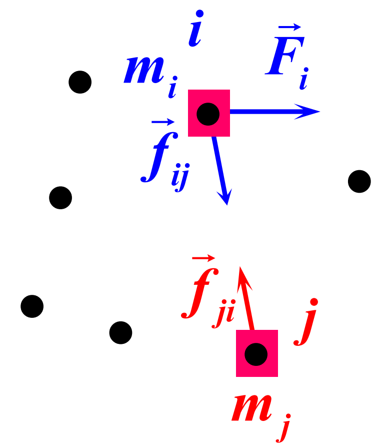
2.3 质心运动定理

一、质点系

质点系： 由若干个有相互作用的质点组成的系统

内力： 系统内各质点间的相互作用力

$$\boxed{\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}}$$



外力： 系统外的其它物体对系统内任意一质点的作用力

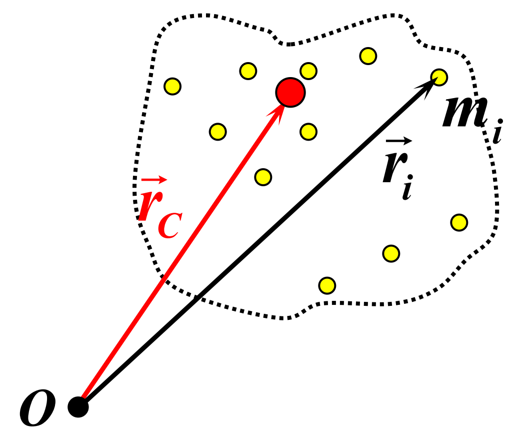
对质点系，可以对其中的每个质点单独用牛顿定律，然后再综合分析

$$\vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m_i\vec{v}_i)}{\mathrm{d}t} = m_i\vec{a}_i \quad i = 1, 2, \cdots$$

二、质心

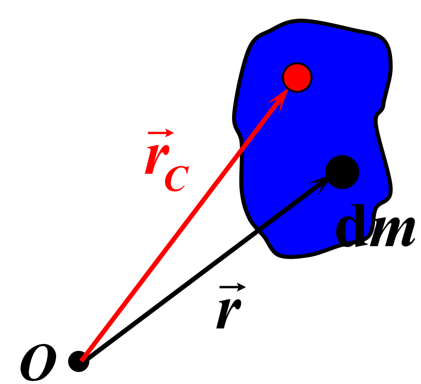
在某参考系中，质点系内第i个质点的位矢$\vec{r}_i$ ，质量m_i，定义质心的位矢 $\vec{r}_C$

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$$



对质量连续分布的物体，可看成特殊的质点系，其中任意质量元dm的位矢为 $\vec{r}$ ，则：

$$\vec{r}_C = \frac{\int_m \vec{r}\,\mathrm{d}m}{\int_m \mathrm{d}m} = \frac{\int_m \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$



在直角坐标系中，质心的位置坐标(坐标分量)为：

$$x_C = \frac{\int_m x\mathrm{d}m}{m} \quad y_C = \frac{\int_m y\mathrm{d}m}{m} \quad z_C = \frac{\int_m z\mathrm{d}m}{m}$$

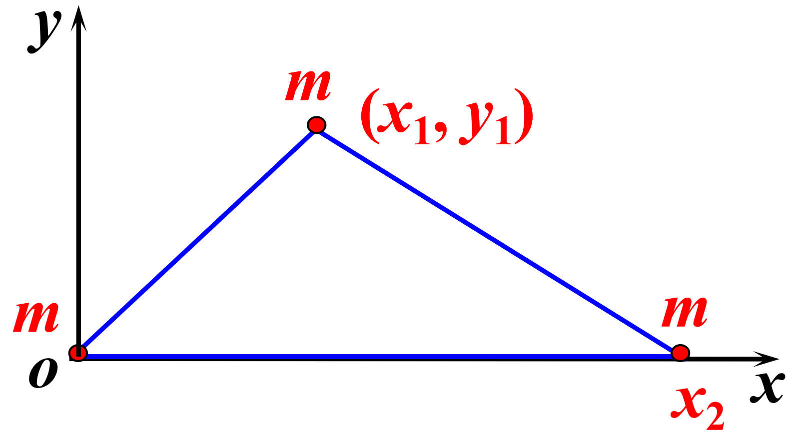
质量均匀分布的直棒、圆环、圆盘，球壳、球体、圆柱等，质心就在它们的几何对称中心

例2-12 如图，三角形的每个顶点有一质量为m的质点，求：该质点系的质心

$$x_C = \frac{m\cdot 0 + mx_1 + mx_2}{3m} = \frac{x_1 + x_2}{3}$$

$$y_C = \frac{m\cdot 0 + m\cdot 0 + my_1}{3m} = \frac{y_1}{3}$$

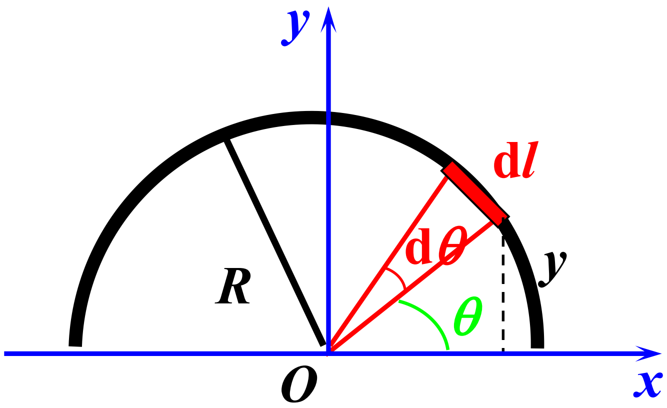
$$z_C = 0$$



例2-13 一段质量M的均匀铁丝弯成半圆形，其半径为R，

求： 此圆形铁丝的质心。

解： 如图选坐标系，铁丝上取一线元dl，其质量为dm，则：



$$\mathrm{d}m=\frac{M}{\pi R}\mathrm{d}l$$

$$y_C=\frac{\int y\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m}=\frac{\int y\mathrm{d}l}{\pi R}=\frac{\int R\sin\theta\cdot R\mathrm{d}\theta}{\pi R}=\frac{R\int \sin\theta\mathrm{d}\theta}{\pi}$$

$$=\frac{R\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta}{\pi}=\frac{2}{\pi}R$$

另由对称性：$x_C=0$

三、质心运动定理

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}$$

质点系中各质点运动时，质心也随时间变化

$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{m}\right) = \frac{\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_i}{m} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{m} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{m}$$

定义质点系的动量： $\vec{P} = \sum_i \vec{p}_i$

$$\boxed{m\vec{v}_C = \sum_i \vec{p}_i = \vec{P}}$$

质点系的动量等于质心的动量

$$\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}$$

质点系中任一质点： $\vec{F}_i + \sum_j \vec{f}_{ij} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} \quad i = 1, 2, \cdots$

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_i \sum_j \vec{f}_{ij} = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{p}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_C$$

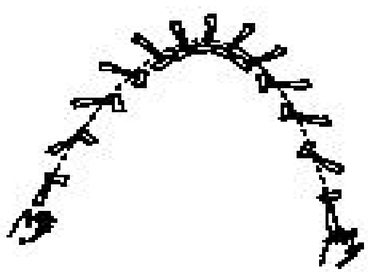
质心运动定理

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a}_C$$

1、质心加速度的方向与所受合外力的方向一致

2、质心加速度仅与合外力有关，与质点系的内力无关

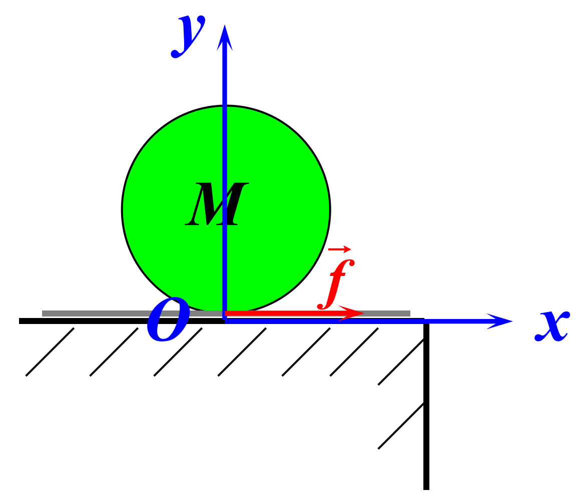
3、当质点系所受合外力为零时，其质心速度不变



例2-14 水平桌面上纸由静止开始拉动，纸张上有一质量为M的均匀球，纸被拉动时与球的摩擦力为f，

求：t秒后球相对桌面移动多少距离？

解：如图，在地面参考系建立直角坐标系



球水平方向的外力只有摩擦力，由质心运动定理：

$$\vec{f} = M\vec{a}_C \qquad a_C = \frac{f}{M}$$

$$\Delta x_C = \frac{1}{2}a_C t^2 = \frac{1}{2}\frac{f}{M}t^2$$ 沿纸拉动的方向

球的质心是其几何中心，质心的运动就代表了球的整体运动

2.4 动量定理和动量守恒定律

一、质点的动量定理

牛顿第二定律：$\vec{F}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$　　$\vec{p}=m\vec{v}$　质点的动量

$\boxed{\vec{F}\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{p}}$　　动量定理的微分形式

对动量定理微分形式积分：

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2}\mathrm{d}\vec{p}=\vec{p}_2-\vec{p}_1$$

定义冲量：$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t$

$\boxed{\vec{I}=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\Delta\vec{p}}$　　动量定理的积分形式

质点的动量是状态量，动量发生变化必有冲量的作用，冲量是力对时间的积累，是过程量。

动量定理可以写成分量形式，在直角坐标系中：

$$I_x = \int_{t_1}^{t_2} F_x \mathrm{d}t = p_{2x} - p_{1x} = \Delta p_x \qquad I_y = \int_{t_1}^{t_2} F_y \mathrm{d}t = p_{2y} - p_{1y} = \Delta p_y$$

$$I_z = \int_{t_1}^{t_2} F_z \mathrm{d}t = p_{2z} - p_{1z} = \Delta p_z$$

如果质点受的力是恒力： $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t = \vec{F}(t_2 - t_1)$

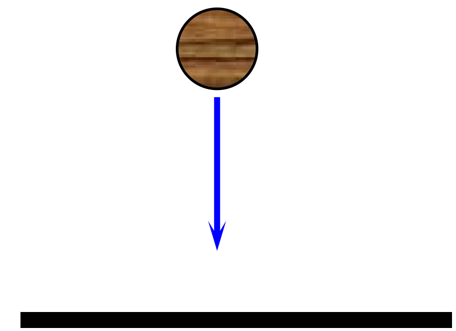
碰撞、打击等过程中，作用时间很短，相互作用力较大且随时间变化，这种力称冲力。

冲力的函数关系比较复杂，表示瞬时关系的牛顿第二定律无法直接应用，而只与始末状态有关的动量定理则比较适合。

一般以平均冲力来近似冲力，定义平均冲力：

$$\bar{\vec{F}} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \mathrm{d}t}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{I}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{p}_2 - \vec{p}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

例2-15 一篮球质量1kg，从2m高度下落，到达地面后，以同样速率反弹，接触时间仅0.019s，求：篮球对地平均冲力？



解： 篮球对地的冲力与地对篮球的冲力是作用力与反作用力，我们求出地对篮球的平均冲力即可。

由自由落体公式，可得篮球到达地面的速率：$v = \sqrt{2gh}$

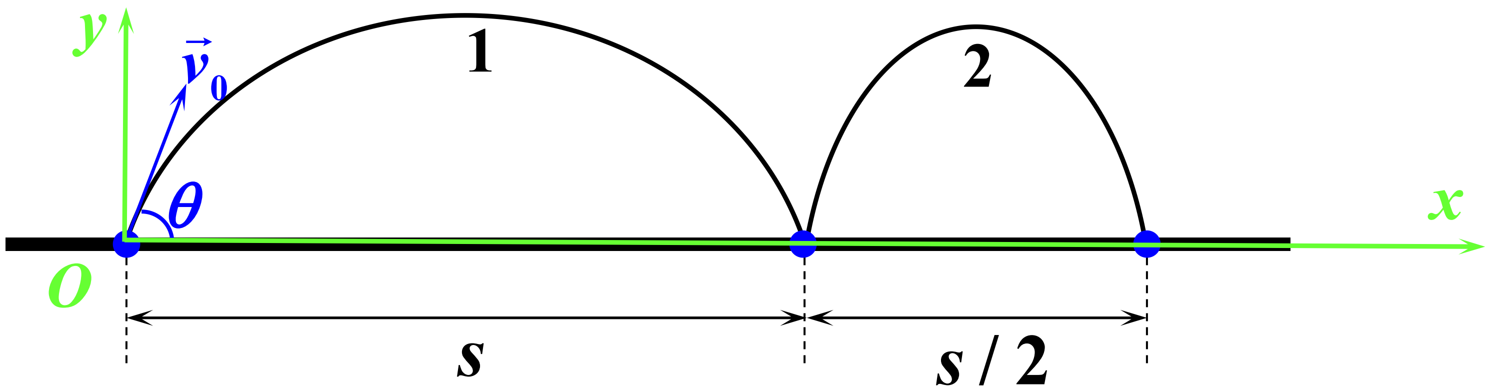
篮球反弹，地对篮球的平均冲力：

$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv}{\Delta t} = 6.63 \times 10^{2}\,\mathrm{N}$$

篮球对地的平均冲力：$\bar{F}' = 6.63 \times 10^{2}\,\mathrm{N}$ 方向竖直向下

注意： 动量定理中的F是合力，但一般情况下，冲力远大于其他力，这时考虑冲力时可忽略其他力

例2-16 如图，一质量m的质点以初速度v_0和角度θ做斜抛运动，落地时与地面发生碰撞，而后做第二次斜抛运动，二次斜抛运动的时间相等，第二次斜抛运动的射程是第一次的一半，**求：**碰撞时地面对质点的冲量



解： 如图建立坐标系，抛体运动的运动时间由y方向初速度决定，射程正比于x方向速度

按题意，质点落地初的速度： $\vec{v}_1 = v_0 \cos\theta \vec{i} - v_0 \sin\theta \vec{j}$

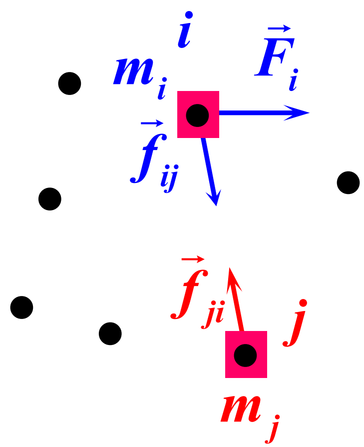
质点落地后反弹的速度： $\vec{v}_2 = 0.5 v_0 \cos\theta \vec{i} + v_0 \sin\theta \vec{j}$

地面对质点冲量$\vec{I} = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = -0.5 m v_0 \cos\theta \vec{i} + 2 m v_0 \sin\theta \vec{j}$

二、质点系的动量定理

$$\boxed{\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}}$$

N个质点的质点系，第i个质点受的外力F_i，第j个质点给第i个质点的内力f_{ij}，对第i个质点用动量定理:



$$(\vec{F}_i + \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} \vec{f}_{ij})\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, N)$$

对所有质点求和:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \mathrm{d}t + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1(j\neq i)}^{N} \vec{f}_{ij} \mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{d}\vec{p}_i = \mathrm{d}\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \mathrm{d}\vec{P}$$

$$\vec{F}\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}$$

质点系动量定理的微分形式

$$\vec{F}\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\mathrm{d}t=\mathrm{d}\vec{P}$$

质点系动量定理微分形式两边对时间积分：

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\int_{t_1}^{t_2}\sum_{i=1}^{N}\vec{F}_i\mathrm{d}t=\int_{\vec{P}_1}^{\vec{P}_2}\mathrm{d}\vec{P}=\vec{P}_2-\vec{P}_1=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_{i2}-\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_{i1}$$

质点系动量定理的积分形式

I：质点系所受合外力的冲量

$$\vec{I} = \vec{P}_2 - \vec{P}_1$$

在直角坐标系中：

$$\vec{I}_x = \vec{P}_{2x} - \vec{P}_{1x} \quad \vec{I}_y = \vec{P}_{2y} - \vec{P}_{1y} \quad \vec{I}_z = \vec{P}_{2z} - \vec{P}_{1z}$$

质点系内个别质点动量的变化既受外力也受内力的影响，但质点系动量的变化只受外力的影响，与内力无关

动量定理只在惯性系中成立，在非惯性系中，只要把合惯性力F_0考虑进去，动量定理在形式上仍然成立

$$(\vec{F} + \vec{F}_0)\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{P}'$$

在非惯性系中，惯性力可以看作是外力

三、动量守恒定律

质点系不受外力或所受合外力为零，质点系的总动量不随时间改变：

$$\vec{F}=0\text{时}\quad \vec{P}=\sum_{i=1}^{N}\vec{P}_i=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i=\text{恒矢量}$$ 动量守恒定律

1、合外力为零或外力比内力小很多(碰撞、爆炸)，可以认为总动量守恒

2、合外力沿某一方向为零，该方向动量守恒

$$\vec{F}_x=0\text{时}\quad \sum_{i=1}^{N}\vec{P}_{ix}=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_{ix}=\text{恒矢量}$$

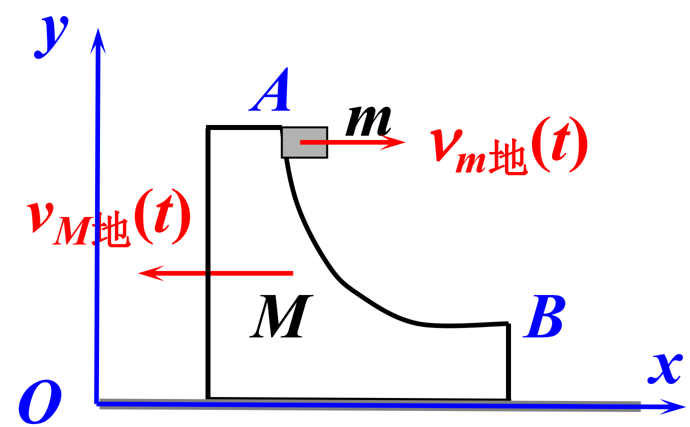
3、动量不会自行产生和消失，动量转移的多少取决于物体间作用力的冲量

4、对非惯性系，动量守恒定律要在形式上成立，需要考虑合惯性力F_0，即：

$$\vec{F}+\vec{F}_0=0$$

例2-17 如图，质量为M的物体静止在光滑的水平地面，弧AB是半径为R的四分之一圆周，质量为m的物体从A点沿M的光滑表面AB无初速滑下。**求：**m滑到B点时M在水平地面移动的距离。

解： 取固定地面上的直角坐标系，研究M和m组成的系统，该系统水平方向外力为零



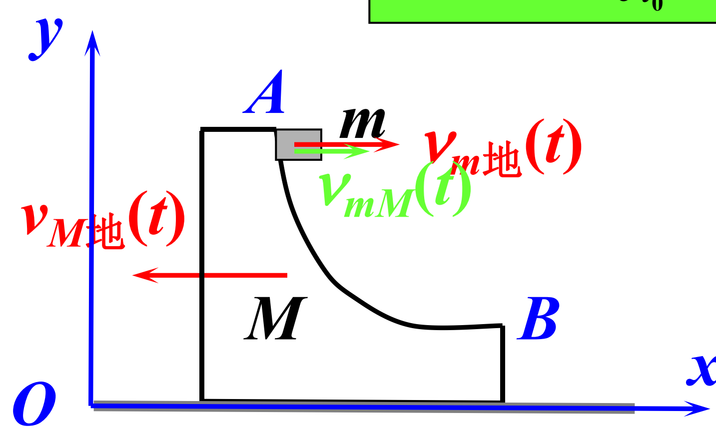
设滑动中M对地的速度为$v_{M地}(t)$，m对地的水平速度分量为$v_{m地}(t)$，地面参考系中水平方向动量守恒：

$$mv_{m地}(t) - Mv_{M地}(t) = 0 \qquad Mv_{M地}(t) = mv_{m地}(t)$$

$$s(t)=s_0+\int_{t_0}^{t} v(t)\mathrm{d}t$$

$$Mv_{M地}(t)=mv_{m地}(t)$$

设滑动中m对M的水平速度分量为$v_{mM}(t)$，由参考系间速度的相对关系：



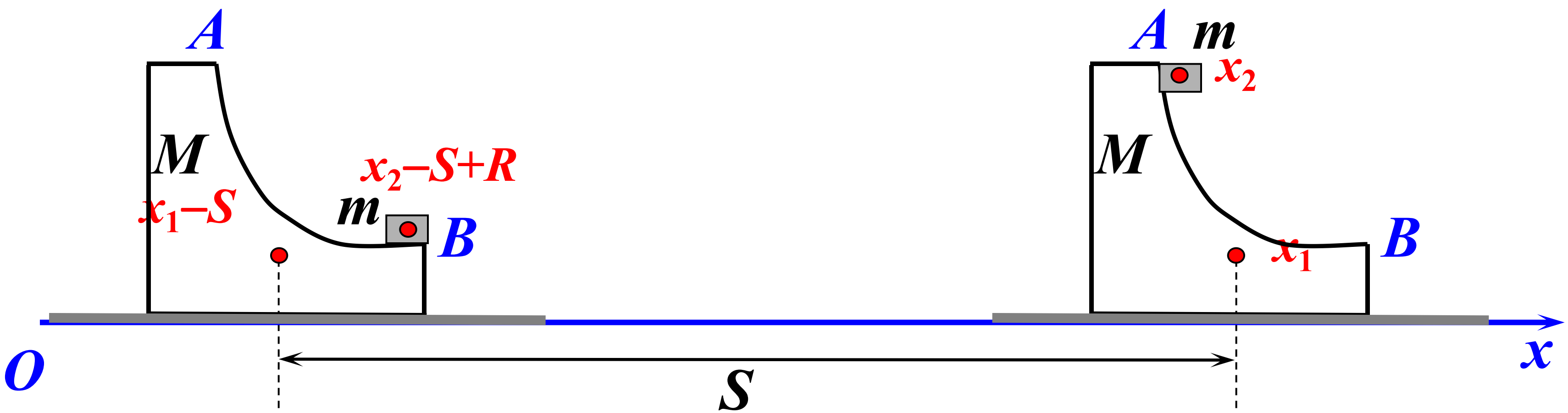
$$\vec{v}_{m地}(t)=\vec{v}_{mM}(t)+\vec{v}_{M地}(t)$$

$$v_{m地}(t)=v_{mM}(t)-v_{M地}(t) \qquad v_{M地}(t)=\frac{m}{M+m}v_{mM}(t)$$

设从A滑动到B，M相对地的水平路程为S，而m相对地的水平路程为R：

$$S=\int_{t_A}^{t_B} v_{M地}(t)\mathrm{d}t=\frac{m}{M+m}\int_{t_A}^{t_B} v_{mM}(t)\mathrm{d}t=\frac{m}{M+m}R$$

质心运动定理解法：如图，在地面参考系，M和m的系统水平方向外力和为零，水平方向质心坐标x_C不变



m在A时，设M的质心坐标x_1，m的质心坐标x_2

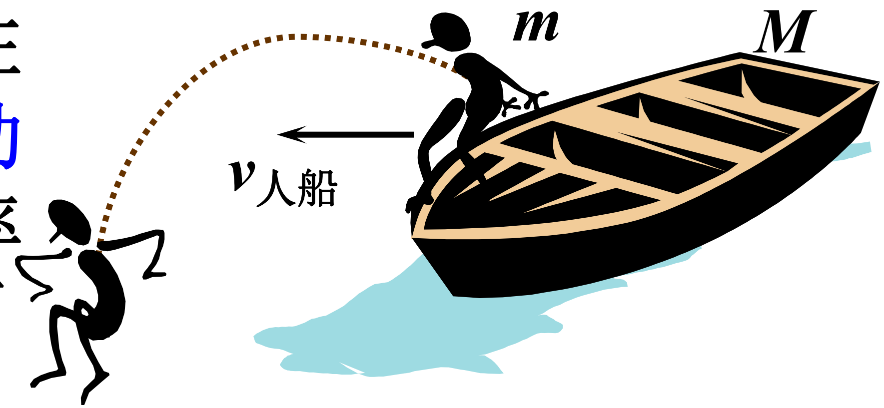
$$x_C = \frac{Mx_1 + mx_2}{M+m}$$

m到B时，M的质心坐标x_1-S，m的质心坐标x_2-S+R

$$x_C = \frac{M(x_1 - S) + m(x_2 - S + R)}{M+m} = \frac{Mx_1 + mx_2}{M+m} \qquad S = \frac{m}{M+m}L$$

质心运动定理是质点系动量定理的另一种形式

例2-18 船的质量M=300kg，人的质量m=60kg，开始船速v_1=2m·s^{-1}，人跳离后船速v_2=1m·s^{-1}，求：起跳时人相对于船的水平速度$v_{人船}$。



解：人和船看做一个系统，在水面参考系中系统水平方向动量守恒，起跳前人和船的速率都为v_1，设起跳后人相对水面的速度为$v_{人水}$

$$(M+m)v_1 = Mv_2 + mv_{人水} \qquad v_{人水} = \frac{(M+m)v_1 - Mv_2}{m}$$

由参考系间速度的相对关系：$\vec{v}_{人水} = \vec{v}_{人船} + \vec{v}_{船水}$

$$v_{人船} = v_{人水} - v_{船水} = \frac{(M+m)v_1 - Mv_2}{m} - v_2 = 6\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

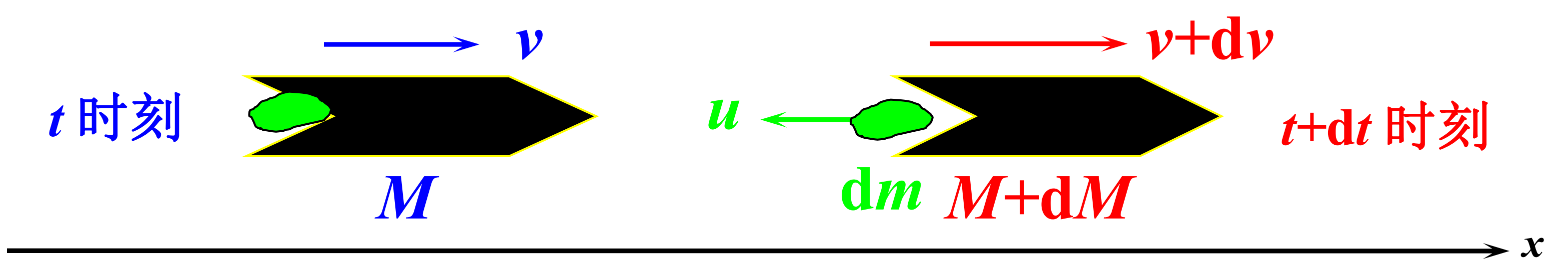
$\vec{v}_{气地} = \vec{v}_{气火} + \vec{v}_{火地}$

$\mathrm{d}m = -\mathrm{d}M$

火箭飞行原理(变质量问题)

火箭是利用燃料燃烧后喷出气体产生反冲推力的装置

设火箭在外层高空飞行，忽略空气阻力和万有引力，在地面参考系，沿火箭运动方向建立一维坐标系，考虑火箭主体与燃料构成的系统



t 时刻燃料与火箭主体一起运动， $t+\mathrm{d}t$ 时刻燃料燃烧，喷出相对火箭速度为u的气体，由系统动量守恒：

$$Mv = (M+\mathrm{d}M)\cdot(v+\mathrm{d}v) + \mathrm{d}m\cdot(v+\mathrm{d}v-u)$$

$$= (M+\mathrm{d}M)\cdot(v+\mathrm{d}v) - \mathrm{d}M\cdot(v+\mathrm{d}v-u)$$

$$= Mv + M\mathrm{d}v + u\mathrm{d}M$$

$$M\mathrm{d}v = -u\mathrm{d}M \qquad \mathrm{d}v = -u\frac{\mathrm{d}M}{M}$$

设点火时火箭质量M_1，速度v_1，燃料耗尽时火箭质量M_2，速度v_2，对后式积分

$$v_2 - v_1 = u\ln\frac{M_1}{M_2}$$

增大单级火箭的末速度可以采用两个方法：增大喷出气体的相对速度u；增大火箭的质量比M_1/M_2。

对单一火箭而言，火箭末速度有限，可采用由若干单级火箭串联形成的火箭，即多级火箭。设各级火箭的喷气速度分别为u_1，u_2，…，u_n，始末质量比分别为N_1，N_2，…，N_n，可得火箭的末速度为：

$$v_1 = u_1\ln N_1 \quad v_2 - v_1 = u_2\ln N_2 \quad \cdots \quad v - v_{n-1} = u_n\ln N_n$$

$$v = u_1\ln N_1 + u_2\ln N_2 + \cdots + u_n\ln N_n$$

火箭喷出气体在dt时间内动量的变化率(忽略二阶无穷小量dmdv)：

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}m\cdot(v+\mathrm{d}v-u)-\mathrm{d}m\cdot v}{\mathrm{d}t}=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

喷出气体受火箭的推力：

$$F'=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=-u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

火箭受到喷出气体的推力：

$$F=-F'=u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

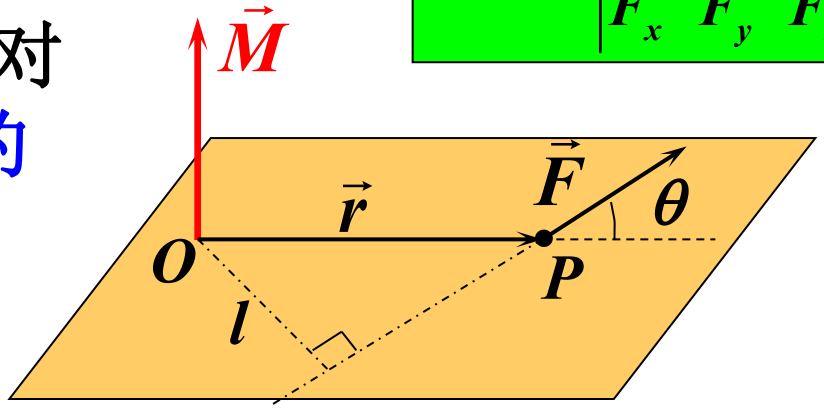
火箭发动机的推力与燃料燃烧速率 dm/dt以及喷出气体的相对速度u成正比。

2.5 角动量定理和角动量守恒定律

一、力矩

$$\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ F_x & F_y & F_z\end{vmatrix}$$

物体受到力F的作用，作用点是P，O是空间某固定点，P点相对O的位矢为r，定义力F对O点的矩(力矩)：



$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

力矩大小： $M=rF\sin\theta=Fl$

力臂l：O到力的作用线的垂直距离

在直角坐标系中：

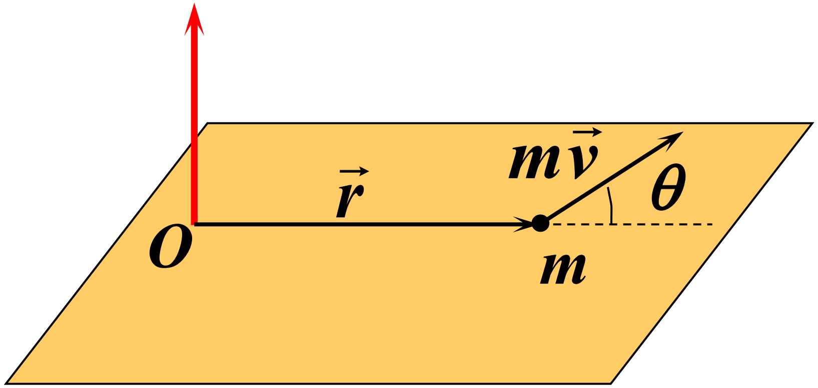
$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\qquad \vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}$$

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=(yF_z-zF_y)\vec{i}+(zF_x-xF_z)\vec{j}+(xF_y-yF_x)\vec{k}$$

力矩沿z轴的分量称力对z轴的力矩 $M_z=\vec{M}\cdot\vec{k}=xF_y-yF_x$

二、质点的角动量

质量m，速度v的质点，动量$p=mv$，O是空间某固定点，质点相对O的位矢为r，定义**质点对O点的动量矩(角动量)**



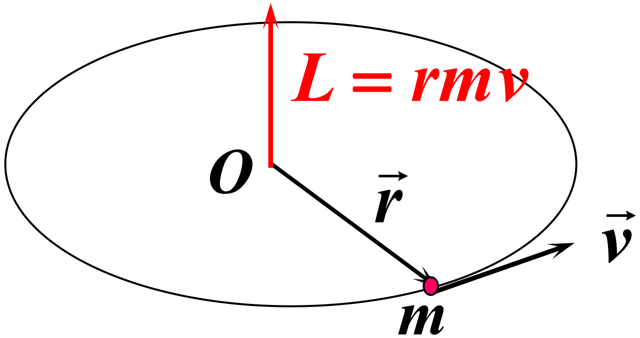
$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})$$

同一运动的质点，相对于空间不同的定点，其角动量不同。**角动量一定要指明是对哪个点而言。**

在**直角坐标系**中：

$$L_x=ymv_z-zmv_y \quad L_y=zmv_x-xmv_z \quad L_z=xmv_y-ymv_x$$

做匀速圆周运动的质点对其圆心的角动量



三、质点的角动量定理

牛顿第二定律： $F = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r} \times \vec{p}) - \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \times \vec{p} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} - \vec{v} \times m\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

质点所受的合力对某定点的力矩等于质点对该定点的角动量的时间变化率，此即质点的角动量定理的微分形式

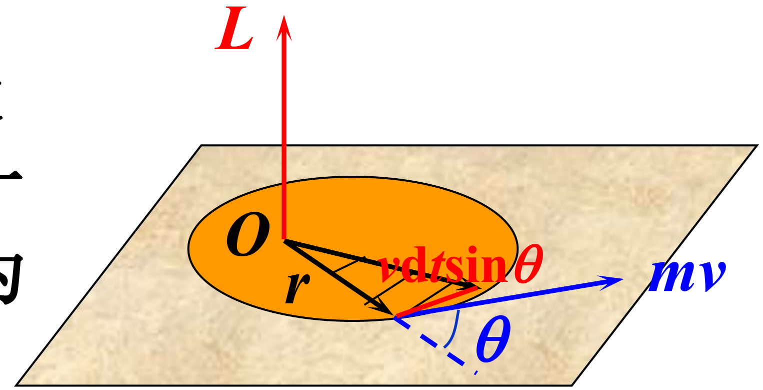
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \qquad \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t \quad \text{冲量矩}$$

质点的角动量定理的积分形式

注意：定理中力矩和角动量都是对同一固定点的

在直角坐标系中： $M_x = \dfrac{\mathrm{d}L_x}{\mathrm{d}t} \quad M_y = \dfrac{\mathrm{d}L_y}{\mathrm{d}t} \quad M_z = \dfrac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}$

例2-19 开普勒第二定律：太阳和行星的连线，在相等时间内扫过相等的面积。用质点的角动量定理证明这一定律。



证明： 以太阳为定点O，行星受到的太阳引力和其位矢始终在一条直线上，行星对太阳的力矩为零，其对太阳的角动量为常量：

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=\text{常矢量}$$

角动量的方向是垂直于行星运动的平面，其大小为：

$$L=rmv\sin\theta=\text{常量}$$

太阳和行星的连线在$\mathrm{d}t$时间内扫过的面积为

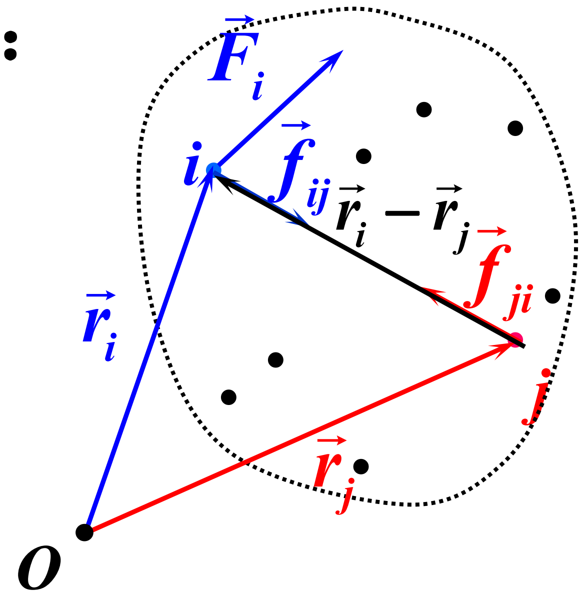
$$\mathrm{d}S=\frac{1}{2}r\cdot v\sin\theta\mathrm{d}t=\frac{L}{2m}\mathrm{d}t \qquad \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=\frac{L}{2m}$$

单位时间内扫过的面积

四、质点系的角动量定理

$\boxed{\vec{f}_{ij} = -\vec{f}_{ji}}$

在惯性系中选一固定点O，F_i是某一质点系中第i个质点所受的总外力，f_{ij}是质点系第j个质点对第i个质点的作用力，r_i和L_i是第i个质点对固定点O的位矢和角动量，对第i个质点应用质点的角动量定理：



$$\vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{j(j\neq i)} \vec{f}_{ij}) = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} + \vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} = \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} - \vec{r}_j \times \vec{f}_{ij}$$

$$= (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} \equiv 0$$

$$\sum_i \vec{r}_i \times (\vec{F}_i + \sum_{j(j\neq i)} \vec{f}_{ij}) = \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{L}_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i \vec{L}_i = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i$$ 质点系的角动量

质点系的角动量定理

五、角动量守恒定律

若质点系所受合外力矩为零，则质点系的总角动量不随时间改变

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0\text{时} \quad \vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \text{恒矢量}$$

角动量守恒定律

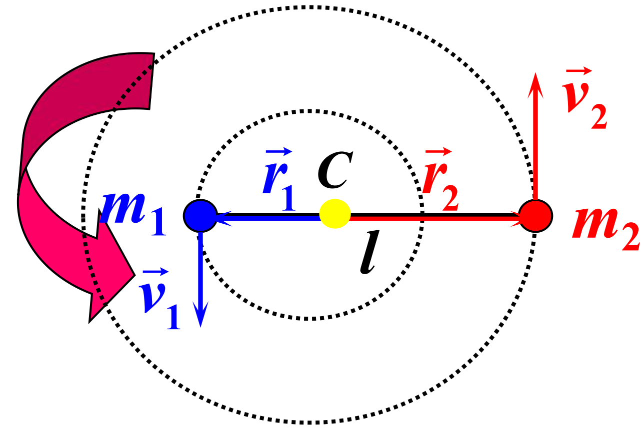
注意

1、孤立系统不受外界作用，其对任一点的角动量不变

2、守恒条件是外力矩矢量合为零，不是合外力为零

3、角动量和角动量守恒定律只适用于惯性系，对于非惯性系，需要加上惯性力的作用。

例2-20 如图，两个运动员手拉手，在水平冰面上旋转。当他们用力互拉，彼此间的距离缩短，**分析：**他们的运动有何变化？



解：两运动员系统，两者间拉力是内力，忽略摩擦力，系统垂直方向合外力为零，水平方向无外力。设开始时质心速度为零，质心位置不变，两运动员绕质心旋转。

由质心运动定理

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_C = 0 \qquad m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2$$

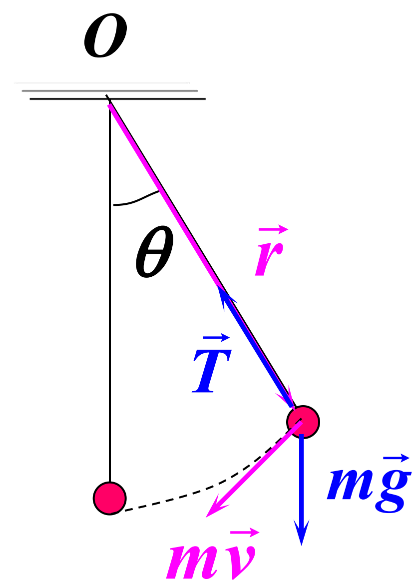
由角动量(对质心)守恒：

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2\vec{v}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times m_1\vec{v}_1$$

$$L = lm_1v_1 = l'm_1v_1' \qquad v_1' = \frac{l}{l_1'}v_1$$

彼此距离缩短，速率增加

例2-21 如图，由角动量定理求：任一时刻摆长为l的单摆的切向加速度



解： 选O为固定点

单摆的力矩： $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times m\vec{g}$

力矩的大小： $M=mgl\sin\theta$

力矩的方向垂直纸面向里

单摆的角动量 $\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}$

角动量的大小 $L=lmv$

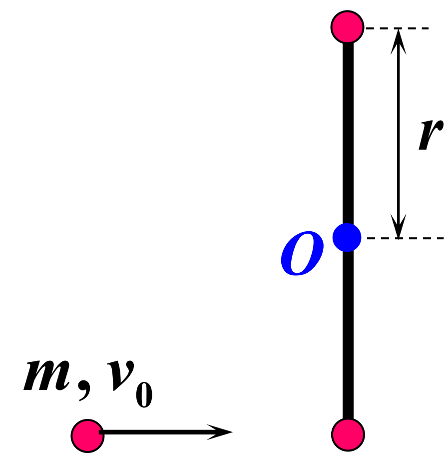
角动量的方向垂直纸面向里

角动量定理： $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

$$mgl\sin\theta=lm\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad a_t=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g\sin\theta$$

例2-22 如图，两个质量都为m的小钢球，固定在长为$2r$的质量很小的硬杆两端，硬杆可绕固定在中点O处的转轴在光滑水平面上转动；质量为m的泥球以垂直杆的水平速度v_0与其中一个小钢球发生碰撞并粘在一起。若碰撞前杆是静止的，**求**：碰撞后硬杆的角速度ω。

解：杆和三个小球组成的系统的外力在碰撞过程中对O点的合外力矩为零，碰撞后杆两端小球的速率为ωr，碰撞前后系统角动量守恒：



$$mv_0 r = m(\omega r)r + (m+m)(\omega r)r$$

$$\omega = \frac{v_0}{3r}$$

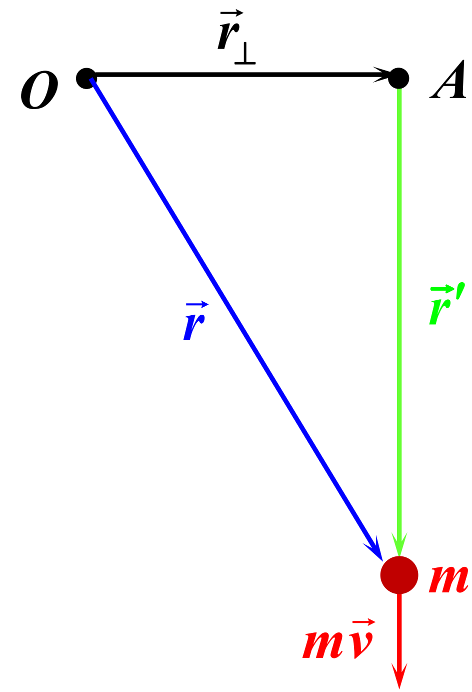
碰撞中系统受到转轴的作用力，该力是外力，系统动量不守恒，但该力对O点力矩为零，系统角动量守恒

例2-23 自由下落质点的角动量

(1) 对下落轨迹上的A点的角动量

$$\vec{r}' = \frac{1}{2}\vec{g}t^2 \qquad \vec{p} = m\vec{v} = m\vec{g}t$$

$$\vec{L}_A = \vec{r}' \times \vec{p} = 0$$



(2) 对不在下落轨迹上的O点的角动量

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_\perp$$

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = (\vec{r}' + \vec{r}_\perp) \times \vec{p} = \vec{r}_\perp \times \vec{p} = \vec{r}_\perp \times m\vec{g}t$$

$$L_O = r_\perp mgt$$

问题： 质点做匀速直线运动，对非运动轨迹上O点的角动量是否变化？