2 随机变量及其分布

2.0 随机变量的概念

> **定义1：** 设 Ω 为随机试验的样本空间，如果对每一个样本点 $\omega \in \Omega$ ，均有唯一确定的实数 $X(\omega)$ 与之对应，即存在一个定义与 Ω 的单值实函数 $X = X(\omega)$ ，则称 $X = X(\omega)$ 为样本空间 Ω 上的随机变量。

通常用大写英文字母 $X, Y, Z, \ldots$ 表示随机变量。

随机变量 $X = X(\omega)$ 与普通函数的定义域有较大差别，普通函数的定义域是数集，而随机变量的定义域是试验的样本空间，这其中的样本点不一定是数。

2.1 离散型随机变量的概率分布

> **定义2：** 设离散型随机变量 X 所有可能取的值为 $x_k(k = 1, 2, \ldots)$ ，而 X 取值 x_k 的概率为：
>
> $$P(X = x_k) = p_k \ \ (k = 1, 2, \ldots),$$
>
> 称上式为离散型随机变量 X 的概率分布或分布律。

X 的概率分布也可以用表格的形式表示：

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_k	$\ldots$
p	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_k	$\ldots$

还可以写成矩阵形式：

$$X \sim \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_k & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_k & \ldots \end{bmatrix}$$

用折线顺次把点列 $\{(x_i, p(x_i))\}$ 连接起来，就得到随机变量的概率分布图，如图 2 - 1 ：

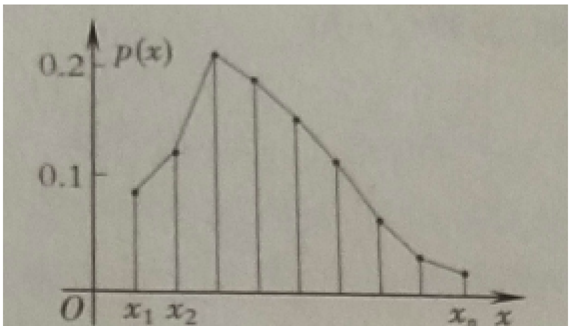


图 2–1

由概率的基本性质，概率分布具有如下性质：

1. $p_i \geqslant 0 \ \ (k = 1, 2, \ldots);$
2. $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$ 。

2.2 几种常见的离散型随机变量的分布

2.2.0 "0-1"分布

> **定义3：** 若随机变量 X 的概率分布为
>
> $$P(X=1)=p,\ \ P(X=0)=q$$
>
> 其中，$0<p<1,p+q=1$，则称 X 服从 "0-1"分布（或称两点分布）。

2.2.1 超几何分布

> **定义4：** 设随机变量 X 的可能取值为：$0,1,2,\ldots,n$ ，且
>
> $$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$
>
> 其中，n、M、N 都是正整数，且 $n\leqslant N,M\leqslant N$ ，则称 X 服从超几何分布，记作 $X\sim H(n,M,N)$ 。

由排列组合的性质易知：

$$\sum_{m=0}^{n}\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}=1$$

超几何分布的直观背景为：一批产品共有 N 个，其中有 M 个次品，从这批产品中任意取出 n 个产品，则取出的 n 个产品中的次品数 X 服从超几何分布 $H(n,M,N)$ 。

2.2.2 二项分布

> **定义5：** 设随机变量 X 的可能取值为：$0,1,2,\ldots,n$ ，且
>
> $$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}\ \ (k=0,1,2,\ldots,n),$$
>
> 其中，$0<p<1$，$p+q=1$ ，则称 X 服从参数为 (n,p) 的二项分布，记作 $X\sim B(n,p)$。

由二项式定理，知

$$\sum_{k=0}^{n}P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k p^k q^{n-k}=(p+q)^n=1.$$

> **定理1：** 若随机变量 X 服从超几何分布 $H(n,M,N)$ ，则当 $N\to\infty$ 时，X 近似地服从二项分布 $B(n,p)$ 。即
>
> $$P(X=m)=\frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}\to C_n^m p^m q^{n-m}$$
>
> 其中 $p=\frac{M}{N},q=1-p$ 。

下面讨论二项分布的最可能取值，即随机变量 X 取何值时概率最大，设 $X\sim B(n,p)$ ，则有

$$\begin{aligned}\frac{P(X=k)}{P(X=k-1)}=\frac{C_n^k p^k q^{n-k}}{C_n^{k-1}p^{k-1}q^{n-k+1}}=\frac{(n-k+1)p}{kq}\\ =1+\frac{(n+1)p-k}{kq}.\end{aligned}$$

上式表明：

- 当 $k<(n+1)p$ 时，$P(X=k)>P(X=k-1)$ ；

- 当 $k=(n+1)p$ 时，$P(X=k)=P(X=k-1)$;
- 当 $k>(n+1)p$ 时，$P(X=k)<P(X=k-1)$;

当 $(n+1)p$ 不是整数时，则存在正整数 m ，满足 $(n+1)p-1<m\leqslant(n+1)p$ 。当 k 从 0 变到 m 时，$P(X=k)$ 单调增加，并在 $k=m$ 处达到最大值，之后单调减少。当 $(n+1)p$ 等于正整数 m ，则有 $P(X=m)=P(X=m-1)$ ，即在 $k=m$ 和 $k=m-1$ 两处概率达到最大值，把使 $P(X=k)$ 取得最大值的 k 称为二项分布的最可能取值。由上可得，最可能取值的计算方法为:

1. 若 $(n+1)p$ 不是整数，则其整数部分 $[(n+1)p]$ 即为所求；（[ ] 表示取整）
2. 若 $(n+1)p=m$ 是整数，则 m 和 $m-1$ 即为所求。

2.2.3 泊松($Poisson$) 分布

> **定义6：** 若随机变量 X 的可能取值为 $0,1,2,\ldots$，其概率分布为
>
> $$P(X=k)=P_\lambda(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ \ (k=0,1,2,\ldots),$$
>
> 其中，$\lambda>0$ 为常数，则称 X 服从参数为 λ 的泊松分布，记作 $X\sim P(\lambda)$ ，容易看出，级数
>
> $$\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}P_\lambda(k)$$
>
> 是收敛的，且有
>
> $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)=\sum_{k=0}^{\infty}P_\lambda(k)=\sum_{k=0}^{\infty}P_\lambda\frac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}\\ =e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\\ =e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1,\end{aligned}$$
>
> 即 $P(X=k)$ 满足分布律的两个条件。

> **定理2(泊松定理)：** 设随机变量 $X_n\sim B(n,p_n)(n=1,2,\ldots)$ ，又设 $np_n=\lambda>0$ 是常数，则有
>
> $$\lim_{n\to\infty}P(X_n=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

因此，只要 n 很大，p 很小，np 的值不太大，就可以用泊松分布近似替代二项分布，即

$$C_n^kp^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\ \ (其中，\lambda=np).$$

2.2.4 几何分布

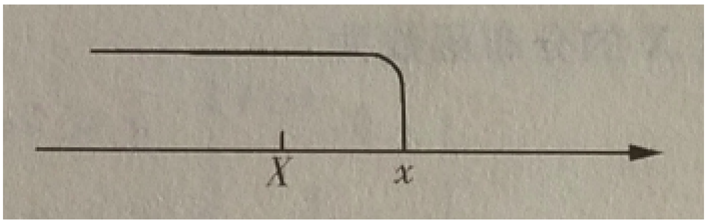
> **定义7：** 若随机变量 X 的概率分布为
>
> $$P(X=k)=q^{k-1}p,\ \ k=1,2,\ldots$$
>
> 其中，$0<p<1$ ，$p+q=1$ ，则称 X 服从参数为 p 的几何分布，记作 $X\sim G(p)$ 。

2.3 随机变量的分布函数

2.3.0 分布函数的定义

> **定义8：** 设 X 是一个随机变量，x 为任意实数，称函数
>
> $$F(x) = P(X \leqslant x)$$
>
> 为随机变量 X 的分布函数。

就是 X 的取值落在 $(-\infty, x]$ 内的概率。



2.3.1 分布函数的性质

分布函数具有下列基本性质：

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$，且 $F(+\infty) = \lim_{x\to\infty} F(x) = 1$， $F(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$。
2. $F(x)$ 是 x 的单调不减函数，即若 $x_1 < x_2$，则 $F(x_1) \leqslant F(x_2)$。
3. $F(x)$ 右连续，即 $F(x+0) = F(x)$。
4. 对于任意的 $x_1 < x_2 \in R$，则
$$P(x_1 < X \leqslant x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$
5. 对于任意的 $x \in R$，有 $P(X = x) = F(x) - F(x-0)$。
6. 对于离散型随机变量，我们有
$$F(x) = P(X \leqslant x) = \sum_{x_i \leqslant x} P(X = x),$$
这里和式是对小于等于 x 的一切 x_i 求和。
7. 对于连续型随机变量，且它的分布函数 $F(x)$ 是连续函数。它的图形是位于直线 $y=0$ 与 $y=1$ 之间的单调不减的连续曲线。

2.4 连续型随机变量的概率密度

> **定义9：** 设连续型随机变量 X 落在区间 $(x, x+\triangle x]$ 内的概率为
>
> $$P(x < X \leqslant x + \triangle x),$$
>
> 其中，x 是任意实数， $\triangle x > 0$ 是区间的长度，称比值
>
> $$\frac{P(x < X \leqslant x + \triangle x)}{\triangle x}$$
>
> 为随机变量 X 在区间 $(x, x+\triangle x]$ 上的平均概率分布密度。

> **定义10：** 如果当 $\triangle x \to 0$ 时，比值
>
> $$\frac{P(x < X \leqslant x + \triangle x)}{\triangle x}$$
>
> 的极限存在，则称这极限值为随机变量 X 在点 x 处的概率密度或概率分布密度，记作

> $$f(x)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{P(x<X\leqslant x+\triangle x)}{\triangle x}.$$

分布函数 $F(x)$ 与概率密度 $f(x)$ 的关系如下:

1. $f(x)=F'(x)$.
2. $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$.

连续型随机变量的分布函数与 R 上处处连续。因此，若 X 为连续型随机变量，则对于任意的 $x\in R$ ，都有

$$P(X=x)=F(x)-F(x-0)=0,$$

即连续型随机变量取任何值的概率都是 0 。由这一事实可知：一个事件的概率为 0 并不表明它是不可能事件。同样的，一个事件的概率为 1 ，这个事件也不一定是必然事件。

在计算连续型随机变量落在某一区间的概率时，可以不必区分该区间是开区间或闭区间或半开区间，即

$$P(a\leqslant X\leqslant b)=P(a<X<b)=P(a<X\leqslant b)=P(a\leqslant X<b).$$

概率密度 $f(x)$ 具有如下性质:

1. 由定义可知，$f(x)\geqslant 0$ 。概率密度 $y=f(x)$ 的图形通常叫做分布曲线，且该分布曲线位于 x 轴的上方。
2. 根据牛顿-莱布尼兹公式，且有 $F(-\infty)=0,F(+\infty)=1$ ，有
$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1.$$
3. $P(x_1<X\leqslant x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx$.

$f(x)$ 本身并非概率，但它的大小却决定了 X 落入区间 $(x,x+\triangle x]$ 内的概率的大小。$f(x)$ 反映了点 x 附近所分布的概率的"稀疏"程度。

2.5 几种常用的连续随机变量的分布

2.5.0 均匀分布

> **定义11:** 若随机变量 X 的概率密度为
>
> $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a<x<b;\\ 0, & 其他.\end{cases}$$
>
> 则称 X 服从区间 (a,b) 上的均匀分布，记作 $X\sim U(a,b)$ 。

对于均匀分布，有 $F(x)$ 分布函数如下:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant a;\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x<b;\\ 1, & x\geqslant b.\end{cases}$$

设 $X\sim U(a,b)$ ，对任意的 $x_1,x_2\in(a,b)(x_1<x_2)$ ，有

$$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\frac{x_2-x_1}{b-a},$$

这表明，X 落在 (a,b) 的子区间 (x_1,x_2) 上的概率只与子区间的长度 x_2-x_1 有关，而与子区间在区间 (a,b) 中的具体位置无关。X 落在 (a,b) 的子区间 (x_1,x_2) 上的概率与子区间的长度 x_2-x_1 成正比。

2.5.1 指数分布

> **定义12：** 若连续型随机变量 X 的概率密度为
>
> $$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$
>
> 其中，$\lambda>0$，为常数，则称 X 服从参数为 λ 的指数分布，记为 $X\sim e(\lambda)$。

易得对于指数分布，有

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0;\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

指数分布有以下重要性质:

- 对任意的 $s>0,t>0$，有

$$\begin{aligned}P(X>s+t|X>s)&=\frac{P(X>s+t)}{P(X>s)}=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}\\&=e^{-\lambda t}=P(X>t).\end{aligned}$$

2.5.2 正态分布

> **定义13：** 若随机变量 X 的概率密度为:
>
> $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\ ,x\ \in(-\infty,+\infty).$$
>
> 其中，μ、σ 是常数，且 $\sigma>0$，则称 X 服从参数为 μ,σ^2 的正态分布，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。

显然，$f(x)\geqslant 0$，且令 $\frac{x-\mu}{\sigma}=t$ 得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

利用广义积分 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}\,,$$

因此有 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}dx=1$。

正态分布的分布函数为

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt\,,-\infty<x<+\infty\,.$$

σ 控制正态图像的高矮，越大越矮，即越分散；μ 控制图像的左右位置。

正态分布的特征:

1. 函数 $f(x)$ 的图形关于直线 $x=\mu$ 对称。
2. $f(x)$ 在 $x=\mu$ 处取得最大值 $f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}$。

标准正太分布： 常用 $\varphi(x)$ 表示，即 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\ \ (-\infty<x<+\infty)$。

相应的，标准正态分布的分布函数记为:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{\frac{t^2}{2}}dt\ \ (-\infty<x<+\infty).$$

且 $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ 。

对于正态分布，有如下结论：

1. 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ ，则 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$ 。
2. 一般正态分布的分布函数 $F(x)$ 与标准正态分布的分布函数 $\Phi(x)$ 之间的关系为 $F(x)=\Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$ 。

2.6 随机变量函数的分布

设 X 为随机变量，$g(x)$ 为实数集 D 上的连续函数，且 X 的全部可能取值都落在 D 上，则 X 的函数 $Y=g(X)$ 也是一个随机变量，当 X 取值 x 时，随机变量 Y 取值 $y=g(x)$ 。

由随机变量 X 的分布去求 $Y=g(X)$ 的分布。

2.6.0 离散型随机变量函数的分布

一般地，若离散型随机变量 X 的概率分布为：

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_k	$\dots$
$p(x_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	$\dots$	$p(x_k)$	$\dots$

为了求随机变量函数 $Y=g(X)$ 的概率分布，应当先写出下表：

Y	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$g(x_3)$	$\dots$	$g(x_k)$	$\dots$
$p(Y=y_i)$	$p(x_1)$	$p(x_2)$	$p(x_3)$	$\dots$	$p(x_k)$	$\dots$

如果 $y_1,y_2,\dots,y_k,\dots$ 的值全不相等，则上表就是随机变量 Y 的概率分布；如果 $y_1,y_2,\dots,y_k,\dots$ 的值中有相等的，则把那些相等的值合并起来，对应的概率相加，就得到 Y 的概率分布。

2.6.1 连续型随机变量函数的分布

对于连续型随机变量函数，为了求 $Y=g(X)$ 的概率密度 $f_Y(y)$ ，应先求 Y 的分布函数。按分布函数的定义

$$F_Y(y)=P(Y\leqslant y)=P(g(X)\leqslant y).$$

从不等式 $g(X)\leqslant y$ 中解得 X 的取值范围，利用 X 的概率密度 $f_X(x)$ 即可求得 $F_Y(y)$ ，再对 y 求导数，得到 Y 的概率密度。

> **定理3：** 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$ ，$-\infty<x<+\infty$ ，函数 $g(x)$ 处处可导，且恒有 $g'(x)>0(\text{或}\ g'(x)<0)$ ，则 $Y=g(X)$ 是连续型随机变量，其概率密度为：
>
> $$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\ |h'(y)|, & \alpha<y<\beta\,;\\ 0, & \text{其 他 .}\end{cases}$$
>
> 其中，$\alpha=min(g(-\infty),g(+\infty))$ ，$\beta=max(g(-\infty),g(+\infty))$ ，$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数。