拉格朗日插值

wxLiu925

2023 年 4 月 21 日

也是构造地思考

1 均差

称 $f[x_0, x_k] = \dfrac{f(x_k) - f(x_0)}{x_k - x_0}$ 为函数 $f(x)$ 关于点 x_0, x_k 的**一阶均差**

称 $f[x_0, x_1, x_k] = \dfrac{f[x_0, x_k] - f[x_0, x_1]}{x_k - x_1}$ 为函数 $f(x)$ 的**二阶均差**

以此类推, 称

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_k] = \frac{f[x_0, \cdots, x_{k-2}, x_k] - f[x_0, \cdots, x_{k-1}]}{x_k - x_{k-1}}$$

为 $f(x)$ 的 k 阶均差

2 牛顿插值多项式

一阶牛顿插值多项式为

$$P_1(x) = P_0(x) + f[x_0, x_1](x - x_0) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

其实把均差的定义带进去看一下就知道为什么这么构造了.

二阶牛顿插值多项式为

$$\begin{aligned} P_2(x) &= P_1(x) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \\ &= f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) \end{aligned}$$

以此类推, 得到

$$\begin{aligned} P_n(x) = &f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_2) + \cdots \\ &+ f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) \end{aligned}$$

对于 $f(x)$, 可以推得

$$f(x) = P_n(x) + f[x_0, x_1, \cdots, x_n](x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_n)$$