线性代数

-26 课 对称矩阵及正定性

一、知识概要

本节从对称矩阵的特征值，特征向量入手，介绍对称矩阵在我们之前学习的一些内容上的特殊性质。并借此引出了正定矩阵。

二．对称矩阵

正如我们之前学习的很多特殊矩阵一样（如马尔科夫矩阵），对称矩阵也有许多特殊性质。而我们之前注意到，一个矩阵很多性质的特殊性体现在特征值与特征向量上，而对于对称矩阵，我们从特征值也特征向量的特殊性开始入手。直接给出性质，对称矩阵满足：

（1）$\mathbf{A} = \boldsymbol{A^T}$

（2）有正交的特征向量

注：其中（2）指的是可以**“挑选出”**一组垂直的特征向量，因为对于特征值重复的情况来说，这时会有一整个平面的特征向量，那么我们只要选其中垂直的一组向量就行，此时定理“有正交的特征向量”仍满足。而对于特征值不重复的情况，其对应的特征向量相互垂直。

2.1 对称矩阵的分解

已知上面两个性质，我们就能看出来对称矩阵的很多特点了，比如：由（2）这个性质，它的特征向量必然全部线性无关，而这正是矩阵可被对角化的前提条件。于是我们根据矩阵对角化的知识:

通常情况：

$$A = S \wedge S^{-1}$$（S 是特征向量组成的矩阵）

对称情况(有特征向量正交)：

$$A = Q \wedge Q^{-1}$$（Q 的列向量标准正交，Q^T=Q^{-1}）

$$= Q \wedge Q^T$$

另外注意到，本身 $A = \mathbf{Q}\wedge\boldsymbol{Q^T}$这个形式就是对称的。$(Q\wedge Q^T)^T = Q\wedge Q^T$。

所以，给定一个对称矩阵，我们就可以将其分解成上面的这种形式。这在力学上被称为主轴定理，它意味着如果给定某种材料，在合适的轴上来看，它就会变成对角化的，方向就不会重复。而在数学上，这被称为**“谱定理”**。

2.2 对称矩阵的特征值

还记得之前介绍的旋转矩阵，其中有的对应值会造成特征值为虚数的情况，但是对于对称矩阵来说，这种情况是不会发生的，即：**对称矩阵特征值均为实数**。那么为什么对称矩阵的特征值是实数？

由特征值公式：

$$Ax = \lambda x$$

• 对该公式取共轭，由于 A 是实矩阵，于是得到：

$$A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

• 对其两侧同时取倒置：

$$\bar{x}^T A = \bar{x}^T \bar{\lambda}$$

• 两侧同时乘上 x 构造方程，可得：

$$\bar{x}^T Ax = \bar{x}^T \bar{\lambda} x \quad （2.2.1）$$

注意到这时左边的等式出现了 Ax，如果我们构造一个新的等式，将 Ax = λx 代入，可以得到另一个关系式：

$$\bar{x}^T \mathrm{Ax} = \lambda \bar{x}^T x \quad （2.2.2）$$

• 对比上面的两个式子 2.2.1 与 2.2.2，可以得到：$\lambda = \bar{\lambda}$（$\bar{x}^T x$不为零时）

这就证明了特征值是一个实数。那么 $\bar{x}^T x = 0$ 情况存不存在呢？

列式计算：

$$\bar{x}^T \mathrm{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \bar{x}_1 x_1 + \bar{x}_2 x_2 + \cdots + \bar{x}_n x_n$$

而其中的$\bar{x}_i x_i$均为(a+bi)(a-bi)，得到的均为实数且大于 0。仅当 x 为零向量时，其内积为 0。而对称矩阵的特征向量 x 不是零向量，那么 $\bar{x}^T x = 0$ 情况不存在，所以**对称矩阵特征值均为实数**。

同时，这里强调一下，**复数矩阵也可能特征值均为实数。只要满足$\bar{A}^T = \mathbf{A}$**。（共轭转置等于其本身）则其对称矩阵是实数，因为此时推理过程和对称矩阵无异。可将运算后的$\bar{A}^T$代换为 A。

接下来，在知道了其特征值为实数之后，下面我们还需要探究其是**正数还是负数**。

给出对称矩阵特殊性质如下：

（1） **对称矩阵的主元正负个数与特征值的正负个数对应一致。**

正主元个数 = 正特征值个数

负主元个数 = 负特征值个数

（2)对称矩阵的主元的乘积等于特征值的乘积（它们都等于矩阵行列式的值）

这提供了一种更方便的方式来了解对称矩阵的特征值多少个为正，多少为负。因为在矩阵规格很大的情况下，求矩阵的主元要远比求其特征值要简单得多，前一个消元就好，后一个还要解方程。

2.3 对称矩阵的另一种理解

根据我们上面的对称矩阵方式，A = $Q\Lambda Q^T$，我们将它展开，使用另一种矩阵乘法方式，看看能不能从中得到什么新的理解矩阵运算方式。

$$A = Q \wedge Q^T = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \dots & & \dots & \\ 0 & & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1{}^T \\ q_2{}^T \\ \dots \\ q_n{}^T \end{bmatrix}$$

而我们以前学习过，矩阵乘法还可以用列乘行，再相加方式计算，这里我们使用这种计算方式。中间的对角阵可以理解为常数，只要将$[q_1 \quad \cdots \quad q_n]\begin{bmatrix} q_1 \\ \cdots \\ q_n \end{bmatrix}$使用这种方式计算后相加，得到：

$$A = \lambda_1 q_1 q_1{}^T + \lambda_2 q_2 q_2{}^T + \dots$$

q_1是列向量，而这里由于$q_1 {q_1}^T$是单位向量，或者说${q_1}^T q_1$为 1，所以可将这些$q_i {q_i}^T$都改写为$q_i {q_i}^T / {q_1}^T q_1$，很明显，这是投影矩阵 A($A^T A)^{-1}$ A^T形式。而$q_i {q_i}^T$可以理解为向q_i方向投影的投影矩阵。

于是就有对于谱定理的另一理解角度：**每一个对称矩阵都是一些互相垂直的投影矩阵的线性组合。**

三. 正定矩阵简介

这一节中提前渗透一些正定矩阵的内容，了解即可，27,28 课会时对正定矩阵会进行详细叙述。

所谓正定矩阵就是一类对称矩阵，满足：

（1）所有的特征值是正数

（2）所有主元为正

（3）所有的子行列式都为正

注：

子行列式概念：

从原行列式左上角开始依次划分出 1x1 的一块,2x2 的一块，...得到的这些子块对应的行列式就称之为“子行列式”。

下面我们通过一个例题了解一下正定矩阵究竟有什么特别之处。

【例】矩阵$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

解：

对该矩阵消元，可求得其主元为：5、$\dfrac{11}{5}$皆为正。而且该矩阵是对称矩阵，所以它也是正定矩阵。

同时，我们计算它的特征值可以得到：$\lambda = 4 \pm \sqrt{5}$（同主元，皆为正）

所以正定矩阵的行列式值是正数，但是这里要注意，行列式为正数的矩阵不一定都是正定矩阵，要满足“所有的子行列式都为正”才可以。反例：$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

从主元到行列式再到特征值，这些性质就将本门课的主要内容很好地融合在了一起。这样一来，我们以前问题的探讨会方便很多。例如：矩阵的特征值就是计算微分方程时的关键条件。因为根据特征值的正负与否我们就知道其稳定与否。

四. 学习感悟

本节从对称矩阵入手，介绍了对称矩阵的一些基本性质，进而引出了正定矩阵。我们可以看到，正定矩阵将矩阵的特征值，主元，行列式都联系到了一起，这样一来很多东西就被大大简化了，之后学习正定矩阵时，我们会更好的体会到这一点。