1 随机事件及其概率

在相同条件下进行大量重复试验和观察时，试验的结果会呈现出某种规律性——统计规律性。

概率论与数理统计就是研究和揭示随机现象统计规律性的一个数学分支。

1.0 随机事件及其频率·概率的统计定义

当一定综合条件实现时，也就是在试验的结果中，所发生的现象叫做事件。如果在每次试验的结果中，某事件一定发生，则这一事件叫做必然事件；相反地，如果某事件一定不发生，则叫做不可能事件。

在试验的结果中，可能发生、也可能不发生的事件，叫做随机事件（偶然事件）。

> 常用字母 $A, B, C, ...$ 表示随机事件，用字母 U 表示必然事件，V 表示不可能事件。

设随机事件 A 在 n 次试验中发生了 m 次，则比值 $\frac{m}{n}$ 叫做随机事件 A 的相对频率（简称频率），记作 $f_n(A)$；用公式表示如下：$f_n(A) = \frac{m}{n}$ 。

显然有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；$f_n(U) = 1$； $f_n(V) = 0$ 。

由随机事件的频率的稳定性可以看出，随机事件发生的可能性大小可以用一个数来表示。这个刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的、介于0与1之间的数叫做随机事件 A 的概率，记作 $P(A)$ 。概率的这个定义通常称为概率的统计定义。

多次重复试验中随机事件 A 的频率 $f_n(A)$ 可以作为随机事件的概率 $P(A)$ 的近似值，即当试验次数 n 充分大时。

$$P(A) \approx f(A) = \frac{m}{n}.(\text{且 } P(U) = 1; P(V) = 0)$$

1.1 样本空间

随机试验的每一个可能出现的，而且是试验中最简单的不能再分的结果叫做样本点，通常用字母 ω 表示。

试验的所有样本点 $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...$ 构成的集合叫做样本空间，通常用字母 Ω 表示，于是有：

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, ...\}.$$

- 有限样本空间 $\Longleftarrow$ 可数、可列出
- 无限样本空间 $\Longleftarrow$ 不可数、不可列出

只有有限个样本点的样本空间可以表示为 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ 。

任一随机事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集， 它是满足某些条件的样本点组成的集合。该子集中任一样本点 ω 发生时事件 A 发生。

必然事件 U 就是所有样本点的集合，也就是说，必然事件 U 就是样本空间 Ω ，之后也把必然事件记为 Ω 。而不可能事件 V 就是空集 $\varnothing$ ，之后也把不可能事件记为 $\varnothing$ 。

试验的任一样本点 ω 也是随机事件，之后把试验的样本点称为试验的基本事件。显然，基本事件就是样本空间 Ω 的仅有单个样本点构成的子集。

1.2 事件的关系及运算

- 包含:
  - $A \subset B$或 $B \supset A$
- 相等
  - $A = B$
- 事件的和 (并)
  - $A \cup B$
  - $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \cup_{i=1}^n A_i$
- 事件的积 (交)
  - $A \cap B$或 AB
  - $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = A_1 A_2 \ldots A_n = \cap_{i=1}^n A_i$
- 互斥 (互不相容)
  - $AB = \varnothing$
- 互逆 (对立)
  - $AB = \varnothing$且 $A + B = \Omega$
  - $B = \overline{A}$或 $A = \overline{B}$ （AB 互称对立事件）
- 完备事件组
  - 若 $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$，则称这 n 个事件构成完备事件组
  - 若:

    $$\begin{cases} A_i A_j = \varnothing (1 \leqslant i < j \leqslant n); \\ \sum_{i=1}^n A_i = \Omega. \end{cases}$$

    则称这 n 个事件构成互不相容的完备事件组。
  - (显然，样本空间 Ω 所有的基本事件构成互不相容的完备事件组)

事件的并满足 交换律、结合律、分配律与德摩根($De\ Morgen$)定律。德摩根定律如下:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A}\overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

$\overline{A} \cup \overline{B}$ 表示事件 A 与事件 B 中至少有一个事件不发生。推广到任意 n 个事件，就有:

$$\overline{\cup_{i=1}^n A_i} = \cap_{i=1}^n \overline{A_i}, \quad \overline{\cap_{i=1}^n A_i} = \cup_{i=1}^n \overline{A_i}.$$

德摩根定律表明：n 个事件的和的对立事件就是各个事件的对立事件的交，而 n 个事件的交的对立事件就是各个事件的对立事件的和。

1.3 概率的古典定义

乘法原理与加法原理

排列与组合

- 排列：$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$
  - 全排列：$A_n^m = P_n = n!(当\ n = m)$
- 组合：$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$

古典概型

> **定义1：** 设试验的样本空间总共有 n_Ω 个等可能的基本事件，其中随机事件 A 包含了 $n_A(n_A \leqslant n_\Omega)$ 个基本事件，则 $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}$ 。(这称为概率的古典定义)

几何概型

- 一般地，具有下列特点的概率问题称为几何概型：
    1. 该概率问题可转化为一个可度量的几何图形 S，试验 E 看成在 S 中随机地投掷一点，即 S 为样本空间，而事件 A 就是所投掷的点落在 S 中的可度量图形 s 中；
    2. 事件 A 的概率与 s 的度量成正比，而与 s 的形状、位置无关，即
    $$P(A)=\frac{\mu(s)}{\mu(S)},$$
    式中：μ 表示几何度量，指长度、面积、体积等。

1.4 概率加法定理

> **定理1：** 若随机事件 A 与 B 互斥，即 $AB=\varnothing$，则
> $$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

> **定理2：** 若随机事件 $A_1,A_2,\dots,A_n$ 两两互斥，则
> $$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).$$

> **推论1：** 若随机事件 $A_1,A_2,\dots,A_n$ 构成互不相容的完备事件组，则
> $$P(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1.$$
>
> **推论2：** $P(A)+P(\overline{A})=1.$
>
> **推论3：** $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$

> **定理3：** $A_1,A_2,\dots,A_n$ 是 n 个随机事件，则它们的和事件的概率为：
> $$P(\cup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\dots A_n).$$

1.5 条件概率与乘法定理

> **定理4：** 设 A、B 为一个试验中的两个随机事件，且 $P(A)>0$，则在事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的条件概率为：
> $$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

> **定理5：** 有
> $$P(AB)=P(A)P(B|A),(P(A)>0),$$
> $$或者\ P(AB)=P(B)P(A|B),(P(B)>0).$$

> **定理6：** 若 $P(A_1A_2\dots A_{n-1})>0$，则
> $$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\dots P(A_n|A_1A_2\dots A_{n-1}).$$

1.6 全概率公式与贝叶斯公式

> **定理7(全概率公式)：** 设有随机事件 $A,B_1,B_2,\dots,B_n$ ，如果 $P(B_i)>0(i=1,2,\dots,n)$ ，$B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$ ，且 $A\subset\cup_{i=1}^{n}B_i$ ，则
>
> $$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

在完备组中每个事件下的概率和即为在总可能下的概率。

利用全概率公式计算有关事件的概率，关键在于找出样本空间的分割。

> **定理8(贝叶斯(Bayes)公式)：** 设有随机事件 $A,B_1,B_2,\dots,B_n$ ，如果 $P(B_i)>0(i=1,2,\dots,n)$ ， $B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$ ，且 $A\subset\cup_{i=1}^{n}B_i$ ，则
>
> $$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)},i=1,2,\dots,n.$$

全概率公式是由因溯果，而 $Bayes$ 公式则是由果溯因。

1.7 随机事件的独立性

> **定义2：** 若两事件 A 与 B 满足
>
> $$P(AB)=P(A)P(B),$$
>
> 则称事件 A 与 B 相互独立。

独立事件与相不相容没有关系。

> - $\varnothing$ 及 Ω 与任意的随机事件相互独立。
> - 若事件 A 与 B 相互独立，则 A 与 $\overline{B}$ ，$\overline{A}$ 与 B ，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立。

独立性是概率论中的重要概念之一，其本质是二事件中任一事件的发生与否不影响另一事件发生的概率，即条件概率等于无条件概率：

$$P(B|A)=P(B|\overline{A})=P(B).$$

> **定义3：** 对事件 A、B、C ，若下列四个式子：
>
> $$\begin{cases}P(AB)=P(A)P(B),\\P(AC)=P(A)P(C),\\P(BC)=P(B)P(C),\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C)\end{cases}$$
>
> 同时成立，则称事件 A、B、C 相互独立。

> **定义4：** 设有 n 个随机事件 $A_1A_2\dots A_n$ ，若对任意的自然数 $k(2\leqslant k\leqslant n)$ 以及任意 k 个自然数 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ ，有
>
> $$P(A_{i_1}A_{i_2}\dots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\dots P(A_{i_k}).$$
>
> 则称 $A_1,A_2,\dots,A_n$ 相互独立。

> **定理9：** 若 $A_1,A_2,\dots,A_n$ 相互独立，则
>
> $$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})\dots P(\overline{A_n}).$$

1.8 贝努利概型

在重复独立试验中，如果每次试验都只有两个结果，记为 A 和 $\overline{A}$ ，且在每次试验中 $P(A)=p$ ，从而 $P(\overline{A})=q=1-p$ 保持不变，则称这样的重复试验模型为贝努利概型或 n 重贝努利试验。

> **定理10：** 在 n 重贝努利试验中，事件 A 可能发生的次数为 $0,1,\ldots,n$ ，记 $P_n(k)$ 为事件 A 恰好发生 k 次的概率，则
>
> $$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},\ \ k=0,1,\ldots,n.$$
>
> 此处 $p=P(A),q=1-p=P(\overline{A})$ ，且 $\sum\limits_{i=1}^{n}P_n(k)=\sum\limits_{i=1}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=1$ 。

在 n 重贝努利试验中常用的一些公式：

1. 在 n 重贝努利试验中，事件 A 发生的次数介于 m_1 与 m_2 之间的概率为

$$P(m_1\leqslant k\leqslant m_2)=\sum_{k=m_1}^{m_2}P_n(k).$$

2. 在 n 重贝努利试验中，事件 A 至少发生 r 次的概率为

$$P(k\geqslant r)=\sum_{k=r}^{n}P_n(k)=1-\sum_{k=0}^{r-1}P_n(k).$$

1.9 概率论的公理化体系