数字媒体技术基础

第四次作业--E3调整定理的证明

王信超 2201212814

E1、E2和E3调整定理

E1调整定理

当[a, b)区间包含于[0,0.5)时，此时最高位都是0，将a和b都左移一位并输出0，此时区间长度增加一倍即**E1**定理为：$E_1\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\2b\end{pmatrix}$

所**n**次的**E1**调整定理$(E_1)^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n a\\2^n b\end{pmatrix}$

E2调整定理

当[a, b)区间包含于[0.5,1)时，此时最高位都是1，将a和b都左移一位并输出1，此时区间长度同样增加一倍：$E_2\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a-1\\2b-1\end{pmatrix}$

所**n**次的**E2**调整定理$(E_2)^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n a-2^n+1\\2^n b-2^n+1\end{pmatrix}$

E3调整定理

E3调整定理是为了解决算数编码时，在low和high在0.5左右无限接近的情况下，其二进制高位始终不一样，无法使用E1算法或E2算法调整。

当区间在[0.25,0.75)且不满足E1或E2调整时，就需要将区间扩展到[0, 1)范围：$E_3(x)=2x-0.5$

在调整后暂不输出，直到遇到E1或E2调整时再补偿输出，补偿输出公式如下：

$$E_1\circ(E_3)^n=(E_2)^n\circ E_1$$
$$E_2\circ(E_3)^n=(E_1)^n\circ E_2$$

所以可以得到n次E3调整定理:

$$(E_3)^n\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n a-2^{n-1}+\frac{1}{2}\\2^n b-2^{n-1}+\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

E3调整定理的证明

对于E3调整定理的证明，我们需要证明两个等式，**第一个等式为:**

$$E_1\circ(E_3)^n=(E_2)^n\circ E_1$$

第二个等式为:

$$E_2 \circ (E_3)^n = (E_1)^n \circ E_2$$

下面将详细证明

等式1证明

计算等式左侧：

$$(E_1 \circ (E_3)^n) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E_1 \begin{pmatrix} 2^n a - 2^{n-1} + \frac{1}{2} \\ 2^n b - 2^{n-1} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (2^n a - 2^{n-1} + \frac{1}{2}) \\ 2 \cdot (2^n b - 2^{n-1} + \frac{1}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} a - 2^n + 1 \\ 2^{n+1} b - 2^n + 1 \end{pmatrix}$$

计算等式右侧：

$$((E_2)^n \circ E_1) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (E_2)^n \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \cdot 2a - 2^n + 1 \\ 2^n \cdot 2b - 2^n + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} a - 2^n + 1 \\ 2^{n+1} b - 2^n + 1 \end{pmatrix}$$

因此$E_1 \circ (E_3)^n = (E_2)^n \circ E_1$。

等式2证明

计算等式左侧：

$$(E_2 \circ (E_3)^n) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = E_2 \begin{pmatrix} 2^n a - 2^{n-1} + \frac{1}{2} \\ 2^n b - 2^{n-1} + \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n \cdot (2^n a - 2^{n-1} + \frac{1}{2}) - 1 \\ 2^n \cdot (2^n b - 2^{n-1} + \frac{1}{2}) - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} a - 2^n \\ 2^{n+1} b - 2^n \end{pmatrix}$$

计算等式右侧：

$$((E_1)^n \circ E_2) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (E_1)^n \begin{pmatrix} 2a - 1 \\ 2b - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n (2a - 1) \\ 2^n (2b - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} a - 2^n \\ 2^{n+1} b - 2^n \end{pmatrix}$$

因此$E_2 \circ (E_3)^n = (E_1)^n \circ E_2$。