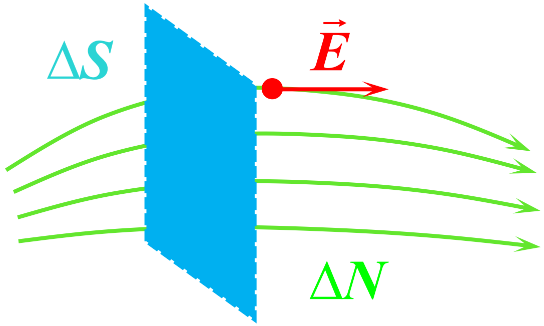
四、高斯定理

1、电场线

电场线(E线)：一族描述电场强度空间分布的有向曲线



$$E \propto \frac{\Delta N}{\Delta S}$$

A、规定

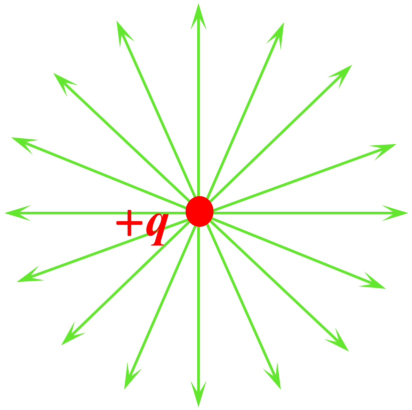
方向：曲线上每点的切线方向表示该点电场强度的方向

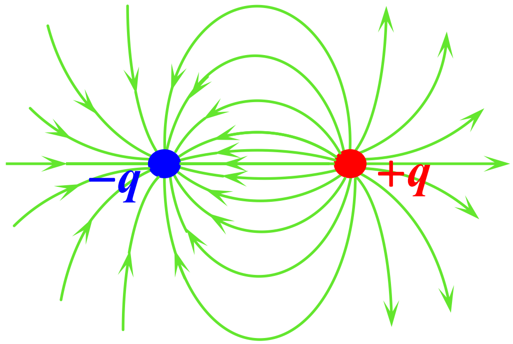
大小：该点附近电场线的疏密表示该点电场强度的大小

B、静电场的电场线的性质

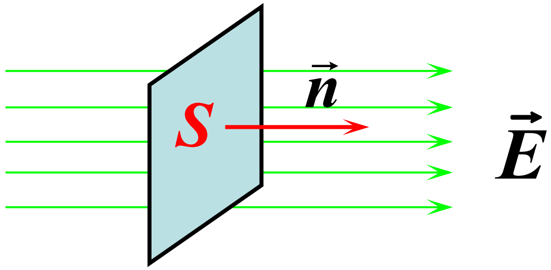
静电场的电场线起始于正电荷，终止于负电荷，不会在没有电荷处中断；

两条电场线不会相交；静电场的电场线不会形成闭合曲线。

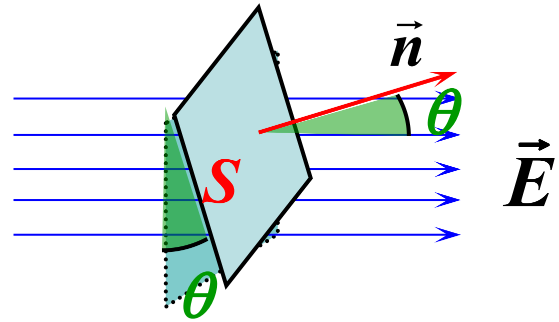




2、电通量

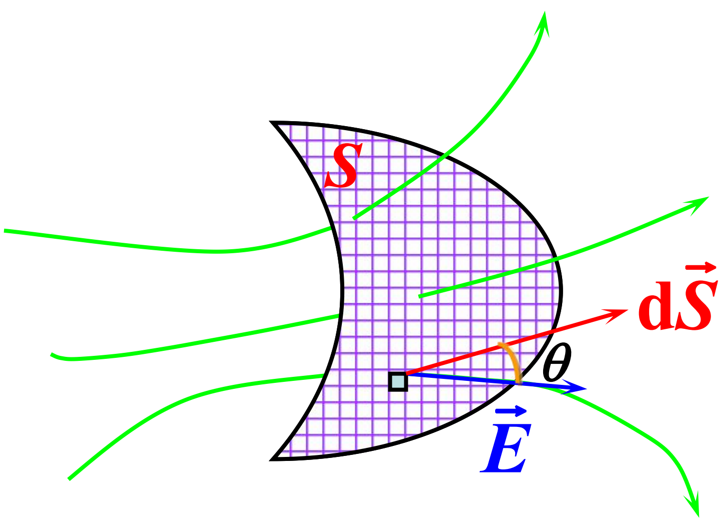


$$\Phi = ES = \vec{E} \cdot \vec{S}$$



$$\Phi = ES\cos\theta = \vec{E} \cdot \vec{S}$$

面元矢量： $\vec{S} = S\vec{n}$



$$\mathrm{d}\Phi = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

Φ的正负与面元矢量方向的定义有关

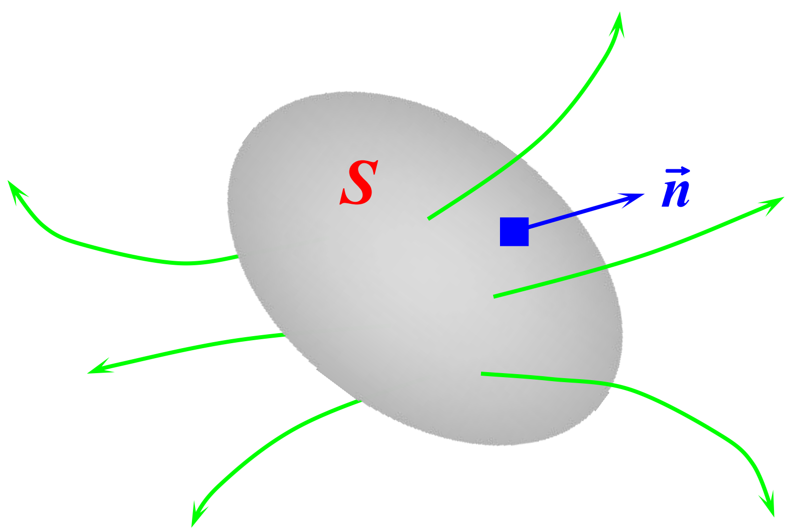
电通量的单位：V·m

$$\boxed{\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

$$\boxed{E \propto \frac{\Delta N}{\Delta S}}$$

$$\boxed{\Phi \propto N}$$

通过闭合曲面 S 的电通量



$$\boxed{\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

规定面元矢量方向指向闭合曲面的外侧

电场线穿出闭合曲面，电通量为正；电场线穿入闭合曲面，电通量为负

3、高斯定理—电通量与电量的关系

高斯定理：在真空中的静电场内，通过任意闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的电量的代数和的$1/\varepsilon_0$倍

离散带电体：

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i Q_i$$

连续带电体：

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_Q dq$$

其中S为任意的闭合曲面(高斯面)

4、高斯定理的微分形式

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla\cdot\vec{E})\cdot dV$$

A、电场的散度

电场在某点的散度定义为 $\mathrm{div}\vec{E} = \nabla\cdot\vec{E}$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

哈密顿算子

B、高斯定理的微分形式

$$\iiint_V (\nabla\cdot\vec{E})\cdot dV = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV$$

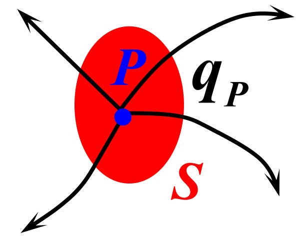
$$\boxed{\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

高斯定理微分形式

静电场是有源场，源头是电荷密度不为零的那些点

高斯定理可解释静电场的电场线的性质：电场线发自于正电荷，终止于负电荷；在无电荷处不间断。

设P点有电荷q_p发出向外的电场线，
取一包围P点的闭合曲面S



电场线与S的法线方向都向外：

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_{内i}>0 \rightarrow \sum_i q_{内i}>0$$

$$S\rightarrow 0 \quad \sum_i q_{内i}=q_P>0$$

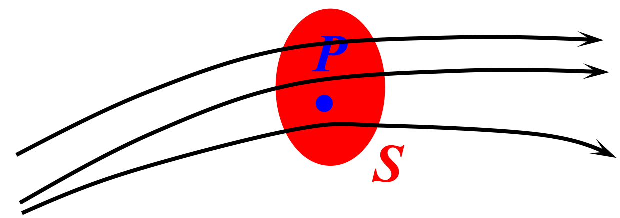
即静电场的电场线发自于正电荷

同理可解释静电场的电场线终止于负电荷

$\Phi \propto N$

若P点无电荷，取一包围P点的闭合曲面S

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



将闭合曲面S分成左右两个曲面，两个曲面的电通量一正一负，大小相等，即电场线从一个曲面穿入，从另一个曲面穿出

$$N_{入} = N_{出}$$

$S \to 0$，只剩一根电场线，这根电场线从一个曲面进入P点，再从P点穿另一个曲面而出，在P点电场线连续

电场线的连续性是高斯定理的结果，不能把电场线的连续性当作条件来证明高斯定理。

静电场高斯定理的证明

$$\nabla\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3}\qquad \vec{r}=\vec{x}-\vec{x}'\qquad \nabla=\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}+\vec{j}\frac{\partial}{\partial y}+\vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2\frac{1}{r}=-4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')$$

$$\delta(\vec{x}-\vec{x}')=\begin{cases}+\infty & \vec{x}=\vec{x}'\\ 0 & \vec{x}\neq\vec{x}'\end{cases}$$

$$\iiint_{V'}\delta(\vec{x}-\vec{x}')\mathrm{d}V'=1$$

$$\vec{E}(\vec{x})=\iiint_{V'}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

$$\nabla\cdot\vec{E}(\vec{x})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\cdot\iiint_{V'}\frac{\vec{r}}{r^3}\rho(\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\nabla\cdot[\frac{\vec{r}}{r^3}\rho(\vec{x}')]\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\vec{x}')\nabla\cdot(\frac{\vec{r}}{r^3})\mathrm{d}V'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\vec{x}')(-\nabla^2\frac{1}{r})\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\vec{x}')4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')\mathrm{d}V'$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V'}\rho(\vec{x})4\pi\delta(\vec{x}-\vec{x}')\mathrm{d}V'=\frac{\rho(\vec{x})}{\varepsilon_0}$$

$$\Phi = \oint\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho \mathrm{d}V \quad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

说明

A、高斯面必须是封闭曲面

B、高斯定理是平方反比定律的必然结果

C、Φ由$\iiint_V \rho \mathrm{d}V$的值决定，与$\rho_{内}$分布无关，与$\rho_{外}$无关

D、$\vec{E}$是总场强，它由$\rho_{内}$和$\rho_{外}$共同决定

E、高斯面为几何面，$\rho_{内}$和$\rho_{外}$总能分清

F、高斯定理给出的不是高斯面上电场强度与面内电荷的代数和的直接关系

G、高斯定理也适用于一般的电场

5、高斯定理的应用

对于具有对称性的电场，用高斯定理求场强可能简便

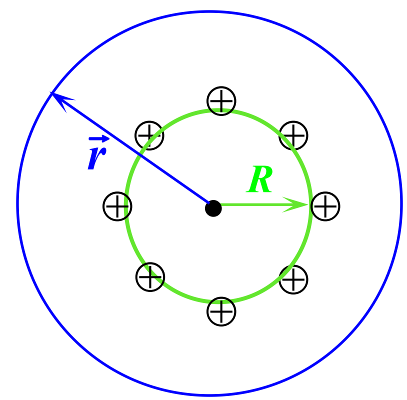
电场强度分布球对称：在一个同心球面上各点的电场强度大小相等，电场强度的方向垂直球面(沿半径方向)。如点电荷、均匀带电球面或球体、均匀带电同心球等产生的电场。

电场强度分布柱对称：在一个同轴柱面上各点的电场强度大小相等，电场强度的方向垂直柱面。如无限长均匀带电直线、无限长均匀带电圆柱体或圆柱面、无限长均匀带电同轴圆柱面等产生的电场。

电场强度分布面对称：在一个平行对称面的平面(与对称面等距)上各点的电场强度大小相等，电场强度的方向垂直平面。如均匀带电无限大平面或平板、若干个均匀带电无限大平行平面等产生的电场。

例7-6　电量Q、半径R的均匀带电球面的场强分布

解：电荷分布是球对称的，所以电场分布也是球对称，如图，选半径为r的同心球面为高斯面

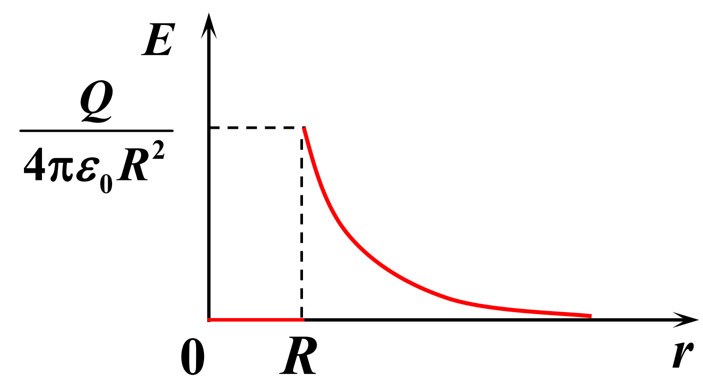


$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\!\!\!\oint_S E \cdot \mathrm{d}S$$

$$= E \oint\!\!\!\oint_S \mathrm{d}S$$

$$= E \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} 0 & r < R \\ Q/\varepsilon_0 & r > R \end{cases}$$

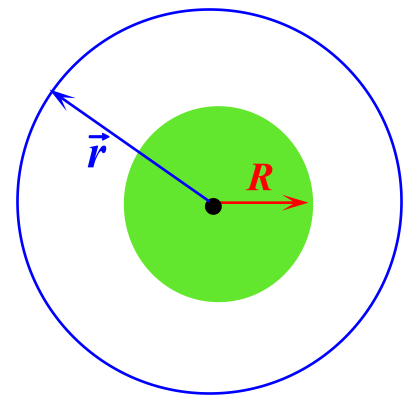
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & r > R \end{cases}$$



在$r=R$处E不连续，是因为认为球面没有厚度所致

例7-7 电量Q、半径R的均匀带电球体的场强分布

解： 电场分布**球对称**，如图，选半径为r的**同心球面**为高斯面

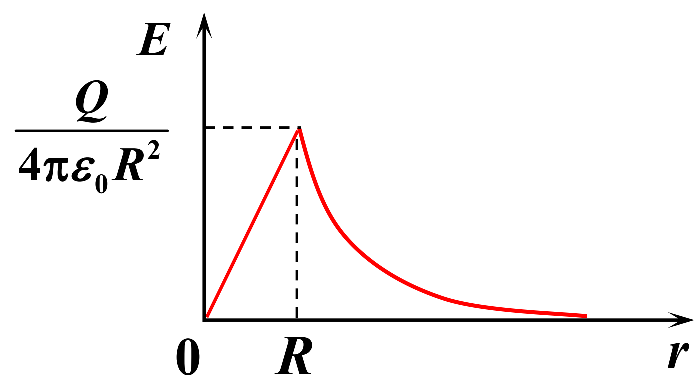


$$\Phi = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint\!\!\!\oint_S E\cdot \mathrm{d}S$$

$$= E\oint\!\!\!\oint_S \mathrm{d}S$$

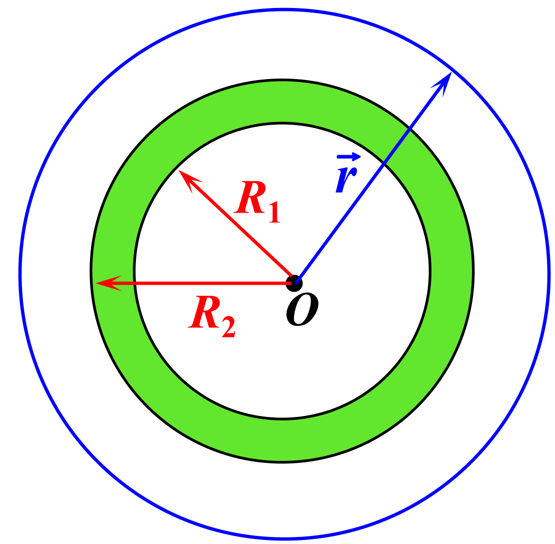
$$= E\cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} \dfrac{Qr^3}{\varepsilon_0 R^3} & r \le R \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & r > R \end{cases}$$

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\dfrac{\vec{r}}{r} & r \le R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & r > R \end{cases}$$



例7-8 半径为R_1和R_2、总电荷Q的均匀带电球壳的电场强度的分布。

解：电场分布球对称，如图，选半径为r的同心球面为高斯面

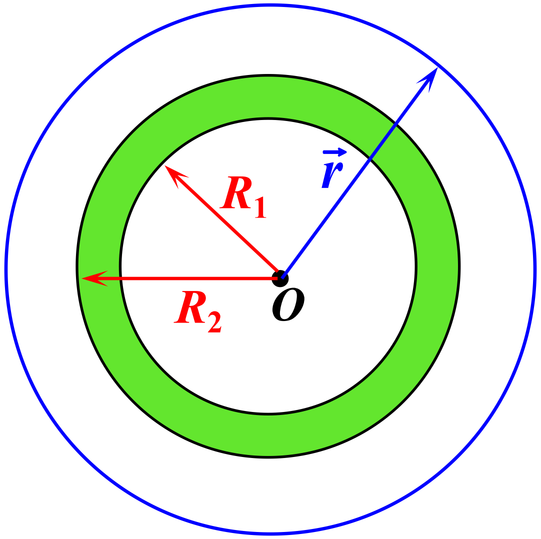


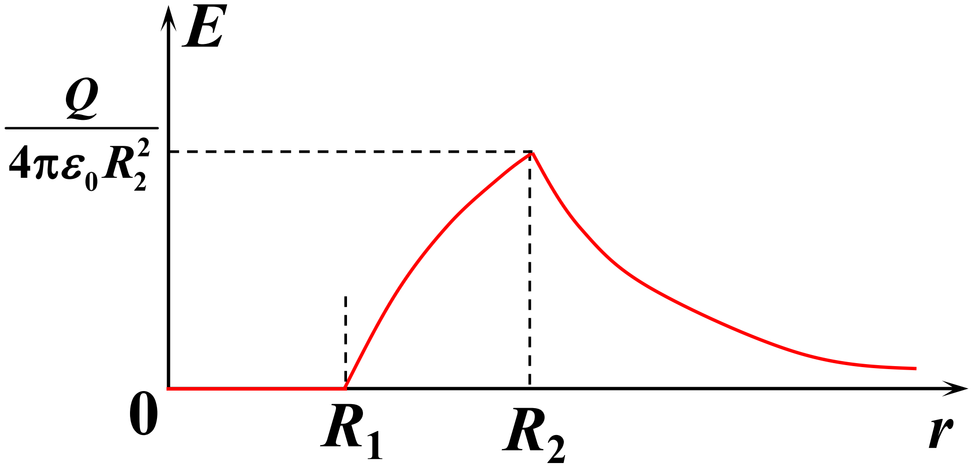
$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oiint_S E \cdot \mathrm{d}S$$

$$= E \oiint_S \mathrm{d}S$$

$$= E \cdot 4\pi r^2 = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \dfrac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3} & R_1 \le r \le R_2 \\ \dfrac{Q}{\varepsilon_0} & r > R_2 \end{cases}$$

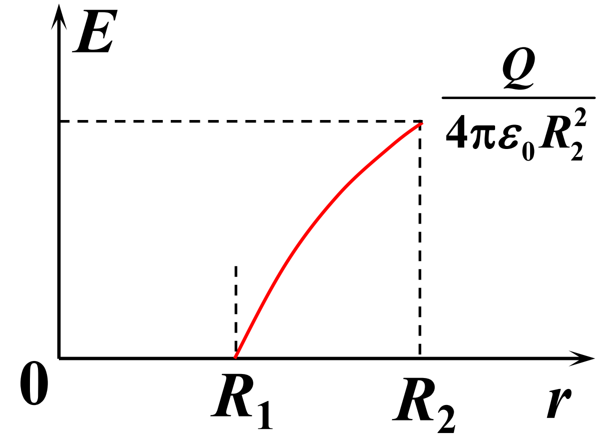
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R_1 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}\dfrac{\vec{r}}{r} & R_1 \le r \le R_2 \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & r > R_2 \end{cases}$$





R_1和R_2间的曲线是凸还是凹？

$$\vec{E}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{r^3-R_1^3}{R_2^3-R_1^3}\frac{\vec{r}}{r} \quad R_1\le r\le R_2$$



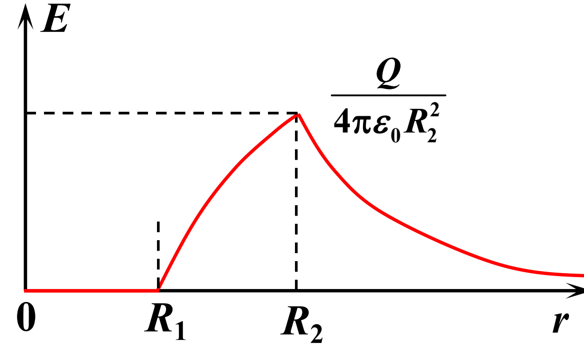
$$f(r)=r-\frac{R_1^3}{r^2} \qquad f'(r)=1+2\frac{R_1^3}{r^3}$$

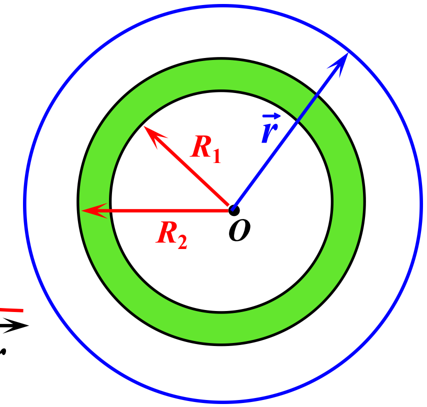
$$f''(r)=-6\frac{R_1^3}{r^4}<0$$

R_1和R_2间的曲线是凸

讨论

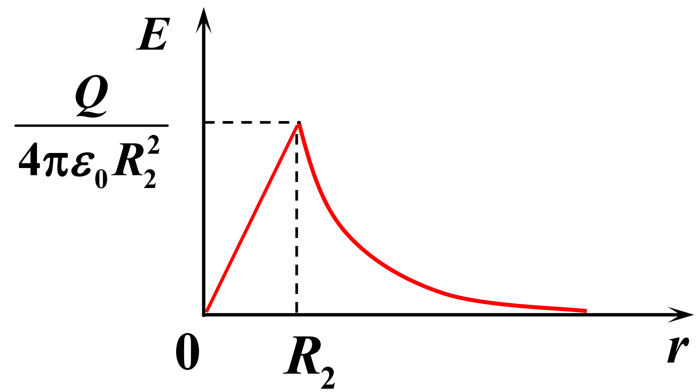
$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R_1\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{r^3-R_1^3}{R_2^3-R_1^3}\dfrac{\vec{r}}{r} & R_1\le r\le R_2\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & r>R_2\end{cases}$$





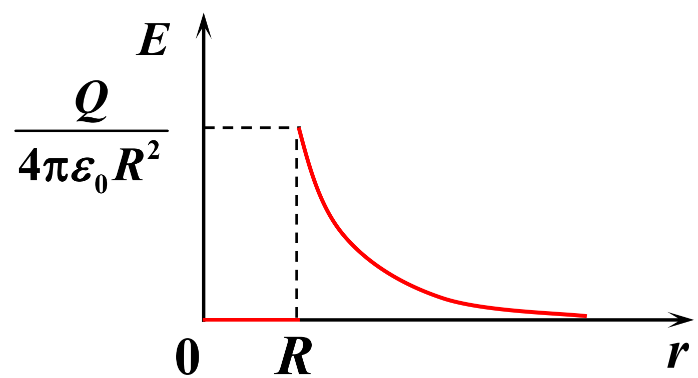
A、$R_1=0$：均匀带电球体的情形

$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R_2^3}\dfrac{\vec{r}}{r} & r\le R_2\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & r>R_2\end{cases}$$



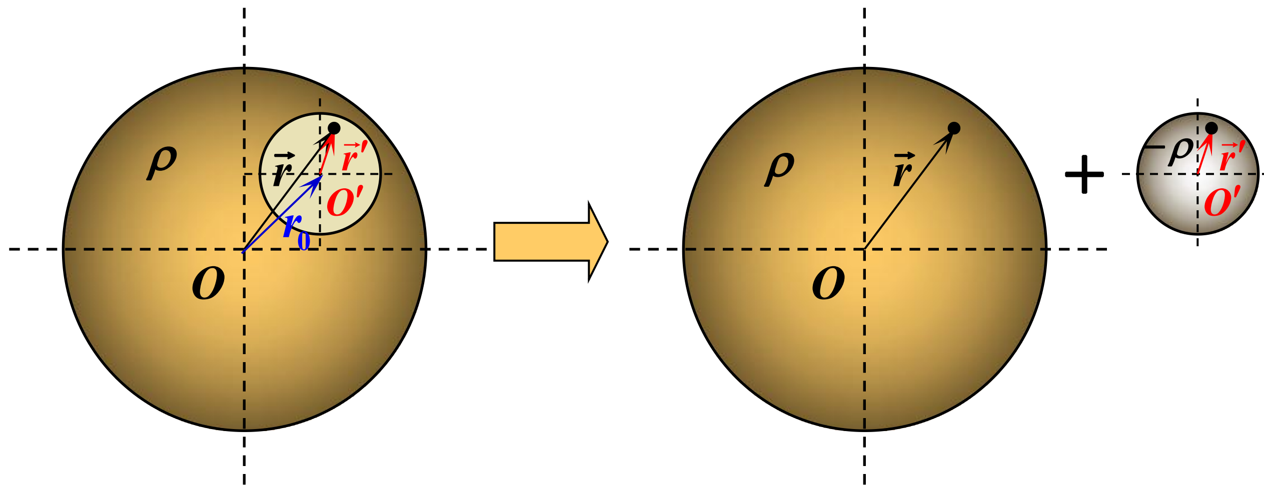
B、$R_1=R_2=R$：均匀带电球面的情形

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & r>R\end{cases}$$



例7-9 如图，均匀带电(ρ>0)半径R的球体的内部有一偏心的半径r的球形空腔，**求：**空腔内的电场分布。

解：可作如图等效代换，再应用叠加原理



电量Q、半径R的均匀带电球体内部的场强

$$\boxed{\vec{r}-\vec{r}'=\vec{r}_0}$$

$$\vec{E}=\frac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{4\pi R^3\rho}{3}\frac{r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\frac{\vec{r}}{r}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}'=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_0$$

匀强电场

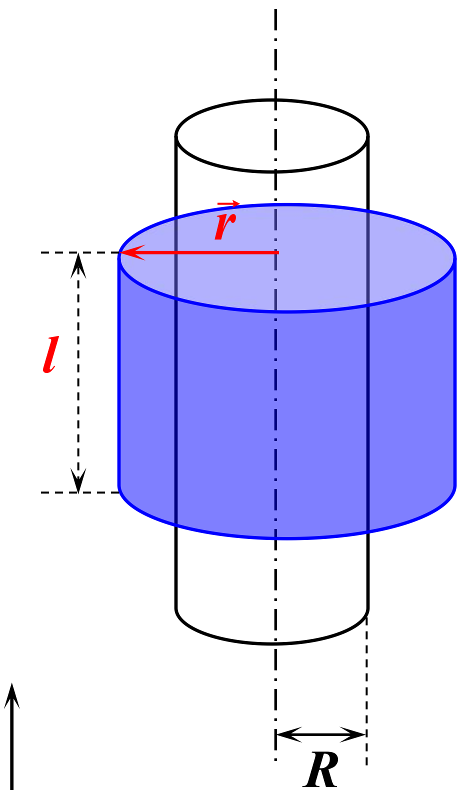
例7-10 半径R、电荷面密度σ的无限长均匀带电圆柱面的场强分布

解： 电场强度分布**柱对称**，如图，选择半径为r的**同轴柱面**为高斯面

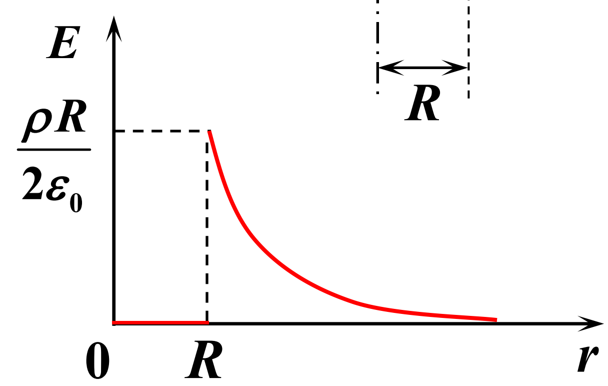
$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{侧} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{底} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{侧} E\cdot dS = E\iint_{侧} dS$$

$$= E\cdot 2\pi r l = \begin{cases} 0 & r < R \\ 2\pi R l\sigma/\varepsilon_0 & r > R \end{cases}$$



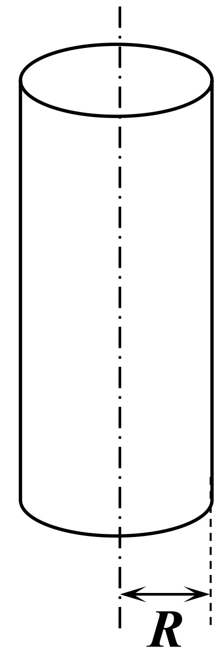
$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & r < R \\ \dfrac{\sigma R}{r\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r} & r > R \end{cases}$$



$$E_{\perp} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} \qquad E_{//} = 0$$

$r>R$，若将无限长圆柱面看成无限长直线，由线电荷密度与面电荷密度的关系：

$$\lambda = \sigma L = \sigma 2\pi R$$



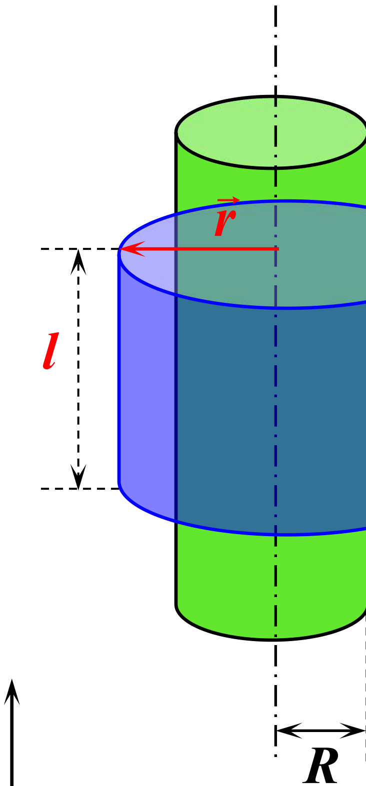
$r>R$时：

$$\vec{E} = \frac{\sigma R}{r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\sigma 2\pi R}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r}$$

均匀带电无限长圆柱面在$r>R$时的电场强度等同带相同电荷的处于轴线的均匀带电无限长直线的电场强度

例7-11 半径R、电荷体密度ρ的无限长均匀带电直圆柱的场强分布

解： 电场强度分布**柱对称**，如图，选择半径为r的**同轴柱面**为高斯面

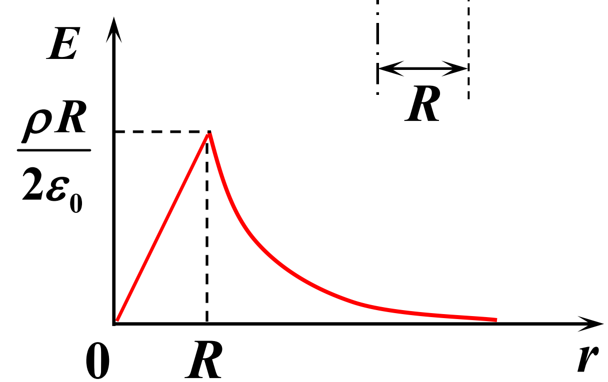


$$\Phi=\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\iint_{侧}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}+\iint_{底}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$=\iint_{侧}E\cdot \mathrm{d}S=E\iint_{侧}\mathrm{d}S$$

$$=E\cdot 2\pi rl=\begin{cases}\pi r^2 l\rho/\varepsilon_0 & r\le R\\ \pi R^2 l\rho/\varepsilon_0 & r>R\end{cases}$$

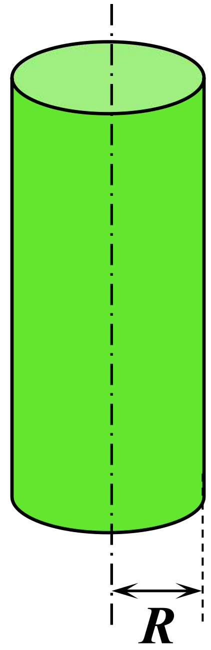
$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r} & r\le R\\ \dfrac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{r} & r>R\end{cases}$$



$r>R$时，若将无限长圆柱看成无限长直线，由线电荷密度与体电荷密度的关系：

$$E_{\perp} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} \qquad E_{//} = 0$$

$$\lambda = \rho S = \rho\pi R^2$$



$r>R$时：

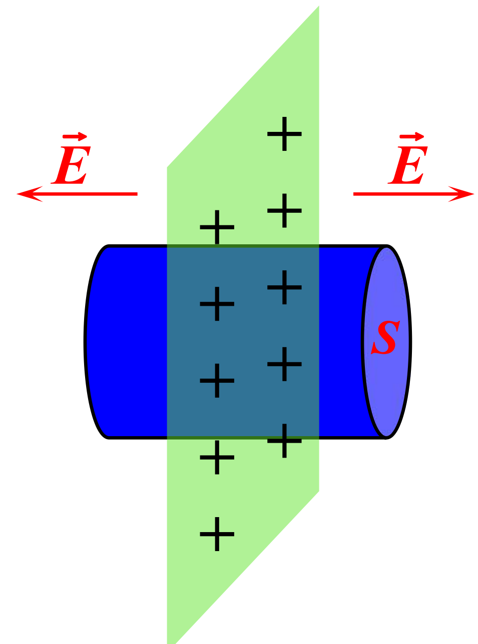
$$\vec{E} = \frac{\rho R^2}{2r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\rho\pi R^2}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\lambda}{2\pi r\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r}$$

均匀带电无限长圆柱在$r>R$时的电场强度等同带相同电荷的处于轴线的均匀带电无限长直线的电场强度

问题：均匀带电无限长圆柱壳的电场强度?

例7-12 电荷面密度σ的无限大均匀带电平面的场强分布

解： 电场强度分布面对称，选择如图的圆柱面为高斯面，该圆柱面的侧面垂直带电平面的，两底面与带电平面距离相等



$$\Phi = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{侧}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{底}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

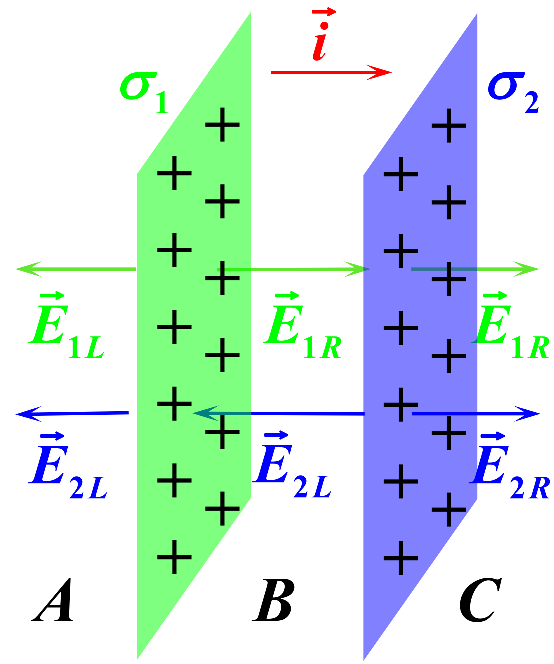
$$= \iint_{左底}\vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{右底}\vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E\iint_{左底} dS + E\iint_{右底} dS$$

$$= 2E\cdot S = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

例7-13 电荷面密度分别为σ_1、σ_2的两个平行放置的无限大均匀带电平面的场强分布



解：

$$\vec{E}_{1R}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i} \qquad \vec{E}_{1L}=-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_{2R}=\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i} \qquad \vec{E}_{2L}=-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_A=\vec{E}_{1L}+\vec{E}_{2L}=-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

$$\vec{E}_B=\vec{E}_{1R}+\vec{E}_{2L}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i} \qquad \vec{E}_C=\vec{E}_{1R}+\vec{E}_{2R}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\vec{i}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}\vec{i}$$

当$\sigma_1=\sigma$、$\sigma_2=-\sigma$时， $E_A=E_C=0$，带电平板电容器间的场强

$$\boxed{\vec{E}_B=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}}$$

当$\sigma_1=\sigma$、$\sigma_2=\sigma$时， $E_B=0$

$$\vec{E}_A=-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i} \qquad \vec{E}_C=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{i}$$