第五章　波动

振动向周围空间传播的过程叫做波动(简称波)

机械振动在介质中的传播称机械波；变化的电磁场在空间中的传播称电磁波。

机械波先是介质中的某一质点在外界作用下在平衡位置附近振动，然后其附近的质点在该质点的弹性力作用下，也会在自己的平衡位置附近振动，接着这些质点又带动它们附近的质点振动。由此，一个质点的振动将由近而远地在介质中传播开

机械波依靠介质各部分的弹性相互作用把振动传播出去，故也称为弹性波。

5.1　简谐波

一、波的基本概念

1、产生条件

机械波(弹性波)的产生条件：波源和介质

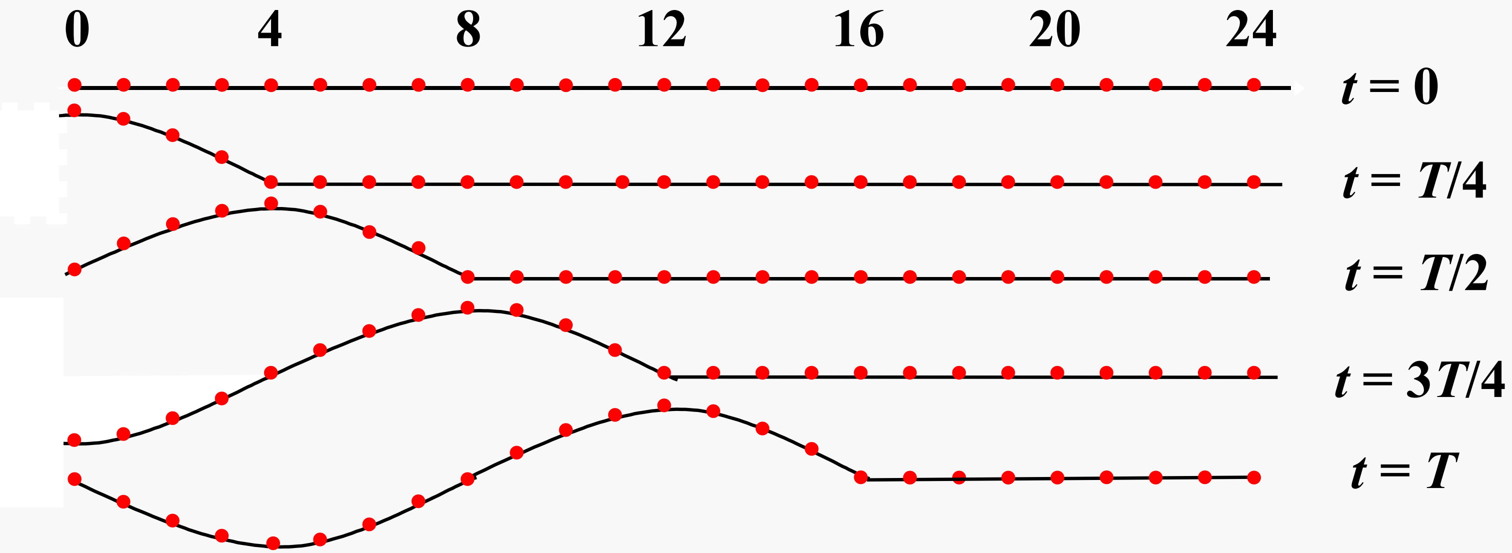
弹性波：一群质点(介质)，以弹性力相联系。其中一个质点(波源)在外界作用下振动，引起其他质点也相继振动

2、横波与纵波

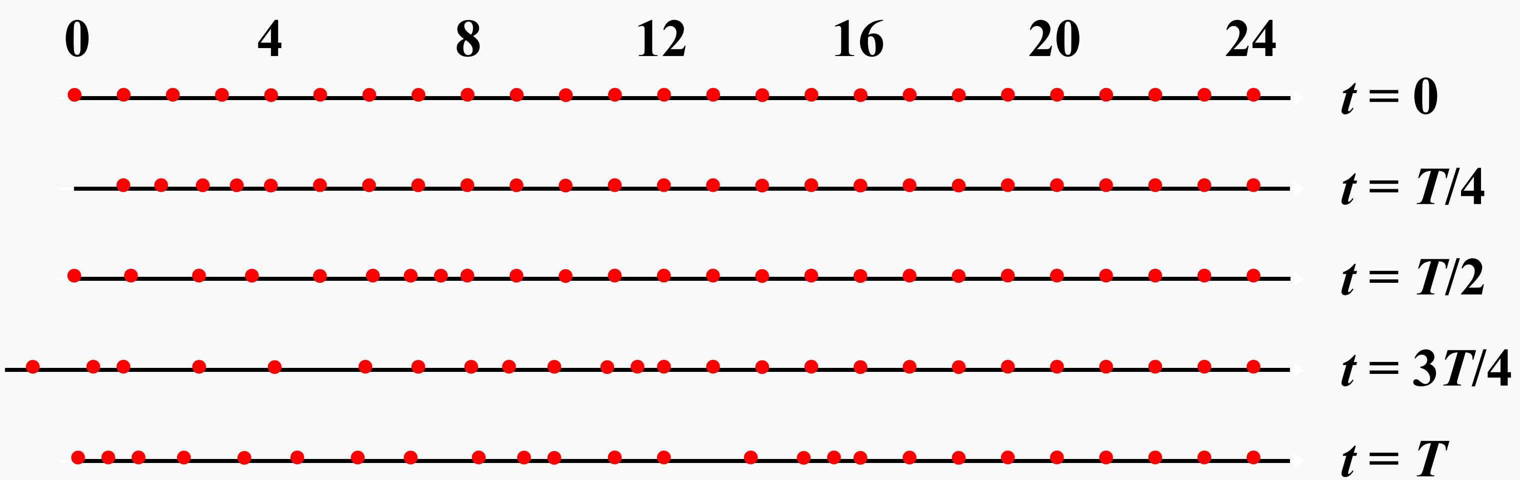
横波：质点的振动方向与波的传播方向垂直
纵波：质点的振动方向与波的传播方向平行

横波在外形上有波峰和波谷，纵波在介质密度上有波密和波疏。

横波


0
4
8
12
16
20
24
t = 0
t = T/4
t = T/2
t = 3T/4
t = T

纵波


0
4
8
12
16
20
24
t = 0
t = T/4
t = T/2
t = 3T/4
t = T

总结：

(1)介质质元并未"随波逐流"，波的传播不是介质质元的传播；

(2) "上游"的质元依次带动"下游"的质元振动；

(3)某时刻某质元的振动状态将在较晚时刻于"下游"某处出现---波是振动状态(相位)的传播；

(4)同相点---两质元的振动状态(相位)相同，相邻同相点其相位差2π

二、波的几何描述

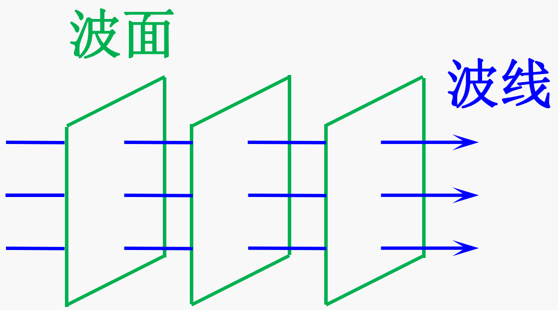
波在介质中传播时，各质点间的相位关系和传播方向可以用几何图形来描述。

波的传播方向用有向直线(曲线)表示，称波线(波射线)

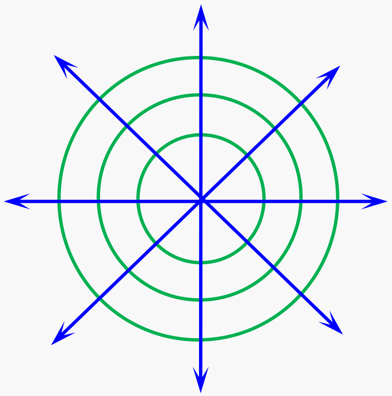
介质中振动相位相同的各点组成的面称波面(波振面)

某时刻处在最前面的波面称波前

波面是平面的波动称平面波；波面是球面的波动称球面波



平面波

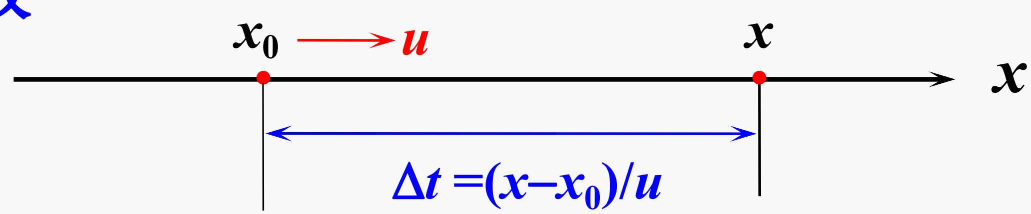


球面波

在各项同性介质中，波线总是与波面垂直

三、波函数

介质中各质点位移随时间与空间的变化规律的表达式，就是波函数



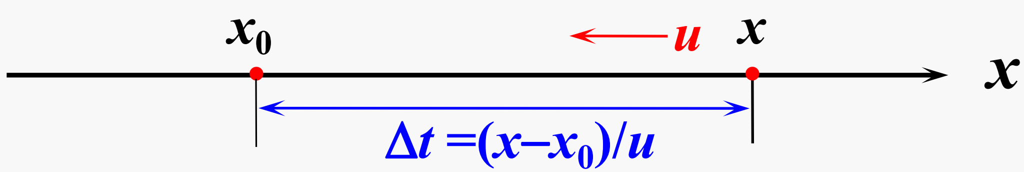
波速(单位时间振动状态传播的距离)u，沿x正方向传播的波，设平衡位置在$x=x_0$处的质点位移是y_0，y_0与时间t的关系：

$$y_0(t,x_0)=f(t)$$

平衡位置在x处的质点也将做同样的振动，但x_0处质点的振动状态传到x处要经过$\Delta t=(x-x_0)/u$的时间，所以在不考虑吸收情况下平衡位置x处的质点在t时刻的位移y和平衡位置x_0处的质点在$t-\Delta t$时刻的位移相同：

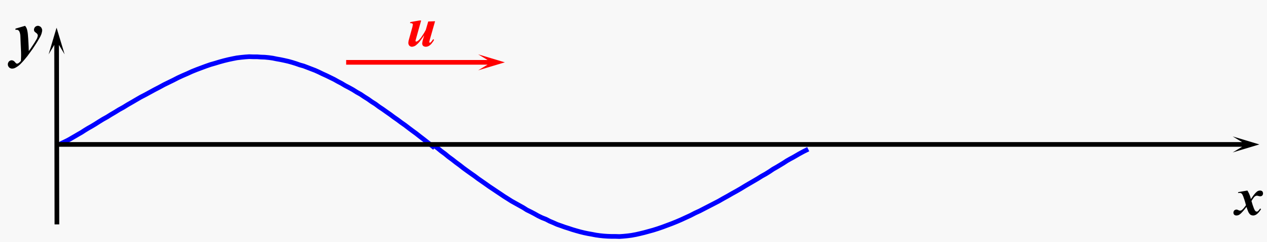
$$y(t,x)=y_0(t-\Delta t,x_0)=y_0(t-\frac{x-x_0}{u},x_0)=f(t-\frac{x-x_0}{u})$$

如果波是沿x轴反方向传播，由于平衡位置x处的质点的振动状态传播到x_0处经过$\Delta t=(x-x_0)/u$的时间，所以不考虑吸收情况下平衡位置x处的质点在t时刻的位移y和平衡位置x_0处的质点在$t+\Delta t$ 时刻的位移相同：



$$y(t,x)=y_0(t+\Delta t,x_0)=y_0\left(t+\frac{x-x_0}{u},x_0\right)=f\left(t+\frac{x-x_0}{u}\right)$$

对于某个特定时刻$t=t_0$，y只是x的函数，它表示各质点的位移与空间位置的关系，表示这一关系的曲线称波形曲线。随时间推移，波形曲线以波速沿波的传播方向平移。



波源可以在任何位置，通常为方便，常令$x_0=0$

四、简谐波

$$y_0(t, x_0) = f(t) \quad y(t, x) = f(t - \frac{x - x_0}{u})$$

简谐波：波源和介质中的各个质元均作简谐振动

任何复杂的波动都可以看成是若干个简谐波的叠加

设平面简谐波以波速u沿x轴正向传播，若介质均匀且不吸收能量(各质点的振幅均为A)，始点选为坐标原点O，设始点的振动函数为：

$$y_0(t) = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

则相应的波函数为：

$$y(t, x) = A\cos[\omega(t - \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

若平面简谐波沿则x轴反向传播，则相应的波函数为：

$$y(t, x) = A\cos[\omega(t + \frac{x}{u}) + \varphi_0]$$

$$y(t,x) = A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

波(简谐波)的一些特征量

1、波速u、相速度v_p

波速u：振动状态传播的速度，由介质性质决定。振动状态由相位确定，所以波速就是相位传播速度(相速度)

相速度v_p：波确定的相位$\varphi=\varphi_C$(常量)随时间t沿传播方向(例如x方向)的传播速度

$$v_p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \boxed{v_p = u}$$

简谐波：

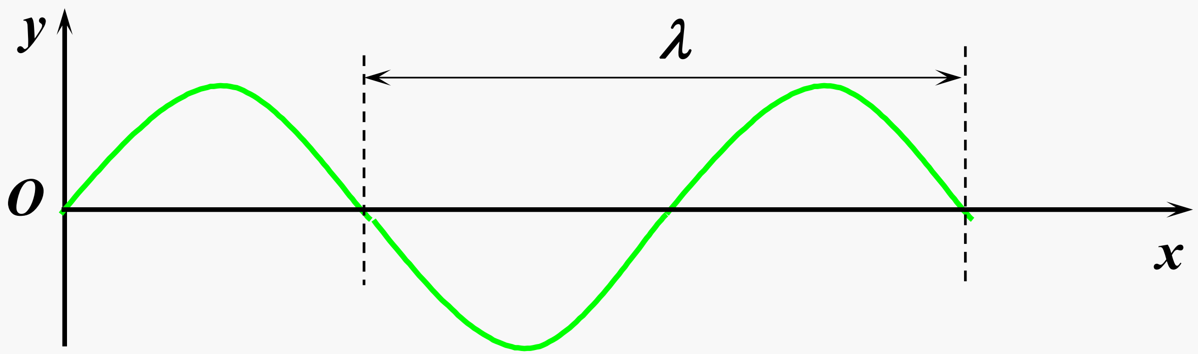
$$\varphi = \omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0 = \varphi_C \qquad \omega(\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{d}x}{u}) = 0 \qquad v_p = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u$$

注意：波速与质点振动速度的不同

$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\omega A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

2、波长λ(波数k)

波长λ：沿波的传播方向，振动状态完全相同两点的最小距离，即相位差2π的两点的距离。



一个波长是一个完整波形的距离， 波源作一次完全的振动，相位就传播了2π，即波传播了一个波长的距离。

波数k(角波数)：波长的倒数乘2π

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$$

波矢 $\vec{k}$：波矢的大小是波数，方向是波的传播方向

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$

3、波的周期T、频率ν(角频率ω)

波的周期T：波前进一个波长(完整波形)的时间

波的频率ν：是周期的倒数，即单位时间内传播了多少完整的振动状态(完整波形的数目)，或单位时间内波传过介质中某点的波的个数。

$$\nu = \frac{1}{T} \qquad \omega = 2\pi\nu$$

波源仅振动情况下，波的周期也就是波源振动的周期，波的频率也就是波源振动的频率

波的波速、波长和周期有关系：

$$\lambda = uT = \frac{u}{\nu} \qquad \lambda\nu = u \qquad \frac{\omega}{k} = 2\pi\nu / \frac{2\pi}{\lambda} = \lambda\nu = u$$

$$\frac{\omega}{k}=u \qquad \omega=\frac{2\pi}{T} \qquad k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$$

简谐波波函数的不同形式

$$y(t,x)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

$$y(t,x)=A\cos[k(ut-x)+\varphi_0]$$

$$y(t,x)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

$$y(t,x)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

为分析和运算的方便，常将简谐波的波函数表示成复数形式

$$y(t,x)=Ae^{i(\omega t-kx+\varphi_0)}$$

有时为方便，常选择 $\varphi_0=0$

一维简谐波表达式的物理意义

$$y(t,x)=A\cos(\omega t-kx+\varphi_0)$$

1) x固定，即$x=x_0$

$$y(t,x_0)=A\cos(\omega t-kx_0+\varphi_0)$$

该处质元做简谐振动

2) t固定，即$t=t_0$

$$y(t_0,x)=A\cos(\omega t_0-kx+\varphi_0)=A\cos(kx-\omega t_0-\varphi_0)$$

同一时刻，各质元的振移随它们的平衡位置坐标作余弦变化

3) 相位固定，即$\omega t-kx+\varphi_0$=常数

$$\omega \mathrm{d}t-k\mathrm{d}x=0 \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{k}=u=v_p$$

相速度

$$y(t,x)=A\cos[(\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$$

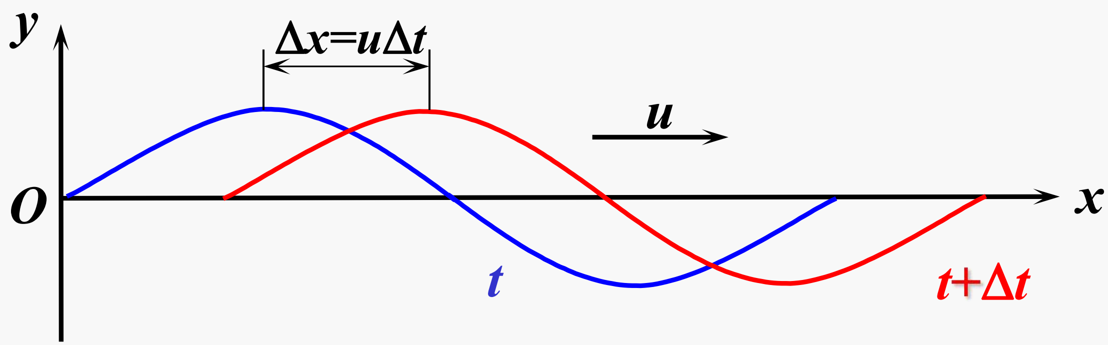
4) 表达式也反映了波是振动状态的传播

$$y(t,x)=y(t-\frac{x}{u},0)$$

同一振动状态从原点传到 x处需经历x/u时间。

同一振动状态从x传到 $x+\Delta x$处需经历$\Delta t=\Delta x/u$时间

$$y(t+\Delta t,x+\Delta x)=y(t,x)\quad \Delta x=u\Delta t$$



$$y(t,x)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

5) 表达式还反映了波的时间、空间双重周期性

时间周期T，空间周期λ；时间频率ω，空间频率k

$$\frac{\lambda}{T}=u \quad \frac{\omega}{k}=u$$

例5-1 一平面简谐波的波函数：$y(t, x)=0.02\cos(10t+6x)$ (SI)，**求**：(1)周期、波长、频率和波速；(2) 波谷经过原点的时刻；(3) $t=6s$ 时，各波峰的位置。

解：(1) 沿x负向传播的简谐波的波函数标准形式：

$$y(t,x)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$T=\frac{\pi}{5}=0.63\text{s} \qquad \lambda=\frac{\pi}{3}=1.05\text{m}$$

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{5}{\pi}=1.6\text{Hz} \qquad u=\frac{\lambda}{T}=\frac{5}{3}=1.67\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$y(t,x)=0.02\cos(10t+6x)$$

(2) 波谷：y=−0.02；原点x=0：

$$y(t,0)=0.02\cos(10t)=-0.02 \qquad \cos(10t)=-1$$

$$10t=(2k+1)\pi \quad k=0,1,2,\cdots$$

$$t=(2k+1)\frac{\pi}{10}(\mathrm{s}) \quad k=0,1,2,\cdots$$

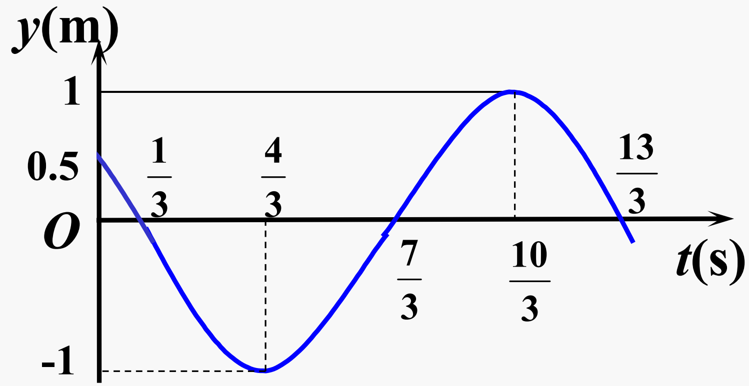
(3) 波峰：y=0.02；t=6s：

$$y(6,x)=0.02\cos(60+6x)=0.02 \qquad \cos(60+6x)=1$$

$$60+6x=2k\pi \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

$$x=\frac{k\pi}{3}-10(\mathrm{m}) \quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots$$

例5-2 一平面简谐波沿x轴正向传播，波长λ=4m，周期T=4s，已知x=0处质点的振动曲线如图所示。求：(1) 写出x=0处质点的振动表达式；(2) 写出波的表达式；(3) 画出t=1s时刻的波形曲线。



解：简谐波波函数标准形式：

$$y(t,x)=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda})+\varphi_0]$$

$$y(t,x)=\cos(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}x+\varphi_0)$$

(1) x=0处质点振动 $y(t,0)=\cos(\frac{\pi}{2}t+\varphi_0)$

从x=0处质点振动曲线中得出：

$$\varphi_0=\frac{\pi}{3}\qquad y(t,0)=\cos(\frac{\pi}{2}t+\frac{\pi}{3})$$

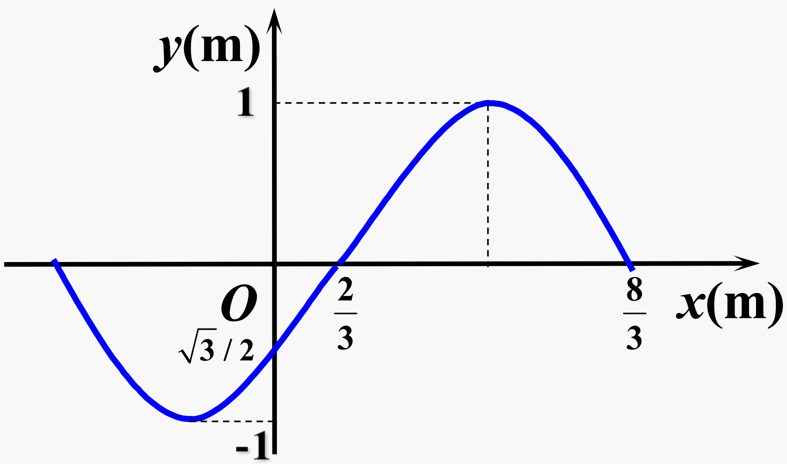
(2) 波的表达式：

$$y(t,x)=\cos(\frac{\pi}{2}t-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3})$$

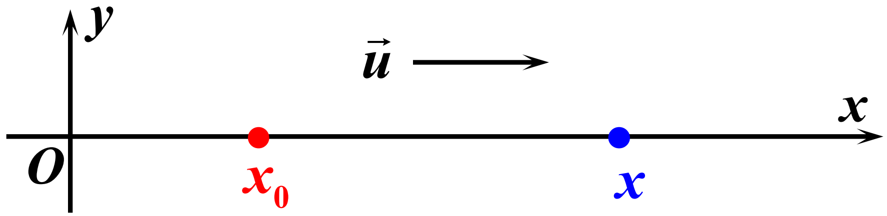
(3) t=1s时刻的波形曲线表达式：

$$y(1,x)=\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}x+\frac{\pi}{3})=\cos(\frac{5\pi}{6}-\frac{\pi}{2}x)$$

$$=\cos(\frac{\pi}{2}x-\frac{5\pi}{6})$$



例5-3 平面简谐波以波速u沿x轴正向传播，波长λ，已知在$x_0=\lambda/4$处的质元的振动表达式为 $y(x_0, t)=A\cos\omega t$
1) 写出波函数； 2) 在同一张图中画出$t=T$和$t=5T/4$时的波形图



$$\frac{\omega}{u}=k=\frac{2\pi}{\lambda}$$

解： 1) 方法1：依从波源的振动函数到波函数

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x-x_0}{u})]=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\frac{\omega}{u}\frac{\lambda}{4}]$$

$$=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\frac{\pi}{2}]$$

方法2：标准波函数： $y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]$

$$y(\frac{\lambda}{4},t)=A\cos[\omega(t-\frac{\lambda}{4u})+\varphi_0]=A\cos(\omega t-\frac{\pi}{2}+\varphi_0)=A\cos\omega t$$

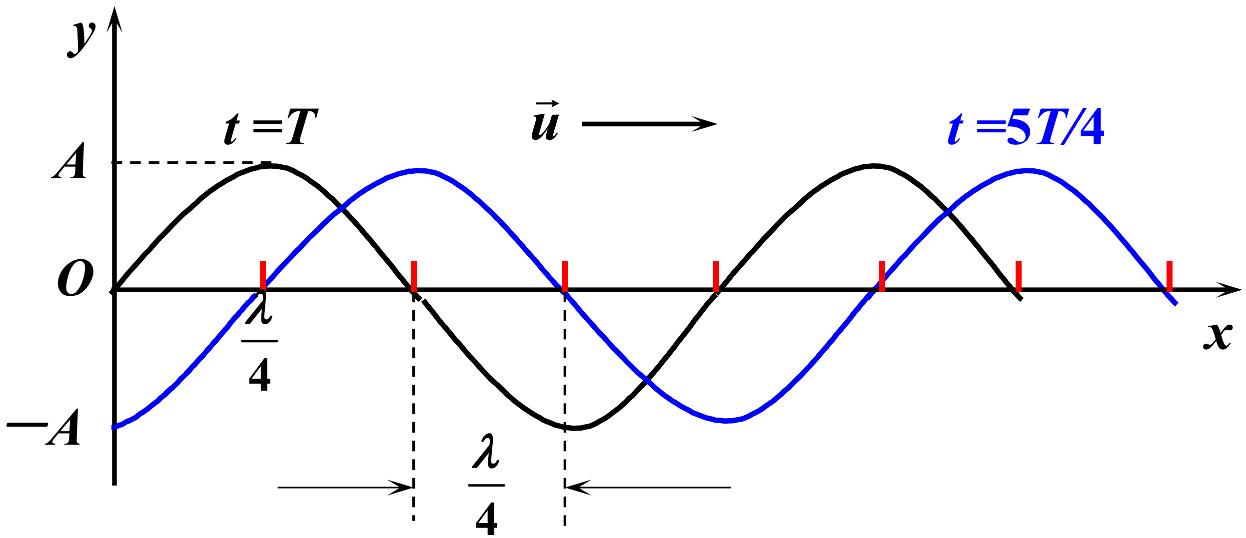
$$\varphi_0=\pi/2$$

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\frac{\pi}{2}]$$

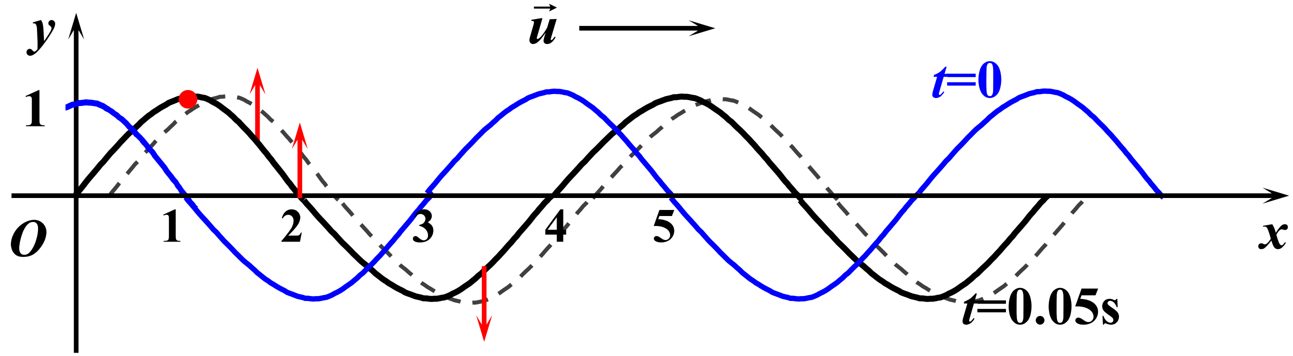
2) $t=T$ 和$t=5T/4$ 时的波形函数：

$$y(x,T)=A\cos(-\omega\frac{x}{u}+\frac{\pi}{2})=A\cos(-\frac{2\pi x}{\lambda}+\frac{\pi}{2})=A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda}-\frac{\pi}{2})$$

$$y(x,\frac{5T}{4})=A\cos(\frac{2\pi x}{\lambda}-\pi)$$



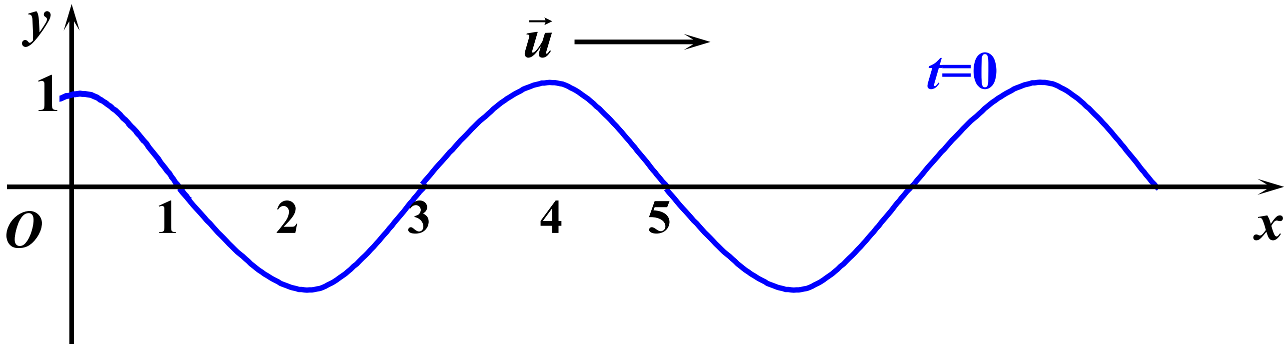
例5-4 平面简谐波波形如图，1) 用箭头标明$t = 0.05$s时平衡位置在1、1.5、2、3.5m 处质点的速度方向；2) 给出T、ω、λ、u；3) 计算5m处的质点比原点落后的相位；4) t=0.1s时，平衡位置在3m处质点的振动速度



解： 1) 画出t=0.05s下一时刻的波形曲线与t=0.05s的波形曲线比较得出各质点的运动方向

2) 从图中看出λ=4m

$$u = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1}{0.05} = 20\mathrm{m \cdot s^{-1}} \quad T = \frac{\lambda}{u} = \frac{4}{20} = 0.2\mathrm{s} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} = 10\pi$$



3) 从图得出5m处的质点与原点相差5/4周期，即相位差2.5π，波向右传播， 5m处的质点相位落后原点2.5π

4) 波函数和速度的表达式分别为:

$$y(x,t)=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi_0]=\cos[10\pi(t-\frac{x}{20})]$$

$$v(x,t)=\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=-10\pi\sin[10\pi(t-\frac{x}{20})]$$

$$v(3,0.1)=-10\pi\sin[10\pi(0.1-\frac{3}{20})]=10\pi$$

5.2 波动方程和波速

速度u，沿x轴传播的波函数：$y(t,x)=f(t\mp\frac{x}{u})$

波函数对t 和x 的二阶偏导数：

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=f''(t\mp\frac{x}{u}) \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}f''(t\mp\frac{x}{u})$$

可得：

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

一维波动方程

运动规律符合上式的就是沿x轴传播速度u的波动过程

$$\boxed{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\nabla^2\xi=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

三维波动方程

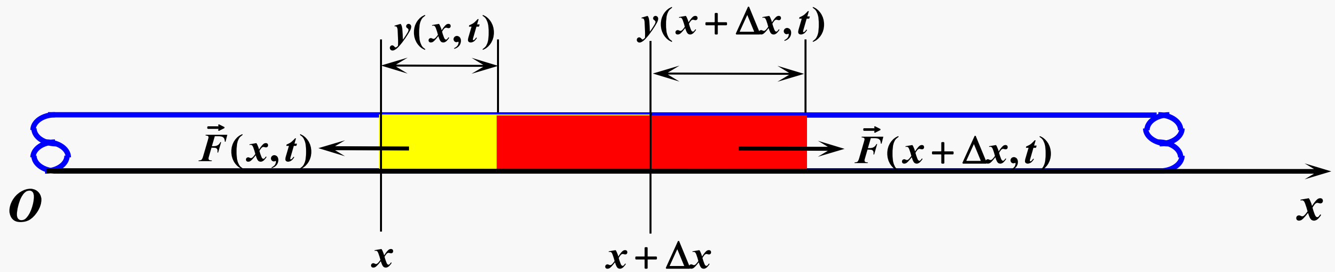
$$\boxed{\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}}$$

哈密顿算子

二、长杆中的纵波

$$\Delta x \to 0 \quad a = \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

在截面S，密度ρ的均匀长杆中，纵波传播时，杆中不同部位被拉伸或压缩，研究杆中一质元：



$y(x,t)$、$y(x+\Delta x,t)$是两端面x、$x+\Delta x$的位移，$\Delta y=y(x+\Delta x,t)-y(x,t)$是该质元的形变量，$\Delta y/\Delta x$是线应变。

$f(x,t)$和$f(x+\Delta x,t)$是两端面上的应力($f=F/S$)，由牛顿定律

$$F(x+\Delta x,t)-F(x,t)=ma=\rho S\Delta x\cdot a=\Delta F(x,t)$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}=\frac{\partial F(x,t)}{S\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x,t)}{S\Delta x}=\rho\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

胡克定律：应力与该处的线应变成正比

$$f(x,t)=Y\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$$

Y：杨氏模量(弹性模量)

$$Y\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}=\rho\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\rho}{Y}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

长杆中纵波传播的速度：$\boxed{u=\sqrt{\frac{Y}{\rho}}}$

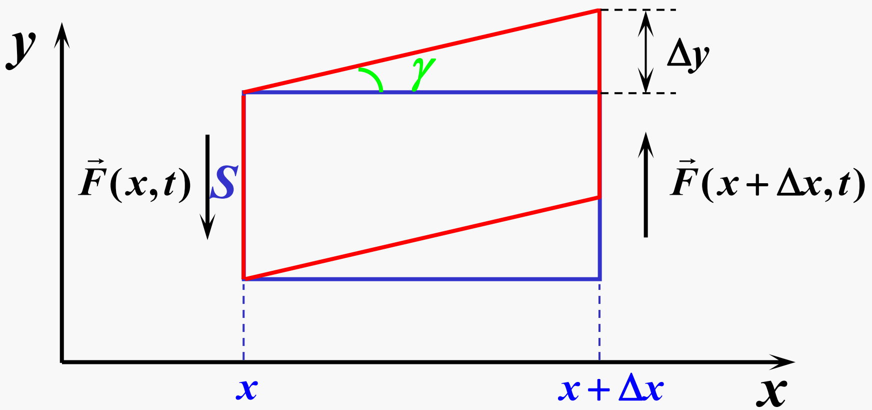
一段质元Δx所受的弹性力：

$$f(x,t)S=F(x,t)=k\Delta y(x,t) \qquad \frac{f(x,t)S}{\Delta x}=k\frac{\Delta y(x,t)}{\Delta x}$$

$$\Delta x\to 0 \quad \frac{f(x,t)S}{\Delta x}=k\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}=k\frac{f(x,t)}{Y} \qquad \boxed{k=YS/\Delta x}$$

三、固体中的横波

密度ρ的均匀固体，考虑如图的横截面(有切力的面：侧面)为S的一长方形质元：



考虑**牛顿定律**：

$$F(x+\Delta x,t)-F(x,t)=ma=\rho S\Delta x\cdot a=\Delta F(x,t)$$

$$\frac{\Delta F(x,t)}{S\Delta x}=\frac{\Delta f(x,t)}{\Delta x}=\rho a$$

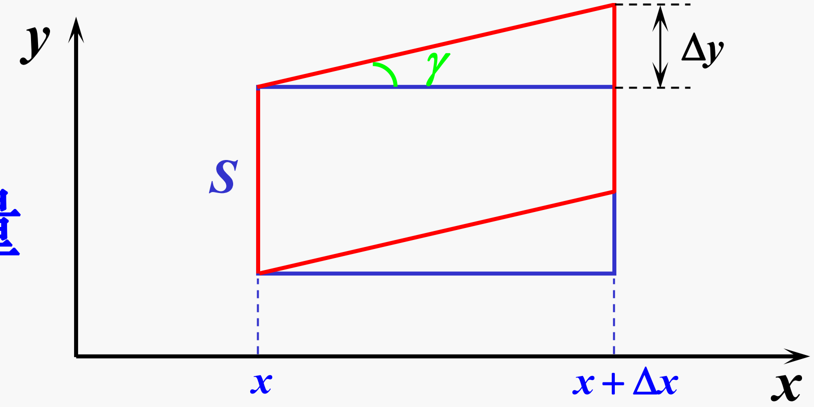
$$\Delta x\to 0\qquad \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}}$$

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}}$$

依据切变的胡克定律：



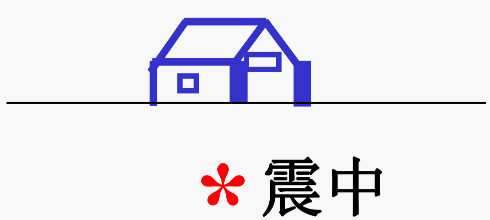
$$f(x,t) = G\gamma$$

G：切变模量

$$\gamma \approx \frac{\Delta y(x,t)}{\Delta x}$$

$$\Delta x \to 0 \quad f(x,t) = G\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \qquad G\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

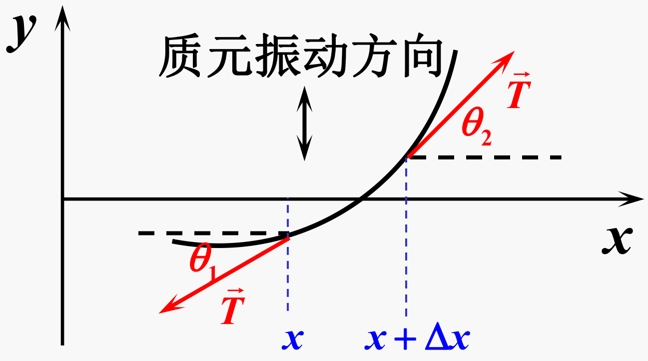
固体中横波传播的速度： $\boxed{u = \sqrt{\frac{G}{\rho}}}$



固体中，$G<Y$，$u_{横} < u_{纵}$，地震时是纵波先到，横波后到

四、弦上的横波

一根被拉紧的均匀弦，弦中张力T，单位长度质量η，将平衡时的水平直线作为x轴，弦上质元在垂直于弦的y方向上振动，研究弦上一微元，该微元在张力作用下发生切变(只有切变有横波)，略微弯曲



弦是弹性的，张力沿弦切向，质元两端张力可近似相等，考虑牛顿定律：

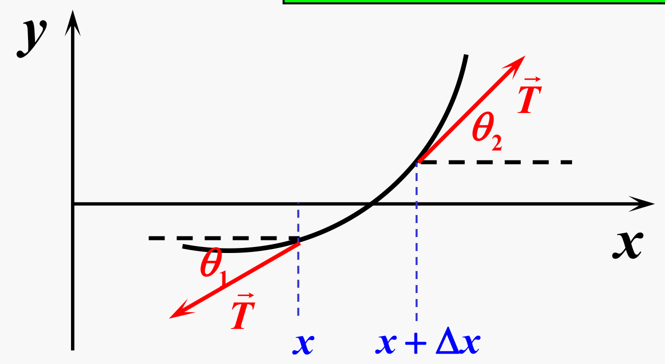
$$F_{合}=T\sin\theta_2-T\sin\theta_1=ma=\eta\Delta x\cdot a$$

$$T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1 = \eta\Delta x\cdot a$$

$\Delta x \to 0 \quad a = \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad \dfrac{\Delta[\Delta y(x,t)]}{\Delta x\cdot\Delta x} = \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

弦振动时位移很小，即θ很小：



$$\sin\theta_2 \approx \tan\theta_2 = \frac{\Delta y(x+\Delta x,t)}{\Delta x}$$

$$\sin\theta_1 \approx \tan\theta_1 = \frac{\Delta y(x,t)}{\Delta x}$$

$$\frac{T\sin\theta_2 - T\sin\theta_1}{\Delta x} = \frac{T}{\Delta x}\left[\frac{\Delta y(x+\Delta x,t)}{\Delta x} - \frac{\Delta y(x,t)}{\Delta x}\right]$$

$$= \frac{T}{\Delta x}\left\{\frac{\Delta[y(x+\Delta x,t) - y(x,t)]}{\Delta x}\right\} = T\frac{\Delta[\Delta y(x,t)]}{\Delta x\cdot\Delta x}$$

$$T\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \eta\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

弦上横波传播的速度：

$$\boxed{u = \sqrt{\frac{T}{\eta}}}$$

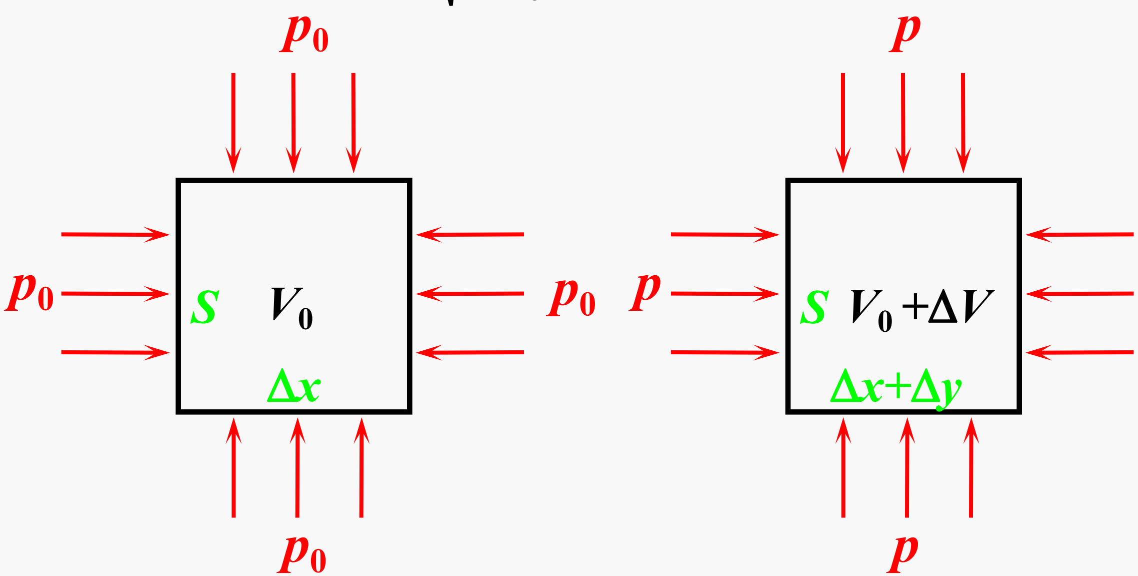
五、流体中的声波

理想流体中没有切力，只有纵向传播的声波，其速度：

$$u=\sqrt{\frac{k}{\rho_0}}$$

k：体积模量(体变弹性模量)

ρ_0：无声波时的流体密度



$$\Delta p=p-p_0=-k\frac{\Delta V}{V_0}$$

一维平面声波： $\Delta p=-k\dfrac{\Delta V}{V_0}=-k\dfrac{S\Delta y}{S\Delta x}=-k\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$$\Delta x\to 0\qquad \Delta p=-k\frac{\partial y}{\partial x}$$

$k = YS/\Delta x$

5.3 波的能量

波在弹性介质中传播时，介质发生了形变和振动，因而获得了弹性势能和动能，它们之和称波的能量。

波的能量=振动动能+形变势能

一、传播介质的能量

以长直杆中的一维纵波为例，设介质密度为ρ，杆中长Δx的质元$\Delta m = \rho\Delta V = \rho S\Delta x$，$\Delta x\to 0$时，质元振动动能

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}\Delta m v^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V v^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

$\Delta x\to 0$时，杆的弹性势能：

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}k(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}\frac{YS}{\Delta x}(\Delta y)^2 = \frac{1}{2}YS\Delta x\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 = \frac{1}{2}Y\Delta V\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

质元机械能：$\Delta E = \Delta E_{\mathrm{k}} + \Delta E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}\rho\Delta V\left(\dfrac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \dfrac{1}{2}Y\Delta V\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2$

对长直杆中传播的平面简谐波：

$$u=\sqrt{Y/\rho}$$

$$y(t,x)=A\cos\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\Delta E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}\rho\Delta V(\frac{\partial y}{\partial t})^2=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\Delta E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}Y\Delta V(\frac{\partial y}{\partial x})^2=\frac{1}{2}\frac{Y}{u^2}\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\Delta E_{\mathrm{k}}=\Delta E_{\mathrm{p}}=\frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$\Delta E=\Delta E_{\mathrm{k}}+\Delta E_{\mathrm{p}}=\rho\Delta V\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

传播介质中任一质元的振动动能和弹性势能的变化规律是相同的，而且相位相同，大小相等。

二、能量密度

$$\Delta E_k = \Delta E_p = \frac{1}{2}\rho\Delta V\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

能量密度：波传播时，单位体积介质中的波动能量

$$w = w_k + w_p = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \frac{\Delta E_k}{\Delta V} + \frac{\Delta E_p}{\Delta V} = \frac{1}{2}\rho(\frac{\partial y}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}Y(\frac{\partial y}{\partial x})^2$$

对长直杆中传播的**平面简谐波**：

$$w_k = w_p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

$$w = \rho\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

平均能量密度：一个周期内能量密度的平均值

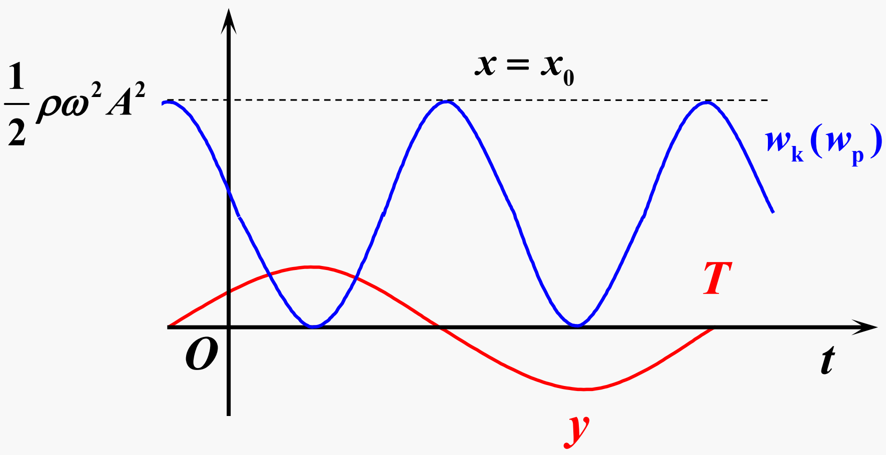
$$\bar{w} = \frac{1}{T}\int_0^T w\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2$$

适用任何弹性波

物理意义

$$y(t,x)=A\cos\omega(t-\frac{x}{u}) \quad w_k=w_p=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

(1) 固定x

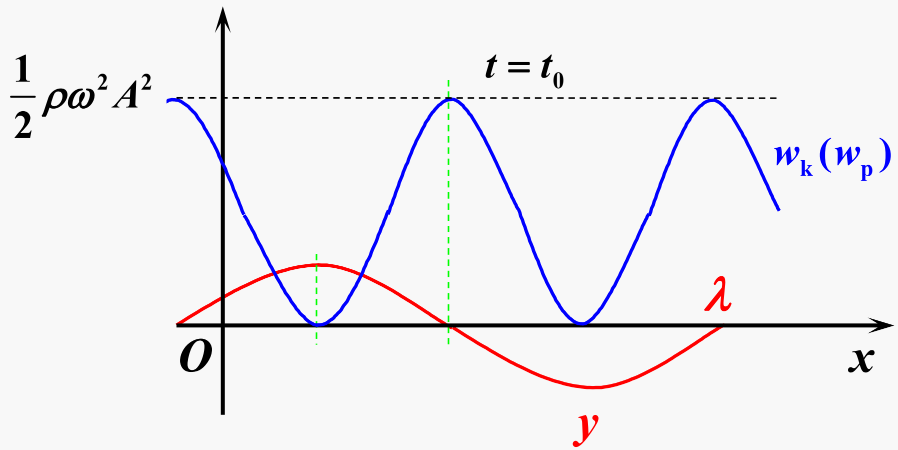


w_k、w_p随t 周期性同步变化

波的传播过程中，任一质元总的机械能并不守恒

$$y(t,x) = A\cos\omega(t-\frac{x}{u}) \quad w_{\mathrm{k}} = w_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$

(2) 固定t

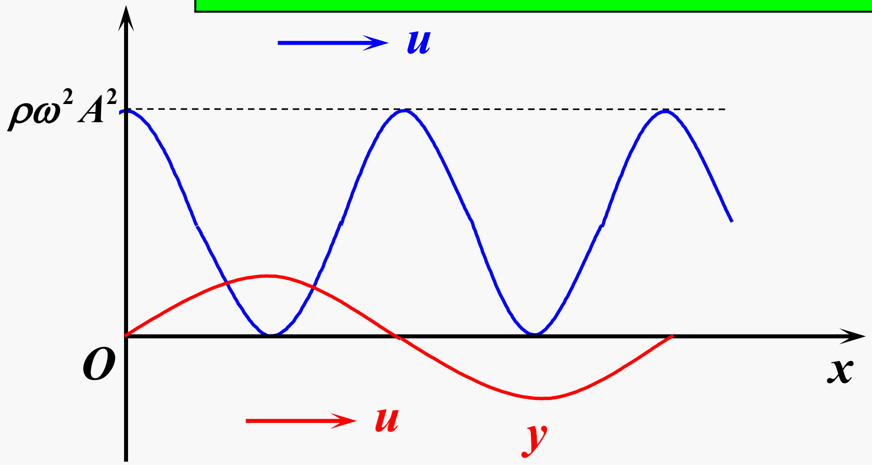


w_{k}、w_{p}随x周期性同步分布

质元通过平衡位置时，动能最大，振动速度最大，弹性势能最大，形变最大。质元在最大位移时，动能为零，振动速度为零，弹性势能为零，形变为零。

(3) 能量传播

$$y(t,x)=A\cos\omega(t-\frac{x}{u}) \quad w_k=w_p=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$$



波形以速度u移动，能量分布也随之以速度u运动。振动在介质中的传播过程就是能量传播过程，波是能量传播的一种形式。

波的传播过程中，质元接受前面质元的能量，其能量从零增加到最大，然后又通过弹性力做功把这能量传递给后面的质元，其能量又从最大减小到零。

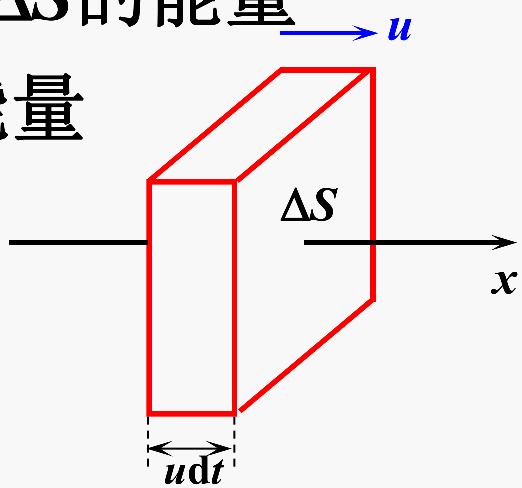
能量以波的形式向前传输且速度不变，这样的波称为行波。

$\overline{w}=\frac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

三、能流密度

能流(能通量)： 单位时间通过某个面积ΔS的能量

$\mathrm{d}t$时间通过ΔS的能量，即图中柱体的能量



$$\Delta w=w(t,x)\Delta V=w(t,x)u\mathrm{d}t\cdot\Delta S$$

能流： $$\frac{\Delta w}{\mathrm{d}t}=w(t,x)u\cdot\Delta S$$

能流密度： 通过垂直传播方向的单位面积的能流

$$S=\frac{\Delta w}{\mathrm{d}t\Delta S}=w(t,x)u \qquad \vec{S}=w(t,x)\vec{u}$$

平面简谐波： $S=\rho u\omega^2A^2\sin^2\omega(t-\frac{x}{u})$

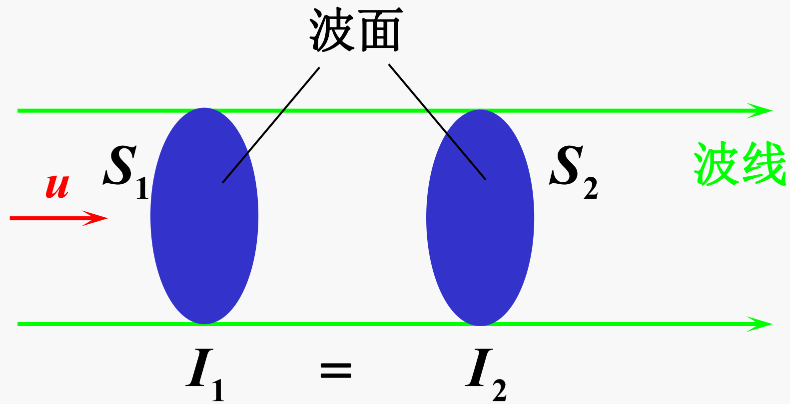
波强： 平均能流密度

$$I=\frac{1}{T}\int_0^T S\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T w(t,x)u\mathrm{d}t=u\overline{w}=\frac{1}{2}\rho u\omega^2A^2\propto A^2$$

$$I=\frac{1}{2}\rho u\omega^2 A^2$$

四、平面波、球面波的能流

平面波：波面是平面



不考虑介质对能量的吸收，由能量守恒，平面波一束波线所限定的两个相同面积S_1=S_2波面的平均能流必然相等

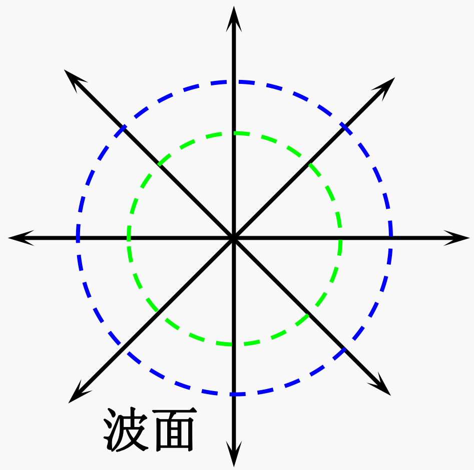
$$\frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_1^2 S_1 = I_1 S_1 = I_2 S_2 = \frac{1}{2}\rho u\omega^2 A_2^2 S_2 \qquad A_1 = A_2$$

平面波的强度各处相同，平面波在传播中振幅不变。

平面简谐波：$y(t,x) = A\cos\omega(t-\dfrac{x}{u})$

$$I = \frac{1}{2}\rho u \omega^2 A^2$$

球面波：波面是球面



对球面波，通过两个半径不同的球面的平均能流相等

$$4\pi r_1^2 I_1 = I_1 S_1 = I_2 S_2 = 4\pi r_2^2 I_2 \qquad \frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

球面波的振幅A反比于到点波源的距离r

球面简谐波：$y(t,r) = \dfrac{C}{r}\cos\omega\left(t - \dfrac{r}{u}\right)$