15.093 最优化方法

第三课：单纯形法

1　要点　　幻灯片 1

- 缩减成本
- 最优性条件
- 减少费用
- 无界性
- 单纯形法
- 退化问题的单纯形法

2　矩阵描述　　幻灯片 2

$$
\begin{aligned}
\min\ & c'x \\
\text{s.t.}\ & Ax = b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

$x = (x_B, x_N)$　　x_B是基变量

x_N是非基变量

$$
\begin{aligned}
& A = [B, N] \\
& Ax = b \Rightarrow \quad B * x_B + N * x_N = b \\
& \Rightarrow x_B + B^{-1} N x_N = B^{-1} b \\
& \Rightarrow x_B = B^{-1} b - B^{-1} N x_N
\end{aligned}
$$

2.1　缩减的费用　　幻灯片 3

$$
\begin{aligned}
z &= c_B' x_B + c_N' x_N \\
&= c_B' (B^{-1} b - B^{-1} N x_N) + c_N' x_N \\
&= c_B' B^{-1} b + (c_N' - c_B' B^{-1} N) x_N
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\bar{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j \quad \text{reduced cost}}$$

2.2 最优性条件　　幻灯片 4

定理：

- 基可行解 x 与基 B 关联
- $\bar{c}$ 为缩减成本，那么，
- 如果 $\bar{c} \geq 0 \Rightarrow x$ 为最优
- x 为最优且非退化 $\Rightarrow \bar{c} \geq 0$

2.3　证明　　幻灯片 5

- y 是任意可行解

- $d = y - x \Rightarrow Ax = Ay = b \Rightarrow Ad = 0$

$$\Rightarrow Bd_B + \sum_{i\in N} A_i d_i = 0$$
$$\Rightarrow d_B = -\sum_{i\in N} B^{-1} A_i d_i$$
$$\Rightarrow c'd = c_B' d_B + \sum_{i\in N} c_i d_i$$
$$= \sum_{i\in N} (c_i - c_B' B^{-1} A_i) d_i = \sum_{i\in N} \overline{c}_i d_i$$

- 因为 $y \geq 0$, 且 $x_i = 0, i \in N$, 那么 $d_i = y_i - x_i \geq 0, i \in N$　　幻灯片 6

- $c'd = c'(y - x) \geq 0 \Rightarrow c'y \geq c'x$

  $\Rightarrow$ x 为最优

（b） in BT，定理 3.1

3　减少费用　　幻灯片 7

- 假设 $\overline{c}_j = c_j - c_B' B^{-1} A_j < 0$

  $d_B = -B^{-1} A_j$
  $dj = 1, d_i = 0, i \neq B(1), \ldots, B(m), j$
  Let $y = x + \theta * d, \theta > 0$

我们能减少费用吗？

- 让 $d_B = -B^{-1} A_j$

$dj = 1, d_i = 0, i \neq B(1), \ldots, B(m), j$

- 让 $y = x + \theta * d, \theta > 0$　　幻灯片 8

$$\begin{aligned} c'y - c'x &= \theta * c'd \\ &= \theta * (c_B' d_B + c_j d_j) \\ &= \theta * (cj - c_B' B^{-1} A_j) \\ &= \theta * \overline{c}_j \end{aligned}$$

因此，如果 $\overline{c}_j < 0$，费用将减少。

4　无界性　　幻灯片 9

- $y = x + \theta * d$ 是否可行？

因为 $Ad = 0 \Rightarrow Ay = Ax = b$

- $y \ge 0$？

$d \ge 0 \Rightarrow x + \theta^* d \ge 0 \quad \forall \theta \ge 0$
如果
$\Rightarrow$目标值无界

5 改进

幻灯片 10

如果$d_i < 0$，那么

$$x_i + \theta^* d_i \ge 0 \Rightarrow \theta \le -\frac{x_i}{d_i}$$

$$\Rightarrow \theta^* = \min_{\{i|d_i<0\}} (-\frac{x_i}{di})$$

$$\Rightarrow \theta^* = \min_{\{i=1,\ldots,m|d_{B(i)}<0\}} (-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}})$$

5.1 例题

幻灯片 11

$$\begin{aligned} \min \ & x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ \text{s.t.} \ & x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & x_1 \le 2 \\ & x_3 \le 3 \\ & 3x_2 + x_3 \le 6 \\ & x, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

幻灯片 12

幻灯片 13

$B = [A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4]$

BFS: $x = (2 \quad 0 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 4)'$

幻灯片 14

基可行解：

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\ B^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&-1&0&0\\-1&1&1&0\\-1&1&0&1\end{bmatrix}\bar{c}=\begin{pmatrix}0&7&0&2&-3&0&0\end{pmatrix}$$

$$d_5=1, d_2=d_4=0, \begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\\d_4\end{pmatrix}=-B^{-1}A_5=\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$ 幻灯片 15

$$y'=x'+\theta^* d'=\begin{pmatrix}2-\theta&0&2+\theta&0&\theta&1-\theta&4-\theta\end{pmatrix}$$

随着θ增加，会发生什么变化？

$$\theta^*=\min_{\{i=1,\dots,m|d_{B(t)}<0\}}\left(-\frac{x_{B(t)}}{d_t}\right)=\min\left(-\frac{2}{-1},-\frac{1}{-1},-\frac{4}{-1}\right)=1$$

$l=6\left(A_6\text{存在基}\right)$。

新的解：$y=\begin{pmatrix}1&0&3&0&1&0&3\end{pmatrix}'$ 幻灯片 16

新的基：$\overline{B}=\begin{pmatrix}A_1&A_3&A_5&A_7\end{pmatrix}$ 幻灯片 17

$$\overline{B}=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&0\\0&1&0&1\end{bmatrix},\overline{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&0&1&0\\-1&1&1&0\\0&0&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\bar{c}'=c'-c'_{\overline{B}}B^{-1}A=\begin{pmatrix}0&4&0&-1&0&3&0\end{pmatrix}$$

继续迭代，将列向量 A_4 换入到基中。

6 正确性

幻灯片 18

$$-\frac{x_{B(t)O}}{d_{B(t)}}=\min_{i=1,\ldots,m,d_{B(t)}<0}\left(-\frac{x_{B(i)}}{d_{B(i)}}\right)=\theta^*$$

定理

- $\overline{B}=\{A_{B(t)},i\neq l,A_j\}$ 为基
- $y=x+\theta^* d$ 是一个与基 $\overline{B}$ 相关的基可行解。

7 单纯形法

幻灯片 19

1. 找出初始基 $B=\left[A_{B(1)},\ldots,A_{B(m)}\right]$ 和初始的一个基可行解 x
2. 计算 $\overline{c}_j=c_j-c_B^{'}B^{-1}A_j$
   - 如果 $\overline{c}_j\geq 0$； x 则为最优解；停止计算。
   - 否则，选取 $j:\overline{c}_j<0$。
3. 计算 $u=-d=B^{-1}A_j$ 幻灯片 20
   - 如果 $u\leq 0\Rightarrow$ 费用无界；停止计算。
   - 否则
4. $\theta^*=\min\limits_{1\leq i\leq m,u_i>0}\frac{x_{B(i)}}{u_i}=\frac{u_{B(l)}}{u_l}$
5. 用 A_j 替代 $A_{B(l)}$，从而确定一个新的基。
6. $y_j=\theta^*{}_i$

   $y_{B(i)}=x_{B(i)}-\theta^* u$

7.1 有限收敛性

幻灯片 21

定理：

- $P=\{x\mid Ax=b,x\geq 0\}\neq 0$
- 每个基可行解都是非退化的，
  那么
- 经过有限次迭代后，终止单纯形法
- 当得到最优的基 B 或有一个方向 $d:Ad=0,d\geq 0,c^{'}d<0$ 且最优的费用为 $-\infty$，则可以停止。

退化问题 幻灯片 22

- 尽管 $\overline{B} \neq B$，θ^* 可以等于 0（为什么？）$\Rightarrow y = x$。

- 即使 $\theta^* > 0$，也可能有相持

$$\min_{1 \le i \le m, u_i > 0} \frac{x_{B(i)}}{u_i} \Rightarrow$$

next BFS degenerate

下一个基可行解是退化的。

- 不能保证在有限次迭代后终止；计算过程出现循环。

7.3 避免循环 幻灯片 23

- 通过仔细选取换入和换出基的变量能避免循环。
- 例如：在所有 $\overline{c_j} < 0$ 的变量中，选取最小的下标；在所有能从基中换出的变量里，选取下标最小的一个。