2 行列式

2.0 引言

对于二元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，此时方程组有唯一解，即:

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

称 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为二阶行列式，用符号表示为:

$$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

于是上述解可以用二阶行列式叙述为:

当二阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，该方程组有唯一解，解为:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},x_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

对于三元线性方程组有相仿的结论，设有三元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

称代数式 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}$ 为三阶行列式，用符号表示为:

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

我们有：当三阶行列式:

$$d=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\neq 0$$

时，上述三元线性方程组有唯一解，解为:

$$x_1=\frac{d_1}{d},x_2=\frac{d_2}{d},x_3=\frac{d_3}{d},$$

其中:

$$d_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, d_1=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, d_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

进而还可以推广到 n 元线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{23}x_3=b_2 \\ \quad \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

2.1 排列

> **定义1:** 由 $1,2,\dots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n阶排列** 。

2431 是一个 4 阶排列，45321 是一个 5 阶排列，n 阶排列的总数即为 $n_{阶乘}$ ，记作 $n!$ 。显然 $12\dots n$ 也是一个 n 阶排列，该排列按照递增的顺序排起来，称为*自然顺序*，其他排列都或多或少地破坏了自然顺序。

> **定义2:** 在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个**逆序**，一个排列中逆序的总数就称为这个排列的**逆序数**。

例如 2431 中，21 43 41 31 是逆序，2341 的逆序数就是 4 。排列 $j_1j_2\dots j_n$ 的逆序数记为 $\tau(j_1j_2\dots j_n)$ 。

> **定义3:** 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**，逆序数为奇数的排列称为**奇排列**。

把一个排列中某两个数的位置互换，而其余的数不动，就得到另一个排列。这样一个变换称为**对换**。经过 $1,2$ 对换，排列 2431 就变成了 1432。

> **定理1:** 对换改变排列的奇偶性。

> **推论:** 在全部 n 阶排列中，奇偶排列的个数相等，各有 $n!/2$ 个。

> **定理2:** 任意一个 n 阶排列与排列 $12\dots n$ 都可以经过一系列对换互变，并且所作对换的个数与这个排列有相同的奇偶性。

2.2 n 阶行列式

由二阶和三阶行列式的形式可以看出，行列式都是一些乘积的代数和，而每一项乘积都是由行列式中位于不同的行和不同的列的元素构成的，并且展开式恰恰就是由所有这种可能的乘积组成。

> **定义4:** n 阶行列式:
>
> $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$
>
> 等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积
>
> $$a_{1j_1}a_{2j_2}\dots a_{nj_n} \tag{1}$$
>
> 的代数和，这里 $j_1j_2\dots j_n$ 是 $1,2,\dots,n$ 的一个排列，(1) 中每一项都按照下列规则带有符号：当 $j_1j_2\dots j_n$ 是偶排列时，(1) 带正号，当 $j_1j_2\dots j_n$ 是奇排列时，(1) 带负号。
>
> 这一定义也可以写成:

> $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \ldots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \ldots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}.$$

特殊的行列式——上三角形行列式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}. \tag{2}$$

在**主对角线**下方的元素全为零（相应的还有下三角形行列式）,

作为 (2) 的特殊情况，有**对角形行列式**如下，即除主对角线以外的元素全为零的行列式:

$$\begin{vmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{vmatrix} = d_1 d_2 \ldots d_n, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

由对定义1的理解易得行列式具有如下性质:

> **性质1：** 行列互换，行列式不变。
>
> $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质1中右边的行列式称为左边行列式的**转置行列式**。

2.3 n 阶行列式的性质

> **性质2：**
>
> $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

也就是说，行列式一行的公因子可以提出去，或者说以一数乘行列式的一行就相当于用这个数乘此行列式。

易得，如果行列式中有一行（或一列）为零，那么行列式为零。

> **性质3：**
>
> $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \cdots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

如果某一行是两组数的和，那么这个行列式就等于两个行列式的和，而这两个行列式除这一行以外的元素都与原来行列式的对应位置的元素一致。

> **性质4：** 如果行列式中有两行相等，那么行列式为零。

> **性质5：** 如果行列式中两行成比例，那么行列式为零。

> **性质6：** 把一行的倍数加到另一行，行列式不变。

> **性质7：** 对换行列式中两行的位置，行列式反号。

2.4 行列式的计算

矩阵与矩阵的初等行变换：

> **定义5：** 由 sn 个数排成的 s 行（横） n 列（纵）的表
>
> $$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix} \text{或者} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} \tag{3}$$
>
> 称为一个 $s \times n$ 矩阵。

数 $a_{ij}(i=1,2,\dots,s,j=1,2,\dots,n)$ 称为矩阵的 (3) 的 (i,j) **元素**，简称为**元**，i 称为元素 a_{ij} 的**行指标**，j 称为**列指标**。当一个矩阵的元素全是某一数域 P 中的数时，它就称为这一数域 P 上的矩阵。

$n \times n$ 矩阵也称 n 阶**方阵**，一个 n 阶方阵：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

定义一个 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{vmatrix}$$

称为**矩阵 A 的行列式**，记作 $|A|$ 。

> **定义6：** 所谓数据 P 上矩阵的**初等行变换**是指下列三种变换：
>
> 1. 以 P 中一个非零的数乘矩阵的某一行；
> 2. 把矩阵的某一行的 c 倍加到另一行，这里 c 是 P 中的任意一个数；
> 3. 互换矩阵中两行的位置。

一般来说，一个矩阵经过初等行变换后，就变成了另一个矩阵。

把形式如：

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

的矩阵称为**阶梯形矩阵**。它们的任一行从第一个元素起至第一个非零元素所在的下方的元素全为零；如该行全为零，则它下面的行也全为零。

容易证明，任意一个矩阵经过一系列初等行变换总能变成阶梯形矩阵。

同样，对于矩阵也可以定义**初等列变换**，即：

> 1. 以 P 中一个非零的数乘矩阵的某一列；
> 2. 把矩阵的某一列的 c 倍加到另一列，这里 c 是 P 中的任意一个数；
> 3. 互换矩阵中两列的位置。

为了计算行列式，也可以对矩阵进行初等列变换。有时，同时用初等行变换和初等列变换，行列式的计算可以更简单些。

矩阵的初等行变换与初等列变换统称为**初等变换**。

2.5 行列式按一行（列）展开

> **定义7：** 在行列式：
>
> $$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
>
> 中划去元素 a_{ij} 所在的行和列，剩下的 $(n-1)^2$ 个元素按原来的排法构成一个 $n-1$ 阶的行列式：
>
> $$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{in} \\ a_{i1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$
>
> 称为元素 a_{ij} 的**余子式**，记为 M_{ij}。

> **定义8：** 设：
>
> $$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$
>
> 称 A_{ij} 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**。

在行列式中，一行的元素与另一行相应元素的代数余子式的乘积之和为零。

基于行列式中行与列的对称性，在以上的公式和讨论中把行换成列也一样。可得：

> **定理3：** 设：
>
> $$d = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{vmatrix}$$
>
> A_{ij} 表示元素 a_{ij} 的代数余子式，则下列公式成立：

> $$a_{k1}A_{i1}+a_{k2}A_{i2}+\cdots+a_{kn}A_{in}=\begin{cases}d, & \mathrm{k=i,}\\ 0, & \mathrm{k\neq i;}\end{cases}$$
> $$a_{1l}A_{1j}+a_{2l}A_{2j}+\cdots+a_{nl}A_{nj}=\begin{cases}d, & \mathrm{l=j,}\\ 0, & \mathrm{l\neq j.}\end{cases}$$
>
> 用连加号简写为:
>
> $$\sum_{s=1}^{n}a_{ks}A_{is}=\begin{cases}d, & \mathrm{k=i,}\\ 0, & \mathrm{k\neq i;}\end{cases}$$
> $$\sum_{s=1}^{n}a_{sl}A_{sj}=\begin{cases}d, & \mathrm{l=j,}\\ 0, & \mathrm{l\neq j.}\end{cases}$$

范德蒙德行列式:

> 行列式:
>
> $$d=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}$$
>
> 称为 n 阶的**范德蒙德**(Vandermonde)行列式，对任意的 $n(n\geqslant 2)$ ，n 阶范德蒙德行列式，有下式成立:
>
> $$d=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$$
>
> 范德蒙德行列式为零的充要条件是 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 这 n 个数中至少有两个相等。

“分块”行列式:

> $$\begin{vmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1k} & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & 0 & \ldots & 0\\ c_{r1} & \ldots & c_{1k} & b_{11} & \ldots & b_{1r}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ c_{r1} & \ldots & c_{rk} & b_{r1} & \ldots & b_{rr}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & \ldots & a_{1k}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{k1} & \ldots & a_{kk}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11} & \ldots & b_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ b_{r1} & \ldots & b_{rr}\end{vmatrix}$$

2.6 克拉默(Cramer)法则

非齐次线性方程组 -> 系数行列式不等于0，则有解，且唯一；
齐次线性方程组 -> 系数行列式等于0，只有零解；不等于0，才有非零解。

> **定理4：** 如果线性方程组:
>
> $$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}$$
>
> 的系数矩阵:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

的行列式，即系数行列式 $d=|A|\neq 0$，那么线性方程组有解，并且解是唯一的，解可以通过系数表为：

$$x_1=\frac{d_1}{d},x_2=\frac{d_2}{d},\ldots,x_n=\frac{d_n}{d},$$

其中 d_j 是把矩阵 A 中第 j 列换成方程组的常数项 $b_1,b_2,\ldots,b_n$ 所成的矩阵的行列式，即：

$$d_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},j=1,2,\ldots,n.$$

（该定理通常称为克拉默法则）

定理4包含3个结论：

1. 方程组有解
2. 解唯一
3. 解由定理中的公式给出

常数项全为零的线性方程组称为**齐次线性方程组**。显然，齐次线性方程组总有解，即 $(0,0,\ldots,0)$ ，这个解被称为**零解**。但往往**非零解**才是关注的对象。

对于方程个数与未知量个数相同的齐次线性方程组，应用克拉默法则就能得到下面的定理。

定理5： 如果齐次线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \quad\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵的行列式 $|A|\neq 0$ ，那么该方程组就只有零解。即若上述方程组有非零解，那么必有 $|A|\neq 0$ 。

*2.7 拉普拉斯(Laplace)定理·行列式的乘法规则

定义9： 在 n 阶行列式 D 中任意选定 k 行 k 列 $(k\leqslant n)$ ，位于这些行和列的交点上的 k^2 个元素按原来的次序组成的 k 阶行列式 M ，称为行列式 D 的 k **阶子式**。当 $k<n$ 时，在 D 中划去这 k 行 k 列后余下的元素按照原来的次序组成的 $n-k$ 阶行列式 M' 称为 k 阶子式 M 的**余子式**。

定义10： 设 D 的 k 阶子式 M 在 D 中所在的行、列指标分别是 $i_1,i_2,\ldots,i_k;j_1,j_2,\ldots,j_k$，则 M 的余子式 M' 前面加上符号 $(-1)^{(i_1,i_2,\ldots,i_k)+(j_1,j_2,\ldots,j_k)}$ 后称为 M 的**代数余子式**。

引理： 行列式 D 中任一个子式 M 与它的代数余子式 A 的乘积中的每一项都是行列式 D 的展开式中的一项，而且符号也一致。

定理6(拉普拉斯定理)： 设在行列式 D 中任意取定了 $k(1\leqslant k\leqslant n-1)$ 个行。由这 k 行元素所组成的一切 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D 。

定理7： 两个 n 阶行列式：

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

的乘积等于一个 n 阶行列式:

$$C = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{vmatrix}$$

其中 c_{ij} 是 D_1 的第 i 行元素分别与 D_2 的第 j 列对应元素乘积之和，即:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$