

线性代数

-20 课 克莱姆法则、逆矩阵、体积

一、知识概要

上一节中我们介绍了行列式的求法，这一节强调下行列式的应用，包含三个方面：克莱姆法则、逆矩阵、体积。这三部分内容会让我们对行列式有更深层次的认识。

二. 逆矩阵公式

这里给出逆矩阵公式：

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^T$$

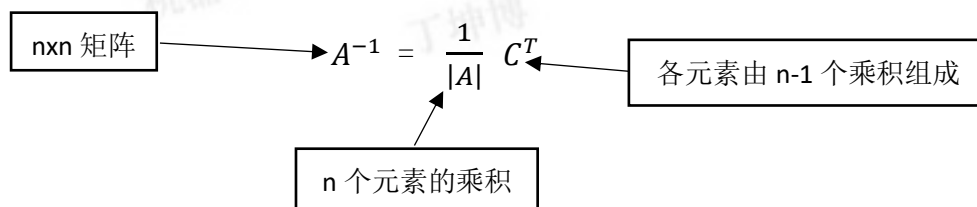
这里的矩阵 C 代数余子式矩阵，即其中各个对应元素为其对应的代数余子式。我们这里称这个由代数余子式组成的矩阵 C^T 为伴随矩阵。

例：

二阶逆矩阵公式为：

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

再看这个公式的结构：



• 验证公式的正确性：

$$\text{由 } AA^{-1} = I$$

$$\text{故：} AA^{-1} = A \frac{1}{|A|} C^T = I$$

即需要验证：

$$AC^T = |A|I$$

将其展开观察：

$$AC^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

由于对 C 进行了转置，导致 A 每一个行向量与 C^T 对应列向量做内积后得到的正是 A 的行列式值，相当于行列式按每一行展开的逆运算。

所以可以得到：

$$AC^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & \cdots & C_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A|I$$

这里有一个问题，那第一行为例，为什么 $[a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}]$ 这个行向量在和不属于这行元素的代数余子式构成的列向量相乘时，得到的结果为零呢？也就是为什么

$$\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} \text{ 中除对角线外，其余元素都为零呢？}$$

很简单，就以 A 的第一行和 C^T 的第二列为例：

$$[a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1n}] \begin{bmatrix} C_{21} \\ C_{22} \\ \cdots \\ C_{2n} \end{bmatrix} = a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \cdots + a_{1n}C_{2n}$$

我们构造一个新矩阵来表现这个结果：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

这个矩阵前两行相同，将这个矩阵按第二行展开求行列式，即为：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \cdots + a_{1n}C_{2n}$$

同时，由于这个矩阵前两行相同，故其行列式为 0。

这样就得到了：

$$a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \cdots + a_{1n}C_{2n} = 0$$

其余位置以此类推，所以 $\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$ 中除对角线，其余位置均为 0。

逆矩阵公式帮助我们了解了另一种原矩阵与逆矩阵之间的关系，可以理解原矩阵的变化对逆矩阵的影响。

三、克莱姆法则

基于上面的逆矩阵公式，我们可以找到另一种寻找方程的解的方式，也就是由可逆矩阵 A 构成的方程 $Ax = b$ ，这里不用消元法来解：

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow x = A^{-1}b = \frac{1}{|A|} C^T b$$

这时，注意 $C^T b$ 这个形式，展开就是每一个代数余子式 C 乘上 b 的各个分量。余子式乘数字，这让我们想到了行列式。那么这个 $C^T b$ 构成的一组行列式是什么样的呢？

联想上面我们构造矩阵求 $a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + \dots + a_{1n}C_{2n} = 0$ 的过程，不难想到，只需将 A 中 C_i 对应列 A_i 替换为 b ，即为该列对应行列式，我们设其为 $|B|$ 。

就有下面的式子：

$$x_1 = \frac{|B_1|}{|A|}, \quad x_2 = \frac{|B_2|}{|A|}, \quad x_3 = \frac{|B_3|}{|A|} \dots \dots x_n = \frac{|B_n|}{|A|}$$

由 $C = \begin{bmatrix} C_{11} & \dots & C_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ C_{1n} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix}$ ，上面 x 的每一个分量都是对应的 $C_i b$ 得到的，构造新矩阵，计算行列式来求上面各个分量的对应 $|B_i|$ 。

$$\text{其中： } |B_1| = \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{12} \\ \dots \\ C_{1n} \end{bmatrix} b = \begin{vmatrix} b & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ b & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ 的第一列展开。}$$

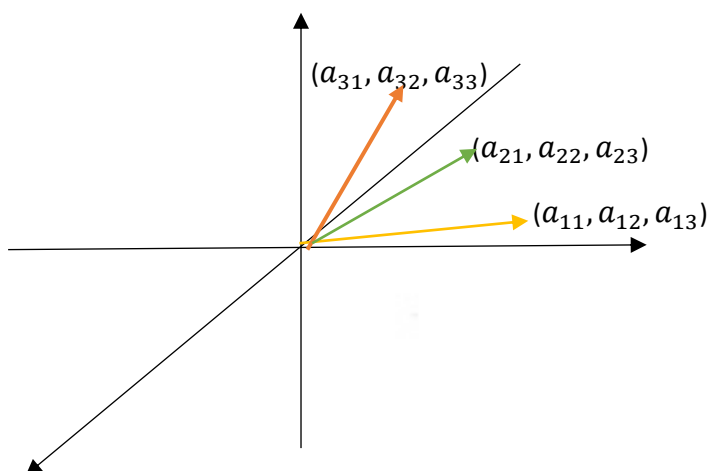
$|B_2|, |B_3| \dots$ 以此类推。

就这样，我们得到了另一种解方程 $Ax = b$ 的方法。即使用逆矩阵公式，再构造新矩阵计算分母上 C^T 不同列的分量与 b 的内积，最后得到 x 的各个分量。进而解出 x 的值。

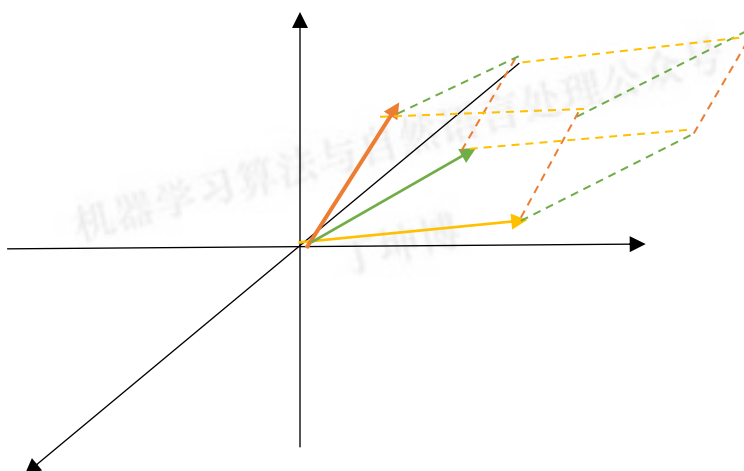
四、体积

直接给出应用：行列式的值是一个六面体的体积。

假设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, 对应三个向量反映在三维坐标下:



这三个向量张成了一个平行六面体, 而 A 的行列式的绝对值即为其体积。



行列式的值有正负, 所以该六面体的体积即为行列式的绝对值。而正负号的作用是告诉我们这个立体是左手系的还是右手系的。因为当我们调换这个立体的两条边之后, 我们得到的会是不同系下的立体, 其体积不会变, 但是旋转顺序变了。

研究几个特别的矩阵:

(1) 单位阵 I :

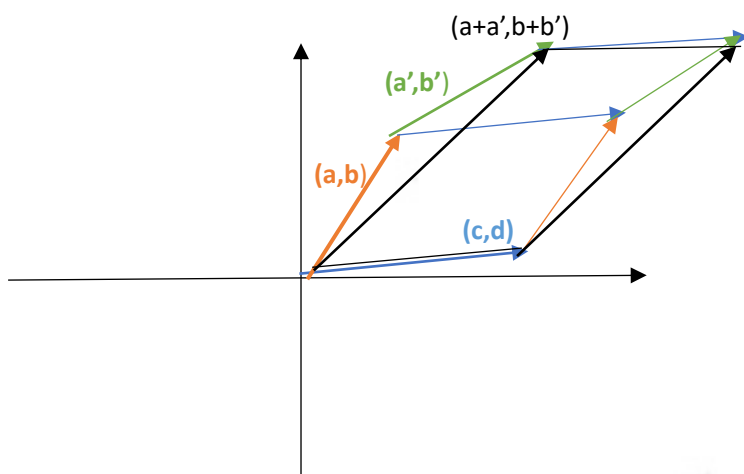
很明显, 单位阵对应的就是三个边长为 1 的立方体, 朝向即是各坐标轴的正方向。

(2) 正交阵 Q :

还记得我们之前介绍的正交阵 Q , 它除了正交这个性质之外, 还有一点, 即各向量长度均为 1 ($Q^T Q = I$)。所以 Q 构成的立体也是三个边长为 1 的立方体, 只是体现在坐标中时与 I 对应的立体位置不同。

还记得上一节中介绍的行列式有三个基本的性质(1, 2, 3)，这里性质一，二和三(1)很好证明，主要看性质三(2)： $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$ 。

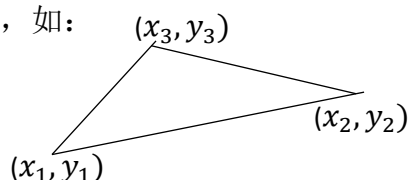
这部分内容课上并没有证明，我在网上找到了这部分证明：
以二维为例：



从上面的二维图像可以看出来， $\begin{vmatrix} a+a' & b+b' \\ c & d \end{vmatrix}$ 对应的面积和 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的面积与 $\begin{vmatrix} a' & b' \\ c & d \end{vmatrix}$ 的面积的和相等。高维类似，即得到行列式的性质三(2)。

有上面的启发，求过原点的三角形面积就可以用行列式求解。 $S = 1/2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 。

而不过原点的三角形，如：



这个时候要构造的行列式就是： $\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}$ 。此三角形面积即为 $1/2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ 。

我们计算这个行列式的时候会做一系列消元，例如 2 行-1 行，3 行-1 行消去 1。这一系列减法相当于将三角形移到原点位置，这样行列式求解便有效了。

五、学习感悟

这一节主要是行列式的应用，其中比较重要的是逆矩阵公式与行列式计算体积。而克莱姆法则解方程的过程没有消元法更有效，对 $Ax = b$ 方程，更推荐用消元法来进行求解。