绝密★启用前

2020-2021学年高一下学期数学期末考试模拟卷2（江苏专用）

一、单选题(共40分)

1．(本题5分)在 ABC 中，E 为 AC 上一点，$\overline{AC}=3\overline{AE}$，$P$ 为 BE 上任一点，若 $\overline{AP}=m\overline{AB}+n\overline{AC}(m>0,n>0)$，则 $\frac{3}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值是

A．9 **B．10**

C．11 **D．12**

【答案】D

【分析】

由题意结合向量共线的充分必要条件首先确定 m,n 的关系，然后结合均值不等式的结论整理计算即可求得最终结果.

【详解】

由题意可知：$\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AB}+3n\overrightarrow{AE}$，

P,B,E 三点共线，则：$m+3n=1$，据此有：

$$\frac{3}{m}+\frac{1}{n}=\left(\frac{3}{m}+\frac{1}{n}\right)(m+3n)=6+\frac{9n}{m}+\frac{m}{n}\geq 6+2\sqrt{\frac{9n}{m}\times\frac{m}{n}}=12,$$

当且仅当 $m=\frac{1}{2},n=\frac{1}{6}$ 时等号成立.

综上可得：$\frac{3}{m}+\frac{1}{n}$ 的最小值是12.

本题选择 D 选项.

【点睛】

本题主要考查三点共线的充分必要条件，均值不等式求最值的方法等知识，意在考查学生的转化能力和计算求解能力.

2．(本题5分)已知函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+\frac{1}{2}$，则下列结论正确的是

A．$f(x)$ 的最大值为1 **B．$f(x)$ 的最小正周期为 2π**

C．$y=f(x)$ 的图像关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称 **D．$y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{7\pi}{12},0\right)$ 对称**

【答案】C

【分析】

利用二倍角公式和辅助角公式化简得 f(x)的解析式，再利用三角函数函数性质考查各选项即可.

【详解】

函数 $f(x)=\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x\cos x+\frac{1}{2}=\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}=$

sin（$2x-\frac{\pi}{6}$）+1

对于 A：根据 f（x）＝sin（$2x-\frac{\pi}{6}$）+1 可知最大值为 2；则 A 不对；

对于 B：f（x）＝sin（$2x-\frac{\pi}{6}$）+1，T＝π则 B 不对；

对于 C：令 $2x-\frac{\pi}{6}=kp+\frac{p}{2},\backslash\ x=\frac{kp}{2}+\frac{p}{3},k\ \hat{I}\ Z$，故图像关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称则 C 正确；

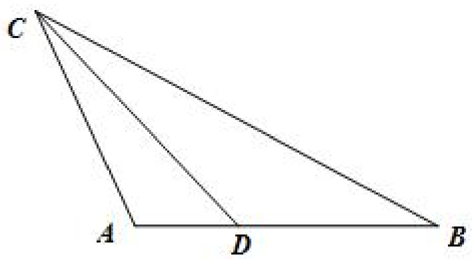
对于 D：令 $2x-\frac{\pi}{6}=kp,\backslash\ x=\frac{kp}{2}+\frac{p}{12},k\ \hat{I}\ Z$，故 $y=f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{7\pi}{12},1\right)$ 对称则 D 不对．

故选 C．

【点睛】

本题主要考查三角函数的图象和性质，利用三角函数公式将函数进行化简是解决本题的关键．

3．(本题 5 分)如图， ABC **中，角** C **的平分线** CD **交边** AB **于点** D**，** $\angle A=\frac{2\pi}{3}$**，** $AC=2\sqrt{3}$**，** $CD=3\sqrt{2}$**，则** $BC=$ **（　　）**



A． $3\sqrt{3}$　　　　**B．** 4　　　　**C．** $4\sqrt{2}$　　　　**D．** 6

【答案】D

【分析】

$\triangle ACD$ 中由正弦定理求得 $\angle ADC$ 后可得 $\angle ACD$，从而得 $\angle ACB$，B 角，得 AB，用余弦定理可得 BC．

【详解】

在$\triangle ACD$中，根据正弦定理得$\sin\angle ADC=\dfrac{AC\cdot\sin A}{CD}=\dfrac{2\sqrt{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

由$\angle ADC<\angle A$，

所以$\angle ADC=\dfrac{\pi}{4}$，

所以$\angle ACD=\pi-\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\pi}{12}$，

所以$\angle ACB=\dfrac{\pi}{6}$，则$\angle B=\dfrac{\pi}{6}$，

所以$AB=AC=2\sqrt{3}$，

在　ABC中，由余弦定理得$BC^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2-2\times2\sqrt{3}\times2\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=36$，

所以$BC=6$.

故选：D.

【点睛】

关键点点睛：本题主要考查正弦定理，余弦定理，特殊角的三角函数值等基础知识，解题时对照已知条件选用恰当的公式进行计算．如先在$\triangle ACD$中选用正弦定理求得两边中另一边的对角，可得三角形的第三角，这样图形听所有角都已知，然后再求选用公式求边．本题也可以不用余弦定理求边BC.

4．(本题5分)从装有2个红球和2个白球的口袋内任取2个球，那么互斥而不对立的两个事件是（　　）

A．“至少有1个白球”和“都是红球”

B．“至少有2个白球”和“至多有1个红球”

C．“恰有1个白球” 和“恰有2个白球”

D．“至多有1个白球”和“都是红球”

【答案】C

【分析】

结合互斥事件与对立事件的概念,对选项逐个分析可选出答案.

【详解】

对于选项A,“至少有1个白球”和“都是红球”是对立事件,不符合题意;

对于选项B,“至少有2个白球”表示取出2个球都是白色的,而“至多有1个红球”表示取出的球1个红球1个白球,或者2个都是白球,二者不是互斥事件,不符合题意;

对于选项C,“恰有1个白球”表示取出2个球1个红球1个白球,与“恰有2个白球”是互

斥而不对立的两个事件,符合题意;

对于选项 D,“至多有 1 个白球”表示取出的 2 个球 1 个红球 1 个白球,或者 2 个都是红球,与“都是红球”不是互斥事件,不符合题意.

故选 C.

【点睛】

本题考查了互斥事件和对立事件的定义的运用,考查了学生对知识的理解和掌握,属于基础题.

5．(本题 5 分)关于直线m、n与平面α、β，有以下四个命题：

①若$m//\alpha$，$n//\beta$且$\alpha//\beta$，则$m//n$；

②若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$且$\alpha\perp\beta$，则$m\perp n$；

③若$m\perp\alpha$，$n//\beta$且$\alpha//\beta$，则$m\perp n$；

④若$m//\alpha$，$n\perp\beta$且$\alpha\perp\beta$，则$m//n$.

其中真命题的序号是（　　）

A．①②　　**B．**③④　　**C．**①④　　**D．**②③

【答案】D

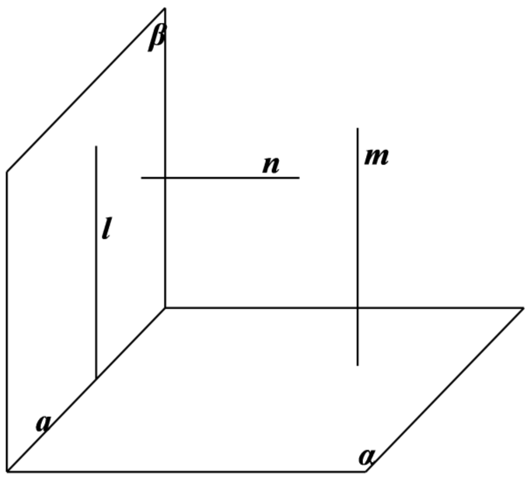
【分析】

根据①②③④中的已知条件判断直线m、n的位置关系，可判断①②③④的正误.

【详解】

对于①，若$m//\alpha$，$n//\beta$且$\alpha//\beta$，则m与n平行、相交或异面，①错误；

对于②，如下图所示：



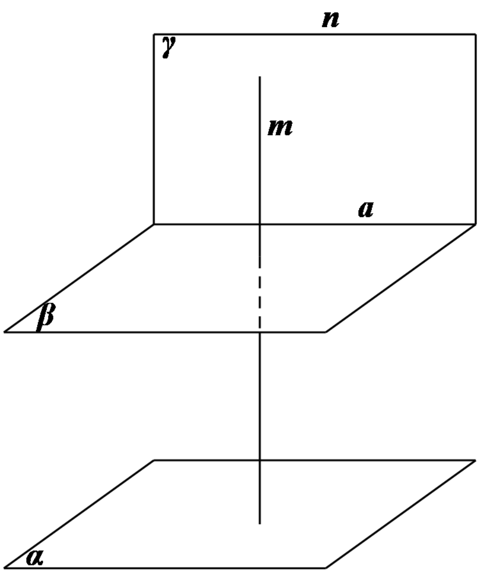
设$\alpha\cap\beta=a$，因为$\alpha\perp\beta$，在平面β内作直线$l\perp a$，由面面垂直的性质定理可知

$l \perp \alpha$，

$\because m \perp \alpha$，$\therefore m // l$，$\because n \perp \beta$，$l \subset \beta$，$\therefore n \perp l$，因此，$m \perp n$，②正确；

对于③，若 $m \perp \alpha$，$\alpha // \beta$，则 $m \perp \beta$，

因为 $n // \beta$，过直线 n 作平面 γ 使得 $\beta \cap \gamma = a$，由线面平行的性质定理可得 $n // a$，



$\because m \perp \beta$，$a \subset \beta$，则 $m \perp a$，因此 $m \perp n$，③正确；

对于④，若 $m // \alpha$，$n \perp \beta$ 且 $\alpha \perp \beta$，则 m 与 n 平行、相交或异面，④错误.

故选：D.

【点睛】

方法点睛：对于空间线面位置关系的组合判断题，解决的方法是"推理论证加反例推断"，即正确的结论需要根据空间线面位置关系的相关定理进行证明，错误的结论需要通过举出反例说明其错误，在解题中可以以常见的空间几何体（如正方体、正四面体等）为模型进行推理或者反驳.

6．(本题 5 分)四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，侧面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$，$\angle APD = 120^\circ$，$AB = PA = PD = 2$，则该四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的体积为（　　）

A． $\dfrac{32\pi}{3}$　　**B．** $\dfrac{20\sqrt{5}\pi}{3}$　　**C．** $8\sqrt{6}\pi$　　**D．** 36π

【答案】B

【分析】

如图，设 $ABCD$ 的中心为 O'，球心为 O，则 $O'B = \dfrac{1}{2}BD = 2$，设 O 到平面 $ABCD$ 的

距离为 d，则 $R^2=d^2+2^2=2^2+(2-d)^2$，求出 R 的值，即可求出四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的体积

【详解】

取 AD 的中点 E，连接 PE，PAD 中，$\angle APD=120^\circ, PA=PD=2$

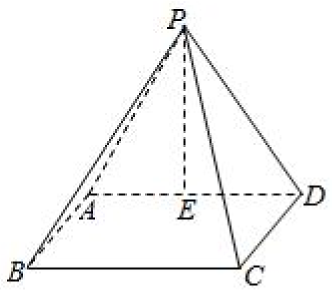
$\therefore PE=1$，$AD=2\sqrt{3}$，设 $ABCD$ 的中心为 O'，球心为 O，则 $O'B=\frac{1}{2}BD=2$，

设 O 到平面 $ABCD$ 的距离为 d，则 $R^2=d^2+2^2=2^2+(2-d)^2$，

$\therefore d=1, R=\sqrt{5}$，

$\therefore$ 四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球的体积为 $\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{20\sqrt{5}}{3}\pi$.

故选：B.



【点睛】

此题考查求四棱锥外接球的体积，考查学生的计算能力，考查空间想象能力，属于中档题

7．(本题 5 分)某公司 10 位员工的月工资（单位：元）为 x_1，x_2，…，x_{10}，其均值和方差分别为 $\overline{x}$ 和 s^2，若从下月起每位员工的月工资增加 100 元，则这 10 位员工下月工资的均值和方差分别为

A． $\overline{x}$，s^2+100^2　　　**B．** $\overline{x}+100$，s^2+100^2

C． $\overline{x}$，s^2　　　**D．** $\overline{x}+100$，s^2

【答案】D

【详解】

试题分析：均值为 $\frac{\overline{x}\times10+100\times10}{10}=\overline{x}+100$；

方差为

$$\frac{1}{10}\left\{\left[\left(\bar{x}+100\right)-\left(x_1+100\right)\right]^2+\left[\left(\bar{x}+100\right)-\left(x_2+100\right)\right]^2+\ldots+\left[\left(\bar{x}+100\right)-\left(x_{10}+100\right)\right]^2\right\}=$$

$\frac{1}{10}\left[\left(\bar{x}-x_1\right)^2+\left(\bar{x}-x_2\right)^2+\ldots+\left(\bar{x}-x_{10}\right)^2\right]=s^2$,故选 D.

考点：数据样本的均值与方差.

8．(本题 5 分)在 ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $c=2\sqrt{5}$，且

$2a\sin C\cos B=a\sin A-b\sin B+\frac{\sqrt{5}}{2}b\sin C$，**点 O 满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，**

$\cos\angle CAO=\frac{3}{8}$，**则 ABC 的面积为**

A． $\frac{\sqrt{55}}{3}$　　**B．** $3\sqrt{5}$　　**C．** $5\sqrt{2}$　　**D．** $\sqrt{55}$

【答案】 D

【分析】

运用正弦定理和余弦定理将角统一成边，再利用向量的数量积运算和三角形的面积公式结合求解.

【详解】

由 $2a\sin C\cos B=a\sin A-b\sin B+\frac{\sqrt{5}}{2}b\sin C$，

可得 $2ac\times\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=a^2-b^2+\frac{\sqrt{5}}{2}bc$，即 $c=\frac{\sqrt{5}}{2}b$. 又 $c=2\sqrt{5}$，所以 $b=4$.

因为 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，所以点 O 为 ABC 的重心，

所以 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AO}$，所以 $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{AC}$，

两边平方得 $|\overrightarrow{AB}|^2=9|\overrightarrow{AO}|^2-6|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|\cos\angle CAO+|\overrightarrow{AC}|^2$.

因为 $\cos\angle CAO=\frac{3}{8}$，所以 $|\overrightarrow{AB}|^2=9|\overrightarrow{AO}|^2-6|\overrightarrow{AO}||\overrightarrow{AC}|\times\frac{3}{8}+|\overrightarrow{AC}|^2$，

于是 $9|\overrightarrow{AO}|^2-9|\overrightarrow{AO}|-4=0$，所以 $|\overrightarrow{AO}|=\frac{4}{3}$，

$\triangle AOC$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times|\overrightarrow{AO}|\times|\overrightarrow{AC}|\times\sin\angle CAO=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\times4\times\sqrt{1-\left(\frac{3}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{55}}{3}$.

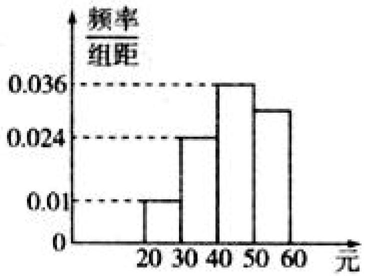
因为 ABC 的面积是 $\triangle AOC$ 面积的 3 倍.故 ABC 的面积为 $\sqrt{55}$.

【点睛】

本题关键在于运用向量的平方可以转化到向量的夹角的关系，再与三角形的面积公式相结合求解，属于难度题.

二、多选题(共 20 分)

9．(本题 5 分)（多选题）某学校为了调查学生在一周生活方面的支出情况，抽出了一个容量为 n 的样本，其频率分布直方图如图所示，其中支出在 $[50,60)$ 元的学生有 60 人，则下列说法正确的是（　　）



A．样本中支出在 $[50,60)$ 元的频率为 0.03

B．样本中支出不少于 40 元的人数为 132

C．n 的值为 200

D．若该校有 2000 名学生，则定有 600 人支出在 $[50,60)$ 元

【答案】BC

【分析】

根据频率分布直方图求出每组的频率，补齐第四组的频率，结合频数与频率和样本容量的关系即可判定.

【详解】

样本中支出在 $[50,60)$ 元的频率为 $1-(0.01+0.024+0.036)\times 10=0.3$，故 A 错误；

样本中支出不少于 40 元的人数为 $\dfrac{0.036}{0.03}\times 60+60=132$，故 B 正确；

$n=\dfrac{60}{0.3}=200$，故 n 的值为 200，故 C 正确；

若该校有 2000 名学生，则可能有 $0.3\times 2000=600$ 人支出在[50，60）元，故 D 错误.

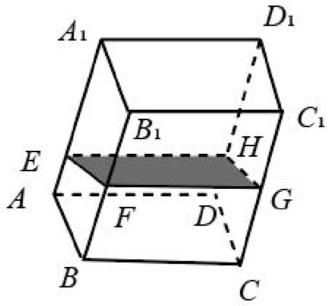
故选：BC.

【点睛】

此题考查根据频率分布直方图求每组的频率，补齐频率分布直方图，用数据特征估计总体的特征.

10．(本题 5 分)如图，在透明塑料制成的长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 容器内灌进一些水，

将容器底面一边 **BC** 固定于地面上，再将容器倾斜，随着倾斜度的不同，有下列四个说法中正确的是（　　）



A．水的部分始终呈棱柱状；

B．水面四边形 *EFGH* 的面积不改变；

C．棱 A_1D_1 始终与水面 *EFGH* 平行；

D．当 $E\in AA_1$ 时，$AE+BF$ 是定值．

【答案】ACD

【分析】

从棱柱的特征平面可判断 A；由水是四棱柱或者五棱柱或者三棱柱时可判断 B；

由 $B_1C_1//$ 平面 $EFGH$，棱 $B_1C_1//A_1D_1$ 可判断 C；由体积是定值，高 BC 为定值，则底面积 $EABF$ 为定值，可判断 D.

【详解】

由于 BC 固定，所以倾斜的过程中，始终有 $AD//EH//FG//BC$，

且平面 $AEFB//$ 平面 $DHGC$，故水的部分始终呈现棱柱状（三棱柱、四棱柱、五棱柱）；当水是四棱柱或者五棱柱时，水面面积与上下底面面积相等，当水是三棱柱时，则水面四边形 $EFGH$ 的面积可能变大，也可能变小，水面的面积改变；

BC 为棱柱的一条侧棱，随着倾斜度的不同，　但水的部分始终呈棱柱状，

且棱 $B_1C_1//$ 平面 $EFGH$，棱 $B_1C_1//A_1D_1$，$\therefore A_1D_1//$ 平面 $EFGH$；

$\because$ 体积是定值，高 BC 为定值，则底面积 $EABF$ 为定值，

即 $EA+BF$ 为定值，

综上 ACD 正确．

故选：ACD.

【点睛】

方法点睛：本题考查了线面平行的判定、棱柱的结构特征，对于证明线线关系，线面关系，面面关系等方面的问题，必须在熟练掌握有关的定理和性质的前提下，再利用已知来进行证明，对于棱柱的结构特征要非常熟悉.

11．(本题 5 分)已知函数 $f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\frac{1}{2}$，则以下说法中正确的是

（　　）

A． $f(x)$ **的最小正周期为** π　　　　**B．** $f(x)$ **在** $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ **上单调递减**

C． $\left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ **是** $f(x)$ **的一个对称中心**　　　　**D．** $f(x)$ **的最大值为** $\frac{1}{2}$

【答案】 ABC

【分析】

利用三角恒等变换思想化简 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$，利用正弦型函数的周期公式可判断 A 选项的正误，利用正弦型函数的单调性可判断 B 选项的正误，利用正弦型函数的对称性可判断 C 选项的正误，利用正弦型函数的有界性可判断 D 选项的正误.

【详解】

$\because \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\right]=\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$，

所以，

$$f(x)=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}$$

.

对于 A 选项，函数 $f(x)$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，A 选项正确；

对于 B 选项，当 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ 时，$\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{3}\le\frac{3\pi}{2}$，

此时，函数 $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{12},\frac{7\pi}{12}\right]$ 上单调递减，B 选项正确；

对于 C 选项，$\because f\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2\times\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sin 2\pi+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，

所以，$\left(\frac{5\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$ 是 $f(x)$ 的一个对称中心，C 选项正确；

对于 D 选项，$f(x)_{\max}=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}=1$，D 选项错误.

故选：ABC.

【点睛】

方法点睛：求较为复杂的三角函数的单调区间时，首先化简成 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 形式，再求 $y=A\sin\left(\omega x+\varphi\right)$ 的单调区间，只需把 $\omega x+\varphi$ 看作一个整体代入 $y=\sin x$ 的相应单调区间内即可，注意要先把 ω 化为正数.

12．(本题 5 分)有下列说法其中正确的说法为

A．若 $\vec{a}\ \ \vec{b}$，$\vec{b}\ \ \vec{c}$，则 $\vec{a}\ \ \vec{c}$；

B．若 $2\overline{OA}+\overline{OB}+3\overline{OC}=\vec{0}$，$S_{\Delta AOC}$，$S_{\Delta ABC}$ 分别表示 ΔAOC，ΔABC 的面积，则 $S_{\Delta AOC}:S_{\Delta ABC}=1:6$；

C．两个非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，若 $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线且反向；

D．若 $\vec{a}\ \ \vec{b}$，则存在唯一实数 λ 使得 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$

【答案】BC

【分析】

A 选项错误，例如 $\vec{b}=\vec{0}$，推不出 $\vec{a}//\vec{c}$，B 选项利用向量可确定 O 点位置，可知 O 到 AC 的距离等于 B 到 AC 距离的 $\frac{1}{6}$,故正确，C 选项两边平方根据向量的数量积的性质可知夹角为 π，结论正确，D 选项错误，例如 $\vec{b}=\vec{0}$.

【详解】

A 选项错误，例如 $\vec{b}=\vec{0}$，推不出 $\vec{a}//\vec{c}$，B 选项,设 AC 的中点为 M, BC 的中点为 D, 因为 $2\overline{OA}+\overline{OB}+3\overline{OC}=\vec{0}$,所以 $2\times2\overline{OM}+2\overline{OD}=\vec{0}$,即 $2\overline{OM}=-\overline{OD}$,所以 O 是 MD 的三等分点，可知 O 到 AC 的距离等于 D 到 AC 距离的 $\frac{1}{3}$,而 B 到 AC 的距离等于 D 到 AC 距离的 2 倍，故可知 O 到 AC 的距离等于 B 到 AC 距离的 $\frac{1}{6}$，根据三角形面积公式可知正确，C 选项两边平方可得 $-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2|\vec{a}||\vec{b}|$，所以 $\cos<\vec{a},\vec{b}>=-1$，即夹角为 π，结论正确，D 选项错误，例如 $\vec{b}=\vec{0}$. 故选 B C.

【点睛】

本题主要考查了向量共线，向量的夹角，向量的数量积，向量的线性运算，属于中档题.

第 II 卷（非选择题）

请点击修改第 II 卷的文字说明

三、填空题(共 20 分)

13．(本题 5 分)已知 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=-\dfrac{2}{3}$，则 $\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$ 的值是_____.

【答案】$\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

【分析】

由题意首先求得 $\tan\alpha$ 的值，然后利用两角和差正余弦公式和二倍角公式将原问题转化为齐次式求值的问题，最后切化弦求得三角函数式的值即可.

【详解】

由 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\tan\alpha}{\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}}=\dfrac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+1}=-\dfrac{2}{3}$，

得 $3\tan^2\alpha-5\tan\alpha-2=0$，

解得 $\tan\alpha=2$，或 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$.

$$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\sin2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos2\alpha\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin2\alpha+\cos2\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\tan\alpha+1-\tan^2\alpha}{\tan^2\alpha+1}\right),$$

当 $\tan\alpha=2$ 时，上式 $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{2\times2+1-2^2}{2^2+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$；

当 $\tan\alpha=-\dfrac{1}{3}$ 时，上式 $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{2\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)+1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2}{\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2+1}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

综上，$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

【点睛】

本题考查三角函数的化简求值，渗透了逻辑推理和数学运算素养.采取转化法，利用分类讨论和转化与化归思想解题.

14．(本题 5 分)从一堆产品(正品与次品都多于 2 件)中任取 2 件，观察正品件数和次

品件数，则下列说法：

①“恰好有 1 件次品”和“恰好 2 件都是次品”是互斥事件

②“至少有 1 件正品”和“全是次品”是对立事件

③“至少有 1 件正品”和“至少有 1 件次品”是互斥事件但不是对立事件

④“至少有 1 件次品”和“全是正品”是互斥事件也是对立事件

其中正确的有______(填序号).

【答案】①②④

【分析】

运用不能同时发生的两个事件为互斥事件，如果两个事件为互斥事件，且其中必有一个发生，即为对立事件，对选项一一判断，即可得到正确结论.

【详解】

①“恰好有 1 件次品”和“恰好 2 件都是次品”不能同时发生，是互斥事件，故① 正确；

②“至少有 1 件正品”和“全是次品”，不能同时发生，是互斥事件也是对立事件，故②正确；

③“至少有 1 件正品”和“至少有 1 件次品”存在恰有一件正品和一件次品，

不是互斥事件但不是对立事件，故③ 不正确；

④“至少有 1 件次品”和“全是正品”不能同时发生，是互斥事件也是对立事件，④ 正确.

故答案为①②④ .

【点睛】

本题考查命题的真假判断，主要是互斥事件和对立事件的判断，考查判断和分析能力，属于基础题.

15．(本题 5 分)已知圆锥的顶点为S，母线 SA，SB 所成角的余弦值为 $\frac{7}{8}$，SA 与圆锥底面所成角为 45°，若 SAB 的面积为 $5\sqrt{15}$，则该圆锥的侧面积为_________.

【答案】$40\sqrt{2}\pi$

【详解】

分析：先根据三角形面积公式求出母线长,再根据母线与底面所成角得底面半径，最后根据圆锥侧面积公式求结果.

详解：因为母线SA，SB所成角的余弦值为$\frac{7}{8}$，所以母线SA，SB所成角的正弦值为$\frac{\sqrt{15}}{8}$，因为 SAB的面积为$5\sqrt{15}$，设母线长为l,所以$\frac{1}{2}\times l^2\times\frac{\sqrt{15}}{8}=5\sqrt{15}\therefore l^2=80$，

因为SA与圆锥底面所成角为45°，所以底面半径为$l\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}l$,

因此圆锥的侧面积为$\pi rl=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi l^2=40\sqrt{2}\pi.$

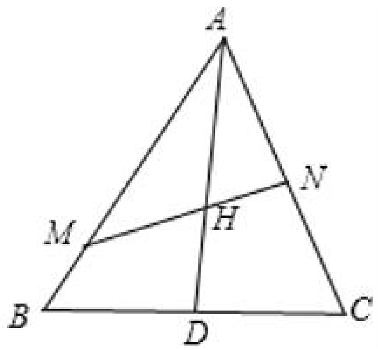
16. (本题5分)在ΔABC中，D是BC的中点，H是AD的中点，过点H作一直线MN分别与边AB，AC交于M,N，若$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，其中$x,y\in R$，则$x+4y$的最小值是_____.

【答案】$\frac{9}{4}$

【分析】

根据题意，画出图形，结合图形，利用$\overrightarrow{MH}$与$\overrightarrow{NH}$共线，求出x与y的表达式再利用基本不等式求出$x+4y$的最小值即可.

【详解】



ΔABC中，D为BC边的中点，H为AD的中点，

且$\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AN}=y\overrightarrow{AC}$，

$\therefore\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MH}=x\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$，

$\therefore\overrightarrow{MH}=\left(\frac{1}{4}-x\right)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$，

同理，$\overrightarrow{NH}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\left(\frac{1}{4}-y\right)\overrightarrow{AC}$，

又$\overrightarrow{MH}$与$\overrightarrow{NH}$共线，

$\therefore$ 存在实数 λ，使 $\overline{MH}=\lambda\overline{NH}\left(\lambda<0\right)$，

即 $\left(\frac{1}{4}-x\right)\overline{AB}+\frac{1}{4}\overline{AC}=\lambda\left[\frac{1}{4}\overline{AB}+\left(\frac{1}{4}-y\right)\overline{AC}\right]$，

$\therefore\begin{cases}\frac{1}{4}-x=\frac{1}{4}\lambda\\ \frac{1}{4}=\left(\frac{1}{4}-y\right)\lambda\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=\frac{1}{4}(1-\lambda)\\ y=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\end{cases}$，

$\therefore x+4y=\frac{1}{4}(1-\lambda)+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)$

$=-\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{-\lambda}+\frac{5}{4}\geq 2\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\lambda\right)\cdot\frac{1}{-\lambda}}+\frac{5}{4}=\frac{9}{4}$，

当且仅当 $\lambda=-2$ 时，“=”成立，故答案为 $\frac{9}{4}$.

【点睛】

本题主要考查向量的几何运算及基本不等式的应用，属于难题. 向量的运算有两种方法，一是几何运算往往结合平面几何知识和三角函数知识解答，运算法则是：（1）平行四边形法则（平行四边形的对角线分别是两向量的和与差）；（2）三角形法则（两箭头间向量是差，箭头与箭尾间向量是和）；二是坐标运算：建立坐标系转化为解析几何问题解答（求最值与范围问题，往往利用坐标运算比较简单）.

四、解答题(共 70 分)

17．(本题 10 分)在复平面内，复数 $z=a^2-a-2+(a^2-3a-4)i$ （其中 $a\in R$）．

（1）若复数 z 为实数，求 a 的值；

（2）若复数 z 为纯虚数，求 a 的值；

（3）对应的点在第四象限，求实数 a 的取值范围．

【答案】（1）$a=-1$ 或 4；（2）$a=2$；（3）$\left(2,4\right)$

【分析】

（1）根据复数为实数条件列方程解得结果，（2）根据纯虚数定义列式求解，（3）根据复数几何意义列不等式解得结果

【详解】

（1）因为复数 z 为实数，所以 $a^2-3a-4=0$，

所以 $a=-1$ 或 4；

（2）因为复数 z 为纯虚数，所以 $\begin{cases} a^2-a-2=0 \\ a^2-3a-4\neq 0 \end{cases}$，

所以 $a=2$

（3）因为 z 对应的点在第四象限，所以 $\begin{cases} a^2-a-2>0 \\ a^2-3a-4<0 \end{cases}$

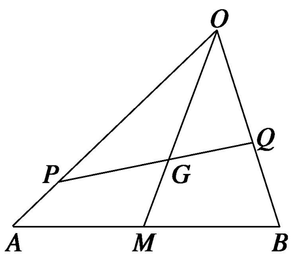
解不等式组得，$2<a<4$，

即 a 的取值范围是 $(2,4)$.

【点睛】

本题考查复数相关概念以及复数几何意义，考查基本分析求解能力，属基础题.

18．(本题 12 分)如图，G 是△OAB 的重心，P，Q 分别是边 OA、OB 上的动点，且 P，G，Q 三点共线．



(1)设 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PQ}$，将 $\overrightarrow{OG}$ 用 λ，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ 表示；

(2)设 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=y\overrightarrow{OB}$，证明：$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ 是定值．

【答案】（1）见解析；（2）见解析

【分析】

（1）寻找包含 $\overrightarrow{OG}$ 的图形 OPG，利用向量的加法法则知 $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PG}$，再根据 $\overrightarrow{PG}=\lambda\overrightarrow{PQ}$ 和 $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$ 即可

（2）根据（1）结合 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=y\overrightarrow{OB}$ 知：

$\overrightarrow{OG}=(1-\lambda)\overrightarrow{OP}+\lambda\overrightarrow{OQ}=(1-\lambda)x\overrightarrow{OA}+\lambda y\overrightarrow{OB}$，再根据 G 是 OAB 的重心知：

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$，最后根据 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 不共线得到关于 x，y，λ 的方程组即可求解

【详解】

(1)解　$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PG}=\overrightarrow{OP}+\lambda\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OP}+\lambda(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})=(1-\lambda)\overrightarrow{OP}+\lambda\overrightarrow{OQ}$.

(2)证明　一方面，由(1)，得

$\overrightarrow{OG}=(1-\lambda)\overrightarrow{OP}+\lambda\overrightarrow{OQ}=(1-\lambda)x\overrightarrow{OA}+\lambda y\overrightarrow{OB}$；①

另一方面，∵G 是△OAB 的重心，∴$\overrightarrow{OG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OM}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$.②

而$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$不共线，∴由①②，得$\begin{cases}(1-\lambda)x=\frac{1}{3},\\ \lambda y=\frac{1}{3}.\end{cases}$解得$\begin{cases}\frac{1}{x}=3-3\lambda,\\ \frac{1}{y}=3\lambda.\end{cases}$

∴$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=3$(定值).

【点睛】

本题考查了向量的加减法，三角形的重心的性质，平面向量的定值问题，属于基础题.

19．(本题 12 分)在△*ABC* 中，角 *A*，*B*，*C* 所对的边分别为 *a*，*b*，*c*，满足

$(2b-c)\cos A=acosC$.

（1）求角 *A*；

（2）若 $a=\sqrt{13}$，$b+c=5$，求△*ABC* 的面积.

【答案】（1）$A=\frac{\pi}{3}$；（2）$\sqrt{3}$.

【分析】

（1）利用正弦定理完成边化角，再根据在三角形中有$\sin B=\sin(A+C)$，完成化简并计算出 A 的值；

（2）利用 A 的值以及余弦定理求解出 bc 的值，再由面积公式 $S=\frac{1}{2}bc\sin A$ 即可求解出△ABC 的面积.

【详解】

（1）在三角形 ABC 中，∵$(2b-c)\cos A=\mathrm{acos}C$，

由正弦定理得：$(2\sin B-sinC)\cos A=\sin A\cos C$，

化为：$2\sin B\cos A=\sin C\cos C+\sin A\cos C=\sin(A+C)=\sin B$，

三角形中$\sin B\neq 0$，解得$\cos A=\frac{1}{2}$，$A\in(0,\pi)$，

∴$A=\frac{\pi}{3}$.

（2）由余弦定理得 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$\because a=\sqrt{13}$，$b+c=5$，

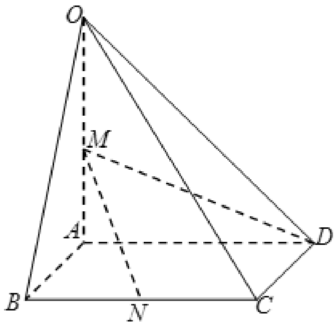
$\therefore 13=(b+c)^2-3cb=5^2-3bc$，化为 $bc=4$，

所以三角形 ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

【点睛】

本题考查正余弦定理和三角形面积公式的综合运用，涉及三角函数恒等变换，属基础题.熟练掌握利用正弦定理边化角，并结合三角函数两角和差公式化简，注意余弦定理与三角形面积公式的综合运用.

20．(本题 12 分)如图，在四棱锥 $O-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$OA\perp$ 底面 $ABCD$，$OA=2$，M 为 OA 的中点，N 为 BC 的中点，$\angle ABC=60^{\circ}$．



(1) 证明：直线 $MN//$ 平面 OCD；

(2) 求异面直线 AB 与 MD 所成角的余弦值.

【答案】（1）证明见解析；（2）$\frac{\sqrt{5}}{5}$.

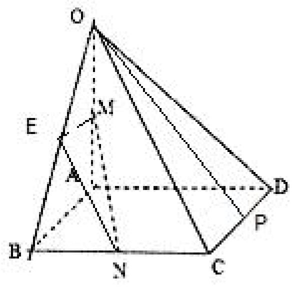
【分析】

（1）取 OB 的中点 E，连接 ME，NE，求证平面 $EMN//$ 平面 OCD，即可证明 $MN//$ 平面 OCD；

（2）连接 MC，AC，由题可得异面直线 AB 与 MD 所成角即为相交线 CD 与 MD 所成角，求出 ΔMCD 的三边长，利用余弦定理即可得到答案.

【详解】

（1）证明：取 OB 的中点 E，连接 ME，NE ，



$\because$ 在 ΔOBA 中，E 为 OB，M 为 OA；

$\therefore EM//AB$；

又$\because$ 四边形 $ABCD$ 为菱形， $AB//CD$；

$\therefore EM//CD$；

$\because$ 在 ΔOBC 中， E 为 OB， N 为 BC 中点，

$\therefore EN//OC$；

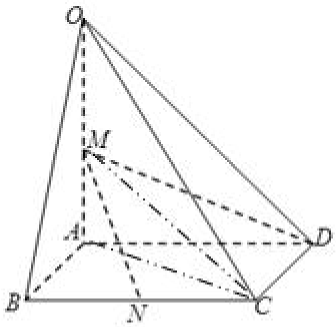
由于 $EM//AB$， $EN//OC$， $ME\cap MN=E$， $OC\cap CD=C$， $ME,MN\subset$ 平面 EMN， $OC,OD\subset$ 平面 OCD；

$\therefore$ 平面 $EMN//$ 平面 OCD；

$\because MN\subset EMN$；

$\because MN//$ 平面 OCD

（2）连接 MC， AC，由于 $AB//CD$，则异面直线 AB 与 MD 所成角即为相交线 CD 与 MD 所成角，



由 M 为 OA，则 $AM=\frac{1}{2}OA=1$，

由四边形 $ABCD$ 为边长为 2 的菱形，则 $CD=2$，由于 $\angle ABC=60^0$，则 $AC=2$；

由 $OA\perp$ 平面 $ABCD$，则 $OA\perp AD$， $OA\perp AC$ ，

$MD=\sqrt{AM^2+AD^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$； $MC=\sqrt{AM^2+AC^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

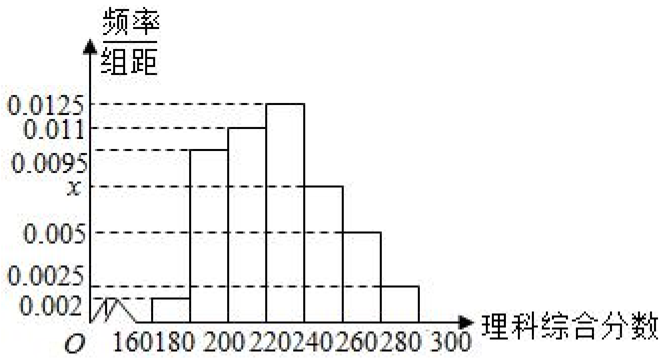
$\therefore$ 在 ΔMCD 中， $\cos\angle MDC=\dfrac{MD^2+CD^2-MC^2}{2\cdot MD\cdot CD}=\dfrac{(\sqrt{5})^2+2^2-(\sqrt{5})^2}{2\times\sqrt{5}\times 2}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$；

所以异面直线 AB 与 MD 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

【点睛】

本题考查利用面面平行证明线面平面，考查利用三角形的余弦定理求异面直线所成角，属于中档题.

21．(本题 12 分)某重点中学 100 位学生在市统考中的理科综合分数，以 $[160,180)$， $[180,200)$， $[200,220)$， $[220,240)$， $[240,260)$， $[260,280)$， $[280,300]$ 分组的频率分布直方图如图.



（1）求直方图中 x 的值；

（2）求理科综合分数的众数和中位数；

（3）在理科综合分数为 $[220,240)$， $[240,260)$， $[260,280)$， $[280,300]$ 的四组学生中，用分层抽样的方法抽取 11 名学生，则理科综合分数在 $[220,240)$ 的学生中应抽取多少人？

【答案】（1）0.0075；（2）众数为 230，中位数为 224；（3）5．

【分析】

（1）根据频率和为 1 计算出 x 的值；

（2）根据频率分布直方图中小矩形的高度可直接判断出众数，计算频率之和为 0.5 时对应的数据即为中位数；

（3）先根据频率分布直方图计算出四组用户的频率之比，然后利用样本容量乘以对应的比例即可求得应抽取的户数.

【详解】

（1）因为 $(0.002+0.0025+0.005+x+0.0095+0.011+0.0125)\times 20=1$，解得 $x=0.0075$，所以直方图中 x 的值为 0.0075.

（2）理科综合分数的众数是 $\dfrac{220+240}{2}=230$，

$\because (0.002+0.0095+0.011)\times 20=0.45<0.5$，

$\therefore$ 理科综合分数的中位数在 $[220,240)$ 内，设中位数为 a，

则 $(0.002+0.0095+0.011)\times 20+0.0125\times(a-220)=0.5$，

解得 $a=224$，即中位数为 224.

（3）理科综合分数在 $[220,240)$ 的学生有 $0.0125\times 20\times 100=25$ （位），

同理可求理科综合分数为 $[240,260)$， $[260,280)$， $[280,300]$ 的用户分别有 15 位、

10 位、5 位，

故抽取比为 $\frac{11}{25+15+10+5}=\frac{1}{5}$，

∴从理科综合分数在 $[220,240)$ 的学生中应抽取 $25\times\frac{1}{5}=5$ 人.

【点睛】

方法点睛：

利用频率分布直方图求众数、中位数和平均数时，应注意三点：①最高的小长方形底边中点的横坐标即是众数；②中位数左边和右边的小长方形的面积和是相等的；③平均数是频率分布直方图的“重心”，等于频率分布直方图中每个小长方形的面积乘以小长方形底边中点的横坐标之和.

22．(本题 12 分)已知向量 $\vec{a}=\left(\cos\frac{3x}{2},\sin\frac{3x}{2}\right)$，$\vec{b}=\left(\cos\frac{x}{2},-\sin\frac{x}{2}\right)$，函数 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-m|\vec{a}+\vec{b}|+1$，$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$，$m\in R$.

（1）当 $m=0$ 时，求 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 的值；

（2）若 $f(x)$ 的最小值为 -1，求实数 m 的值；

（3）是否存在实数 m，使函数 $g(x)=f(x)+\frac{24}{49}m^2$，$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 有四个不同的零点？若存在，求出 m 的取值范围；若不存在，说明理由.

【答案】（1）$\frac{3}{2}$；（2）$\sqrt{2}$；（3）存在，$\frac{7\sqrt{2}}{6}\le m<\frac{7}{4}$.

【分析】

（1）利用向量数量积的公式化简函数 $f(x)$ 即可；

（2）求出函数 $f(x)$ 的表达式，利用换元法结合一元二次函数的最值性质进行讨论求解即可；

（3）由 $g(x)=0$ 得到方程的根，利用三角函数的性质进行求解即可.

【详解】

解：（1）

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(\cos\frac{3x}{2},\sin\frac{3x}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{x}{2},-\sin\frac{x}{2}\right)=\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\cos 2x$

，

当 $m=0$ 时， $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}+1=\cos 2x+1$，

则 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\left(2\times\frac{\pi}{6}\right)+1=\cos\frac{\pi}{3}+1=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$；

（2）$\because x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$，

$\therefore$

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2}=\sqrt{\cos^2\frac{3x}{2}+\sin^2\frac{3x}{2}+2\cos 2x+\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\sqrt{2+2\cos 2x}=\sqrt{4\cos^2 x}=2$

，

则 $f(x)=\vec{a}\cdot\vec{b}-m\left|\vec{a}+\vec{b}\right|+1=\cos 2x-2m\cos x+1=2\cos^2 x-2m\cos x$，

令 $t=\cos x$， 则 $\frac{1}{2}\le t\le 1$，

则 $y=2t^2-2mt$， 对称轴 $t=\frac{m}{2}$，

① 当 $\frac{m}{2}<\frac{1}{2}$， 即 $m<1$ 时，

当 $t=\frac{1}{2}$ 时，函数取得最小值，此时最小值 $y=\frac{1}{2}-m=-1$， 得 $m=\frac{3}{2}$(舍)，

② 当 $\frac{1}{2}\le\frac{m}{2}\le 1$， 即 $1\le m\le 2$ 时，

当 $t=\frac{m}{2}$ 时，函数取得最小值，此时最小值 $y=\frac{m^2}{2}-m^2=-1$， 得 $m=\sqrt{2}$，

③ 当 $\frac{m}{2}>1$， 即 $m>2$ 时，

当 $t=1$ 时，函数取得最小值，此时最小值 $y=2-2m=-1$， 得 $m=\frac{3}{2}$(舍)，

综上若 $f(x)$ 的最小值为 -1， 则实数 $m=\sqrt{2}$；

（3）令 $g(x)=2\cos^2 x-2m\cos x+\frac{24}{49}m^2=0$， 得 $\cos x=\frac{3m}{7}$ 或 $\frac{4m}{7}$，

$\therefore$ 方程 $\cos x=\frac{3m}{7}$ 或 $\frac{4m}{7}$ 在 $x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]$ 上有四个不同的实根，

则$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\dfrac{3m}{7}<1\\\dfrac{\sqrt{2}}{2}\le\dfrac{4m}{7}<1\\\dfrac{3m}{7}\ne\dfrac{4m}{7}\end{cases}$，得$\begin{cases}\dfrac{7\sqrt{2}}{6}\le m<\dfrac{7}{3}\\\dfrac{7\sqrt{2}}{8}\le m<\dfrac{7}{4}\\m\ne 0\end{cases}$，则$\dfrac{7\sqrt{2}}{6}\le m<\dfrac{7}{4}$，

即实数m的取值范围是$\dfrac{7\sqrt{2}}{6}\le m<\dfrac{7}{4}$.

【点睛】

本题主要考三角函数的性质，函数的零点以及复合函数的应用，综合性较强，运算量较大，有一定的难度.