，能得到任意方向的向量，这些向量布满整个平面。这里我们先不做展开，有一些印象就好。

三. 方程组的几何解释推广

3.1 高维行图像

我们将方程维数推广，从三维开始，$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ -3y + 4z = 4 \end{cases}$，如果我们继续使用做行图像求解，那么会得到一个很复杂的图像。

矩阵如下：

$$A = \begin{bmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -3 & 4\end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix}0\\-1\\4\end{bmatrix}，方程：Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

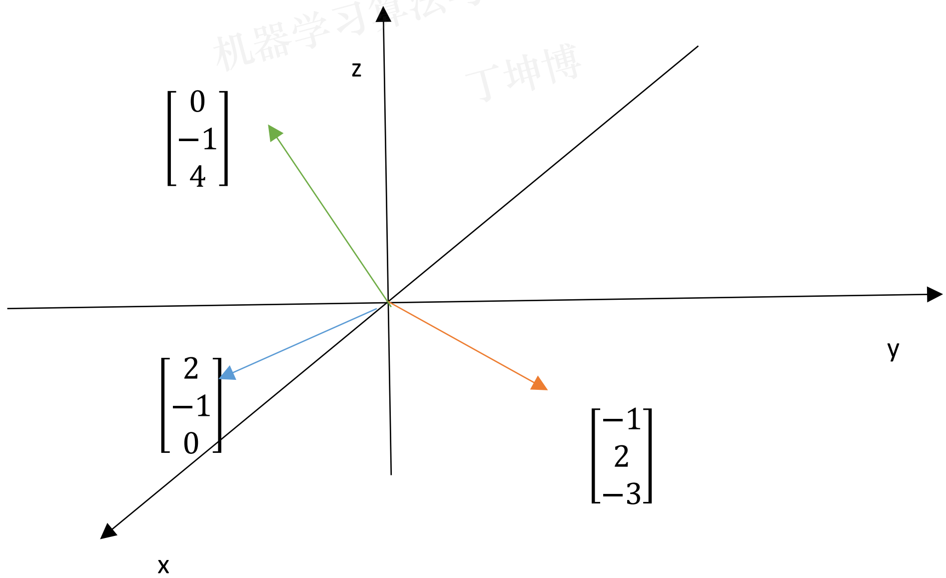
如果绘制行图像，很明显这是一个三个平面相交得到一点，我们想直接看出这个点的性质可谓是难上加难，比较靠谱的思路是先联立其中两个平面，使其相交于一条直线，在研究这条直线与平面相交于哪个点，最后得到点坐标即为方程的解。这个求解过程对于三维来说或许还算合理，那四维呢？五维甚至更高维数呢？直观上很难直接绘制更高维数的图像，这种行图像受到的限制也越来越多。

3.2 高维列图像

还是那个例子，$\begin{cases} 2x - y \quad\quad = 0 \\ -x + 2y - z = -1 \\ \quad -3y + 4z = 4 \end{cases}$，如果我们使用列图像的思路进行计算，那矩阵形式就变为：

$$x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

左侧是线性组合，右侧是合适的线性组合组成的结果，这样一来思路就清晰多了，“寻找线性组合”成为了解题关键。



很明显这道题是一个特例，我们只需要取 x = 0，y = 0，z = 1。就得到了结果，这在行图像之中并不明显。当然，之所以我们更推荐使用列图像求解方程，是因为这是一种更系统的求解方法，即寻找线性组合，而不用绘制每个行方程的图像之后寻找那个很难看出来的点。另外一个优势在于，如果我们改变最后的结果 b，例如本题中，我们将其改为 $x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$，那么我们

就重新寻找一个线性组合就够了，但是如果我们使用的是行图像呢？那意味着我们要完全重画三个平面图像，就简便性来讲，两种方法高下立判。

另外，还要注意的一点是对任意的 b 是不是都能求解 Ax = b 这个矩阵方程呢？也就是对 3*3 的系数矩阵 A，其列的线性组合是不是都可以覆盖整个三维空间呢？对于我们举的这个例子来说，一定可以，还有我们上面 2*2 的那个例子，也可以覆盖整个平面，但是有一些矩阵就是不行的，比如三个列向量本身就构成了一个平面，那么这样的三个向量组合成的向量只能活动在这个平面上，肯定无法覆盖一个三维空间，比如三个列向量分别为：$\begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix}$。这三个向量就构成了一个平面。其中$\begin{bmatrix}1\\1\\-3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1\\2\\-3\end{bmatrix}$。这样的矩阵 A$\begin{bmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\0&-3&-3\end{bmatrix}$构成的方程 Ax = b，其中的 b 就无法覆盖整个三维空间，也就无法实现：对任意的 b，都能求解 Ax = b 这个方程。

3.3 矩阵乘法

例如 Ax ，如果我们已知一个矩阵 A 和一个向量 x，那么我们就怎么求解它们的积呢？例如 A = $\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}$，x = $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，我们这样求：

- 方法 1：将矩阵 A 看做列向量的组合：

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$

即 x 每个分量与矩阵中各的列向量相乘，再将其求和。看做 A 各列的线性组合。

- 方法 2：将矩阵 A 看做行向量的组合：

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(2,5)\cdot(1,2)\\(1,3)\cdot(1,2)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}12\\7\end{bmatrix}$$

即采用这个方式进行向量乘法：$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1*2+2*5\\1*1+2*3\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}2&5\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1*2+2*5\\1*1+2*3\end{bmatrix}$$

四、学习感悟

这部分内容是对线性代数概念的初涉，从解方程谈起，引进列空间的概念，可以发现从列空间角度将求解方程变化为求列向量的线性组合，这个方式更加科学。

介绍了矩阵乘法，这部分内容重在理解。