

## 3 线性方程组

### 3.0 消元法

所谓一般线性方程组是指形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad (1)$$

的方程组，其中  $x_1, x_2, \dots, x_n$  代表  $n$  个未知量， $s$  是方程的个数， $a_{ij} (i = 1, 2, \dots, s, j = 1, 2, \dots, n)$  称为方程组的**系数**， $b_j (j = 1, 2, \dots, s)$  称为**常数项**。

所谓方程组 (1) 的一个**解**，就是指由  $n$  个数组成的有序数组，当  $\{x_i\}$  分别用它们带入后，可使 (1) 中所有等式恒成立。方程组 (1) 的解的全体称为它的**解集合**。

线性方程组 (1) 可以用下列矩阵来表示：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sd} & b_s \end{bmatrix}$$

下面探讨如何用一般消元法解一般线性方程组，例：

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = 1, \\ 4x_1 & +2x_2 & +5x_3 & = 4, \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = 5. \end{cases}$$

用第二个方程减去第一个方程的2倍，第三个方程减去第一个方程，方程组就变成：

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = 1, \\ & +4x_2 & -x_3 & = 2, \\ & +2x_2 & -x_3 & = 4. \end{cases}$$

再用第二个方程减去第三个方程的2倍，把第二、第三两个方程的次序互换，即得到：

$$\begin{cases} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = 1, \\ & +2x_2 & -x_3 & = 4, \\ & & +x_3 & = -6. \end{cases}$$

这样就很容易得到方程的解为  $x = [9, -1, -6]$ 。

上述操作实际上就是反复地对方程组进行变换，而这些变换都必须是初等变换才能保证不改变方程组的解。

**定义1：** 下列几类变换被称为**初等变换**：

1. 用一个非零的数乘以某一个方程；
2. 把一个方程的倍数加到另一个方程；
3. 互换两个方程的位置。

初等变换总是把方程组变成**同解的方程组**。

一般的线性方程组也总能通过初等变换得到一个阶梯形方程组：

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} c_{11}x_1 & +c_{12}x_2 & +\dots & +c_{1r}x_r & +\dots & +c_{1n}x_n & =d_1, \\ & +c_{22}x_2 & +\dots & +c_{2r}x_r & +\dots & +c_{2n}x_n & =d_2, \\ & & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & +c_{rr}x_r & +\dots & +c_{rn}x_n & =d_r, \\ & & & & & 0 & =d_{r+1}, \\ & & & & & 0 & =0, \\ & & & & & \dots & \\ & & & & & 0 & =0, \end{array} \right. \quad (2)$$

其中  $c_{ii} \neq 0 (i = 1, 2, \dots, r)$ 。显然, (2) 中所有的  $0 = 0$  式出现或者去除都不影响方程组的解。

若 (2) 中存在  $d_{r+1} \neq 0$ , 那么方程组 (2) 无解, 进而 (1) 亦无解。

若 (2) 中  $d_{r+1} = 0$  或者其中根本就没有 " $0 = 0$ " 方程时, 分两种情况:

1.  $r = n$ , 这时阶梯方程组为:

$$\left\{ \begin{array}{cccc} c_{11}x_1 & +c_{12}x_2 & +\dots & +c_{1n}x_n & =d_1, \\ & +c_{22}x_2 & +\dots & +c_{2n}x_n & =d_2, \\ & & & \dots & \\ & & & c_{nn}x_n & =d_n, \end{array} \right. \quad (3)$$

其中  $c_{ii} \neq 0$ , 这时,  $\{x_i\}$  的值可以逐一地唯一地决定, 方程组 (3) 也就是方程组 (1) 有唯一的解。

2.  $r < n$ , 这时阶梯形方程组为:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c_{11}x_1 & +c_{12}x_2 & +\dots & +c_{1r}x_r & +c_{1,r+1}x_{r+1} & +\dots & +c_{1n}x_n & =d_1, \\ & +c_{22}x_2 & +\dots & +c_{2r}x_r & +c_{2,r+1}x_{r+1} & +\dots & +c_{2n}x_n & =d_1, \\ & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & +c_{rr}x_r & +c_{r,r+1}x_{r+1} & +\dots & +c_{rn}x_n & =d_r, \end{array} \right. \quad (4)$$

其中  $c_{ii} \neq 0$ 。把 (4) 改写成:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} c_{11}x_1 & +c_{12}x_2 & +\dots & +c_{1r}x_r & =d_1 & -c_{1,r+1}x_{r+1} & -\dots & -c_{1n}x_n, \\ & +c_{22}x_2 & +\dots & +c_{2r}x_r & =d_2 & -c_{2,r+1}x_{r+1} & -\dots & -c_{2n}x_n, \\ & & & \dots & \dots & \dots & & \\ & & & +c_{rr}x_r & =d_r & -c_{r,r+1}x_{r+1} & -\dots & -c_{rn}x_n, \end{array} \right. \quad (5)$$

可见, 任给  $x_{r+1}, \dots, x_n$  一组值, 就可以唯一地定出  $x_1, x_2, \dots, x_r$  的值, 也就是定出方程组 (5) 的一个解。

一般地, 由 (5) 可以把  $x_1, x_2, \dots, x_r$  通过  $x_{r+1}, \dots, x_n$  表示出来, 这样一组表达式称为方程组 (1) 的一般解, 而  $x_{r+1}, \dots, x_n$  称为一组自由未知量。

以上就是用一般消元法解一般线性方程组的整个过程, 总的说就是: 首先用初等变换化线性方程组为阶梯方程组, 把最后的一些恒等式去掉。如果剩下的方程组出现违反常理的式子, 那么方程无解, 否则有解。在有解的情况下, 若  $r = n$ , 则方程组有唯一解; 如果  $r < n$ , 那么方程组有无穷多个解。

**定理1:** 在齐次线性方程组:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

中, 如果  $s < n$ , 那么它必有非零解。

矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1d} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2d} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sd} & b_s \end{bmatrix}$$

称为线性方程组 (1) 的增广矩阵。

### 3.1 $n$ 维向量空间

一个  $n$  元方程  $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$  可以用  $n+1$  元有序数组  $(a_1, a_2, \dots, a_n, b)$  来代表, 所谓方程之间的关系实际上就是代表它们的  $n+1$  元有序数组之间的关系。

**定义2:** 所谓数域  $P$  上的一个  $n$  维向量就是由数域  $P$  中  $n$  个数组成的有序数组

$$(a_1, a_2, \dots, a_n, b), \quad (6)$$

$a_i$  称为向量 (6) 的分量。

一般用小写希腊字母来表示向量, 例如:  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$

**定义3:** 向量相等,  $\alpha = \beta$ 。

**定义4:** 向量的加法,  $\gamma = \alpha + \beta$ 。

向量也满足交换律和结合律。

**定义5:** 零向量, 负向量。

**定义6:**  $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$ 。

**定义7:** 数量乘积,  $k$  为数,  $\alpha$  为向量,  $k\alpha$ 。

**定义8:** 以数域  $P$  中的数作为分量的  $n$  维向量的全体, 同时考虑到定义在它们上面的加法和数量乘法, 称为数域  $P$  上的  $n$  维向量空间。

行向量与列向量, 它们的区别只是写法上的不同。

### 3.2 线性相关性

所谓向量  $\alpha$  与  $\beta$  成比例就是说有一数  $k$ , 使得:  $\alpha = k\beta$ 。

在多个向量之间, 成比例的关系表现为线性组合。

**定义9:** 向量  $\alpha$  称为向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的一个线性组合, 如果有数域  $P$  中的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使得:

$$\alpha = k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + \cdots + k_s\beta_s.$$

定义  $n$  维单位向量:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = (1, 0, \dots, 0), \\ \varepsilon_2 = (0, 1, \dots, 0), \\ \dots\dots\dots \\ \varepsilon_n = (0, 0, \dots, 1) \end{cases} \quad (7)$$

任意一个  $n$  维向量  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  都是相应单位向量组的一个线性组合, 因为  $\alpha = a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + \cdots + a_n\varepsilon_n$ 。

零向量是任一向量组的线性组合 (只要系数全取 0 即可)。

当向量  $\alpha$  是向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  的一个线性组合时, 也说  $\alpha$  可以经向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出。

**定义10:** 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  中的每一个向量  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, t)$  都可以经向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出, 那么向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  就称为可以经向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  **线性表出**。如果两个向量组互相可以线性表出, 它们就称为**等价**。

如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  可以经向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出, 向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  可以经向量组  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$  线性表出, 那么向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t$  可以经向量组  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$  线性表出。

向量组之间的等价有以下性质:

1. 自反性;
2. 对称性;
3. 传递性。

**定义11:** 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$  中有一个向量可以由其余的向量线性表出, 那么向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  称为**线性相关**。

任意一个包含零向量的向量组一定是线性相关的。线性相关的定义还可以用另一个说法:

**定义11':** 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 1)$  称为**线性相关**, 如果有数域  $P$  中不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使得:

$$k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 + \dots + k_s \alpha_s = 0. \quad (8)$$

**定义12:** 一向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 1)$  不线性相关, 即没有不全为零的数  $k_1, k_2, \dots, k_s$ , 使得 (8) 成立, 称其为**线性无关**; 或者说, 一向量组称为线性无关, 如果可由 (8) 推出  $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$ 。

如果一向量组的一部分线性相关, 那么这个向量组就线性相关。如果一向量组线性无关, 那么它的任意一个非空的部分组也线性无关。

向量组  $\alpha$  线性相关就表示  $\alpha = 0$ 。(只有一个向量的向量组)

由  $n$  维单位向量  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  组成的向量组是线性无关的。

向量组线性无关的充要条件是以其作为系数的齐次线性方程组只有零解。(每个向量有  $n$  个分量, 就有  $n$  个方程; 有  $s$  个向量, 就有  $s$  个自变量。)(即每一个向量的第  $i$  个分量作为第  $i$  个方程的系数)

如果一个  $n$  维向量组线性无关, 那么在每一个向量上添一个分量所得到的  $n + 1$  维的向量组也线性无关。

**定理2:** 设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  与  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  是两个向量组, 如果

1. 向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可以经  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出;
2.  $r > s$ ,

那么向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  必线性相关。

**推论1:** 如果向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  可以经向量组  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  线性表出, 且  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  线性无关, 那么  $r \leq s$ 。

**推论2:** 任意  $n + 1$  个  $n$  维向量必线性相关。

**推论3:** 两个线性无关的等价的向量组, 必含有相同个数的向量。

**定义13:** 一向量组的一个部分组称为一个**极大线性无关组**, 如果这个部分组本身是线性无关的, 并且从这向量组中任意添一个向量(如果还有的话), 所得的部分向量组都线性相关。

一个线性无关向量组的极大线性无关组就是这个向量组自身。任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价。

向量组的极大线性无关组不是唯一的，但是其任意的两个极大线性无关组都是等价的，因为它们都与原向量组等价。

**定理3：**一向量组的极大线性无关组都含有相同个数的向量。

**定义14：**向量组的极大线性无关组所含向量的个数称为这个向量组的秩。

一个向量组线性无关的充要条件是它的秩与它所含向量的个数相同。

等价的向量组必有相同的秩。

且：含有非零向量的向量组一定有极大线性无关组，且任一个无关的部分组都可以扩充成一个极大线性无关组。全部由零向量组成的向量组没有极大线性无关组。规定这样的向量组秩为零。

### 3.3 矩阵的秩

**定义15：**所谓矩阵的**行秩**就是指矩阵的行向量的秩，矩阵的**列秩**就是矩阵的列向量组的秩。

易求得，矩阵的 行秩 = 列秩。

**定义16：**矩阵的  $k$  阶子式。

这个子式一般作为行列式，在定义矩阵的秩时需要利用子式行列式的值。

**定义17：**矩阵  $A$  中最高阶非零子式的阶数称为矩阵  $A$  的秩。当  $A$  为零矩阵时称  $A$  的秩为零。

**定理4：**矩阵的秩 = 矩阵的列秩 = 矩阵的行秩。

**推论1：**矩阵的初等列变换和初等行变换皆不改变该矩阵的秩。

**推论2：**矩阵的秩等于矩阵在初等行变换下的阶梯形矩阵中非零行的数目。

**推论3：**设矩阵在进行初等行变换后得到的阶梯形矩阵如下，

$$A = \begin{bmatrix} \cdots & 0 & b_{1i_1} & b_{1i_2} & \cdots & b_{1i_r} & \cdots & b_{1i_n} \\ \cdots & 0 & 0 & b_{2i_2} & \cdots & b_{2i_r} & \cdots & b_{2i_n} \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{ri_r} & \cdots & b_{ri_n} \\ \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}$$

则  $A$  中的第  $i_1, i_2, \dots, i_r$  列组成它的列向量组的一个极大线性无关组。

**推论4：**若矩阵是方阵，则矩阵的列(行)向量组线性相关的充要条件是矩阵的行列式的值为零；矩阵的列(行)向量组线性无关的充要条件是矩阵的行列式不等于零。

**定理5：** $n$  个变量  $n$  个方程的齐次线性方程组 ( $b_i=0$ ) 有非零解的充要条件就是它的系数矩阵的行列式的值为零；只有零解的充要条件是系数矩阵的行列式的值不等于零。

**定理6(克拉默法则及其逆定理)：** $n$  个变量  $n$  个方程的非齐次线性方程组 ( $b_i$  不全为 0) 有唯一解的充要条件是它的系数矩阵的行列式的值不等于零。

### 3.4 线性方程组有解判别定理

对于线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \end{cases} \quad (9)$$

引入向量：

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{s1} \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{s2} \end{bmatrix}, \dots, \alpha_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{sn} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_s \end{bmatrix},$$

于是线性方程组 (9) 可以改写成向量方程：

$$x_1 \alpha_1 + x_2 \alpha_2 + \dots + x_n \alpha_n = \beta.$$

显然，线性方程组 (1) 有解的充要条件为向量  $\beta$  可以表成向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  的线性组合。

**定理7(线性方程组有解判别定理)：** 线性方程组 (9) 有解的充要条件是它的系数矩阵与增广矩阵具有相同的秩。（不需要方阵）

## 3.5 线性方程组解的结构

对于齐次线性方程组，易知它的解具有下面两个重要性质：

1. 两个解的和还是齐次线性方程组的解。
2. 一个解的倍数还是方程组的解。

综上，还可以得到：解的线性组合还是方程组的解。

**定义18：** 齐次线性方程组的一组解  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$  称为齐次线性方程组的一个**基础解系**，如果：

1. 齐次线性方程组的任一个解都能表成  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$  的线性组合；
2.  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t$  线性无关。

**定理8：** 在齐次线性方程组有非零解的情况下，它有基础解系，并且基础解系所含解的个数等于  $n - r$ ，这里  $r$  表示系数矩阵的秩， $n$  为总的变量个数。（ $n - r$  也就是自由未知量的个数）

易得，任何一个线性无关的与某一个基础解系等价的向量组都是基础解系。

非齐次线性方程组也就是一般线性方程组，将所有常数项都换成零，就得到了相对应的齐次线性方程组，这个齐次线性方程组称为原一般方程组的**导出组**。

非齐次线性方程组的解与它的导出组的解有密切的关系：

1. 非齐次线性方程组的两个解的差是它的导出组的解。
2. 非齐次线性方程组的一个解与它导出组的一个解的和还是这个非齐次线性方程组的解。

**定理9：** 如果  $\gamma_0$  是非齐次线性方程组的一个特解，那么它的任一个解  $\gamma$  都可以表成：

$$\gamma = \gamma_0 + \eta,$$

其中  $\eta$  是该非齐次线性方程组的导出组的一个解。因此，对于任意一个特解  $\gamma_0$ ，当  $\eta$  取遍它的导出组的全部解时，就得到了该非齐次线性方程组的全部解。

**推论：** 在非齐次线性方程组有解的条件下，解是唯一的充要条件是它的导出组只有零解。

### **\*3.6 二元高次方程组**