线性代数

-5 课　转置-转换-向量空间 R

一、知识概要

本节我们再谈置换矩阵与转置矩阵，并介绍对称阵。之后便进入学习线代的关键所在：向量空间与子空间。

二．置换矩阵

2.1 置换矩阵回顾

所谓的置换矩阵 P，就是用来完成行交换的矩阵，更具体来讲，是行重新排列了的单位矩阵。例如 I 就是一个置换矩阵，只不过 I 对矩阵没影响。

那么对于 n 阶矩阵来说，有多少个置换矩阵呢？答案是：**n!种**，也就是将单位矩阵 I 各行重新排列后所有可能的情况数量。

置换矩阵另一个优点就是可逆，因为置换矩阵各行还原后可以得到单位矩阵。而且对于置换矩阵 P，有$PP^T = I$，即$P^{-1} = P^T$。这个性质其实很好理解，首先明确，P 是置换矩阵，所以 P 的每个列向量中只有一个分量是 1，其余分量均为 0。而既然要求$PP^{-1} = I$，那就说明 P 中每一行的行向量与P^{-1}中每一列的列向量的数量积为 1，意味着 P 中每一行的行向量与P^{-1}中每一列的列向量中分量 1 出现位置相同，这就意味着 P 与P^{-1}沿对角线对称，所以$\boldsymbol{P^{-1} = P^T}$

如：
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & .. & .. \\ 0 & .. & .. \\ 1 & .. & .. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & .. & .. \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{bmatrix}$$

2.2 置换矩阵的使用

在讲消元法的时候，主元位置为 0 是一件很让人头疼的事情，这时就需要置换矩阵 P 来完成行交换，确保消元过程顺利进行。上节课学习 A = LU 分解时，我们没有考虑要交换行的过程，如果我们想写出更普适的 LU 分解式的话，必须把行交换情况考虑进去，即：

$$PA = LU$$

先用行交换使得主元位置不为 0，行顺序正确。其后再用 LU 分解。

三. 转置矩阵

3.1 转置矩阵回顾

之前简单介绍过转置矩阵，即

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

用符号来表示就是对 A 矩阵以及A^T矩阵中每一个元素，都有：

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

也就是说，转置矩阵中，行元素与列元素交换了，理解转置很简单。

3.2 对称阵

对称矩阵，顾名思义，就是主对角线两侧元素对应相等的矩阵。或者说，对矩阵 A，如果有：

$$A^T = A$$

那么矩阵 A 就是一个对称矩阵。

例如：$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$

如何得到对称矩阵呢？很简单，矩阵 A 与A^T相乘得到的方阵一定是对称矩阵，因为我们从对称矩阵的定义来看，取$(A^TA)^T$，根据转置的运算规律，可知，$(AB)^T = B^TA^T$，所以有：

$$(A^TA)^T = A^TA^{TT} = A^TA$$

所以任何的A^TA，转置仍然是其本身，故为对称矩阵。

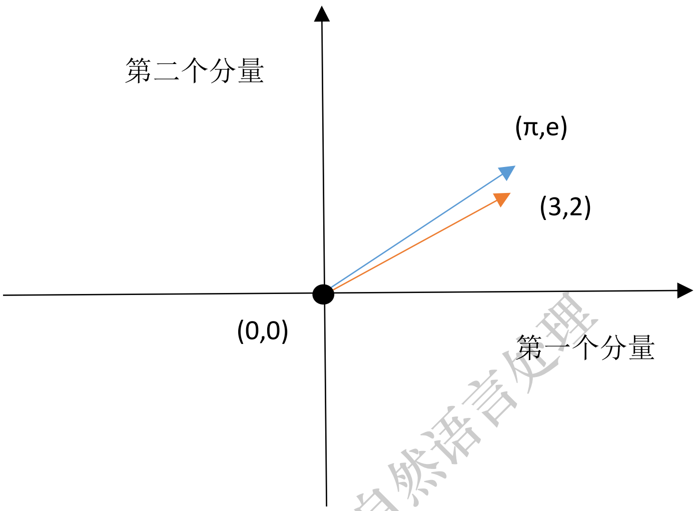
四、向量空间与子空间

4.1 向量空间

首先明确“向量空间”的概念，它表示一整个空间的向量，但是要注意，不是任意向量的集合都能被称为向量空间。所谓的向量空间，必须满足一定规则，就是：该空间**对线性运算（相加，数乘）封闭**。类似：v → 3v 或 v，w → v+w 运算，若得到的 3v 或者 v+w 都仍然在此空间中，那么这个空间可称为向量空间。

举个例子，R^2就是一个向量空间。其中的向量均为二维实向量。在R^2上就存在着线性组合，我们举例说明：

$\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}\pi\\e\end{bmatrix}$均在$R^2$的实数二维向量空间中，对它们做线性运算，得到的结果仍然在R^2空间中，反映在图像上：



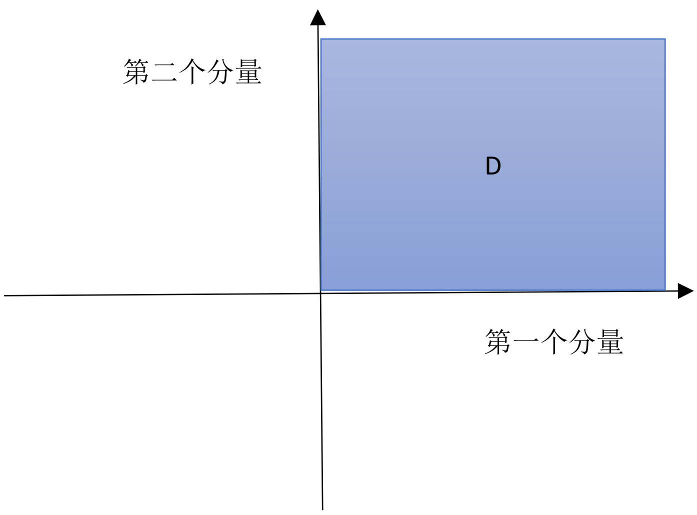
很明显，R^2的向量空间可以构成一个平面，即是上图中的 xoy 面。这个向量空间存在的关键在于上图中平面上任何向量都在R^2向量空间中。尤其是**零向量**。因为线性运算是“数乘”“相加”。任何向量乘上 0 或者加上其反向向量后得到的都是零向量，所以它必然存在于所有向量空间中。这一点十分重要。

同样，推广到R^3空间，R^3中是三维的向量，每个分量均为实数。例如$\begin{bmatrix}3\\2\\0\end{bmatrix}$，这样的向量就在$R^3$空间中。

再进行推广，R^n空间中包括所有的 n 维向量，每个列向量有 n 个分量，且分量均为实数。

再举一个不是向量空间的例子：

还是R^2空间中，但是这次我们只取第一象限内的区域 D：

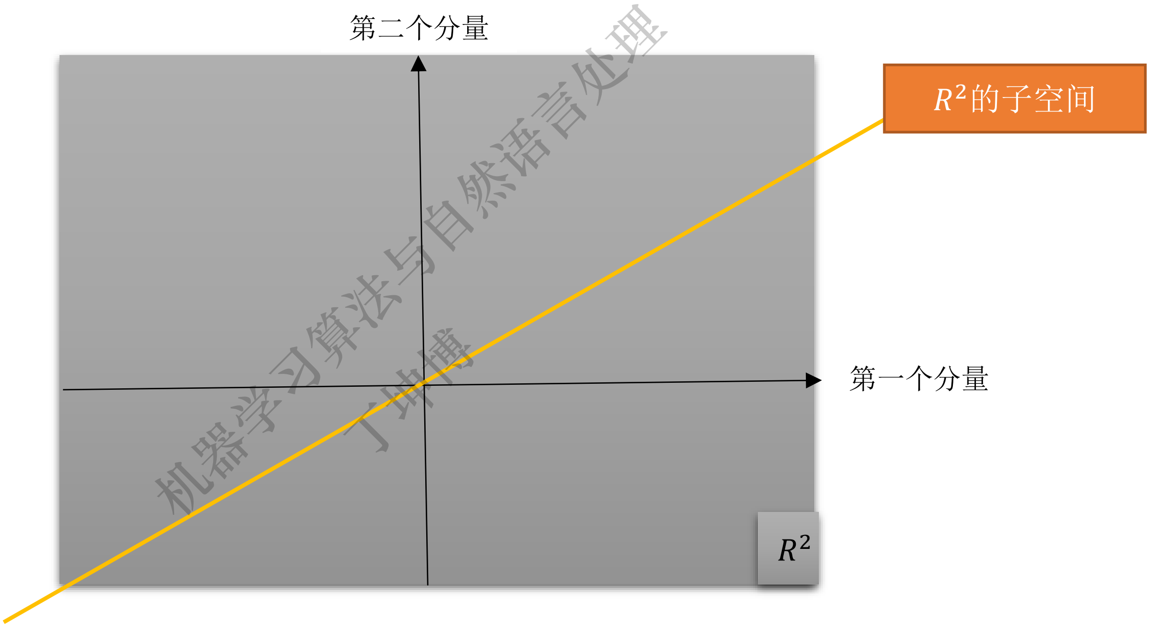


很明显，这部分空间无法满足“线性组合仍在空间中”的要求，比如数乘运算时，随便取个负数，向量就跑到第三象限去，脱离 D 空间范围内了。

4.2 子空间

上面的反例已经证明了。在向量空间里随便取其一部分，很可能得到的不是向量空间。那如果我们取向量空间的一部分，将其打乱，构成的有没有可能是向量空间呢？

答案是有的，这样还能构成向量空间的部分我们称之为子空间。还是以R^2为例：



如图，整个坐标平面表示的就是原向量空间R^2，而这条**穿过坐标原点**的直线就是R^2的子空间之一。检验一下这条直线上的任意向量，它们的“数乘”，“相加”运算结果全部都仍在这条直线上。这就构成了一个子空间。而如果这条直线不过原点，那就单说零向量都不在这个空间中，就更别谈什么子空间了。

那R^2空间中，还有没有其他的子空间呢？既然我们这么强调零向量，那就让它单独成一个空间好了。记为 Z，其中只有一个零向量。它也是R^2的子空间之一。

再稍稍推广一下，R^3的子空间就是如下三个：

（1） 穿过原点的平面
（2） 穿过原点的直线
（3） Z，原点。

4.3 列空间简要介绍

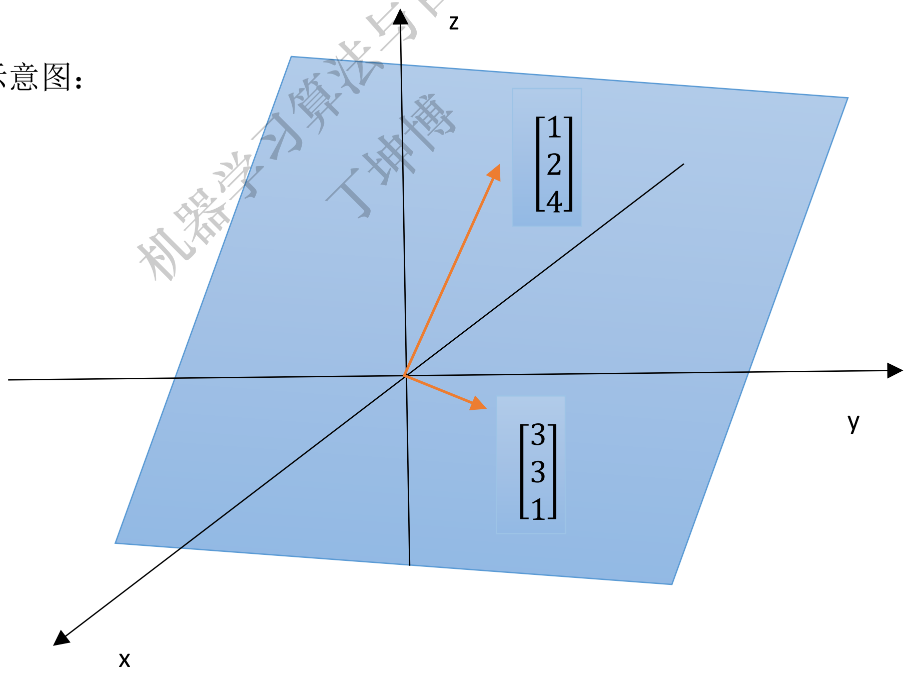
上面介绍的子空间都是基于已知的图像来寻找的，接下来我们来通过具体的**矩阵来构造出一个子空间**，比如：列向量构造出的列空间。

我们以 $A=\begin{bmatrix}1&3\\2&3\\4&1\end{bmatrix}$ 为例。

首先能看出来，各列向量$\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$ 均属于R^3。而且由这两个向量张开的子空间必须满足“线性运算封闭”这一性质。也就是说$\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$以及它们的线性组合构成了一个$R^3$的子空间，我们称之为：列空间。记为 C(A)。

因为$\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$不在同一条直线上，所以，这个列空间表现在图像上，就是一个过原点与这两个列向量的平面。

示意图：



两个向量 $\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$与$\begin{bmatrix}3\\3\\1\end{bmatrix}$以及它们的所有线性组合都在这个二维平面上，构成一个空间。这部分要好好理解，用教授的话说“R^3情况下还可以作图，但是更高维的类似于R^{10}情况你要怎么办？譬如求R^{10}空间中 5 个向量线性组合是什么样的？如果不共线，我们就可以类似地理解为一个十维空间中的五维平面之类的东西。”

这里还要注意列向量之间的性质，如果列向量之间就是共线的，那么其列空间就是一条过原点的直线。

五.学习感悟

这节算是结束了之前部分对基本运算和基本概念的介绍。介绍了向量空间和子空间，并由子空间引出了通过具体的列向量构成的空间—列空间。如何理解空间十分重要，本节中对低维的空间做了图，目的主要是便于我们理解“空间”这一概念。

-----by Dkb