线性代数

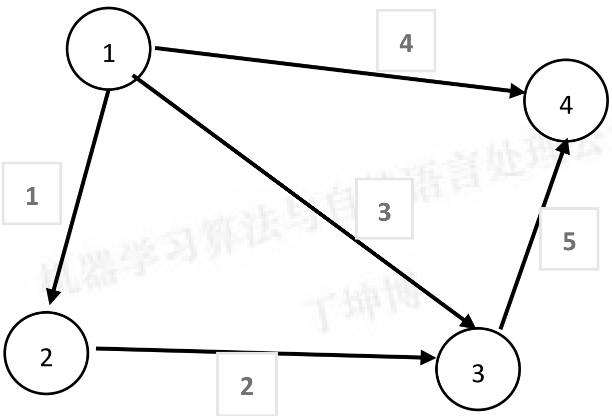
-12 课　矩阵应用：图与网络

一、知识概要

本节主要介绍图与矩阵之间的关联，利用矩阵说明图的特点。这一节与之前几节的区别主要在于，前面例子中的矩阵中的元素大都是为了说明性质编造出来的，而本节中矩阵中的元素都是来源于实际问题，更能体现出我们之前介绍的性质在实际问题中有什么作用。

二．图和关联矩阵

我们首先给出一个有向图（一）。



图(一)

本节中我们研究的问题都是基于这个与有向图来研究的。那么既然是有向图，我们不难写出它的关联矩阵 A 如下：

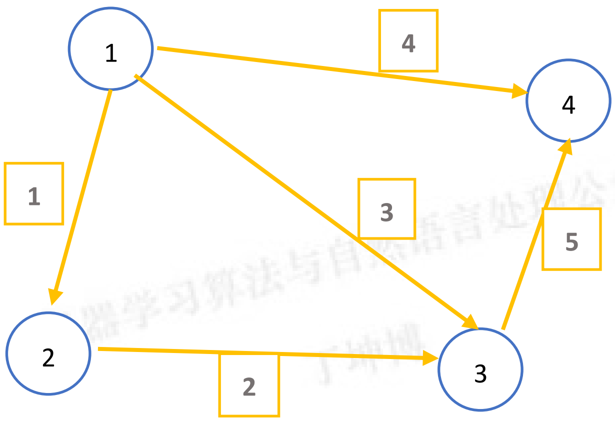
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

•可能有一些没接触离散数学的人会对关联矩阵不是很熟悉，我在这里简单介绍下，上面 5*4 矩阵中，每一列代表一个节点，比如：第一列代表结点 1，第二列代表结点 2..以此类推。而每一行代表的就是一条边的走势，同样，第一行代

表边 1 第二行代表边 2..等等。这里需要注意的是，每一行所代表的边，体现在这一行元素上，表现为：该边以哪一个结点为起点，对应的矩阵中该元素为-1，而以哪个结点为终点，对应矩阵中该元素为 1。

举个例子，我们看第一行，第一行代表边 1 的特点，图（一）中，边 1 以结点 1 为起始点，以结点 2 为终点，这反映在矩阵上就是$A_{11} = -1$，$A_{12} = 1$。以此类推。

$$\begin{array}{cc} & \text{结点 1~4} \\ \text{边 1~5} & \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$



很好，我们现在从实际问题中抽象出了一个矩阵，接下来我们来研究图（一）所代表的实际意义。

【例】我们假设 x 为每个结点上的电势，研究 Ax = b 形式下，可以得到些什么定律。

（1）首先来研究 b 是零向量，也就是 AX 构成的零空间情况，这时我们要求解的是 AX = 0。联系我们之前学过的知识，不难得到：

$$AX = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ X_3 - X_2 \\ X_3 - X_1 \\ X_4 - X_1 \\ X_4 - X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{解得：} x = C\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

由于 x 是各个节点上的电势，很明显，x 的解集代表了 b 是 0 时。各点电势必须相等。我们接下来考虑，这代表着什么。

我们都知道，电势差和电流的形成之间有着直接关系，b= 0，说明我们求解的情况是各个边上都没有电流(或者说电势差)的情况，而我们最后解得，各点电势相等时，边上电流为 0，符合我们的常识。

（2）b 如果不为 0，那么我们可以通过特解 + 通解的方式求出不同 b 的情况下，方程对应的解。代表着不同电势差情况下，各点电势的大小。

接下来我们看一下左零空间 $A^T\mathrm{y} = 0$ 会有什么特点：

首先，A 矩阵的转置为：

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

此时我们来解这个方程：

$$A^T\mathrm{y} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A 转置后行列互换，对应的 y 一共有五个分量，线性组合A^T的行。而A^T的行代表着 1~5 边，同【例】中的背景，我们这里求的就是流过每条边的电流。

求解方程，得到：

$$-y_1 - y_3 - y_4 = 0$$
$$y_1 - y_2 = 0$$
$$y_2 + y_3 - y_5 = 0$$
$$y_4 + y_5 = 0$$

注意上面的方程阐释了一个定律——基尔霍夫定律，即每个结点流入流出电流相同。这里的每个方程代表着一个节点的情况。我们最后解得的$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$，就是满足这个特点的各条边的电流值。

三、实际应用的扩展

注意到之前我们求解的 AX = $\begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ X_3 - X_2 \\ X_3 - X_1 \\ X_4 - X_1 \\ X_4 - X_3 \end{bmatrix}$，这代表了每两点之间的电势差。这个方程将图的特点（矩阵 A）与各点电势（x）联系了起来。

我们之后求的A^Ty = $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$，其中的$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix}$代表了各个边上的电流，联系电流与电势差，我们一下子就想到了初中学习的欧姆定律。电流与电压之间也存在着一个比例系数。我们假设这个数可以用矩阵 C 来表示。

也就是说有：$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ X_3 - X_2 \\ X_3 - X_1 \\ X_4 - X_1 \\ X_4 - X_3 \end{bmatrix}$ = CAX 。简记为 y = CAX。

这样，我们就将图像，电流，电势差这些概念都用矩阵表示了出来。

进一步扩展，我们在前面研究的A^Ty = 0 是无源场的情况，如果有外加电源，我们可以写作：A^Ty = f（f 代表外加电源的影响）。联系我们上一步得到的等式 y = CAX，就得到了教授最后写出的式子：A^T CAX = f。

四、学习感悟

这一节与之前联系较多，与实际应用联系也较大。从一个图出发，联系实际物理问题，解释了如何用矩阵阐述欧姆定律以及基尔霍夫定律的。学习过本节之后，我们才算真正明白了之前学习的各种空间具体到实际问题有什么作用。