第四章　振动

机械振动：物体在一定位置附近往复的运动。

广义振动：任一物理量(如位移、电流等)在一给定值附近变化都叫振动。如电磁振动

各种振动都遵从相同的规律，本章主要讨论机械振动

振动分类

- 受迫振动
- 自由振动
  - 阻尼自由振动
  - 无阻尼自由振动
    - 无阻尼自由非谐振动
    - 无阻尼自由谐振动
      (简谐振动)

某物理量振动，其数值总在一定值附近变动，如果每隔一固定的时间间隔其数值就重复一次，这样的振动称为周期振动；往复一次所需经历的最短时间间隔称为振动周期T

$$x(t)=x(t+T)$$

单位时间内其数值重复出现的次数称为振动频率ν

$$\nu=\frac{1}{T}(\mathrm{Hz})$$

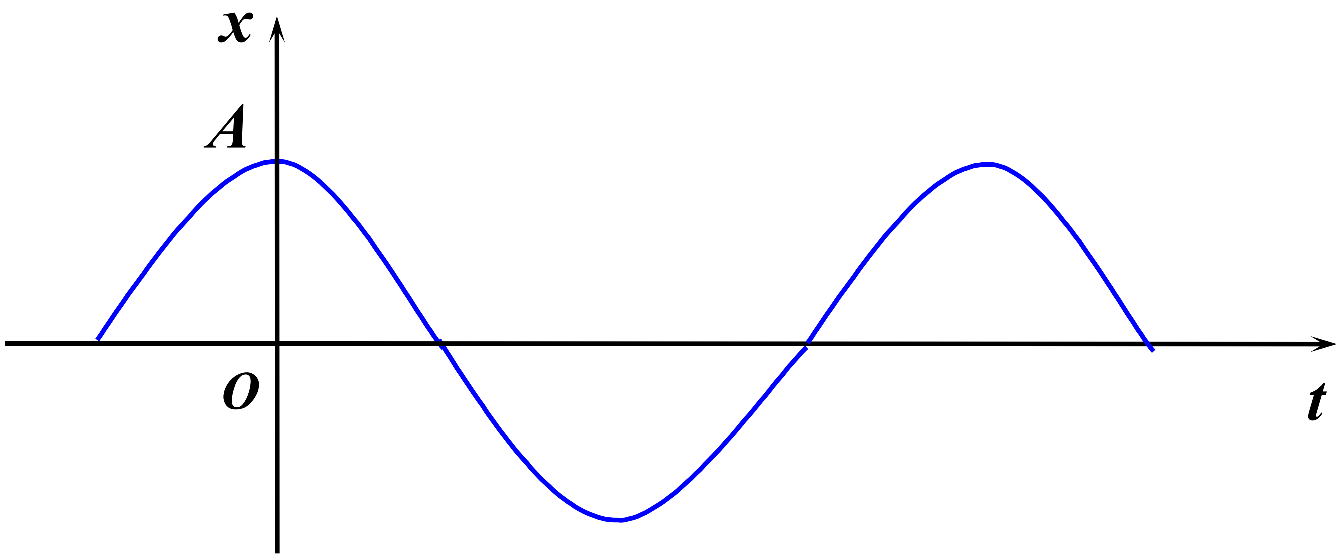
最简单的一种振动是简谐振动，它也是最基本的振动，其它复杂的振动可以认为是多个简谐振动的合成

4.1 简谐振动

一、简谐振动

质点沿x轴在原点附近做往复运动，其位移随时间按余弦函数(正弦函数)规律变化，这样的运动称简谐振动

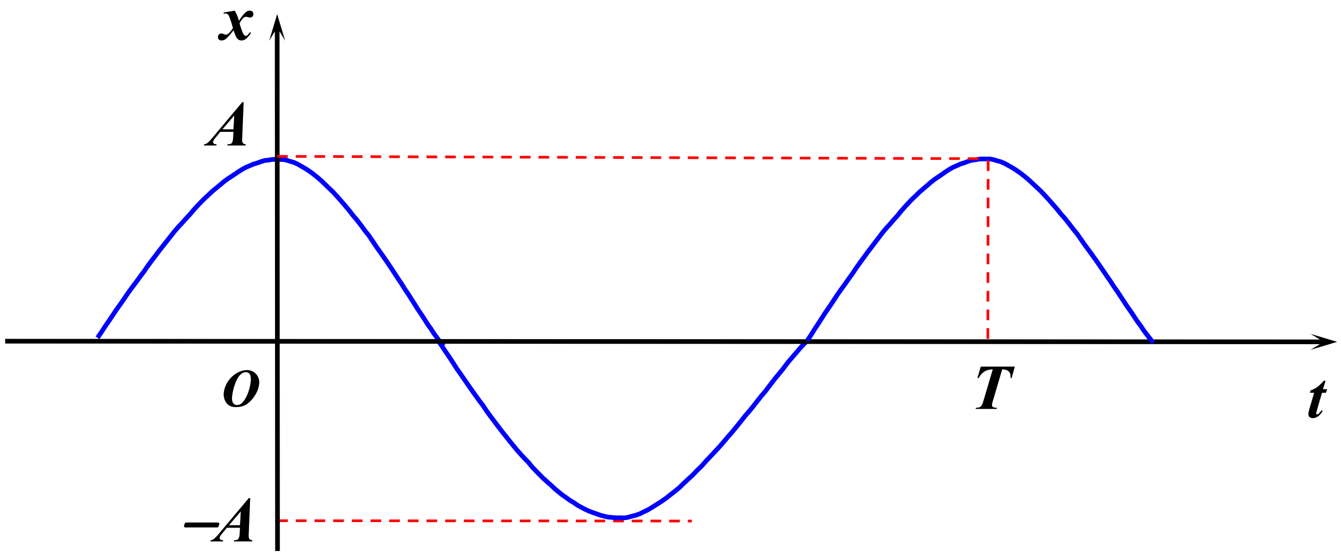
$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$ 简谐振动函数



简谐振动的特点：(1) 等幅振动 (2) 周期振动$x(t)=x(t+T)$

二、描述简谐振动的特征量

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$



振幅A：x 值变动的最大幅度

角频率ω：$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$　　$\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$　$\omega T = 2\pi$

相位$\omega t + \varphi$：描述简谐运动状态的物理量

初相φ：t=0时的相位

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

同一个简谐振动不同时刻的相位差：

$$\Delta\varphi = (\omega t_2 + \varphi) - (\omega t_1 + \varphi) = \omega(t_2 - t_1)$$

两个简谐振动在某时刻的相位差：

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad x_2(t) = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$$\Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1$$

若两简谐振动的频率相同，则任一时刻相位差不变，等于初相差：

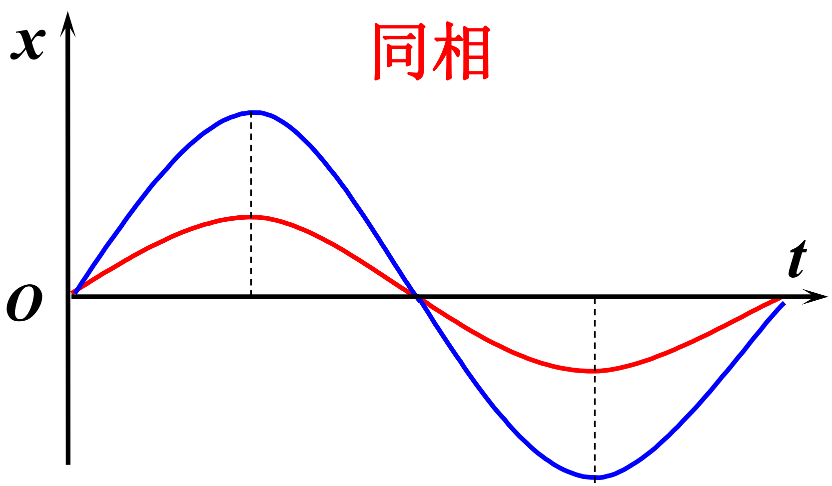
$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

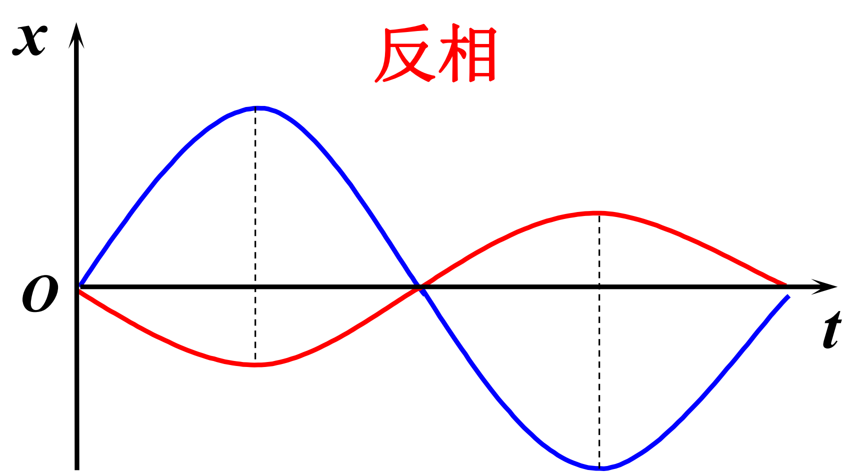
频率相同的两个简谐振动：

$$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

当$\Delta\varphi = \pm 2k\pi$ (k=0,1,…)，两简谐振动步调相同(同相)

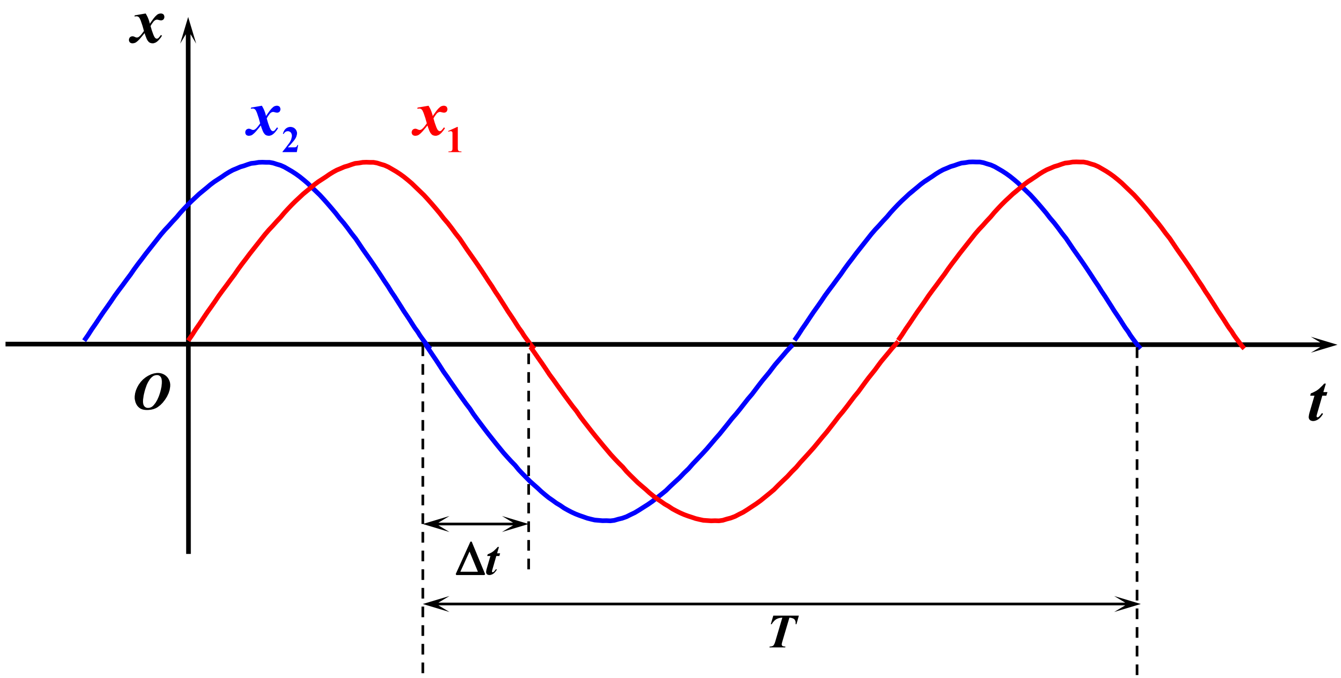
当$\Delta\varphi = \pm(2k+1)\pi$ (k=0,1,…)，两简谐振动步调相反(反相)





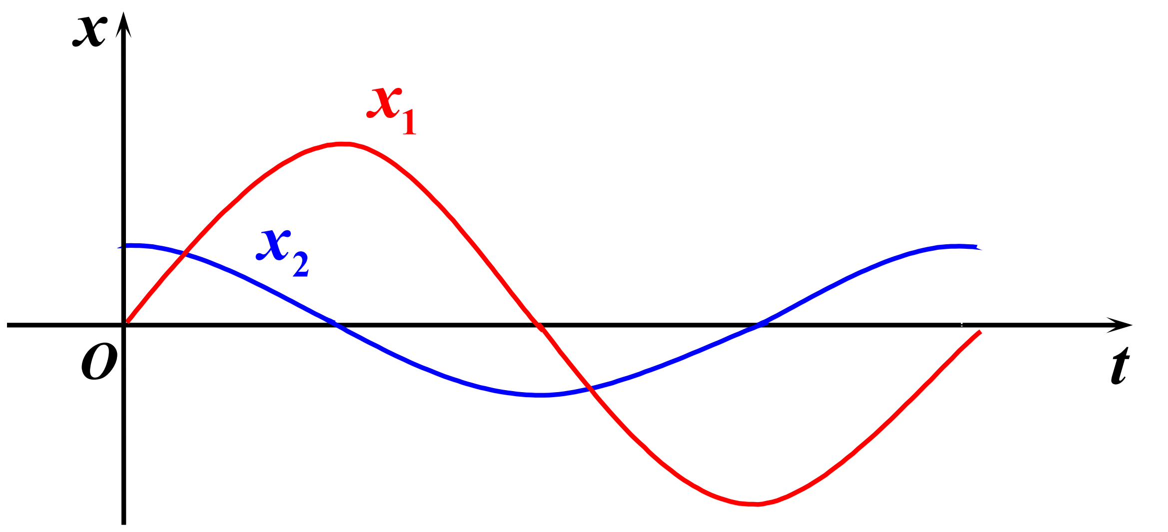
$x_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad x_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2) \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

若$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$，则简谐振动$x_2$比简谐振动$x_1$早达到正最大值，称$x_2$比$x_1$超前$\Delta\varphi$（或$x_1$比$x_2$落后$\Delta\varphi$）。



$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} \quad \Delta\varphi = 2\pi\frac{\Delta t}{T}$$

$$x_1(t)=A_1\cos(\omega t+\varphi_1)\quad x_2(t)=A_2\cos(\omega t+\varphi_2)\quad \Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$$



$$\varphi_2=0$$

$$\varphi_1=-\frac{\pi}{2}\text{或}\varphi_1=\frac{3\pi}{2}$$

x_2比x_1超前π/2；或x_2比x_1落后3π/2

一般情况，超前或落后以相位差绝对值<π情形判断

简谐振动x_2和简谐振动x_1具有恒定的相位差$\Delta\varphi$，它们的振动步调上相差一段时间：$\Delta t=\Delta\varphi/\omega$。

三、简谐振动的描述方法

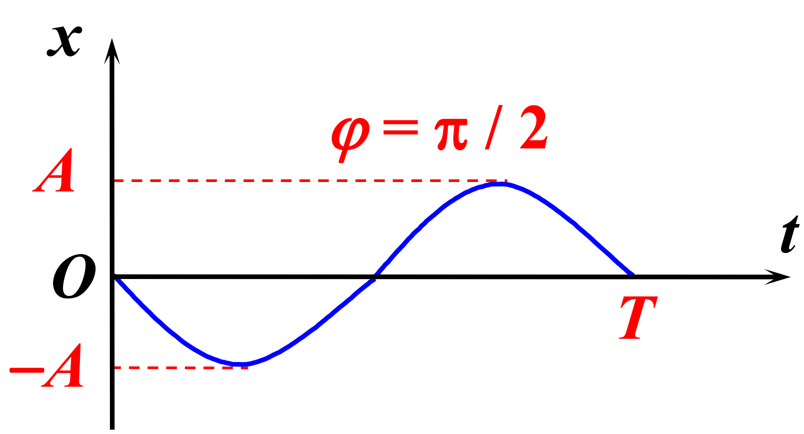
1、解析法

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A、$\omega(T)$、φ：描述简谐振动的三个特征量

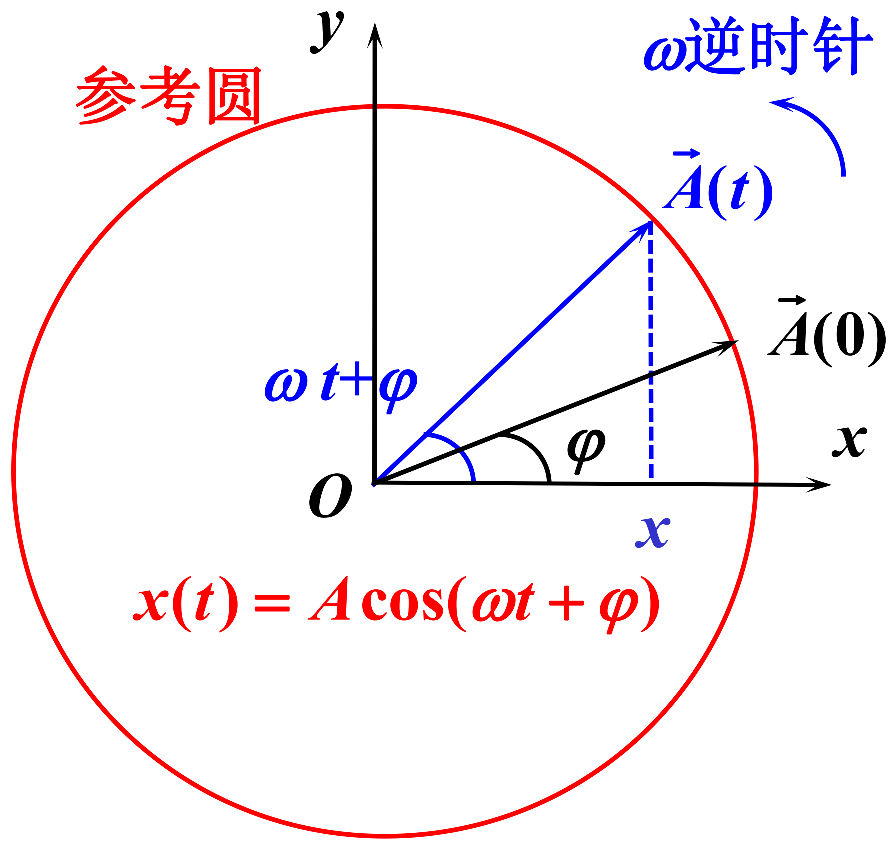
2、曲线法

简谐振动位移随时间变化的函数图线：简谐振动图线

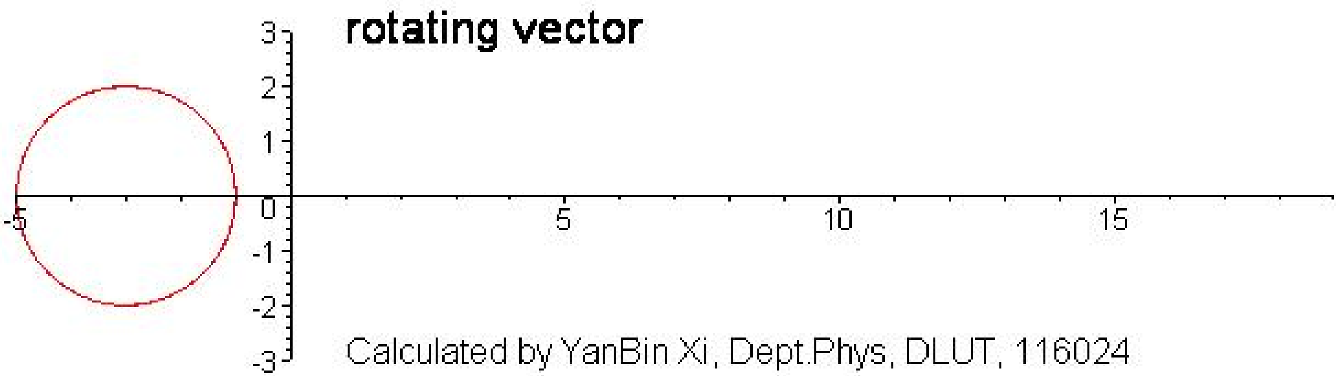


3、旋转矢量法

一个旋转矢量$\vec{A}$，其大小为简谐振动的振幅，0时刻$\vec{A}$与x轴夹角为初相φ，$\vec{A}$以角速度ω在xOy面内逆时针匀速转动。t时刻$\vec{A}$与x轴的夹角$\omega t+\varphi$是简谐振动的相位，t时刻$\vec{A}$的x分量正是简谐振动函数。



旋转矢量端点在x轴上的投影在x轴上作简谐振动。旋转矢量也称振幅矢量。


rotating vector
3
2
1
0
-1
-2
-3
-5
5
10
15
Calculated by YanBin Xi, Dept.Phys, DLUT, 116024

四、简谐振动的速度、加速度

$\boxed{x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)}$

1、速度

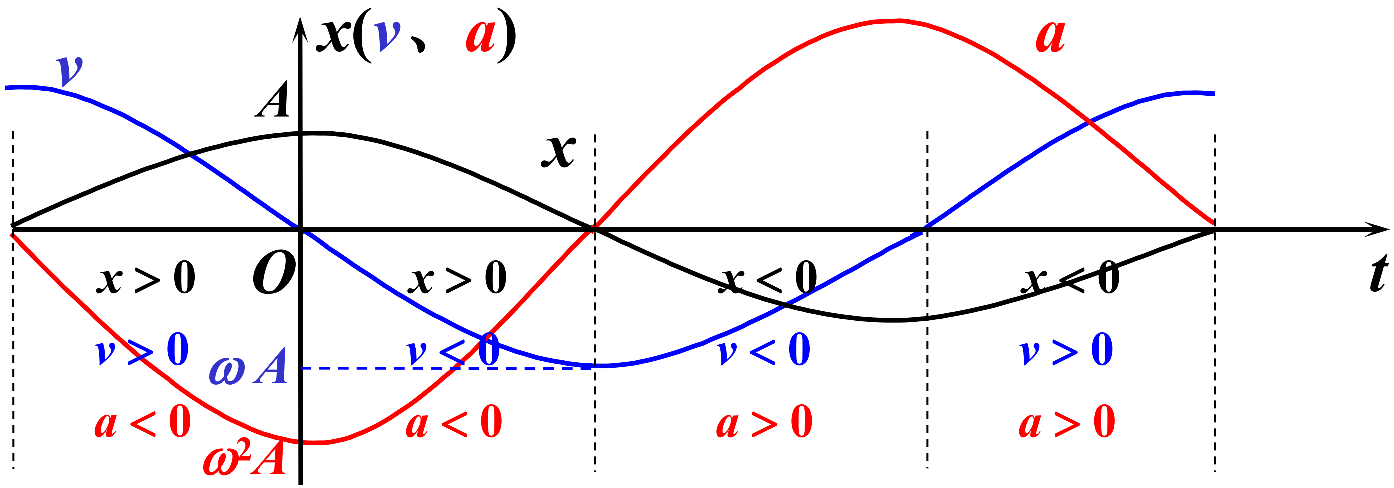
$$v(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=\omega A\cos(\omega t+\varphi+\frac{\pi}{2})$$

速度也做简谐振动，v超前x $\pi/2$

2、加速度

$$a(t)=\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}=-\omega^2A\cos(\omega t+\varphi)=\omega^2A\cos(\omega t+\varphi+\pi)$$

加速度也做简谐振动，a超前v：$\pi/2$；a与x反相



解析法中由初始条件求解振幅A和初相位φ的一般方法

设$t=0$时，振动位移：$x(0)=x_0$；振动速度：$v(0)=v_0$

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad v(t)=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)$$

$$x_0=A\cos\varphi \qquad v_0=-\omega A\sin\varphi \qquad -\frac{v_0}{\omega}=A\sin\varphi$$

$$x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}=A^2 \qquad A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\tan\varphi=-\frac{v_0}{\omega x_0} \qquad \varphi=\arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)$$

例4-1 一质点沿 x 轴作简谐运动，振幅 A =0.12m，周期 T=2s，当 $t=0$ 时，质点对平衡位置的位移 x_0=0.06m，此时刻质点向 x 正方向运动。**求：** 1) 此简谐运动的表达式； 2) $t=T/4$ 时，质点的位置、速度和加速度； 3) 如果在某时刻质点位于 x=−0.06m，且向 x 轴负方向运动，从该位置第一次回到平衡位置所需的时间。

解： 1) 由题知

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)=0.12\cos(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)=0.12\cos(\pi t+\varphi)$$

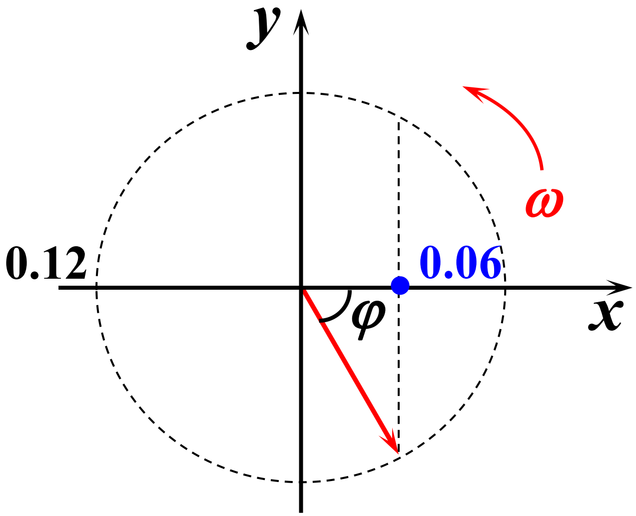
$$x(0)=0.12\cos\varphi=0.06 \qquad \cos\varphi=0.5 \qquad \varphi=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$v(t)=-\omega A\sin(\omega t+\varphi)=-0.12\pi\sin(\pi t+\varphi)$$

$$v(0)=-0.12\pi\sin\varphi>0 \qquad \sin\varphi<0 \qquad \varphi=-\frac{\pi}{3}$$

$$x(t)=0.12\cos(\pi t-\frac{\pi}{3})$$

也可用旋转矢量方法求φ，t=0时， 位移为0.06m，且向x轴正方向运动：



$$\varphi = -\frac{\pi}{3}$$

2) $$x(t) = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

$$a(t) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -0.12\pi^2\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

$t = T/4 = 0.5\mathrm{s}$

$$x(0.5) = 0.104\mathrm{m}$$

$$v(0.5) = -0.188\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$a(0.5) = -1.03\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

$$x(t) = 0.12\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

$$v(t) = -0.12\pi\sin(\pi t - \frac{\pi}{3})$$

3) 设t_1时刻质点位于x=−0.06m：

$$x(t_1) = 0.12\cos(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}) = -0.06$$

$$\cos(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}) = -0.5 \qquad \pi t_1 - \frac{\pi}{3} = \pm\frac{2\pi}{3} \qquad t_1 = 1\text{s}或t_1 = -\frac{1}{3}\text{s}$$

$$v(t_1) = -0.12\pi\sin(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}) < 0 \quad \sin(\pi t_1 - \frac{\pi}{3}) > 0 \qquad t_1 = 1\text{s}$$

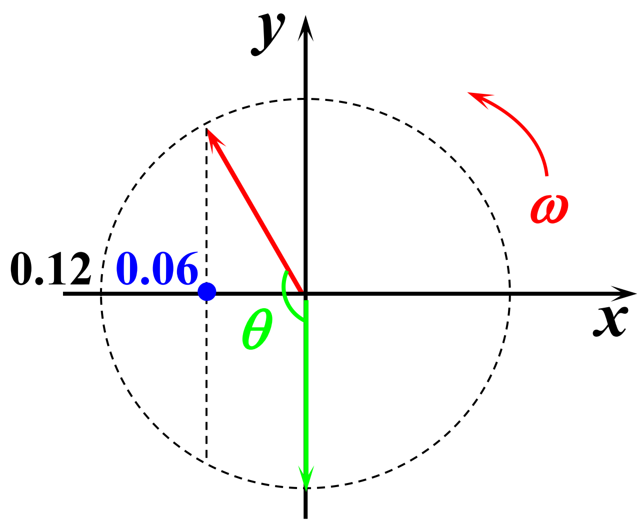
设t_2时刻质点该位置第一次回到平衡位置

$$x(t_2) = 0.12\cos(\pi t_2 - \frac{\pi}{3}) = 0 \qquad \pi t_2 - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}或\frac{3\pi}{2}$$

$$t_2 = \frac{5}{6}\text{s}或t_2 = \frac{11}{6}\text{s} \qquad t_2 > t_1 \rightarrow t_2 = \frac{11}{6}\text{s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{5}{6}\text{s}$$

再用旋转矢量方法， t_1时刻质点位于位移−0.06m，且向x轴负方向运动：

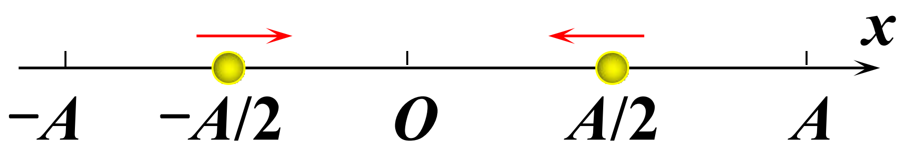


t_2时刻质点从该位置第一次回到平衡位置

$$\theta=(\omega t_2+\varphi)-(\omega t_1+\varphi)=\omega\Delta t=\pi\Delta t=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}$$

$$\Delta t=t_2-t_1=\frac{5}{6}\mathrm{s}$$

例4-2 如图，两质点作同方向、同频率的简谐振动，振幅A相等。当质点1在 $x_1=A/2$ 处，且向左运动时，另一个质点2在 $x_2=-A/2$ 处，且向右运动。**求：** 这两个质点的相位差。



解： 设质点1在 $x_1=A/2$ 处的时刻为t_0

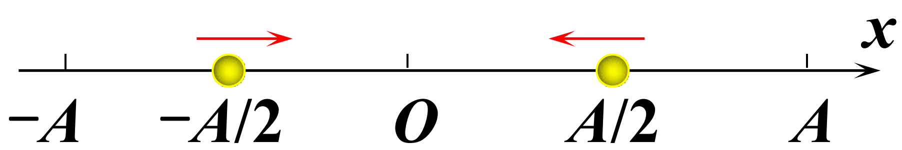
$$x_1(t)=A\cos(\omega t+\varphi_1) \qquad x_1(t_0)=A\cos(\omega t_0+\varphi_1)=\frac{A}{2}$$

$$\omega t_0+\varphi_1=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$v_1(t)=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_1) \qquad v_1(t_0)=-\omega A\sin(\omega t_0+\varphi_1)<0$$

$$\sin(\omega t_0+\varphi_1)>0 \qquad \omega t_0+\varphi_1=\frac{\pi}{3}$$

$$\omega t_0 + \varphi_1 = \frac{\pi}{3}$$



$$x_2(t) = A\cos(\omega t + \varphi_2) \qquad x_2(t_0) = A\cos(\omega t_0 + \varphi_2) = -\frac{A}{2}$$

$$\omega t_0 + \varphi_2 = \pm\frac{2\pi}{3}$$

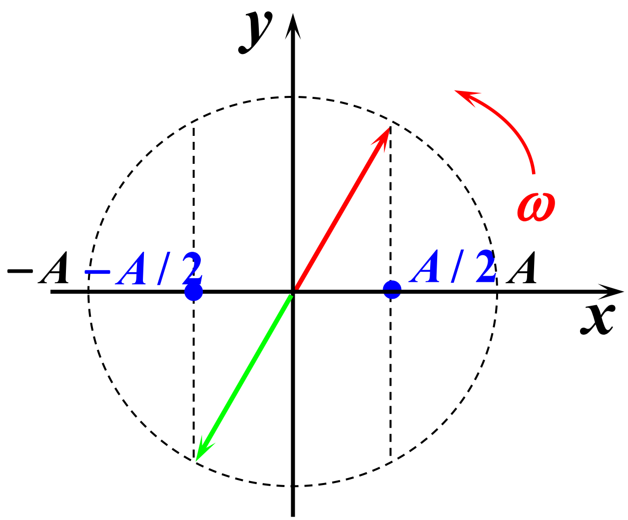
$$v_2(t) = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_2) \qquad v_2(t_0) = -\omega A\sin(\omega t_0 + \varphi_2) > 0$$

$$\sin(\omega t_0 + \varphi_2) < 0 \qquad \omega t_0 + \varphi_2 = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{2\pi}{3} - \omega t_0 - (\frac{\pi}{3} - \omega t_0) = -\pi$$

反相

用旋转矢量方法，当质点1在 $x_1=A/2$ 处，且向左运动时，另一个质点2在 $x_2=-A/2$ 处，且向右运动。



$$\Delta\varphi = \pi$$

例4-3 一轻弹簧，一端固定，另一端连一定质量的物体，整个系统位于水平面内。将物体所在位置选为原点，今将物体沿平面向右拉长到x_0=0.04m处释放，已知ω＝6.0rad/s。**求：** 1) 简谐振动方程；2) 物体从初始位置运动到第一次经过$A/2$处时的速度。

解： 1) 水平弹簧振子做简谐振动，由题知

$$x_0 = 0.04\text{m} \quad v_0 = 0 \quad \omega = 6.0\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = x_0 = 0.04\text{m}$$

$$\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right) = 0$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = 0.04\cos(6t)$$ 初始位置为正最大值

2)设t_0时刻，物体从初始位置(A)第一次经过$A/2$，此时速度方向与位移方向相反：小于零

$$x(t)=A\cos(\omega t) \qquad x(t_0)=A\cos(\omega t_0)=\frac{A}{2}$$

$$\omega t_0=\pm\frac{\pi}{3}$$

$$v(t)=-\omega A\sin(\omega t) \qquad v(t_0)=-\omega A\sin(\omega t_0)<0$$

$$\omega t_0=\frac{\pi}{3}$$

$$v(t_0)=-\omega A\sin(\omega t_0)=-6.0\times 0.04\sin(\frac{\pi}{3})=-0.208\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

4.2 谐振子

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

作简谐振动的系统叫做谐振子

作简谐振动的质点受力为：

$$F = ma = m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} = -m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = -m\omega^2 x(t)$$

一个作简谐运动的质点所受的沿位移方向的合外力与它对于平衡位置的位移成正比而反向。这样的力称为恢复力。

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x(t) = 0$$ 简谐运动的动力学方程

方程的解为： $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

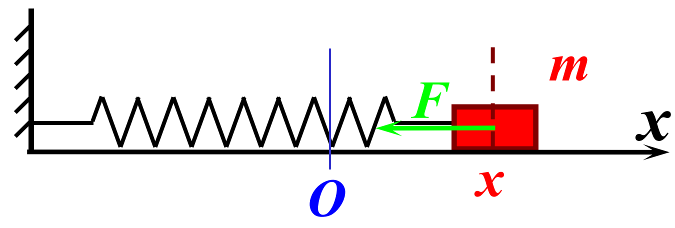
一、水平弹簧振子

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2x(t)=0$$

忽略摩擦力下，轻弹簧和质点系统构成谐振子，以平衡位置为原点O，质点位置为x 时，质点受的弹性力：

$$F=-kx=m\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}x=0 \qquad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$



弹簧振子

方程的解为： $x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

其中A与φ由初始条件决定，设$x_0=x(0)$，$v_0=v(0)$

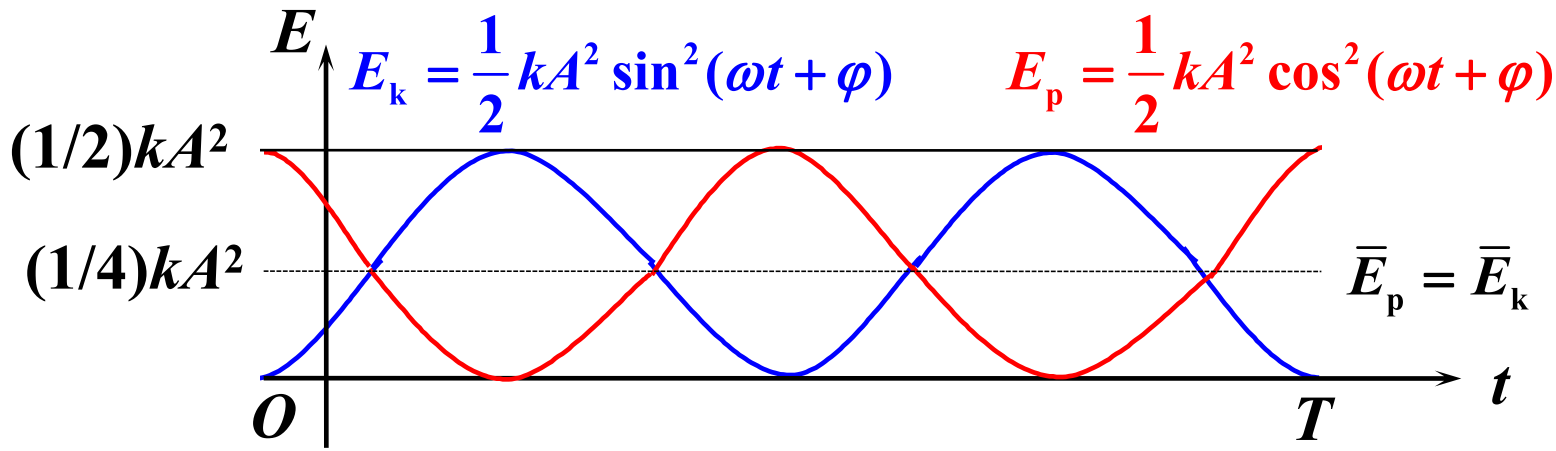
$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}} \qquad \varphi=\arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})$$

初相取决于时间零点的选择；振幅取决于初机械能 。

弹簧振子的机械能为动能和弹性势能之和

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$
$$v = -\omega A\sin(\omega t + \varphi)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$
$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$
$$= \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}kA^2$$

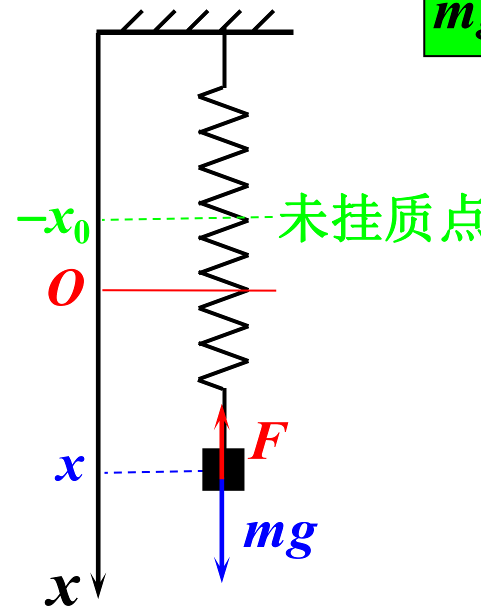


弹簧振子在振动过程中，动能和势能相互转化而总机械能保持不变。振动的总机械能称为**振动能量**。

二、竖直弹簧振子

$mg = kx_0$

忽略摩擦力下，以平衡位置为原点O，平衡位置时，弹簧伸长x_0，当质点位置为x 时，质点受合力：

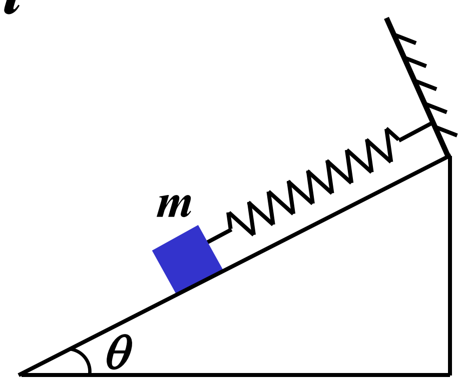


$$f = mg - k(x + x_0) = m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

方程的解为： $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

竖直弹簧振子的恢复力是合力，包括了重力和弹性力

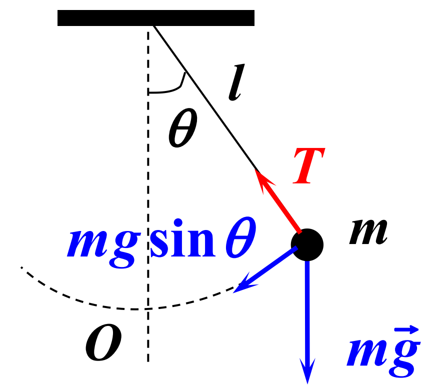


问题：如图的光滑斜面上的弹簧振子的角频率是多少？

三、单摆

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=0$$

细线不伸缩，上端固定，下端悬挂一很小的重物，重物稍移动就可在竖直平面内来回摆动，这种装置就是单摆



重物平衡位置O在竖直线上，摆线与竖直方向成θ角，逆时针转动，θ增大。θ很小时，重物受重力mg和线的拉力T的作用，在切向方向上：

$$-mg\theta\approx-mg\sin\theta=ma_t=ml\alpha=ml\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{g}{l}\theta=0 \qquad \theta=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

A是角振幅，φ是初相，由单摆的初始条件决定。

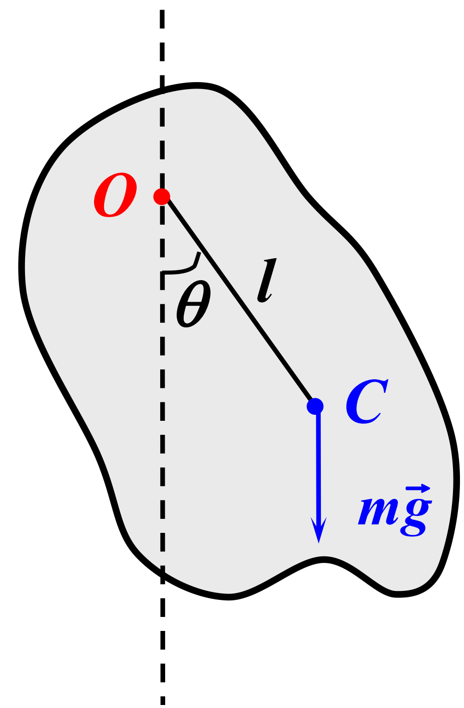
单摆中，重物受的恢复力不是弹性力，但作用与弹性力一样，是准弹性力。

四、复摆

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\omega^2x(t)=0$$

刚体绕固定水平轴自由摆动就是复摆，微振动的复摆是谐振子。

固定水平轴O，刚体质心C，O到C距离l，刚体的摆角θ，逆时针转动，θ增大。刚体在重力矩作用下摆动，由刚体定轴转动定律：



$$-mgl\theta\approx-mgl\sin\theta=J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{mgl}{J}\theta=0$$

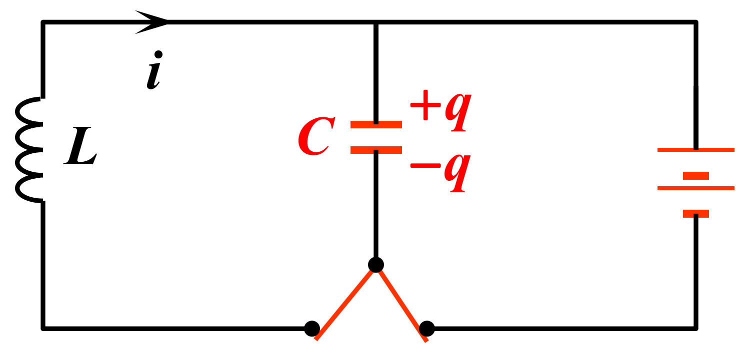
$$\theta=A\cos(\omega t+\varphi)\quad \omega=\sqrt{\frac{mgl}{J}}$$

振幅A和初相φ由复摆的初始条件决定。

五、电磁振荡

$$\varepsilon_{\mathrm{i}}=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\qquad U=\frac{q}{C}\qquad i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

电源先给电容器充电，然后开关换到LC回路



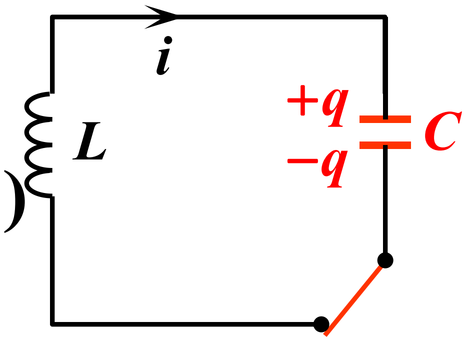
设某时刻电容器极板上的电荷量q，电路电流i，回路中自感电动势等于电容器的电压：

$$-L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}=-L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}=\frac{q}{C}\qquad\qquad \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{LC}q=0$$

方程的解为：$q(t)=q_0\cos(\omega t+\varphi)\quad \omega=\sqrt{\frac{1}{LC}}$

振幅q_0和初相φ由初始条件决定

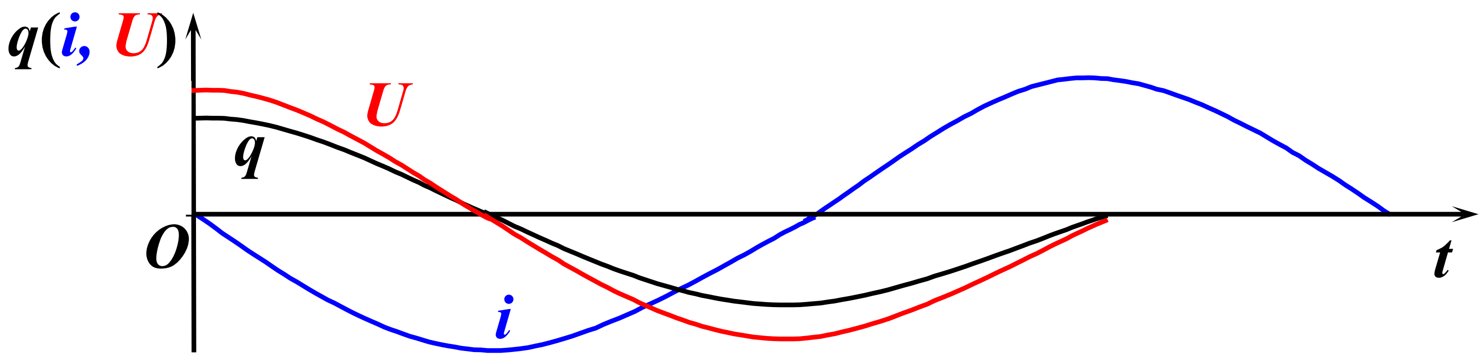
$$q(t)=q_0\cos(\omega t+\varphi)\quad \omega=1/\sqrt{LC}$$



$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\omega q_0\sin(\omega t+\varphi)=-i_0\sin(\omega t+\varphi)$$

$$U=\frac{q}{C}=\frac{q_0}{C}\cos(\omega t+\varphi)=U_0\cos(\omega t+\varphi)$$

在LC电路中，电荷、电流和电压都随时间作简谐振动。



LC 振荡中的电场能量：$W_e=\frac{1}{2}\frac{q^2}{C}=\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\cos^2(\omega t+\varphi)$

LC 振荡中的磁场能量：$W_m=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}Li_0^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

$$W_e = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\cos^2(\omega t+\varphi) \quad W_m = \frac{1}{2}Li_0^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} i_0 = \omega q_0 \\ \omega = \sqrt{\dfrac{1}{LC}} \end{array}}$$

$$W = W_e + W_m = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}\cos^2(\omega t+\varphi) + \frac{1}{2}Li_0^2\sin^2(\omega t+\varphi)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$$

$$\frac{1}{2}Li_0^2 = \frac{1}{2}L(\omega q_0)^2 = \frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$$

在*LC*电磁振荡中，电能和磁能互相转化，但总能量保持不变

例4-4 弹簧下悬一质量为m的小球时，其伸长量为x_1。现在拿下小球在弹簧下端挂一个质量为M的物体构成弹簧振子。将物体从平衡位置向下拉x_0后，再给它向上的初速度v_0。取竖直向下为x轴正方向。**求：** 1) 物体的振动周期； 2) 任意时刻的振动函数和速度。

解： 1) 这是竖直弹簧振子

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$kx_1 = mg \qquad k = mg / x_1$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{mg}{Mx_1}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{Mx_1}{mg}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mg}{Mx_1}}$$

2) 取静止时物体位置为坐标原点

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

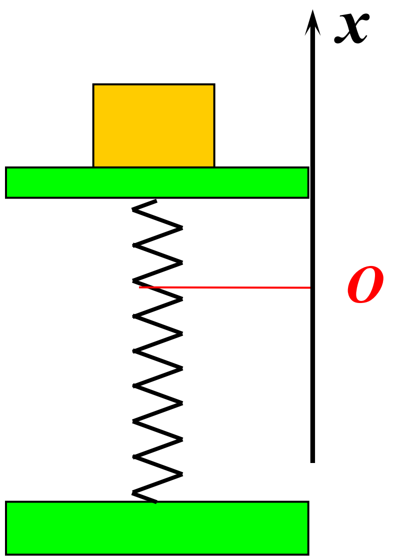
$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{x_0^2 + \frac{Mx_1 v_0^2}{mg}}$$

$$\varphi = \arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0}) = \arctan(-\frac{v_0}{x_0}\sqrt{\frac{Mx_1}{mg}})$$

例4-5 在平板上放一质量为1kg的物体，平板沿铅直方向作简谐振动，振幅为2cm，周期为0.5s。求：1) 平板位于最高点时，物体对平板的压力是多大？ 2) 平板应以多大振幅运动时，才能使重物跳离平板？

$$\varphi = \arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})$$

解：1) 这是竖直弹簧振子，选平衡位置为原点，向上为正方向，建立坐标系

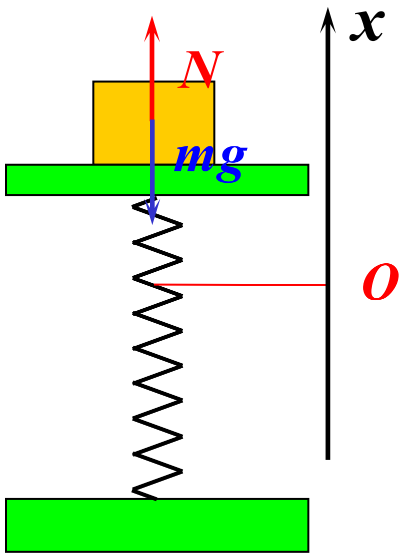


取平板位于最高处为零时刻，此时$x_0=A$， $v_0=0$，则振动函数为：

$$x(t)=A\cos\omega t=A\cos(\frac{2\pi}{T}t)=0.02\cos(4\pi t)$$

$$a(t)=-\omega^2 A\cos\omega t=-0.32\pi^2\cos(4\pi t)$$

$$a(t)=-\omega^2 A\cos\omega t=-0.32\pi^2\cos(4\pi t)$$



物体受重力和支持力，加速度a：

$$N-mg=ma$$

t=0时，物体在最高处：

$$a=-0.32\pi^2 \quad N=ma+mg\approx 6.64(\mathrm{N})$$

压力等于支持力为：6.64N

2) 某时刻，物体跳离平板，即平板对物体没有支持力了：$N\leq 0$

$$N=ma+mg=-m\omega^2 A\cos\omega t+mg\leq 0$$

$$A\geq g/(\omega^2\cos\omega t)$$

$$A\geq g/\omega^2=g/(16\pi^2)\approx 0.062(\mathrm{m})$$

例4-6 竖直弹簧振子，倔强系数k，重物质量m，$t=0$时弹簧相对原长伸长x'，弹簧速度v_0，**求：** 振动的频率ν，振幅A，初位相φ，振动表达式和总能量E。

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

解： 振动的表达式

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi) \qquad \nu=\frac{\omega}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{k}{m}\right)^{1/2}$$

设平衡时弹簧相对原长伸长x_1

$$kx_1=mg \qquad x_0=x(0)=x'-x_1=x'-\frac{mg}{k}$$

$$A=\left[\left(x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}=\left[\left(x'-\frac{mg}{k}\right)^2+\left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$$

$$=\left[\left(x'-\frac{mg}{k}\right)^2+\frac{mv_0^2}{k}\right]^{1/2}$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) \quad A = [(x' - \frac{mg}{k})^2 + \frac{mv_0^2}{k}]^{1/2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$x_0 = x' - \frac{mg}{k}$$

$$\varphi = \arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})$$

$$= \arctan[-v_0(\frac{m}{k})^{-1/2} / (x' - \frac{mg}{k})]$$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}k[(x' - \frac{mg}{k})^2 + \frac{mv_0^2}{k}]$$

$$= \frac{1}{2}k(x' - \frac{mg}{k})^2 + \frac{1}{2}mv_0^2$$