

## 一、知识概要

本节为习题课，主要回顾了之前的学习内容，需要掌握经典题型的解法。

## 二、例题

### 【例 1】

设  $u, v, w$  是  $R^7$  空间内的非零向量，由他们生成了一个属于  $R^7$  的向量子空间，则此空间的维数是多少？

答案：

三个向量张开的空间，很明显维数只能是 0, 1, 2, 3。本题中维数不可能是 0，因为题设为非零向量。所以最后答案为：1, 2, 3。

### 【例 2】

有一个  $5 \times 3$  的阶梯形矩阵  $U$ ，秩为 3，求矩阵  $U$  的零空间。

答案：只有零向量

复习：

首先复习几个概念：

1) 零空间：

使得  $Ax = 0$  成立的所有解向量构成的空间。

2) 行阶梯矩阵：

在矩阵中可画出一条阶梯线，线的下方全为 0，每个台阶只有一行，台阶数即是非零行的行数，阶梯线的竖线（每段竖线的长度为一行）后面的第一个元素为非零元，也就是非零行的第一个非零元，

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{bmatrix}$$

3) 行最简形矩阵:

非零行的第一个非零元都为 1, 且这些非零元所在的列的其他元素都为 0。

$$\begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \color{red}{1} & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & \color{red}{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \color{red}{1} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4) 矩阵 A 右乘列向量的意义:

矩阵 A 右乘列向量可以理解为对 A 各列向量的线性组合。

**分析本题:**

由秩为 3 可知原矩阵的列向量线性无关, 也就是没有线性组合能得到零向量, 所以其零空间中只有零向量。

**【例 3】**

给定  $10 \times 3$  矩阵 B, B 中含有矩阵 R 和  $2R$ :  $B = \begin{bmatrix} R \\ 2R \end{bmatrix}$  (R 是行最简形矩阵)

问: 该矩阵的秩是多少? 其阶梯型矩阵又是怎样的?

**答案:**

利用分块矩阵思想, B 可化简为:  $\begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$ 。这就是 B 的阶梯型矩阵, 它的秩即为矩阵 R 的秩。

△进一步, 矩阵  $C = \begin{bmatrix} R & R \\ R & 0 \end{bmatrix}$  的行最简形是什么?

直接化简为行最简形矩阵:

$$\begin{bmatrix} R & R \\ R & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变化}} \begin{bmatrix} R & R \\ 0 & -R \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{提出}(-1)} \begin{bmatrix} R & R \\ 0 & R \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{行变化}} \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$$

**注意:** 严格意义上还应当将  $\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$  中  $R$  的下面零行移到最简形  $\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}$  整体的最下面一行, 这才是标准的行最简型矩阵。

△再进一步，已知 R 的秩为 3，求 C 的转置矩阵的零空间的维数？

知识回顾：矩阵的零空间的维数等于列数减去矩阵的秩 ( $n-r$ )，列满秩的矩阵对应零空间的维数为 0。

这里，C 为  $10 \times 6$  的矩阵，对应  $C^T$  为  $6 \times 10$  的矩阵， $n-r = 10 - (3+3)$ 。其零空间的维数为 4。

【例 4】

已知：  $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，  $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。求 A 的行向量的生成空间的维数。

分析：

- 首先，矩阵 A 的形状是怎样的？

由于  $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ，所以一定是  $A(3 \times 3)$  与  $x(3 \times 1)$  相乘得到的。由此可知矩阵 A 的形状是  $3 \times 3$  的。

- 那么，A 的秩是多少？

我们看零空间的维数为 2，所以  $(n-r) = 2$ 。而 A 的列数  $n = 3$ ，所以 A 的秩为 1。

- 下面作进一步讨论：A 矩阵到底是什么样的？

由通解 x 的形式，先将 c, d 均为 0 情况代入  $Ax = b$  方程。

$$A \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

这样计算之后可以得到 A 的第一列为  $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

而  $Ax = b$  的解形式中也包含了零空间  $Ax = 0$  的两个特解：  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ，  $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

直接代入方程  $Ax = 0$  就能解出来 A 的形式了。最终确定 A 的形式为：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

△引申问题：

既然  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ，那么当  $b$  满足何种形式时， $Ax = b$  有解

分析：

由之前几节的结论知道，当  $b$  属于矩阵的列空间时有解，所以，这里的实际问题是求矩阵  $A$  的列空间，即  $A$  列向量的线性组合。而对于  $A$  矩阵来说，相当于只有一列对线性组合有贡献。

答案：

$b$  向量应当满足以下形式：

$$b = c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c \text{ 为任意常数})$$

【例 5】

如果一个方阵  $A$  的零空间只包含零向量，那它转置矩阵的零空间呢？

答案：

也只包含零向量

【例 6】

5 阶可逆方阵是否构成向量空间？

答案：

否。因为连零矩阵都不包含在内，肯定不是向量空间。

【例 7】存在除零矩阵外的平方为零的矩阵吗？

答案：

存在，例如  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ （这个例子比较重要）

### 【例 8】

方阵的列线性无关， $Ax = b$  是否总是有解的？

分析：

因为矩阵列线性无关且其为方阵，故其可逆，我们之前介绍消元矩阵时说过，可逆矩阵是可以消元回代求解的。因此时  $Ax = b$  总是可解的。

### 【例 9】

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

先来研究一下 B 的零空间：

首先知道的是：由 B 是  $3 \times 4$  矩阵，有四个列向量。因此 B 的零空间必是  $R^4$  的子空间

除此之外，我们想一下，B 是由一个可逆矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  左乘上矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  得到的，那么我们在  $Ax = 0$  两侧同时左乘上  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  的逆矩阵，这样也不会影响到 B 零空间的求解。也就是说，B 的零空间求解只取决于这

个矩阵： $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，列式为： $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = 0$

引入结论：

假设有矩阵 C, D，当 C 可逆的时候， $N(CD) = N(D)$ 。

( $N(A)$  表示 A 的零空间)

原因：

可以对  $CDx = 0$  两侧同时乘上  $C^{-1}$

回到这道题，经过计算，或者直接使用介绍过的  $A = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  结论（第 7 课）

得到：

$$B \text{ 零空间的基为 } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

△ 求  $Bx = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  的通解

先分析其特解：

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 1 & * & * & * \end{bmatrix}$$

观察 B 的第一列，B 的第一列恰好就是等式右侧的 b:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

于是可以很快地写出一个特解:  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

注：

在  $Ax = b$  中，如果 b 与 A 中一个列向量相同，则我们都可以直接写出一个特解，即该列系数为 1，其余列系数为 0 的线性组合方式。

而零空间的基我们之前讨论过了，通解即已求出。

【例 10】如果矩阵是方阵，是否意味着矩阵的行空间等于列空间

答案：错误，反例：  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

【例 11】如果 A 与 B 的四个子空间相同，则 A 是 B 的倍数

答案：错误，例如：任意的可逆矩阵的四个子空间都相同。不一定非要成倍数。

【例 12】给定矩阵 A，交换其中的两行，哪些子空间没变？

答案：行空间与零空间

【例 13】为什么向量 (1, 2, 3) 不能既是 A 的某一行，又在 A 零空间中？

分析：

直接代入方程  $Ax = 0$  看一下就知道了：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

这不可能成立。

结论：

给定矩阵，其行空间与零空间共享的向量只能是零向量

(以后会提到：矩阵的零空间与行空间正交)

## 五. 学习感悟

这节复习结束，我们线性代数这一部分基础也结束了，接下来的课程会围绕正交，特征值等概念展开讨论。

机器学习算法与自然语言处理公众号  
丁坤博