绝密★启用前

2020-2021学年高一下学期数学期末考试模拟卷1（江苏专用）

一、单选题(共40分)

1．(本题5分)向量$\vec{a},\vec{b}$满足$|\vec{a}|=1,(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=0,(2\vec{a}+\vec{b})\perp\vec{b}$，则$|\vec{b}|=$（　　）

A．2　　　　B．1　　　　C．$\sqrt{2}$　　　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【分析】

根据题意得$\begin{cases}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=0\\(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=0\end{cases}$，进而解得$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$.

【详解】

由题意易知：$\begin{cases}(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=0\\(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{b}=0\end{cases}$，即$\begin{cases}1+\vec{b}\cdot\vec{a}=0\\2\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}^2=0\end{cases}$，

$\therefore\vec{b}^2=-2\vec{a}\cdot\vec{b}=2$，即$\left|\vec{b}\right|=\sqrt{2}$.

故选：C

【点睛】

知识点点睛：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

2．(本题5分)已知函数$f(x)=\cos 2x+\sin x$，则下列说法中正确的是（　　）

A．$f(x)$的一条对称轴为$x=\frac{\pi}{4}$

B．$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$上是单调递减函数

C．$f(x)$的对称中心为$\left(\frac{\pi}{2},0\right)$

D．$f(x)$的最大值为1

【答案】B

【分析】

根据诱导公式可推导得到$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\neq f(x)$，$f(\pi-x)+f(x)\neq 0$，知AC错误；利用二倍角公式化简得到$f(x)=-2\sin^2 x+\sin x+1$，根据复合函数单调性的判断方法

可知 B 正确；由二次函数型的函数最值的求解方法可求得 $f(x)_{\max}=\frac{9}{8}$，知 D 错误.

【详解】

对于 A，$f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(\pi-2x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\cos 2x+\cos x\neq f(x)$，

$\therefore x=\frac{\pi}{4}$ 不是 $f(x)$ 的对称轴，A 错误；

对于 B，$f(x)=-2\sin^2 x+\sin x+1$，当 $x\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，

令 $\mu=\sin x$，则其在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，又 $y=-2\mu^2+\mu+1$ 在 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 上单调递减，

由复合函数单调性知：$f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，B 正确；

对于 C，

$f(\pi-x)+f(x)=\cos(2\pi-2x)+\sin(\pi-x)+\cos 2x+\sin x=2\cos 2x+2\sin x$

$\neq 0$，

$\therefore\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 不是 $f(x)$ 的对称中心，C 错误；

对于 D，$f(x)=-2\sin^2 x+\sin x+1$，

$\because \sin x\in[-1,1]$，$\therefore$ 当 $\sin x=\frac{1}{4}$ 时，$f(x)_{\max}=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+1=\frac{9}{8}$，D 错误.

故选：B.

【点睛】

结论点睛：关于函数对称性结论如下：

（1）若 $f(x+a)=f(b-x)$，则 $f(x)$ 关于直线 $x=\frac{a+b}{2}$ 成轴对称；

（2）若 $f(x+a)+f(b-x)=c$，则 $f(x)$ 关于 $\left(\frac{a+b}{2},\frac{c}{2}\right)$ 成中心对称.

3.(本题5分) ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，已知 $b=c,a^2=2b^2(1-\sin A)$，则 $A=$（　　）

A. $\frac{\pi}{4}$　　B. $\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

【答案】A

【分析】

根据余弦定理得到 $a^2=2b^2(1-\cos A)$，然后结合已知条件进行化简得到 $\tan A$ 的值，从而可计算出 A 的值.

【详解】

因为 $b=c$，所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=2b^2-2b^2\cos A=2b^2(1-\cos A)$，

因为 $a^2=2b^2(1-\sin A)$，所以 $1-\cos A=1-\sin A$，

所以 $\sin A=\cos A$，且 $1-\sin A\neq 0$，所以 $\sin A\neq 1$，所以 $\cos A\neq 0$，

所以 $\tan A=1$，所以 $A=\frac{\pi}{4}$，

故选：A.

【点睛】

关键点点睛：本题解答的关键在于利用余弦定理进行化简，通过余弦定理分析得到 $a^2,2b^2$ 的关系，从而结合已知条件进行分析；本例若直接使用正弦定理进行边化角，并结合二倍角公式进行化简，整体的过程会更复杂.

4．(本题 5 分)某市有 15 个旅游景点，经计算，黄金周期间各个景点的旅游人数平均为 20 万，标准差为 s，后来经核实，发现甲、乙两处景点统计的人数有误，甲景点实际为 20 万，被误统计为 15 万，乙景点实际为 18 万，被误统计成 23 万；更正后重新计算，得到标准差为 s_1，则 s 与 s_1 的大小关系为（　　）

A． $s=s_1$　　　　**B．** $s<s_1$

C． $s>s_1$　　　　**D．** 不能确定

【答案】 C

【分析】

首先由统计总数没变，可知两次统计的平均数没有变，再分别列出标准差公式，判断大小关系.

【详解】

由已知，两次统计所得的旅游人数总数没有变，即两次统计的各景点旅游人数的平均数是相同的，设为 $\overline{x}$，则 $s=\sqrt{\frac{1}{15}\left[(15-\overline{x})^2+(23-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\ldots+(x_{15}-\overline{x})^2\right]}$

$s_1=\sqrt{\frac{1}{15}\left[(20-\overline{x})^2+(18-\overline{x})^2+(x_3-\overline{x})^2+\ldots+(x_{15}-\overline{x})^2\right]}$，

若比较 s 与 s_1 的大小，只需比较 $(15-\overline{x})^2+(23-\overline{x})^2$ 与 $(20-\overline{x})^2+(18-\overline{x})^2$ 的大小即可，而 $(15-\overline{x})^2+(23-\overline{x})^2=754-76\overline{x}+2\overline{x}^2$，

$\left(20-\overline{x}\right)^2+\left(18-\overline{x}\right)^2=724-76\overline{x}+2\overline{x}^2$，所以

$\left(15-\overline{x}\right)^2+\left(23-\overline{x}\right)^2>\left(20-\overline{x}\right)^2+\left(18-\overline{x}\right)^2$，从而 $s>s_1$.

故选：C

【点睛】

关键点点睛：本题考查样本平均数和标准差，关键是判断平均数没有变，才能利用标准差公式判断大小.

5．(本题 5 分)已知 m，n，是不同的直线，α，β 是不重合的平面，则下列说法正确的是（　　）

A．若 $m//\alpha$，则 m 平行于平面 α 内的任意一条直线

B．若 $m//\alpha$，$n//\alpha$，则 $m//n$

C．若 $\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，$n\subset\beta$，则 $m//n$

D．若 $\alpha//\beta$，$m\subset\alpha$，则 $m//\beta$

【答案】D

【分析】

利用长方体模型依次讨论各选项即可得答案.

【详解】

如图，设平面 $ABCD$ 为平面 α，平面 $A_1B_1C_1D_1$ 为平面 β，

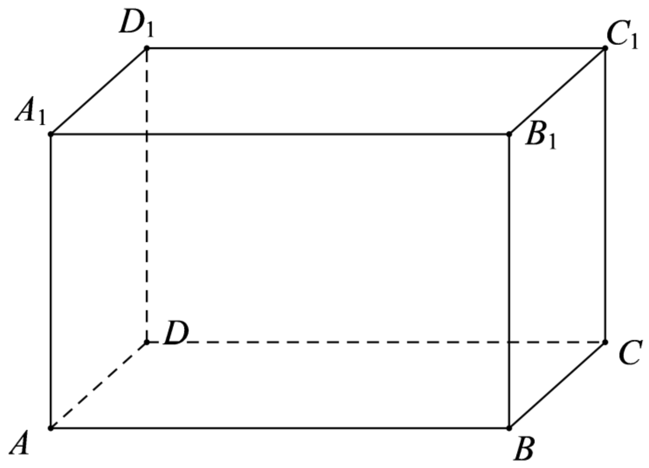
对于 A 选项，设 m 为直线 A_1B_1，满足 $m//\alpha$，但直线 A_1B_1 与直线 BC 是异面直线，故 A 选项错误；

对于 B 选项，设 m 为直线 A_1B_1，直线 B_1C_1 为 n，满足 $m//\alpha$，$n//\alpha$，但不满足 $m//n$，故 B 选项错误；

对于 C 选项，设 m 为直线 BC，直线 A_1B_1 为 n，显然 $m//n$ 不满足，故 C 选项错误；

对于 D 选项，由面面平行的性质即可得该命题正确.

故选：D



6．(本题 5 分)已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是矩形，其中 $AD=2$， $AB=3$，面 $PAD\perp$面 $ABCD$， $PA=PD$，且直线 PB 与 CD 所成角的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$，则四棱锥 $P-ABCD$ 的外接球表面积为（　　）

A． $\dfrac{28\pi}{3}$　　B． $\dfrac{32\pi}{3}$　　C． $\dfrac{43\pi}{3}$　　D． $\dfrac{64\pi}{3}$

【答案】C

【分析】

求得外接球的半径，由此求得外接球的表面积.

【详解】

设 AC 交 BD 于 O_1， E 是 AD 的中点， O_2 是三角形 PAD 的外心.

由于面 $PAD\perp$面 $ABCD$， AD 是它们的交线， $PA=PD$，四边形 $ABCD$ 是矩形，

所以 $PE\perp AD, AB\perp AD, CD//AB$，

所以 $PE\perp$平面 $ABCD$， $AB\perp$平面 PAD， $AB\perp PA$，

$\angle PBA$ 是直线 PB 与 CD 所成角， $AB=3$，

$\cos\angle PBA=\dfrac{AB}{PB}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}\Rightarrow PB=\sqrt{13}$，所以 $PA=\sqrt{PB^2-AB^2}=2$，

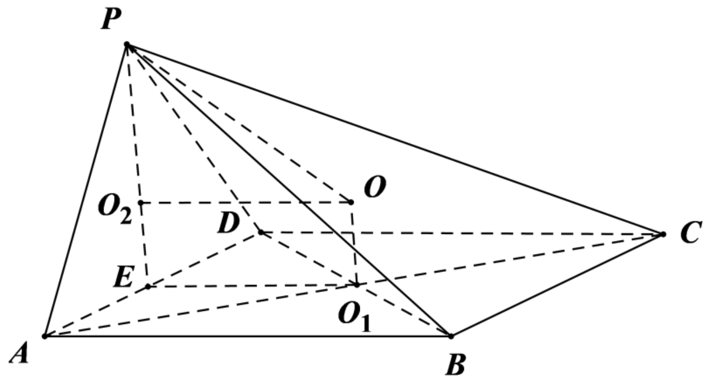
所以三角形 PAB 是等边三角形，设其外接圆半径为 x，则 $2x=\dfrac{2}{\sin 60^\circ}\Rightarrow x=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$，

设外接球球心为 O，则外接球半径

$$R^2=OP^2=OO_2{}^2+O_2P^2=O_1E^2+O_2P^2=\left(\frac{1}{2}AB\right)^2+O_2P^2=\frac{9}{4}+\frac{4}{3}=\frac{43}{12}.$$

所以外接球的表面积为 $4\pi R^2=4\pi\times\dfrac{43}{12}=\dfrac{43\pi}{3}$.

故选：C



【点睛】

几何体外接球有关问题，解题关键在于找到球心并计算出球的半径.

7．(本题5分)抛掷一个质地均匀的骰子的试验，事件A表示"小于5的偶数点出现"，事件B表示"不小于5的点数出现"，则一次试验中，事件A或事件B至少有一个发生的概率为（　　）

A． $\frac{2}{3}$　　**B．** $\frac{1}{3}$　　**C．** $\frac{1}{2}$　　**D．** $\frac{5}{6}$

【答案】A

【分析】

由古典概型概率公式分别计算出事件A和事件B发生的概率，又通过列举可得事件A和事件B为互斥事件，进而得出事件A或事件B至少有一个发生的概率即为事件A和事件B的概率之和.

【详解】

事件A表示"小于5的偶数点出现"，事件B表示"不小于5的点数出现"，

$\therefore P(A)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$，

又小于5的偶数点有2和4，不小于5的点数有5和6，

所以事件A和事件B为互斥事件，

则一次试验中，事件A或事件B至少有一个发生的概率为

P（$A\cup B$）$=P(A)+P(B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$，

故选：A.

【点睛】

本题主要考查古典概型计算公式，以及互斥事件概率加法公式的应用，属于中档题.

8．(本题5分)已知向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为$\frac{\pi}{3}$，$|\vec{b}|=2|\vec{a}|=2$，向量$\vec{c}=x\vec{a}+y\vec{b}$，且

$x,y\in[1,2]$，则向量$\vec{a},\vec{c}$夹角的余弦值的最小值为（　　）

A．$\dfrac{\sqrt{21}}{7}$　　B．$\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$　　C．$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{21}}{14}$

【答案】A

【分析】

依题意可得$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\sqrt{1-\dfrac{3y^2}{x^2+2xy+4y^2}}$,，

令$u=\dfrac{3y^2}{x^2+2xy+4y^2}$，则$\dfrac{3}{u}=\dfrac{x^2+2xy+4y^2}{y^2}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{y}\right)+4=\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2+3$，

通过换元可得$u\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{4}{7}\right]$，所以，当$u=\dfrac{4}{7}$时，可得$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle$的 最小值.

【详解】

依题意可得$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=1$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\dfrac{\pi}{3}=1\times2\times\dfrac{1}{2}=1$，

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b})=x\vec{a}^2+y\vec{a}\cdot\vec{b}=x+y$，

$\vec{c}^2=(x\vec{a}+y\vec{b})^2=x^2\vec{a}^2+2xy\vec{a}\cdot\vec{b}+y^2\vec{b}^2=x^2+2xy+4y^2$，则$|\vec{c}|=\sqrt{x^2+2xy+4y^2}$，

所以，

$$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}=\frac{x+y}{\sqrt{x^2+2xy+4y^2}}=\sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2+2xy+4y^2}}=\sqrt{1-\frac{3y^2}{x^2+2xy+4y^2}},$$

令$u=\dfrac{3y^2}{x^2+2xy+4y^2}$，则$\dfrac{3}{u}=\dfrac{x^2+2xy+4y^2}{y^2}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{y}\right)+4=\left(\dfrac{x}{y}+1\right)^2+3$，

令$t=\dfrac{x}{y}$，由$x,y\in[1,2]$得$t\in\left[\dfrac{1}{2},2\right]$，

则$\dfrac{3}{u}=(t+1)^2+3\in\left[\dfrac{21}{4},12\right]$，所以$\dfrac{1}{u}\in\left[\dfrac{7}{4},4\right]$，故$u\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{4}{7}\right]$

所以，当$u=\dfrac{4}{7}$时，$\cos\langle\vec{a},\vec{c}\rangle$有最小值$\sqrt{1-u}=\sqrt{1-\dfrac{4}{7}}=\sqrt{\dfrac{3}{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

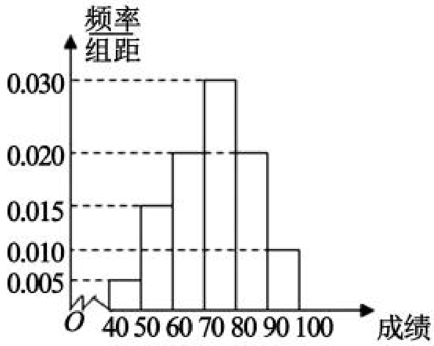
故选：A.

【点睛】

关键点点睛：本题关键点是：令$u=\dfrac{3y^2}{x^2+2xy+4y^2}$，通过换元得到$u\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{4}{7}\right]$.

二、多选题(共 20 分)

9．(本题 5 分)在疫情防护知识竞赛中，对某校的 2000 名考生的参赛成绩进行统计，可得到如图所示的频率分布直方图，其中分组的区间为 $[40,50)$，$[50,60)$，$[60,70)$，$[70,80)$，$[80,90)$，$[90,100]$，60 分以下视为不及格，若同一组中数据用该组区间中间值作代表值，则下列说法中正确的是（　　）



A． 成绩在 $[70,80)$ 的考生人数最多

B． 不及格的考生人数为 500

C． 考生竞赛成绩的众数为 75 分

D． 考生竞赛成绩的中位数约为 75 分

【答案】AC

【分析】

由频率分布直方图最高矩形成绩在 $[70,80)$，由此可确定对应频率最大，可知分布人数最多，并由此估计得到众数，知 AC 正确；根据成绩在 $[40,60)$ 的对应的频率可确定不及格人数，知 B 错误；根据频率分布直方图估计中位数的方法可求得中位数，知 D 错误.

【详解】

对于 A，成绩在 $[70,80)$ 的矩形最高，则对应的频率最大，

$\therefore$ 成绩分布在此的考生人数最多，A 正确；

对于 B，成绩在 $[40,60)$ 的频率为 $(0.005+0.015)\times 10=0.2$，

$\therefore$ 不及格的人数为 $2000\times 0.2=400$ 人，B 错误；

对于 C，成绩在 $[70,80)$ 的矩形最高，对应的频率最大，$\therefore$ 众数为 75 分，C 正确；

对于 D，成绩在 $[40,70)$ 的频率和为 $(0.005+0.015+0.020)\times 10=0.4$，

设中位数为 x，则 $0.4+(x-70)\times 0.03=0.5$，解得：$x=73\frac{1}{3}\approx 73.33$，

$\therefore$ 中位数约为73分，D 错误.

故选：AC.

【点睛】

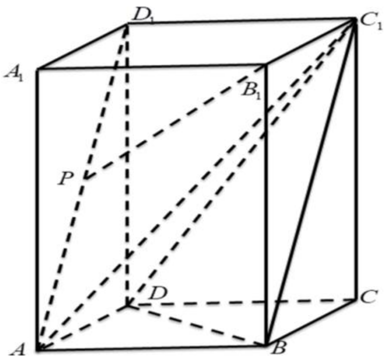
方法点睛：利用频率分布直方图估计众数、中位数和平均数的基本方法如下：

（1）众数：最高矩形横坐标的中点；

（2）中位数：将矩形总面积二等分的点的横坐标；

（3）平均数：每个小矩形横坐标中点与对应矩形的面积的乘积的总和.

10．(本题 5 分)如图，在正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AA_1=2AB=2$，点 P 为线段 AD_1 的中点，则下列说法正确的是（　　）



A．正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表面积为 10

B．三棱锥 C_1-ADB 的体积为 1

C．三棱锥 C_1-ADB 外接球的表面积为 6π

D．直线 PB_1 // 平面 C_1DB

【答案】ACD

【分析】

对于 A，利用已知直接求其面积即可；对于 B，直接求三棱锥 C_1-ADB 的体积进行判断；对于 C，三棱锥 C_1-ADB 外接球就是正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的外接球，则其直径为正四棱柱的体对角线，从而可求出其外接球的表面积；对于 D，由面面平行的性质判断即可

【详解】

解：对于 A，因为 $AA_1=2AB=2$，所以 $AA_1=2, AB=1$，又因为四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱，所以 $AD=1$，所以正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的表

面积为$1\times1\times2+1\times2\times4=2+8=10$，所以 A 正确；

对于 B，因为$S_{\triangle ABD}=1\times1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$，所以三棱锥$C_1-ADB$的体积为

$\frac{1}{3}S_{\triangle ABD}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2=\frac{1}{3}$，所以 B 错误；

对于 C，由题意可得三棱锥C_1-ADB外接球就是正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的外接球，

所以外接球半径为$R=\frac{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，所以外接球的表面积为

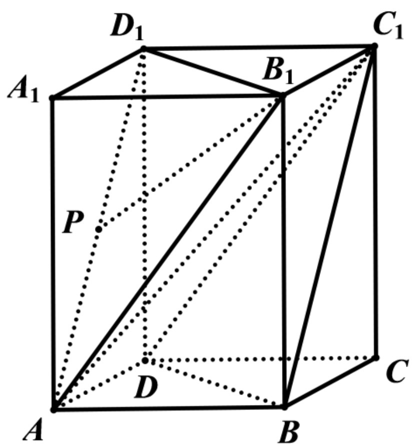
$4\pi R^2=4\pi\times\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2=6\pi$，所以 C 正确；

对于 D，因为$D_1B_1 /\!/ DB$，$AB_1 /\!/ C_1D$，$BD\cap C_1D=D, AB_1\cap D_1B_1=B_1$，所以平面

$D_1B_1A /\!/$平面BC_1D，因为$PB_1\subset$平面D_1B_1A，所以直线$PB_1 /\!/$平面C_1DB，所以 D 正

确，

故选：ACD



11．(本题 5 分)函数$f(x)=2\sqrt{3}\sin x\cos x-2\sin^2 x+1$，下列结论正确的是（　　）

A．$f(x)$在区间$\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$上单调递增

B．$f(x)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$成中心对称

C．将$f(x)$的图象向左平移$\frac{5\pi}{12}$个单位后与$y=-2\sin 2x$的图象重合

D．若$x_1-x_2=\pi$, 则$f(x_1)=f(x_2)$

【答案】ACD

【分析】

由二倍角公式、两角和的正弦公式化函数为一个角的一个三角函数形式，然后结合正弦

函数性质判断.

【详解】

$f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$,

$x\in\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right]$时，$t=2x+\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，此时 $y=\sin t$ 递增，A 正确；

$f\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(2\times\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right)=2\neq 0$，B 错误；

将 $f\left(x\right)$ 的图象向左平移 $\frac{5\pi}{12}$ 个单位后得解析式

$y=2\sin\left[2(x+\frac{5\pi}{12})+\frac{\pi}{6}\right]=2\sin(2x+\pi)=-2\sin 2x$，C 正确；

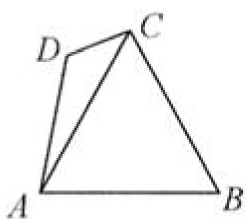
易知函数周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，因此当 $x_1-x_2=\pi$, 则 $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)$，D 正确.

故选：ACD.

【点睛】

思路点睛：本题考查三角函数的图象与性质．解题方法是利用二倍角公式、两角和与差的正弦公式化函数为 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+h$ 形式，然后结合正弦函数 $y=\sin x$ 的性质求 $f(x)$ 的性质，此时有两种思路：一种是根据 $y=\sin x$ 的性质求出 $f(x)$ 的性质，然后判断各选项，另一种是由 x 的值或范围求得 $\omega x+\varphi$ 的值或范围，然后由 $y=\sin t$ 的性质判断各选项.

12．(本题 5 分)如图， ABC **的内角** A**，**B**，**C **所对的边分别为** a**，**b**，**c**．若** $a=b$**，且** $\sqrt{3}\left(a\cos C+c\cos A\right)=2b\sin B$**，**$D$ **是** ABC **外一点，**$DC=1$**，**$DA=3$**，则下列说法正确的是（　　）**



A． ABC **是等边三角形**

B．若 $AC=2\sqrt{3}$**，则** A**，**B**，**C**，**D **四点共圆**

C．四边形 $ABCD$ **面积最大值为** $\frac{5\sqrt{3}}{2}+3$

D．四边形 $ABCD$ 面积最小值为 $\frac{5\sqrt{3}}{2}-3$

【答案】AC

【分析】

利用三角函数恒等变换化简已知等式可求 $\sin B$，再利用 $a=b$，可知 ABC 为等边三角形，从而判断 A；利用四点 A，B，C，D 共圆，四边形对角互补，从而判断 B；设 $AC=x$，$x>0$，在 ADC 中，由余弦定理可得 $x^2=10-6\cos D$，利用三角形的面积公式，三角函数恒等变换的，可求 $S_{四边形ABCD}$，利用正弦函数的性质，求出最值，判断 CD．

【详解】

由正弦定理 $a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$，

得 $\sqrt{3}\cdot(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=2\sin B\cdot\sin B$，

$\therefore\sqrt{3}=2\sin B,\therefore\sin B=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\because a=b$，B 是等腰 ABC 的底角，$\therefore B\in(0,\frac{\pi}{2})$，

$\therefore B=\frac{\pi}{3},\therefore\triangle ABC$ 是等边三角形，A 正确；

B 不正确：若 A,B,C,D 四点共圆，则四边形对角互补，

由 A 正确知 $\angle D=\frac{2\pi}{3},\cos D=-\frac{1}{2}$，

但由于 $DC=1,DA=3,AC=2\sqrt{3}$ 时，

$$\cos D=\frac{DC^2+DA^2-AC^2}{2\cdot DA\cdot DC}=\frac{1^2+3^2-(2\sqrt{3})^2}{2\times1\times3}=-\frac{1}{3}\neq-\frac{1}{2},$$

$\therefore B$ 不正确．

C 正确，D 不正确：

设 $\angle D=\theta$，则 $AC^2=DC^2+DA^2-2DC\cdot DA\cdot\cos\theta=10-6\cos\theta$，

$\therefore S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot(10-6\cos\theta)=\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta$，

$S_{\triangle ADC}=\frac{3}{2}\sin\theta$，

$\therefore S_{四边形ABCD}=S_{\ ABC}+S_{\ ADC}=\frac{3}{2}\sin\theta-\frac{3\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

$=3(\sin\theta\cdot\frac{1}{2}-\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{3}}{2})+\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

$=3\sin(\theta-\frac{\pi}{3})+\frac{5\sqrt{3}}{2}$，

$\because \theta\in(0,\pi),\therefore \sin(\theta-\frac{\pi}{3})\in(-\frac{\sqrt{3}}{2},1]$，

$\therefore -\sqrt{3}<S_{\text{四边形}ABCD}\le\frac{5\sqrt{3}}{2}+3$，$\therefore C$ 正确，D 不正确；

故选：AC..

【点睛】

本题主要考查正弦定理，余弦定理，三角函数恒等变换，正弦函数的图象和性质在解三角形中的综合应用，考查计算能力和转化思想，属于中档题.

第 II 卷（非选择题）

请点击修改第 II 卷的文字说明

三、填空题(共 20 分)

13．(本题 5 分)若 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{5}{6}\pi$，则 $\sin\left(\frac{5}{12}\pi+\alpha\right)=$________.

【答案】$-\frac{\sqrt{2}}{10}$

【分析】

首先根据同角三角函数的基本关系求出 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=-\frac{4}{5}$，然后再根据

$\sin\left(\frac{5}{12}\pi+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]$利用两角和的正弦公式计算可得结果.

【详解】

因为 $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\frac{3}{5}$，$\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{5}{6}\pi$，

所以 $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=\pm\sqrt{1-\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)}=\pm\frac{4}{5}$，

因为 $\frac{\pi}{3}<\alpha<\frac{5}{6}\pi$，所以 $\frac{\pi}{2}<\alpha+\frac{\pi}{6}<\pi$，

所$\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=-\frac{4}{5}$，

所以$\sin\left(\frac{5}{12}\pi+\alpha\right)=\sin\left[\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right]$

$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{3}{5}=-\frac{\sqrt{2}}{10}$.

故答案为：$-\frac{\sqrt{2}}{10}$

【点睛】

关键点睛：本题考查同角三角函数的基本关系及两角和的正弦公式的应用，其中将$\frac{5}{12}\pi+\alpha$变形为$\frac{\pi}{4}+\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$是解题的关键，属于常考题.

14．(本题5分)2020年初，湖北成为全国新冠疫情最严重的省份，面临医务人员不足，医疗物资紧缺等诸多困难，全国人民心系湖北，志愿者纷纷驰援.若某医疗团队从3名男医生和2名女医生志愿者中，随机选取2名医生赴湖北支援，则至少有1名女医生被选中的概率为__________.

【答案】$\frac{7}{10}$

【分析】

基本事件总数$n=C_5^2=10$，选中的都是男医生包含的基本事件个数$m=C_3^2=3$，根据对立事件的概率能求出选中的至少有1名女医生的概率.

【详解】

因为医疗团队从3名男医生和2名女医生志愿者，

所以随机选取2名医生赴湖北支援共有$n=C_5^2=10$个基本事件，

又因为选中的都是男医生包含的基本事件个数$m=C_3^2=3$，

所以至少有1名女医生被选中的概率为$P=1-\frac{3}{10}=\frac{7}{10}$.

故答案为：$\frac{7}{10}$

【点睛】

本题主要考查了排列组合，古典概型，对立事件，属于中档题.

15．(本题 5 分)在三棱锥 $P-ABC$ 中，侧面 PAC 与底面 ABC 垂直，$\angle BAC=90°$，$\angle PCA=30°$，$AB=3$，$PA=2$．则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为__________.

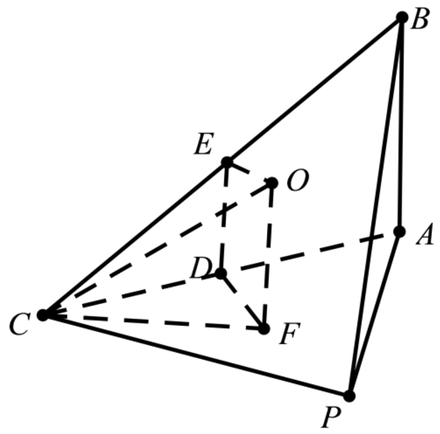
【答案】25π

【分析】

根据平面 $PAC\perp$ 平面 ABC，及 $AB\perp AC$，作出三棱锥的外接球球心，构造出一个含有外接球半径的直角三角形，求得各边长，从而求得外接球半径，进而得到外接球表面积.

【详解】

取$\triangle APC$ 的外接圆圆心为 F，并过圆心作面的垂线，由题易知，$AB\perp$ 平面 APC，取 BC 的中点为 E，即为 ABC 的外接圆圆心，过圆心作面的垂线，如图所示，两垂线交点为 O，即为三棱锥的外接球球心，



作 $ED\perp AC$，则四边形 $OEDF$ 为矩形，$OF=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{3}{2}$，

在$\triangle APC$ 中由正弦定理知 $2CF=\dfrac{PA}{\sin\angle PCA}=\dfrac{2}{\sin 30^{\circ}}=4$，则 $CF=2$，

则在 $Rt\ OFC$ 中，外接球半径 $OC=\sqrt{OF^2+CF^2}=\sqrt{(\dfrac{3}{2})^2+2^2}=\dfrac{5}{2}$，

三棱锥外接球表面积为 $4\pi(\dfrac{5}{2})^2=25\pi$

故答案为：25π

【点睛】

方法点睛：求一般几何体的外接球半径时，一般需作出外接球球心.对于三棱锥来说，需要找到两个面中三角形的外接圆圆心，分别作对应面的垂线，垂线的交点即为外接球球心，然后在直角三角形中解出半径即可.

16．(本题 5 分)甲、乙两人进行象棋比赛，采取五局三胜制（不考虑平局，先赢得三场的人为获胜者，比赛结束）.根据前期的统计分析，得到甲在和乙的第一场比赛中，取

胜的概率为0.5，受心理方面的影响，前一场比赛结果会对甲的下一场比赛产生影响，如果甲在某一场比赛中取胜，则下一场取胜率提高0.1，反之，降低0.1，则甲以$3:1$取得胜利的概率为________________.

【答案】0.174

【分析】

设甲在第一、二、三、四局比赛中获胜分别为事件A_1、A_2、A_3、A_4，则所求概率为：

$P=P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)$，再根据概率计算公式计算即可.

【详解】

设甲在第一、二、三、四局比赛中获胜分别为事件A_1、A_2、A_3、A_4，

由题意，甲要以$3:1$取胜的可能是$A_1A_2\overline{A_3}A_4$，$A_1\overline{A_2}A_3A_4$，$\overline{A_1}A_2A_3A_4$，

所以$P=P(A_1A_2\overline{A_3}A_4)+P(A_1\overline{A_2}A_3A_4)+P(\overline{A_1}A_2A_3A_4)$

$=0.5\times0.6\times0.3\times0.6+0.5\times0.4\times0.5\times0.6+0.5\times0.4\times0.5\times0.6=0.174$.

故答案为：0.174.

【点睛】

本题考查独立事件和互斥事件的概率计算，考查逻辑思维能力和计算能力，属于常考题.

四、解答题(共 70 分)

17．(本题 10 分)设$z=a+bi\left(a,b\in R,|a|\neq1\right)$，$|z|=1$.

（1）求证：$u=\dfrac{z+1}{z-1}$是纯虚数；

（2）求$\left|z+2\overline{z}+2\right|$的取值范围.

【答案】（1）证明见解析 ；（2） $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},5\right)$.

【分析】

（1）分析得出$|z|^2=a^2+b^2=1$，利用复数的除法化简复数u，可证得结论成立；

（2）分析得出$-1<a<1$，计算得出$\left|z+2\overline{z}+2\right|=8a^2-12a+5$，利用二次函数的基本性质可求得$\left|z+2\overline{z}+2\right|$的取值范围.

【详解】

（1）由题意可得$|z|^2=a^2+b^2=1$，

所以，

$$u=\frac{z+1}{z-1}=\frac{a+1+bi}{a-1+bi}=\frac{(a+1+bi)(a-1-bi)}{(a-1+bi)(a-1-bi)}=\frac{(a^2-1)-2bi+b^2}{(a-1)^2+b^2}=-\frac{2bi}{(a-1)^2+b^2},$$

$\because |a|\neq 1$，则 $b\neq 0$，因此，$u=\dfrac{z+1}{z-1}$ 是纯虚数；

（2）$\because z+2\overline{z}+2=a+bi+2(a-bi)+2=(3a+2)-bi$，

所以，

$$|z+2\overline{z}+2|^2=(3a+2)^2+b^2=9a^2+12a+4+b^2=8a^2+12a+5=8\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{2},$$

因为 $a^2+b^2=1$，则 $b^2=1-a^2\geq 0$，解得 $-1\leq a\leq 1$，$\because |a|\neq 1$，则 $-1<a<1$，

所以，$|z+2\overline{z}+2|^2=8\left(a+\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{1}{2}\in\left[\dfrac{1}{2},25\right)$，因此，$|z+2\overline{z}+2|\in\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2},5\right)$.

【点睛】

关键点点睛：本题考查复数模的取值范围的求解，解题的关键在于将复数的模转化为关于 a 的二次函数的值域来求解，在求解的过程中不要忽略了函数的定义域的求解.

18．(本题 12 分)已知 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 是平面内两个不共线的非零向量，$\overrightarrow{AB}=2\vec{e_1}+\vec{e_2}$，$\overrightarrow{BE}=-\vec{e_1}+\lambda\vec{e_2}$，$\overrightarrow{EC}=-2\vec{e_1}+\vec{e_2}$，且 A，$E$，$C$ 三点共线.

（1）求实数 λ 的值；

（2）若 $\vec{e_1}=(2,1)$，$\vec{e_2}=(2,-2)$，求 $\overrightarrow{BC}$ 的坐标；

（3）已知 $D(3,5)$，在（2）的条件下，若 A，B，C，D 四点按逆时针顺序构成平行四边形，求点 A 的坐标.

【答案】（1）$\lambda=-\dfrac{3}{2}$（2）$(-7,-2)$（3）$(10,7)$.

【分析】

（1）由 $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{EC}$ $(k\in R)$ 得 $(1+2k)\vec{e_1}=(k-1-\lambda)\vec{e_2}$，再根据 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 是平面内两个不共线的非零向量列式可求出结果；

（2）由 $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}$ 可求出结果；

（3）设 $A(x,y)$，根据 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ 可求出结果.

【详解】

（1）$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=(2\vec{e_1}+\vec{e_2})+(-\vec{e_1}+\lambda\vec{e_2})=\vec{e_1}+(1+\lambda)\vec{e_2}$.

因为 A，E，C 三点共线，

所以存在实数 k，使得 $\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{EC}$，

即 $\vec{e_1}+(1+\lambda)\vec{e_2}=k\left(-2\vec{e_1}+\vec{e_2}\right)$，得 $(1+2k)\vec{e_1}=(k-1-\lambda)\vec{e_2}$．

因为 $\vec{e_1}$，$\vec{e_2}$ 是平面内两个不共线的非零向量，

所以 $\begin{cases}1+2k=0\\ k-1-\lambda=0\end{cases}$ 解得 $k=-\dfrac{1}{2}$，$\lambda=-\dfrac{3}{2}$．

（2）

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EC}=-\vec{e_1}-\dfrac{3}{2}\vec{e_2}-2\vec{e_1}+\vec{e_2}=-3\vec{e_1}-\dfrac{1}{2}\vec{e_2}=(-6,-3)+(-1,1)=(-7,-2)$．

（3）因为 A，B，C，D 四点按逆时针顺序构成平行四边形，

所以 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$．

设 $A(x,y)$，则 $\overrightarrow{AD}=(3-x,5-y)$，

因为 $\overrightarrow{BC}=(-7,-2)$，

所以 $\begin{cases}3-x=-7\\ 5-x=-2\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=10\\ y=7\end{cases}$

即点 A 的坐标为 $(10,7)$．

19．(本题 12 分) ABC 中，角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，$2a\sin B=\sqrt{3}b$，

（1）若 ABC 为锐角三角形，其面积为 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$c=2$，求 a 的值；

（2）若 $(b-a)(b+a)=\dfrac{1}{2}c^2$，求 $\tan C$ 的值．

【答案】（1）$\sqrt{7}$；（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

【分析】

（1）结合已知条件和正弦定理先求解出 A 的值，再根据三角形的面积公式求解出 b 的值，最后根据余弦定理求解出 a 的值；

（2）根据已知条件先用 b,c 表示出 a^2，然后利用余弦定理表示出 $\cos A$，由此求解出 a,b,c 之间的倍数关系，结合倍数关系即可计算出 $\cos C$ 的值，则 $\sin C$ 的值可求，故 $\tan A$ 的值可求.

【详解】

（1）因为$2a\sin B=\sqrt{3}b$且$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，

所以$b\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b$且$b>0$，所以$\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，

又因为 ABC 为锐角三角形，所以$A=\dfrac{\pi}{3}$，

所以$S=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}b=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，所以$b=3$，

所以$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=9+4-2\times3\times2\times\dfrac{1}{2}=7$，所以$a=\sqrt{7}$；

（2）因为$(b-a)(b+a)=\dfrac{1}{2}c^2$，所以$\boldsymbol{b^2-\dfrac{1}{2}c^2=a^2}$，

又因为$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，所以$\dfrac{b^2+c^2-\left(b^2-\dfrac{1}{2}c^2\right)}{2bc}=\dfrac{1}{2}$，所以$b=\dfrac{3}{2}c$，

所以$a^2=\dfrac{9}{4}c^2-\dfrac{1}{2}c^2=\dfrac{7}{4}c^2$，所以

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{\frac{7}{4}c^2+\frac{9}{4}c^2-c^2}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{2}c\cdot\frac{3}{2}c}=\frac{3c^2}{\frac{3\sqrt{7}}{2}c^2}=\frac{2\sqrt{7}}{7},$$

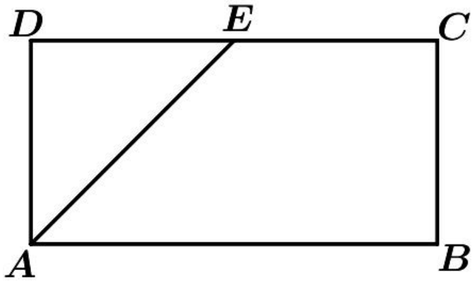
因为$C\in(0,\pi)$，所以$\sin C>0$ ，所以$\sin C=\sqrt{1-\cos^2C}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$，

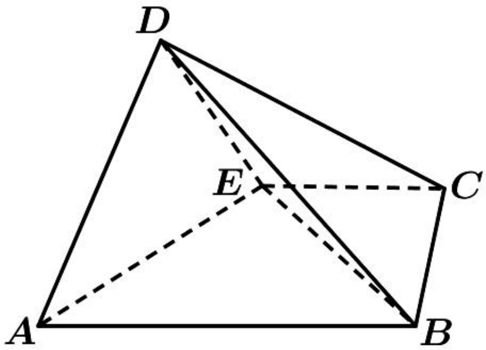
所以$\tan C=\dfrac{\sin C}{\cos C}=\dfrac{\sqrt{21}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

【点睛】

关键点点睛：解答本题第二问的关键在于两次使用余弦定理，其中第一次是为了求得a,b,c的关系，第二次是在已知a,b,c关系的前提下计算$\cos C$的值；本例第二问除了可以采用余弦定理进行求解，还可以利用正弦定理进行求解：将$\boldsymbol{b^2-\dfrac{1}{2}c^2=a^2}$变形为角的正弦形式，结合$B=\dfrac{2\pi}{3}-C,A=\dfrac{\pi}{3}$以及三角恒等变换的公式进行化简与计算即可.

20．(本题 12 分)如图，矩形$ABCD$中，$AB=2,BC=1$，E为CD的中点，把 ADE沿AE翻折，使得平面$ADE\perp$平面$ABCE$.





（1）求证： $AD \perp BE$；

（2）在 CD **上确定一点** F**，使** $AD//$**平面** BEF；

（3）求四棱锥 $F-ABCE$ **的体积.**

【答案】（1）证明见解析；（2）线段 CD 上取 CD 的三等分点 F（靠近 C）；（3）$\dfrac{\sqrt{2}}{6}$.

【分析】

（1）先由勾股定理证明 $BE \perp AE$，再由面面垂直的性质得出 $BE \perp$平面 DAE，进而由线面垂直的性质得出线线垂直；

（2）作辅助线并证明 $AD//FG$，再由线面平行的判定定理求解即可；

（3）先由面面垂直的性质得出 $DO \perp$平面 $ABCE$，进而确定四棱锥 $F-ABCE$ 的高，最后得出体积.

【详解】

（1）证明：$\because$平面 $ADE \perp$平面 $ABCE$，平面 $ADE \cap$平面 $ABCE = AE$

又由已知可得 $AE = BE = \sqrt{2}$，$AB = 2$，$\therefore BE \perp AE$，则 $BE \perp$平面 DAE

$\because AD \subset$平面 DAE，$\therefore BE \perp AD$，故 $AD \perp BE$；

（2）连接 AC 交 BE 于 G，则 $\dfrac{CG}{GA} = \dfrac{CE}{AB} = \dfrac{1}{2}$，在线段 CD 上取 CD 的三等分点 F（靠近 C），

连接 FG，则 $\dfrac{CF}{CD} = \dfrac{CG}{CA} = \dfrac{1}{3}$，可得 $AD//FG$

而 $AD \not\subset$平面 $BEF, FG \subset$平面 BEF，则 $AD//$平面 BEF；

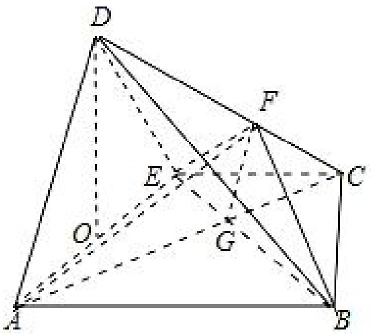
（3）取 AE 中点 O，连接 DO，则 $DO \perp AE$

又平面 $ADE \perp$平面 $ABCE$，且平面 $ADE \cap$平面 $ABCE = AE$

$\therefore DO \perp$平面 $ABCE$，在 $Rt\triangle ADE$ 中，可得 $DO = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

∵F为CD的三等分点F（靠近C），∴F到平面$ABCE$的距离为$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.

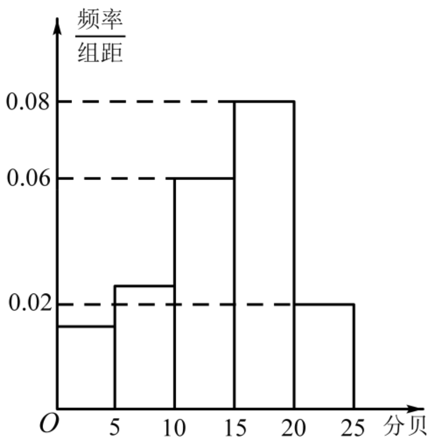
可得四棱锥$F-ABCE$的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(1+2)\times2\times\frac{\sqrt{2}}{6}=\frac{\sqrt{2}}{6}$.



【点睛】

关键点睛：在第三问中，要求四棱锥$F-ABCE$的体积，关键是想到四棱锥$F-ABCE$和四棱锥$D-ABCE$同底面，高成比例，从而得出四棱锥$F-ABCE$的体积.

21.(本题12分)人耳的听力情况可以用电子测听器检测，正常人听力的等级为$0-25dB$（分贝），并规定测试值在区间$(0,5]$为非常优秀，测试值在区间$(5,10]$为优秀．某校500名同学参加了听力测试，从中随机抽取了50名同学的测试值作为样本，制成如下频率分布直方图：



（1）从总体的500名学生中随机抽取1人，估计其测试值在区间$(0,10]$内的概率；

（2）已知样本中听力非常优秀的学生有4人，估计总体中听力为优秀的学生人数；

（3）现选出一名同学参加另一项测试，测试规则如下：四个音叉的发音情况不同，由强到弱的编号分别为1，2，3，4．测试前将音叉顺序随机打乱，被测试的同学依次听完后，将四个音叉按发音由强到弱重新排序，所对应的音叉编号分别为a_1，a_2，a_3，a_4（其中集合$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}=\{1,2,3,4\}$）．记$Y=|1-a_1|+|2-a_2|+|3-a_3|+|4-a_4|$，

可用 Y 描述被测试者的听力偏离程度，求 $Y \le 2$ 的概率．

【答案】（1）0.2；（2）60；（3）$\frac{1}{6}$．

【分析】

（1）由频率直方图得到 $\left(0,10\right]$ 内的频率，由频率即为对应区间的概率即可求区间 $\left(0,10\right]$ 内的概率；

（2）由（1），结合已知可得样本中听力为优秀的学生人数，由样本中各组人数的比例关系即可估计总体中听力为优秀的学生人数.

（3）由题设，列出所有 $Y \le 2$ 情况下 a_1，a_2，a_3，a_4 的组合数量，并写出所有情况的组合数量，应用古典概型求概率即可.

【详解】

（1）根据频率分布直方图知，样本中测试值在区间 $\left(0,10\right]$ 内的频率为

$1-\left(0.06+0.08+0.02\right)\times 5=1-0.8=0.2$，

以频率为概率，从总体的 500 名学生中随机抽取 1 人，估计其测试值在区间 $\left(0,10\right]$ 内的概率为 0.2．

（2）由（1）知：样本中听力为优秀的学生人数为 $0.2\times 50-4=6$，

∴估计总体中听力为优秀的学生人数为 $500\times\frac{6}{50}=60$．

（3）当 $a_1=1$ 时，序号 a_1，a_2，a_3，a_4 的情况为 6 种：

分别记为 $\left(1,2,3,4\right)$，$\left(1,2,4,3\right)$，$\left(1,3,2,4\right)$，$\left(1,3,4,2\right)$，$\left(1,4,2,3\right)$，$\left(1,4,3,2\right)$，

同理，当 $a_1=2,3,4$ 时，序号 a_1，a_2，a_3，a_4 的情况也分别为 6 种，

∴序号 a_1，a_2，a_3，a_4 所有的情况总数为 24 种.

当 $Y=0$ 时，$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=3$，$a_4=4$，

当 $Y=\left|1-a_1\right|+\left|2-a_2\right|+\left|3-a_3\right|+\left|4-a_4\right|=2$ 时，a_1，a_2，a_3，a_4 的取值为 $a_1=1$，$a_2=2$，

$a_3=4$，$a_4=3$，

或 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=2$，$a_4=4$，　或 $a_1=2$，$a_2=1$，$a_3=3$，$a_4=4$，

∴ $Y \le 2$ 时，序号 a_1，a_2，a_3，a_4 对应的情况为 4 种，即 $P\left(Y \le 2\right)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}$．

【点睛】

关键点点睛：

（1）应用频率确定指定样本区间中的人员被抽到的概率.

（2）根据样本中指定区间人数的所占比例，估计总体中对应区间的人数.

（3）应用列举法求古典概型的概率.

22．(本题 12 分)已知 O 为坐标原点，对于函数 $f(x)=a\sin x+b\cos x$，称向量 $\overrightarrow{OM}=(a,b)$ 为函数 $f(x)$ 的相伴特征向量，同时称函数 $f(x)$ 为向量 $\overrightarrow{OM}$ 的相伴函数.

（1）设函数 $g(x)=\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{6}\right)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)$，试求 $g(x)$ 的相伴特征向量 $\overrightarrow{OM}$；

（2）记向量 $\overrightarrow{ON}=(1,\sqrt{3})$ 的相伴函数为 $f(x)$，求当 $f(x)=\dfrac{8}{5}$ 且 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{6}\right)$，$\sin x$ 的值；

（3）已知 $A(-2,3)$，$B(2,6)$，$\overrightarrow{OT}=(-\sqrt{3},1)$ 为 $h(x)=m\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的相伴特征向量，$\varphi(x)=h\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3}\right)$，请问在 $y=\varphi(x)$ 的图象上是否存在一点 P，使得 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$. 若存在，求出 P 点坐标；若不存在，说明理由.

【答案】（1）$\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2}\right)$；（2）$\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$；（3）存在，点 $P(0,2)$.

【分析】

（1）根据三角函数诱导公式化简函数得 $g(x)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{3}{2}\cos x$，根据题意可可得特征向量；（2）根据题意可得相伴函数 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，再根据条件可得 $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{5}$，由 $\sin x=\sin\left[\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\pi}{3}\right]=\dfrac{1}{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ 最终得到结果；（3）根据三角函数图象变换规则求出 $h(x)$ 的解析式，设 $P\left(x,2\cos\dfrac{1}{2}x\right)$，根据条件列出方程式求出满足条件的点 P 坐标即可.

【详解】

解：（1）$\because g(x)=\sin\left(x+\dfrac{5\pi}{6}\right)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)=\sin x\cos\dfrac{5\pi}{6}+\cos x\sin\dfrac{5\pi}{6}+\cos x$

$\therefore g(x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x$ $\therefore g(x)$ 的相伴特征向量 $\overrightarrow{OM}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{3}{2}\right)$.

（2）向量 $\overrightarrow{ON}=(1,\sqrt{3})$ 的相伴函数为 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，

$\because f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{8}{5}$， $\therefore \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4}{5}$.

$\because x\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right)$， $\therefore x+\frac{\pi}{3}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$， $\therefore \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{5}$.

$\sin x=\sin\left[\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

（3）由 $\overrightarrow{OT}=(-\sqrt{3},1)$ 为 $h(x)=m\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}m\sin x-\frac{1}{2}m\cos x$ 的相伴特征向量知：

$m=-2$.

所以 $\varphi(x)=h\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=-2\sin\left(\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\pi}{6}\right)=-2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=2\cos\frac{x}{2}$.

设 $P\left(x,2\cos\frac{1}{2}x\right)$， $\because A(-2,3),B(2,6)$，

$\therefore \overrightarrow{AP}=\left(x+2,2\cos\frac{1}{2}x-3\right)$， $\overrightarrow{BP}=\left(x-2,2\cos\frac{1}{2}x-6\right)$，

又 $\because \overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$， $\therefore \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$ $\therefore (x+2)(x-2)+\left(2\cos\frac{1}{2}x-3\right)\left(2\cos\frac{1}{2}x-6\right)=0$.

$x^2-4+4\cos^2\frac{1}{2}x-18\cos\frac{1}{2}x+18=0$，

$\therefore \left(2\cos\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}\right)^2=\frac{25}{4}-x^2(*)$

$\because -2\le 2\cos\frac{1}{2}x\le 2$， $\therefore -\frac{13}{2}\le 2\cos\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}\le -\frac{5}{2}$，

$\therefore \frac{25}{4}\le\left(2\cos\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}\right)^2\le\frac{169}{4}$.

又 $\because \frac{25}{4}-x^2\le\frac{25}{4}$，

$\therefore$ 当且仅当 $x=0$ 时， $\left(2\cos\frac{1}{2}x-\frac{9}{2}\right)^2$ 和 $\frac{25}{4}-x^2$ 同时等于 $\frac{25}{4}$， 这时 $(*)$ 式成立.

$\therefore$ 在 $y=h(x)$ 图像上存在点 $P(0,2)$，使得 $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{BP}$.

【点睛】

关键点点睛：熟练使用三角函数诱导公式、三角恒等变换是本题的关键.本题还考查了三角函数图象变换后的解析式以及向量垂直的数量积关系，属于中档题.