

## 专题 09 立体几何初步



### 知识清单

#### 一、基础知识（理解去记）

##### （一）空间几何体的结构特征

（1）多面体——由若干个平面多边形围成的几何体。

围成多面体的各个多边形叫做多面体的面，相邻两个面的公共边叫做多面体的棱，棱与棱的公共点叫做顶点。

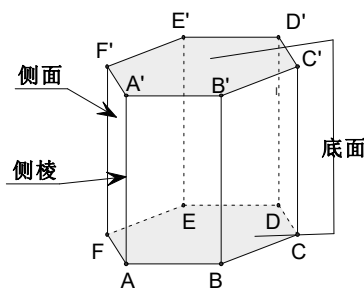
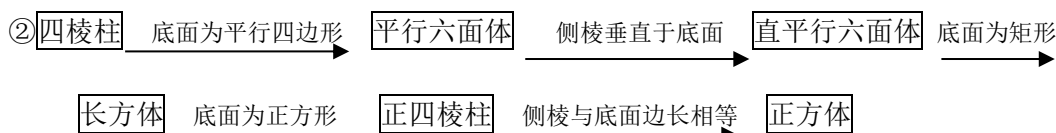
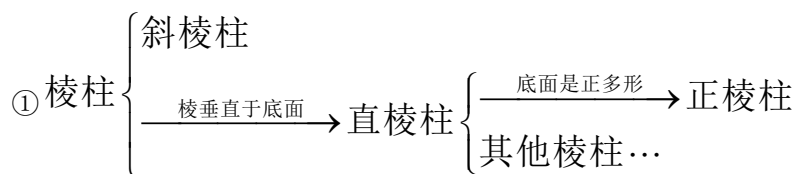
旋转体——把一个平面图形绕它所在平面内的一条定直线旋转形成的封闭几何体。其中，这条定直线称为旋转体的轴。

（2）柱，锥，台，球的结构特征

##### 1. 棱柱

1.1 棱柱——有两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的几何体叫做棱柱。

1.2 相关棱柱几何体系列（棱柱、斜棱柱、直棱柱、正棱柱）的关系：



##### 1.3 棱柱的性质：

- ①侧棱都相等，侧面是平行四边形；
- ②两个底面与平行于底面的截面是全等的多边形；
- ③过不相邻的两条侧棱的截面是平行四边形；
- ④直棱柱的侧棱长与高相等，侧面与对角面是矩形。

##### 补充知识点 长方体的性质：

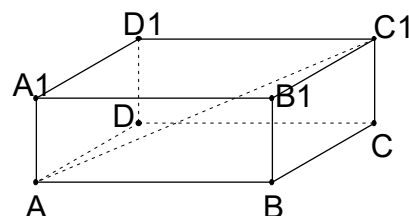
①长方体一条对角线长的平方等于一个顶点上三条棱的平方和；【如图】

$$AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2$$

②（了解）长方体的一条对角线  $AC_1$  与过顶点 A 的三条棱所成的角

分别是  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,

那么  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$ ,  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2$ ;



③(了解)长方体的一条对角线  $AC_1$  与过顶点 A 的相邻三个面所成的角分别是  $\alpha, \beta, \gamma$ ,

则  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$ ,  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$ .

**1.4 侧面展开图:** 正 n 棱柱的侧面展开图是由 n 个全等矩形组成的以底面周长和侧棱长为邻边的矩形.

**1.5 面积、体积公式:**

$$S_{\text{直棱柱侧}} = c \cdot h$$

$$S_{\text{直棱柱全}} = c \cdot h + 2S_{\text{底}}, V_{\text{棱柱}} = S_{\text{底}} \cdot h$$

(其中 c 为底面周长, h

为棱柱的高)

## 2. 圆柱

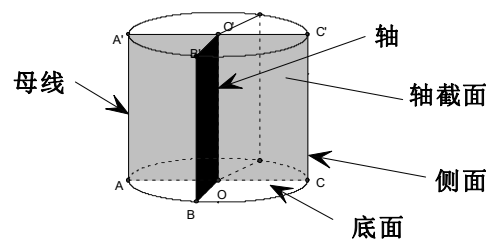
**2.1 圆柱**——以矩形的一边所在的直线为旋转轴, 其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体叫圆柱.

**2.2 圆柱的性质:** 上、下底及平行于底面的截面都是等圆; 过轴的截面(轴截面)是全等的矩形.

**2.3 侧面展开图:** 圆柱的侧面展开图是以底面周长和母线长为邻边的矩形.

**2.4 面积、体积公式:**

$$S_{\text{圆柱侧}} = 2\pi rh; S_{\text{圆柱全}} = 2\pi rh + 2\pi r^2, V_{\text{圆柱}} = S_{\text{底}} \cdot h = \pi r^2 h \quad (\text{其中 } r \text{ 为底面半径, } h \text{ 为圆柱高})$$



## 3. 棱锥

**3.1 棱锥**——有一个面是多边形, 其余各面是有一个公共顶点的三角形, 由这些面所围成的几何体叫做棱锥.

**正棱锥**——如果有一个棱锥的底面是正多边形, 并且顶点在底面的射影是底面的中心, 这样的棱锥叫做正棱锥.

**3.2 棱锥的性质:**

①平行于底面的截面是与底面相似的正多边形, 相似比等于顶点到截面的距离与顶点到底面的距离之比;

②正棱锥各侧棱相等, 各侧面是全等的等腰三角形;

③正棱锥中六个元素, 即侧棱、高、斜高、侧棱在底面内的射影、斜高在底面的射影、底面边长一半, 构成四个直角三角形。(如上图:  $SOB, SOH, SBH, OBH$  为直角三角形)

**3.3 侧面展开图:** 正 n 棱锥的侧面展开图是有 n 个全等的等腰三角形组成的.

$$S_{\text{正棱锥侧}} = \frac{1}{2} ch', S_{\text{正棱锥全}} = \frac{1}{2} ch' + S_{\text{底}}, V_{\text{棱锥}} = \frac{1}{3} S_{\text{底}} \cdot h.$$

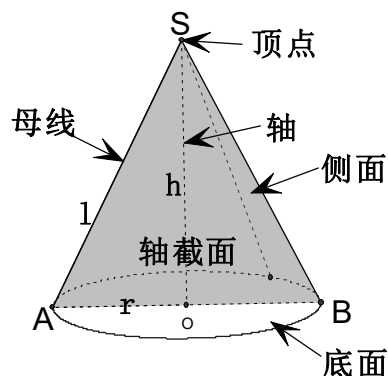
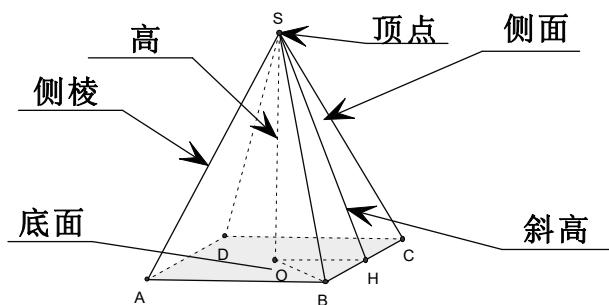
(其中 c 为底面周长,  $h'$  侧面斜高, h 棱锥的高)

## 4. 圆锥

**4.1 圆锥**——以直角三角形的一直角边所在的直线为旋转轴, 其余各边旋转而形成的曲面所围成的几何体叫圆锥.

**4.2 圆锥的性质:**

①平行于底面的截面都是圆, 截面直径与底面直径之比等于顶点到截面的距离与顶点到底面的距离之比;



②轴截面是等腰三角形；如右图：  $SAB$

③如右图：  $l^2 = h^2 + r^2$

**4.3 圆锥的侧面展开图：**圆锥的侧面展开图是以顶点为圆心，以母线长为半径的扇形。

**4.4 面积、体积公式：**

$$S_{\text{圆锥侧}} = \pi r l, S_{\text{圆锥全}} = \pi r(r + l), V_{\text{圆锥}} = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (\text{其中}$$

$r$  为底面半径， $h$  为圆锥的高， $l$  为母线长)

**5. 棱台**

**5.1 棱台**——用一个平行于底面的平面去截棱锥，我们把截面与底面之间的部分称为棱台。

**5.2 正棱台的性质：**

- ①各侧棱相等，各侧面都是全等的等腰梯形；
- ②正棱台的两个底面以及平行于底面的截面是正多边形；
- ③ 如右图：四边形  $O'MNO, O'B'BO$  都是直角梯形
- ④ 棱台经常补成棱锥研究。如右图：  
 $SO'M$  与  $SO'N$ ,  $S'O'B'$  与  $SO'B$  相似，注意考虑相似比。

**5.3 棱台的表面积、体积公式：**  $S_{\text{全}} = S_{\text{上底}} + S_{\text{下底}} + S_{\text{侧}}$ ,

$$V_{\text{棱台}} = \frac{1}{3} (S + \sqrt{SS'} + S') h, \quad (\text{其中 } S, S' \text{ 是上、下底面面积, } h \text{ 为}$$

棱台的高)

**6. 圆台**

**6.1 圆台**——用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面与截面之间的部分叫做圆台。

**6.2 圆台的性质：**

- ①圆台的上下底面，与底面平行的截面都是圆；
- ②圆台的轴截面是等腰梯形；
- ③圆台经常补成圆锥来研究。如右图：  
 $SO'A$  与  $SO'B$  相似，注意相似比的应用。

**6.3 圆台的侧面展开图是一个扇环；**

**6.4 圆台的表面积、体积公式：**  $S_{\text{全}} = \pi r^2 + \pi R^2 + \pi(R + r)l$ ,

$$V_{\text{圆台}} = \frac{1}{3} (S + \sqrt{SS'} + S') h = \frac{1}{3} (\pi r^2 + \pi r R + \pi R^2) h, \quad (\text{其中 } r,$$

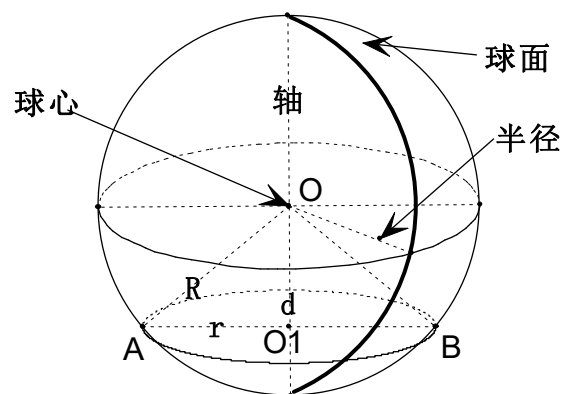
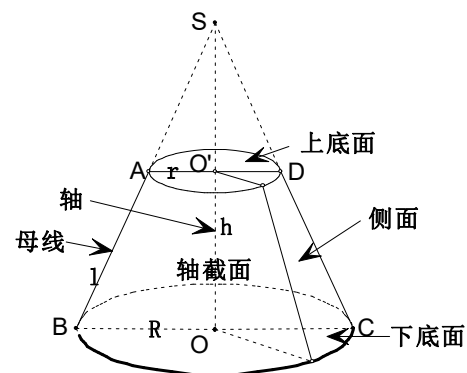
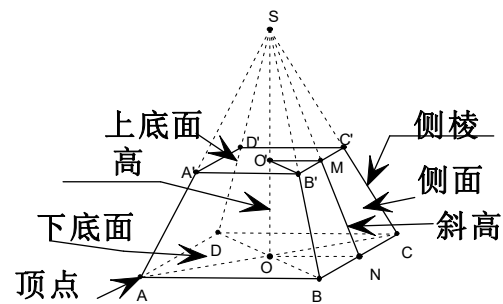
$R$  为上下底面半径， $h$  为高)

**7. 球**

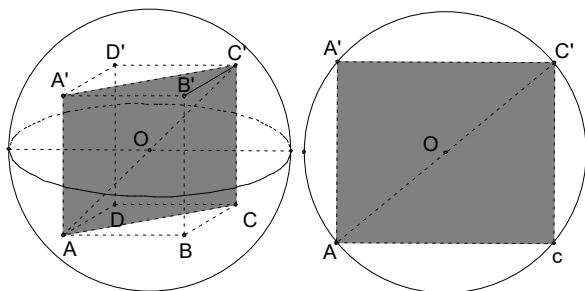
**7.1 球**——以半圆的直径所在直线为旋转轴，半圆旋转一周形成的旋转体叫做球体，简称球。或空间中，与定点距离等于定长的点的集合叫做球面，球面所围成的几何体叫做球体，简称球；

**7.2 球的性质：**

- ①球心与截面圆心的连线垂直于截面；
- ②  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$  (其中，球心到截面的距离为  $d$ 、球的半径为  $R$ 、截面的半径为  $r$ )



**7.3 球与多面体的组合体：**球与正四面体，球与长方体，球与正方体等的内接与外切.



注：球的有关问题转化为圆的问题解决.

**7.4 球面积、体积公式：**

$$S_{\text{球}} = 4\pi R^2, V_{\text{球}} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (\text{其中 } R \text{ 为球的半径})$$

**(二) 空间几何体的三视图与直观图**

根据最近几年高考形式上看，三视图的

考察已经淡化，所以同学只需了解即可

1.投影：区分中心投影与平行投影。平行投影分为正投影和斜投影。

2.三视图——是观察者从三个不同位置观察同一个空间几何体而画出的图形；

**正视图**——光线从几何体的前面向后面正投影，得到的投影图；

**侧视图**——光线从几何体的左面向右面正投影，得到的投影图；

**俯视图**——光线从几何体的上面向下面正投影，得到的投影图；

注：（1）俯视图画在正视图的下方，“长度”与正视图相等；侧视图画在正视图的右边，“高度”与正视图相等，“宽度”与俯视图。（简记为“正、侧一样高，正、俯一样长，俯、侧一样宽”。

（2）正视图，侧视图，俯视图都是平面图形，而不是直观图。

3.直观图：

**3.1 直观图**——是观察着站在某一点观察一个空间几何体而画出的图形。直观图通常是在平行投影下画出的空间图形。

**3.2 斜二测法：**

step1: 在已知图形中取互相垂直的轴  $Ox$ 、 $Oy$ ，（即取  $\angle xOy = 90^\circ$ ）；

step2: 画直观图时，把它画成对应的轴  $o'x'$ 、 $o'y'$ ，取  $\angle x'o'y' = 45^\circ$  (or  $135^\circ$ )，它们确定的平面表示水平平面；

step3: 在坐标系  $x'o'y'$  中画直观图时，已知图形中平行于数轴的线段保持平行性不变，平行于  $x$  轴（或在  $x$  轴上）的线段保持长度不变，平行于  $y$  轴（或在  $y$  轴上）的线段长度减半。

**结论：**一般地，采用斜二测法作出的直观图面积是原平面图形面积的  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  倍。

解决两种常见的题型时应注意：

（1）由几何体的三视图画直观图时，一般先考虑“俯视图”。

（2）由几何体的直观图画三视图时，能看见的轮廓线和棱画成实线，不能看见的轮廓线和棱画成虚线。

**二 点、直线、平面之间的位置关系**

**(一) 平面的基本性质**

1.平面——无限延展，无边界

1.1 三个定理与三个推论



**公理 1:** 如果一条直线上有两点在一个平面内，那么直线在平面内。

用途：常用于证明直线在平面内。

图形语言：

符号语言：

**公理 2:** 不共线的三点确定一个平面。 图形语言：

**推论 1:** 直线与直线外的一点确定一个平面。 图形语言：

**推论 2:** 两条相交直线确定一个平面。 图形语言：

**推论 3:** 两条平行直线确定一个平面。 图形语言：

用途：用于确定平面。

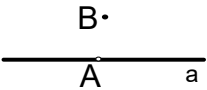
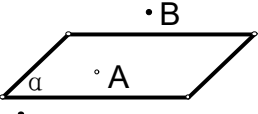
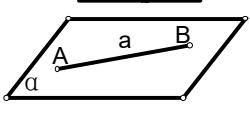
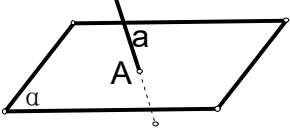
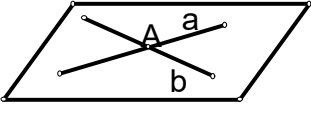
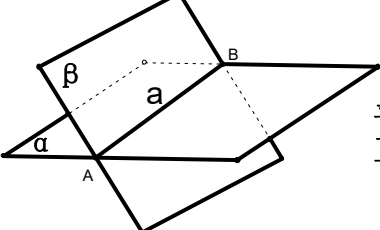
**公理 3:** 如果两个平面有一个公共点，那么它们还有公共点，这些公共点的集合是一条直线（两个平面的交线）。

用途：常用于证明线在面内，证明点在直线上。

图形语言：

符号语言：

图形语言，文字语言，符号语言的转化：

图形语言	文字语言	符号语言
	点A在直线a上 点B在直线a外	$A \in a$ $B \notin a$
	点A在平面α内 点B在平面α外	$A \in \alpha$ $B \notin \alpha$
	直线a在平面α内 直线b在平面α外	$a \subset \alpha$ $b \not\subset \alpha$
	直线a与平面α相交于点A	$a \cap \alpha = A$
	直线a与直线b交于点A	$a \cap b = A$
	平面α与平面β相交于直线a	$\alpha \cap \beta = a$

## （二）空间图形的位置关系

1. 空间直线的位置关系：
 
$$\begin{cases} \text{共面: } a \cap b = A, a // b \\ \text{异面: } a \text{ 与 } b \text{ 异面} \end{cases}$$

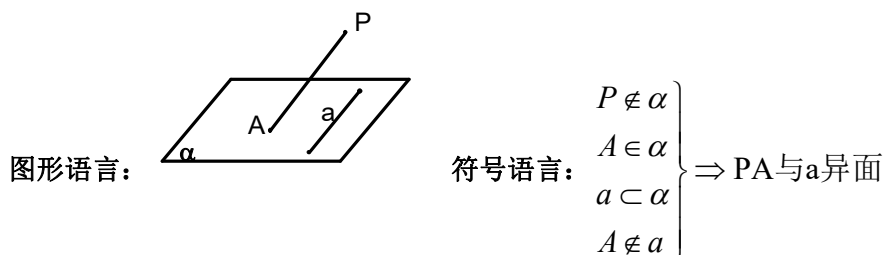
**平行线的传递公理:** 平行于同一条直线的两条直线互相平行。符号表述： $a // b, b // c \Rightarrow a // c$



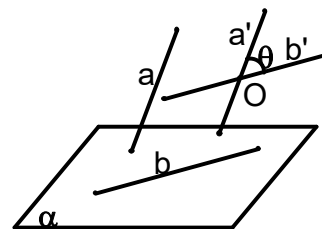
**等角定理：**如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行，那么这两个角相等或互补。

**异面直线：**(1) 定义：不同在任何一个平面内的两条直线——异面直线；

(2) 判定定理：连平面内的一点与平面外一点的直线与这个平面内不过此点的直线是异面直线。



**异面直线所成的角：**(1) 范围： $\theta \in (0^\circ, 90^\circ]$ ；(2) 作异面直线所成的角：平移法。



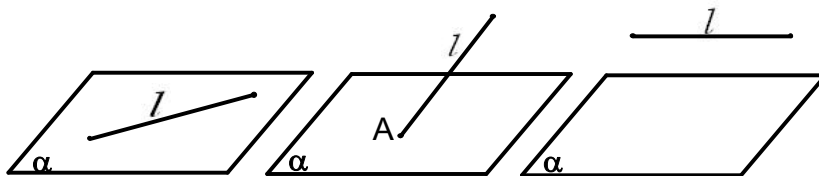
如右图，在空间任取一点 O，过 O 作  $a' // a, b' // b$ ，则  $a', b'$  所成的  $\theta$  角为

异面直线  $a, b$  所成的角。**特别地，找异面直线所成的角时，经常把一条异面直线平移到另一条异面直线的特殊点（如线段中点，端点等）上，形成异面直线所成的角。**

**2. 直线与平面的位置关系：**

$$\left\{ \begin{array}{l} l \subset \alpha \\ l \not\subset \alpha \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} l \cap \alpha = A \\ l // \alpha \end{array} \right.$$

图形语言：



**3. 平面与平面的位置关系：**

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{平行: } \alpha // \beta \\ \text{相交} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{斜交: } \alpha \cap \beta = a \\ \text{垂直: } \alpha \perp \beta \end{array} \right.$$

(三) 平行关系（包括线面平行，面面平行）

**1. 线面平行：**

① 定义：直线与平面无公共点。

② 判定定理：
$$\left. \begin{array}{l} a // b \\ a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a // \alpha \text{ (线线平行} \Rightarrow \text{线面平行) 【如图】}$$

③ 性质定理：
$$\left. \begin{array}{l} a // \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b \text{ (线面平行} \Rightarrow \text{线线平行) 【如图】}$$





④判定或证明线面平行的依据：(i) 定义法（反证）： $l \cap \alpha = \emptyset \Rightarrow l // \alpha$ （用于判断）；

(ii) 判定定理： $\left. \begin{array}{l} a // b \\ a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a // \alpha$  “线线平行  $\Rightarrow$  面面平行”（用于证明）；(iii)

$\left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ a \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a // \beta$  “面面平行  $\Rightarrow$  线面平行”（用于证明）；(4)  $\left. \begin{array}{l} b \perp a \\ b \perp \alpha \\ a \not\subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a // \alpha$ （用于

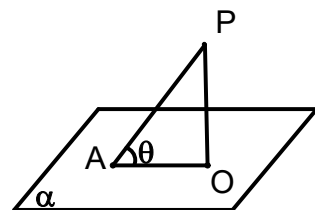
判断）；

## 2. 线面斜交： $l \cap \alpha = A$

①直线与平面所成的角（简称线面角）：若直线与平面斜交，则平面的斜线与该斜线在平面内射影的夹角。【如图】 $PO \perp \alpha$  于 O，则 AO 是 PA 在平面  $\alpha$  内的射影，则  $\angle PAO$  就是直线 PA 与平面  $\alpha$  所成的角。

范围： $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ ，注：若  $l \subset \alpha$  或  $l // \alpha$ ，则直线  $l$  与平面  $\alpha$  所成的角为  $0^\circ$ ；

若  $l \perp \alpha$ ，则直线  $l$  与平面  $\alpha$  所成的角为  $90^\circ$ 。

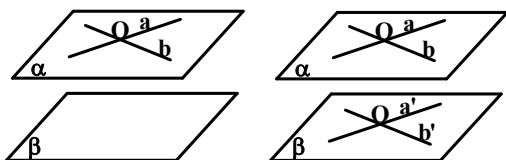


## 3. 面面平行：

①定义： $\alpha \cap \beta = \emptyset \Rightarrow \alpha // \beta$ ；

②判定定理：如果一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面，那么两个平面互相平行；

符号表述： $a, b \subset \alpha, a \cap b = O, a // \alpha, b // \alpha \Rightarrow \alpha // \beta$  【如下图①】



图①

图②

**推论：**一个平面内的两条相交直线分别平行于另一个平面的两条直线，那么这两个平面互相平行

符号表述： $a, b \subset \alpha, a \cap b = O, a' \subset \beta, b' \subset \beta, a // a', b // b' \Rightarrow \alpha // \beta$  【如上图②】

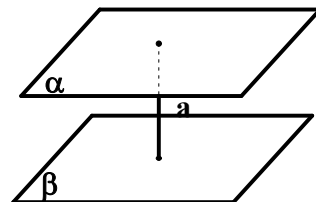
判定 2：垂直于同一条直线的两个平面互相平行. 符号表述：

$a \perp \alpha, a \perp \beta \Rightarrow \alpha // \beta$ . 【如右图】

③判定与证明面面平行的依据：(1) 定义法；(2) 判定定理及推论（常用）

(3) 判定 2

④面面平行的性质： $\left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ a \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a // \beta$ （面面平行  $\Rightarrow$  线面平行）；(2)



$$\left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b; \text{ (面面平行} \Rightarrow \text{线线平行) (3) 夹在两个平行平面间的平行线段相等. 【如图】}$$

等。【如图】

#### (四) 垂直关系 (包括线面垂直, 面面垂直)

##### 1. 线面垂直

①定义: 若一条直线垂直于平面内的任意一条直线, 则这条直线垂直于平面。

符号表述: 若任意  $a \subset \alpha$ , 都有  $l \perp a$ , 且  $l \not\subset \alpha$ , 则  $l \perp \alpha$ .

$$\text{②判定定理: } \left. \begin{array}{l} a, b \subset \alpha \\ a \cap b = O \\ l \perp a \\ l \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha \text{ (线线垂直} \Rightarrow \text{线面垂直)}$$

③性质: (1)  $l \perp \alpha, a \subset \alpha \Rightarrow l \perp a$  (线面垂直  $\Rightarrow$  线线垂直); (2)  $a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a // b$ ;

④证明或判定线面垂直的依据: (1) 定义 (反证); (2) 判定定理 (常用); (3)  $\left. \begin{array}{l} a // b \\ a \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha$

$$\text{(较常用); (4) } \left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ a \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \beta; \text{ (5) } \left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ a \cap \beta = b \\ a \subset \alpha \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \beta \text{ (面面垂直} \Rightarrow \text{线面垂直)}$$

直) 常用;

⑤三垂线定理及逆定理:

(I) 斜线定理: 从平面外一点向这个平面所引的垂线段与斜线段中,  $PO \perp \alpha$   
(1) 斜线相等  $\Leftrightarrow$  射影相等; (2) 斜线越长  $\Leftrightarrow$  射影越长; (3) 垂线段最短。

【如图】  $PB = PC \Leftrightarrow OB = OC$ ;  $PA > PB \Leftrightarrow OA > OB$

(II) 三垂线定理及逆定理: 已知  $PO \perp \alpha$ , 斜线  $PA$  在平面  $\alpha$  内的射影为  $OA$ ,  $a \subset \alpha$ ,

①若  $a \perp OA$ , 则  $a \perp PA$  —— 垂直射影  $\Rightarrow$  垂直斜线, 此为三垂线定理;

②若  $a \perp PA$ , 则  $a \perp OA$  —— 垂直斜线  $\Rightarrow$  垂直射影, 此为三垂线定理的逆定理;

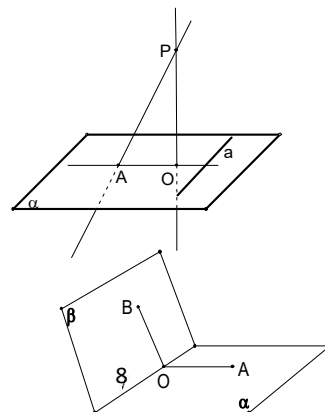
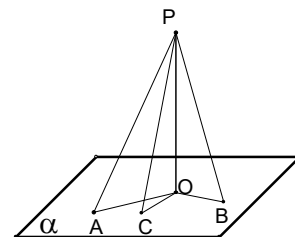
三垂线定理及逆定理的主要应用: (1) 证明异面直线垂直; (2) 作、证二面角的平面角; (3) 作点到线的垂线段; 【如图】

##### 3.2 面面斜交

①二面角: (1) 定义: 【如图】

$OB \perp l, OA \perp l \Rightarrow \angle AOB$  是二面角  $\alpha - l - \beta$  的平面角

范围:  $\angle AOB \in [0^\circ, 180^\circ]$





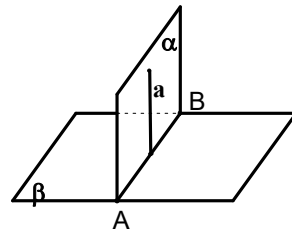
②作二面角的平面角的方法：（1）定义法；（2）三垂线法（常用）；（3）垂面法.

### 3.3 面面垂直

（1）定义：若二面角  $\alpha-l-\beta$  的平面角为  $90^\circ$ ，则  $\alpha \perp \beta$ ；

（2）判定定理：如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直.

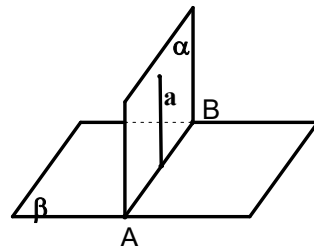
$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ a \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta \quad (\text{线面垂直} \Rightarrow \text{面面垂直})$$



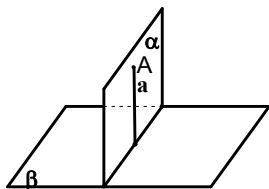
（3）性质：①若  $\alpha \perp \beta$ ，二面角的一个平面角为  $\angle MON$ ，则

$$\angle MON = 90^\circ;$$

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ a \cap \beta = AB \\ a \subset \alpha \\ a \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \beta \quad (\text{面面垂直} \Rightarrow \text{线面垂直});$$



$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ A \in \alpha \\ A \in a \\ a \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset \alpha$$



④

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ a \perp \beta \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset \alpha \text{ 或 } a \parallel \alpha$$

## 二、基础题型（必懂）

### 1、概念辨析题：

- （1）此题型一般出现在填空题，选择题中，解题方法可采用排除法，筛选法等。
- （2）对于判断线线关系，线面关系，面面关系等方面的问题，必须在熟练掌握有关的定理和性质的前提下，利用长方体，正方体，实物等为模型来进行判断。你认为正确的命题需要证明它，你认为错误的命题必须找出反例。
- （3）**相关例题：**课本和辅导书上出现很多这样的题型，举例说明如下：

### 2、证明题。证明平行关系，垂直关系等方面的问题。

#### （1）基础知识网络：



