4 矩阵

常用大写的拉丁字母 A, B 或者 $(a_{ij}), (b_{ij}), \ldots$ 来表示矩阵。有时候，为了指明矩阵的行数和列数，可以把 $s \times n$ 矩阵写成 $A_{s\times n}, B_{s\times n}, \ldots$ 或者 $(a_{ij})_{s\times n}, (b_{ij})_{s\times n}, \ldots$

要注意矩阵的符号与行列式的符号的区别。

完全一样的矩阵才叫做相等。

4.0 矩阵的运算

矩阵加法：

设：

$$A = (a_{ij})_{s\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}, \ B = (b_{ij})_{s\times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & b_{s2} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix}$$

是两个 $s \times n$ 矩阵，则矩阵：

$$C = (c_{ij})_{s\times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{s\times n} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1}+b_{s1} & a_{s2}+b_{s2} & \cdots & a_{sn}+b_{sn} \end{bmatrix}$$

称为 A 和 B 的**和**，记为 $C = A + B$ 。

矩阵的加法就是矩阵对应元素相加。能进行相加的矩阵必须具有相同行和列，即必须是**同型矩阵**。

矩阵的加法满足结合律、交换律。且 $A + O = A$ ，$A + (-A) = O$ (这也定义了矩阵的减法 $A - B = A + (-B)$)。

重要性质： $秩(A+B) \leqslant 秩(A) + 秩(B)$

矩阵乘法：

设两矩阵 $A = (a_{ij})_{s\times n}$，$B = (b_{ij})_{s\times n}$ ，那么矩阵 $C = (c_{ij})_{s\times n}$，其中：

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

称为 A 和 B 的**乘积**，记为 $C = AB$ 。

矩阵 A 与 B 的乘积 C 的第 i 行第 j 列的元素等于第一个矩阵 A 的第 i 行与第二个矩阵 B 的第 j 列的对应元素乘积的和。能进行矩阵乘法的两个矩阵，必须满足前一个矩阵的列数等于后一个矩阵的行数。

所以矩阵乘法不满足交换律。且一般 $AB \neq BA$ 。但满足结合律，即 $(AB)C = A(BC)$ 。

> **定义：**　主对角线上元素全是 1 ，其余元素全是 0 的 $n \times n$ 矩阵：
>
> $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

> 称为 n 阶**单位矩阵**，记为 E_n (也有记为 I_n)，或者在不致引起混淆的时候简单记作 E 。显然有
>
> $$A_{s\times n}E_n = A_{s\times n},\ E_nA_{s\times n} = A_{s\times n}.$$

矩阵的乘积和加法还都适合分配率。

数量乘积：

矩阵：

$$\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{s1} & ka_{s2} & \cdots & ka_{sn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $A = (a_{ij})_{s\times n}$ 与数 k 的**数量乘积**，记为 kA 。数量乘积就是用数 k 乘矩阵的每个元素。

数量乘积也满足结合律等等等。

矩阵 $kE = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k \end{bmatrix}$ 通常称为**数量矩阵**。

如果 A 是一个 $n\times n$ 矩阵，那么有 $kA = (kE)A = A(kE)$ 。也就是说，数量矩阵与所有方阵作乘法是可交换的。

矩阵转置

设矩阵：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix},$$

所谓 A 的**转置**就是指矩阵：

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{s1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

显然，$s\times n$ 矩阵的转置是 $n\times s$矩阵。

显然矩阵的转置满足：$(A^T)^T = A,\ (A+B)^T = A^T + B^T,\ (AB)^T = B^TA^T,\ (kA)^T = kA^T$ 。

4.1 矩阵乘积的行列式与秩

> **定理1：** 设 A, B 是数域 P 上的两个 $n\times n$ 矩阵，那么 $|AB| = |A|\cdot|B|$ ，即矩阵乘积的行列式等于它的因子的行列式的乘积。

> **推论1：** 设 $A_1, A_2, \ldots, A_m$ 都是数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵，于是 $|A_1A_2\ldots A_m| = |A_1||A_2|\ldots|A_m|$。

退化：

> 数域 P 上的 $n\times n$ 矩阵 A 称为**非退化的**，如果 $|A|\neq 0$；否则称为**退化的**。

显然，一 $n\times n$ 矩阵是非退化的充要条件的它的秩等于 n。

> **推论2：** 设 A,B 是数域 P 上 $n\times n$ 矩阵，矩阵 AB 为非退化的充要条件是 A,B 中至少有一个是退化的。

> **定理2：** 设 A 是数域 P 上 $n\times m$ 矩阵，B 是数域 P 上 $m\times s$ 矩阵，于是：
>
> $$\text{秩}\,(AB)\leqslant min[\text{秩}\,(A),\text{秩}\,(B)],$$
>
> 即乘积的秩不超过各因子的秩。

> **推论：** 如果 $A+A_1A_2\dots A_t$，那么 $\text{秩}\,(A)\leqslant\min\limits_{1\leqslant j\leqslant t}\text{秩}\,(A_j)$。

4.2 矩阵的逆

> **定义：** n 阶方阵 A 称为**可逆**的，如果有 n 阶方阵 B，使得
>
> $$AB=BA=E. \tag{1}$$

逆矩阵记作 A^{-1}，即有 $A^{-1}A=AA^{-1}=E$。

> **定义：** 设 A_{ij} 是矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式，矩阵：
>
> $$A^*=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$$
>
> 称为 A 的**伴随矩阵**。

由行列式展开公式可得：

$$AA^*=A^*A=\begin{bmatrix}d&0&\dots&0\\0&d&\dots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\dots&d\end{bmatrix}=dE,\text{其中}\,d=|A|\,.$$

如果 $d=|A|\neq 0$，那么由上式可得 $A(\frac{1}{d}A^*)=(\frac{1}{d}A^*)A=E$。

由此还能推得：

> **定理3：** 矩阵 A 可逆的充要条件是 A 非退化，而 $A^{-1}=\frac{1}{d}A^*\;\;(d=|A|\neq 0)$。

如果 $d=|A|\neq 0$，那么 $|A^{-1}|=d^{-1}$。

> 假设下式中的矩阵与矩阵的变式都可逆，则有：
>
> $$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T,\;(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

> **定理4：** A 是一个 $s\times n$ 矩阵，如果 P 是 $s\times s$ 可逆矩阵，Q 是 $n\times n$ 可逆矩阵，那么：
>
> $$\text{秩}\,(A)=\text{秩}\,(PA)=\text{秩}\,(AQ)\,.$$

4.3 矩阵的分块

矩阵的分块就是把一个大矩阵看成是由一些小矩阵组成的，也就是把这些小矩阵看成一个数来处理。

一个例子：

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-1&2&1&0\\1&1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_2&O\\A_1&E_2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}$$

在矩阵 A 中，E_2 代表 2 阶单位矩阵，而

$$A_1=\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix},\ O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

在矩阵 B 中，

$$B_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&2\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}3&2\\0&1\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}1&0\\-1&-1\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}4&1\\2&0\end{bmatrix}.$$

在计算矩阵 AB 时，就可以按照小矩阵来计算，即：

$$AB=\begin{bmatrix}E_2&O\\A_1&E_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1B_{12}+B_{22}\end{bmatrix}.$$

低阶矩阵总比高阶矩阵容易计算，最终计算可求得

$$A=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\-1&2&0&1\\-2&4&1&1\\-1&1&5&3\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{array}{c}\\ s_1\\ s_2\\ \vdots\\ s_t\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}n_1&n_2&\dots&n_l\end{array}\\ \begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&\dots&A_{1l}\\A_{21}&A_{22}&\dots&A_{2l}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{t1}&A_{t2}&\dots&A_{tl}\end{bmatrix}\end{array},$$

$$B=\begin{array}{c}\\ n_1\\ n_2\\ \vdots\\ n_l\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}m_1&m_2&\dots&m_r\end{array}\\ \begin{bmatrix}B_{11}&A_{12}&\dots&A_{1r}\\B_{21}&A_{22}&\dots&A_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\B_{l1}&A_{l2}&\dots&A_{lr}\end{bmatrix}\end{array},$$

其中每个 A_{ij} 是 $s_i\times n_j$ 小矩阵，每个 B_{ij} 是 $n_i\times m_j$ 小矩阵，于是有

$$C=AB=\begin{array}{c}\\ s_1\\ s_2\\ \vdots\\ s_t\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}m_1&m_2&\dots&m_r\end{array}\\ \begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&\dots&C_{1r}\\C_{21}&C_{22}&\dots&C_{2r}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\C_{t1}&C_{t2}&\dots&C_{tr}\end{bmatrix}\end{array},$$

其中

$$C_{pq}=A_{p1}B_{1q}+A_{p2}B_{2q}+\cdots+A_{pl}B_{lq}=\sum_{k=1}^{l}A_{pk}B_{kq},p=1,2,\ldots,t;q=1,2,\ldots,r.$$

设矩阵 $D=\begin{bmatrix}A & O\\ C & B\end{bmatrix}$，则有 $|D|=|A||B|$，当 A,B 可逆时，D 也可逆，设 $D^{-1}=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}$，由 $DD^{-1}=\begin{bmatrix}E_k & O\\ O & E_r\end{bmatrix}$ 可得 $D^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & O\\ -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1}\end{bmatrix}$。

特别的，当 $C=O$ 时，有

$$\begin{bmatrix}A & O\\ O & B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1} & O\\ O & B^{-1}\end{bmatrix}.$$

形为:

$$\begin{bmatrix}a_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_2 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & a_l\end{bmatrix}$$

的矩阵，其中 $a_i(i=1,2,\ldots,l)$ 是数，通常称为**对角矩阵**，而形为:

$$\begin{bmatrix}A_1 & & & O\\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & A_l\end{bmatrix}$$

的矩阵，其中 $A_i(i=1,2,\ldots,l)$ 是 $n_i\times n_i$ 矩阵，通常称为**准对角矩阵**。

4.4 初等矩阵

由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**。

> **引理：** 对一个 $s\times n$ 矩阵 A 作一初等行变换就相当于在 A 的左边乘相应的 $s\times s$ 初等矩阵，对 A 作一初等矩阵列变换就相当于在 A 的右边乘相应的 $n\times n$ 初等矩阵。

> **定义：** 矩阵 A 与 B 称为**等价**的，如果 B 可以由 A 经过一系列初等变换得到。

（矩阵的等价具有自反性，对称性，传递性）

> **定理5：** 任意一个 $n\times n$ 矩阵 A 都与一形式为
>
> $$\begin{bmatrix}1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0\end{bmatrix}$$
>
> 的矩阵等价，它称为矩阵 A 的标准形，主对角线上的 1 的个数等于 A 的秩（1 的个数可以是零）。

矩阵 A,B 等价的充要条件是有初等矩阵 $P_1,P_2,\ldots,P_l,Q_1,Q_2,\ldots,Q_l$，使得 $A=P_1P_2\ldots P_lBQ_1Q_2\ldots Q_l$。

> **定理6：** n 阶矩阵 A 为可逆的充要条件是它能表成一些初等矩阵的乘积:
>
> $$A=Q_1Q_2\ldots Q_m.$$

> **推论1：** 两个 $s\times n$ 矩阵 A,B 等价的充要条件为，存在可逆的 s 阶矩阵 P 与可逆的 n 阶矩阵 Q 使得
>
> $$A=PBQ.$$
>
> **推论2：** 可逆矩阵总可以经过一系列初等行变换化成单位矩阵。

这就可以得到求逆矩阵的另一种方式，用一系列初等行变换可以把可逆矩阵化为单位矩阵，那么同样使用相同的初等行变换去化单位矩阵，就将得到原矩阵的逆矩阵。把 A,E 这两个 $n\times n$ 矩阵拼凑在一起，作成一个 $n\times 2n$ 矩阵 $[A\quad E]$，对这个矩阵的初等变换可以写成 $P_m\ldots P_1(A\quad E)=(P_m\ldots P_1A\quad P_m\ldots P_1E)=(E\quad A^{-1})$。用初等行变换把 $[A\quad E]$ 的左边化成 E，这时，右边的部分就是 A^{-1}。

举例:

$$\text{设 } A=\begin{bmatrix}0&1&2\\1&1&4\\2&-1&0\end{bmatrix},\ \text{求 } A^{-1}.$$

$$\begin{bmatrix}0&1&2&1&0&0\\1&1&4&0&1&0\\2&-1&0&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\2&-1&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&-3&-8&0&-2&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&2&1&0&0\\0&0&-2&3&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&4&0&1&0\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&-2&3&-2&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&0&6&-3&2\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&-2&3&-2&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&-2&3&-2&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&2&-1&1\\0&1&0&4&-2&1\\0&0&1&-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$\text{所以 } A^{-1}=\begin{bmatrix}2&-1&1\\4&-2&1\\-\frac{3}{2}&1&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

4.5 分块乘法的初等变换

将某个单位矩阵进行分块:

$$\begin{bmatrix}E_m&O\\O&E_n\end{bmatrix}$$

对它进行两行(列)对换，某一行(列)左乘(右乘)一个矩阵 P，一行(列)加上另一行(列)的 P (矩阵)倍数，就可以得到如下类型的一些矩阵:

$$\begin{bmatrix}O&E_m\\E_n&O\end{bmatrix},\begin{bmatrix}P&O\\O&E_n\end{bmatrix},\begin{bmatrix}E_m&O\\O&P\end{bmatrix},\begin{bmatrix}E_m&P\\O&E_n\end{bmatrix},\begin{bmatrix}E_m&O\\P&E_n\end{bmatrix},$$

和初等矩阵与初等变换的关系一样，用这些矩阵左乘任一个分块矩阵

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

只要分块乘法能够进行，其结果就是对它进行相应的变换，即

$$\begin{bmatrix} O & E_m \\ E_n & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C & D \\ A & B \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} P & O \\ O & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA & PB \\ C & D \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} E_m & O \\ P & E_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & B \\ C+PA & D+PB \end{bmatrix}.$$

(右乘矩阵也有相应的结果，这里略去不写)