矢量

一、矢量定义及表示方式

矢量：有大小和方向，加减时遵从几何加减法则的量

$\vec{r}$　$\vec{v}$　$\vec{a}$　$\vec{F}$　$\longrightarrow$　$\vec{r}$

矢量大小：　$r = |\vec{r}| = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}$

矢量方向常用单位矢量来表示：

$\vec{r}_0$　$\hat{r}$　$\vec{i}$　$\vec{j}$　$\vec{k}$　$\vec{e}_r$　$\vec{e}_\theta$　$\vec{e}_\varphi$　$\vec{e}_z$　$\vec{\tau}$　$\vec{n}$

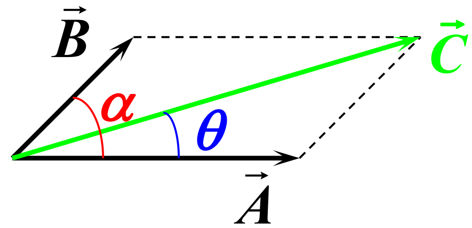
$\vec{r} = r\vec{r}_0$　$\vec{r} = r\hat{r}$　$\vec{r} = r\vec{e}_r$

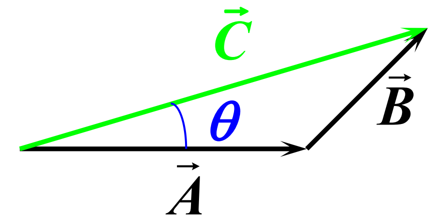
$-\vec{r}$与$\vec{r}$，大小相等，方向相反

二、矢量的加减法

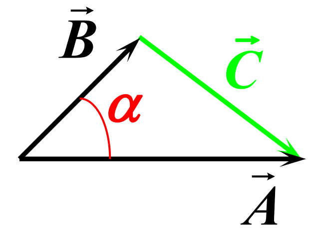
1、作图法

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$





$$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$



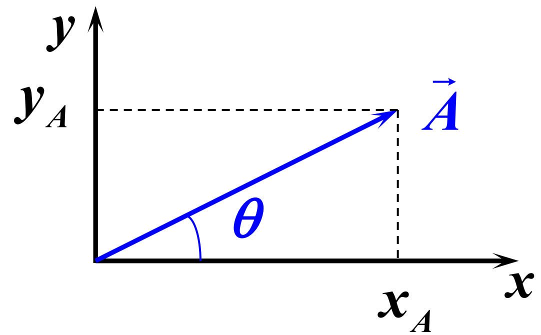
$$C = \sqrt{A^2 + B^2 \pm 2AB\cos\alpha} \qquad \tan\theta = \frac{B\sin\alpha}{A \pm B\cos\alpha}$$

其中(下同): $A = \left|\vec{A}\right| \quad B = \left|\vec{B}\right| \quad C = \left|\vec{C}\right|$

矢量相加，公式中取+号；矢量相减，公式中取–号

2、解析法

矢量的分量表示(直角坐标系)



$$\vec{A} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$$

$$x_A = A\cos\theta \quad y_A = A\sin\theta$$

$$A = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \quad \tan\theta = \frac{y_A}{x_A}$$

$$\vec{A} \pm \vec{B} = (x_A \pm x_B)\vec{i} + (y_A \pm y_B)\vec{j}$$

3、规律

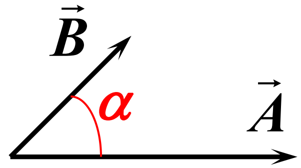
$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \qquad (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$$

三、矢量的乘法

1、数乘

$$k \cdot \vec{A} = k\vec{A}$$

2、点积(标积)



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\alpha$$

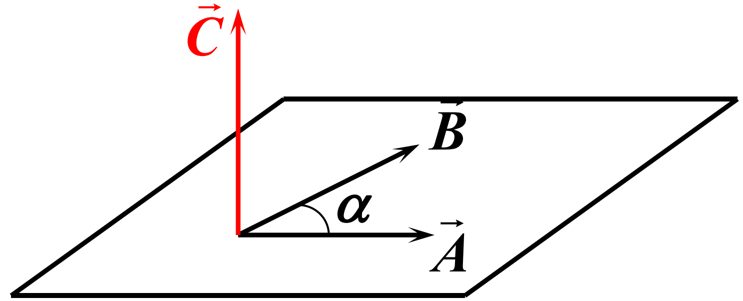
满足的规律

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \qquad \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

$$(\vec{A} \cdot \vec{B}) \cdot \vec{C} \neq \vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$$

3、叉积(矢积)

$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$



大小： $C=AB\sin\alpha$

方向：右手螺旋法则

满足的规律

$\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$ $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}\neq\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

4、标量三重积和矢量三重积

$$(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C}=(\vec{B}\times\vec{C})\cdot\vec{A}=(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}$$

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{B}\cdot\vec{C})\vec{A}$$

第一篇 力学(Mechanics)

力学(经典力学、牛顿力学)以牛顿定律为基础，在宏观世界和低速领域，研究物质的机械运动规律。

机械运动：一个物体相对于另一个物体，或一个物体的某些部分相对其余部分的位置，随时间的变化过程

基本内容

- 动量、动量定理、动量守恒定律
- 角动量、角动量定理、角动量守恒定律
- 能量、 动能定理、能量守恒定律

二个部分

- 运动学：只研究如何描述物体的机械运动
- 动力学：研究物体的机械运动发生、发展的原因和规律

第 1 章　质点运动学

1.1 质点的运动方程

一、质点

质点：忽略物体的大小和形状，将其看作一个具有质量的几何点

质点运动学：描述质点的位置随时间的变化

质点不等同于小物体，质点是实际物体在一定条件下的抽象。理想化模型是物理学中重要的科学研究方法

两种情况可以把物体看作质点来处理：
1)做平动的物体，可以被看作质点。
2)两相互作用的物体，如果它们之间的距离远大于本身的线度，可以把这两物体看作质点。

二、参考系和坐标系

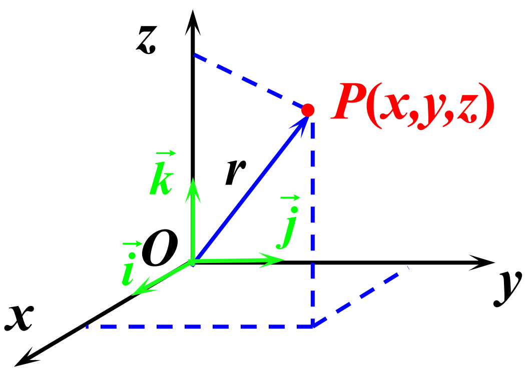
研究一个物体的机械运动，必须选另一个物体或彼此相对静止的物体群作参考，选作参考的物体或物体群称为参考系。

在运动学中，参考系是可以任意选择的。在实际问题中参考系选择既要考虑问题的性质和需要，又要力求对运动的描述较为简单。常选的参考系有：实验室参考系、地面参考系、太阳参考系等。

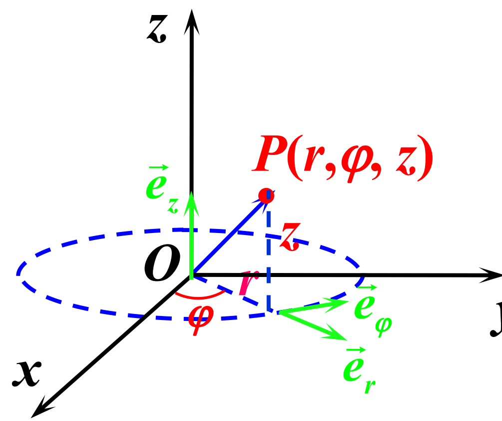
同一物体在不同的参考系中，反映的运动关系不同，对它的运动描述也不同，这叫做运动的相对性。

为从数量上确定物体相对于参考系的位置，需要在参考系选择一个固定坐标系。

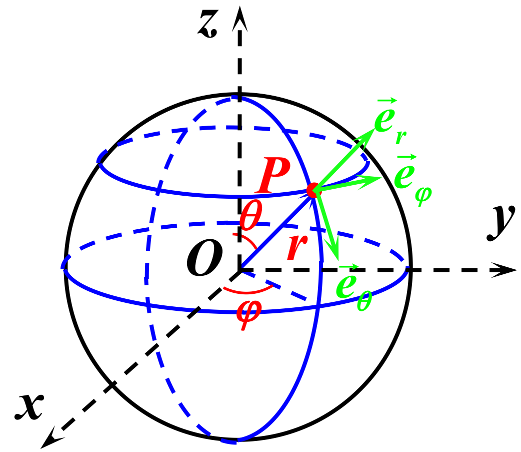
各种坐标系及其单位矢量



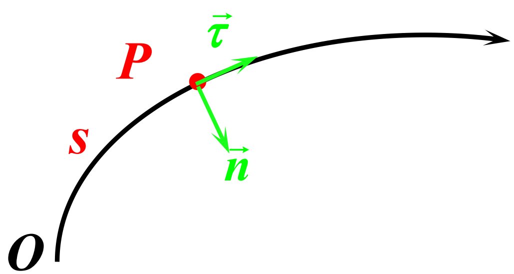
直角坐标系



柱坐标系



球坐标系



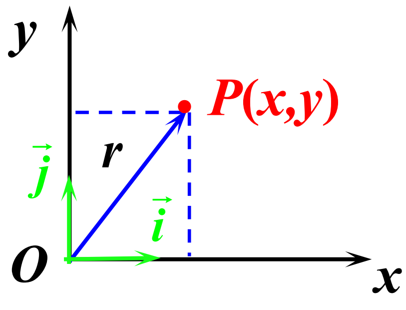
自然坐标系

在物体运动轨迹上选择一点O为坐标原点，s为轨迹上一点到原点的路程

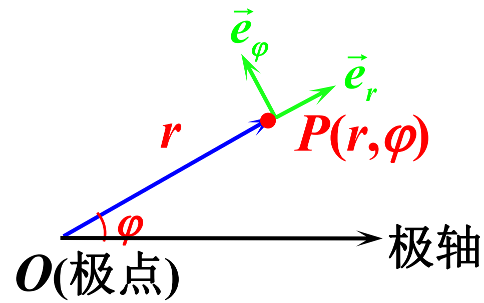
$\vec{\tau}$沿曲线切线方向且指向s增加方向

$\vec{n}$沿曲线法线方向且指向凹侧

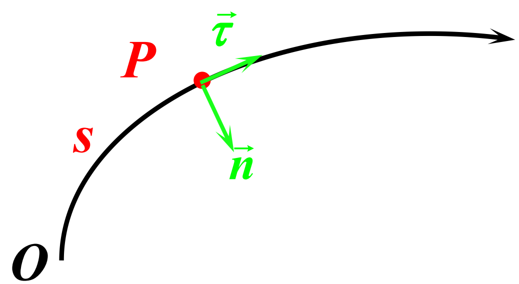
平面问题：平面直角坐标系、极坐标系和自然坐标系



平面直角坐标系

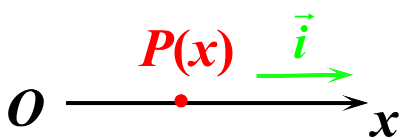


极坐标系



自然坐标系

一维：



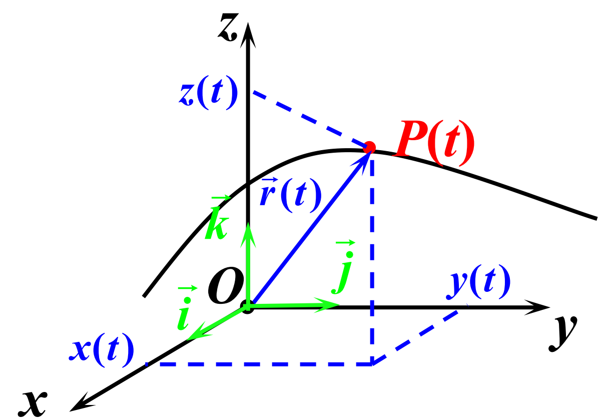
物体的运动状态不会因为选择不同的坐标系而不同

三、位置矢量和运动方程

质点的位置可以用坐标原点*O*到该点*P*的有向线段 $\vec{r}$ 来描述，矢量 $\vec{r}$ 称为质点的位置矢量，简称位矢

位矢随时间的变化关系称质点的运动方程或运动函数

$$\vec{r}=\vec{r}(t)$$



直角坐标系中：

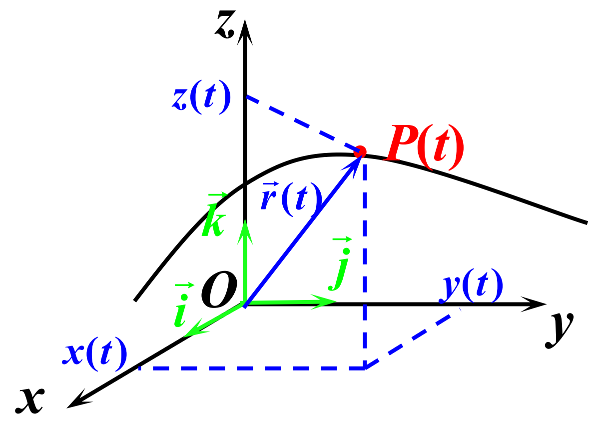
$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

质点的任意运动都是由*x*、*y*、*z*三个方向上独立的直线运动叠加(参量形式)而成，即运动的叠加原理

$$x=x(t),\quad y=y(t),\quad z=z(t)$$

运动方程中消去*t*，可得到轨迹方程　$F(x,\ y,\ z)=0$

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



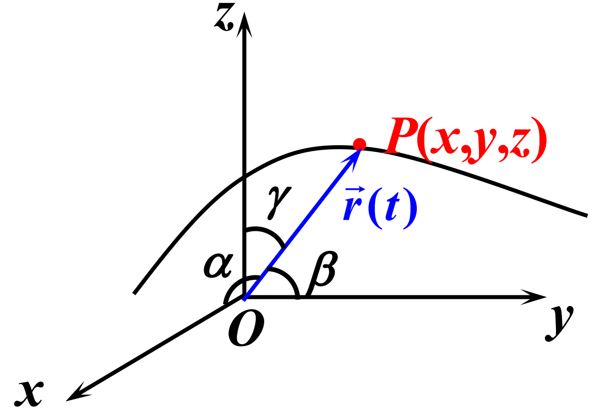
位矢的大小：

$$r(t) = |\vec{r}(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

位矢的方向：

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} \quad \cos\beta = \frac{y}{r} \quad \cos\gamma = \frac{z}{r}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



时刻与时间的区别：

时刻： t_1、t_2，与位置相对应

时间： $\Delta t = t_2 - t_1$，与路程相对应

不同的坐标系下，质点的位矢和运动方程有不同的形式

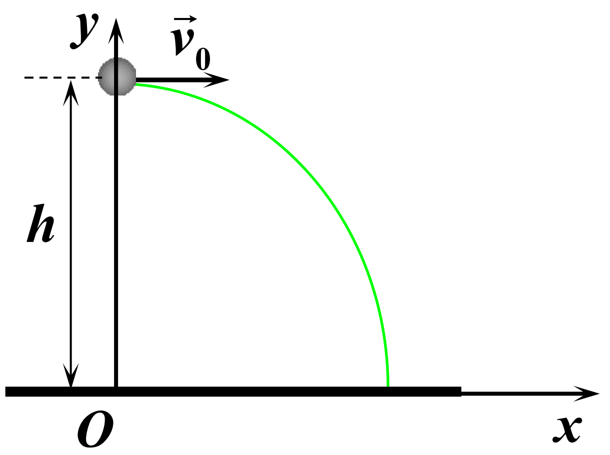
例1-1 如图，质点以速度v_0在离地面h处做平抛运动，

求： 轨迹方程

解： 选地面参考系，如图，建立直角坐标系

$$x(t) = v_0 t$$

$$y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2$$



消去t得到轨迹方程：

$$y = h - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2}$$

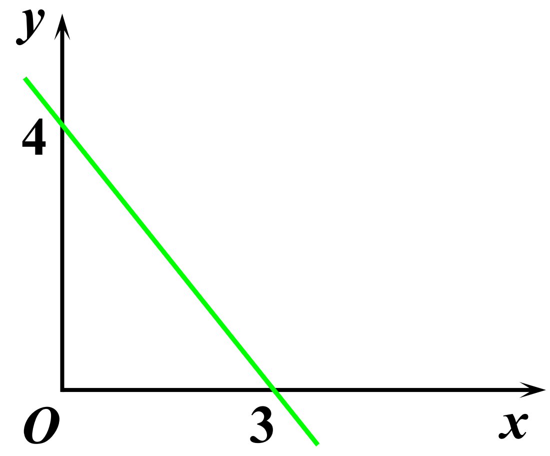
例1-2 已知质点位置矢量：$\vec{r}(t)=15t^2\vec{i}+(4-20t^2)\vec{j}$

求： 轨迹方程

解： 由位置矢量方程得

$$x(t)=15t^2$$

$$y(t)=4-20t^2$$



消去t得到轨迹方程：

$$3y+4x-12=0$$

1.2 位移、速度和加速度

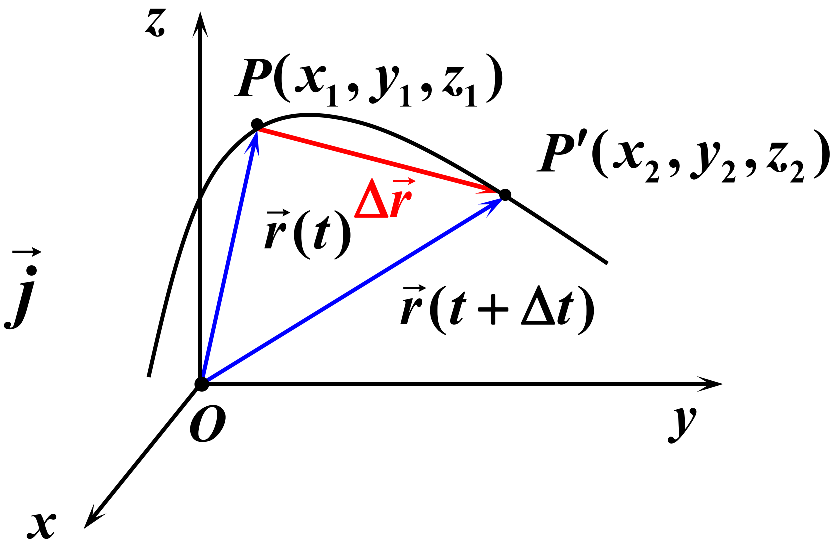
一、位移

位移是描述质点位置的变化的物理量

设质点t时刻位于P点，位矢$\vec{r}(t)$，t+Δt时刻位于P'点，位矢 $\vec{r}(t+\Delta t)$，有向线段 $\overrightarrow{PP'}$ 称为质点的位移。

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}$$

直角坐标系中：



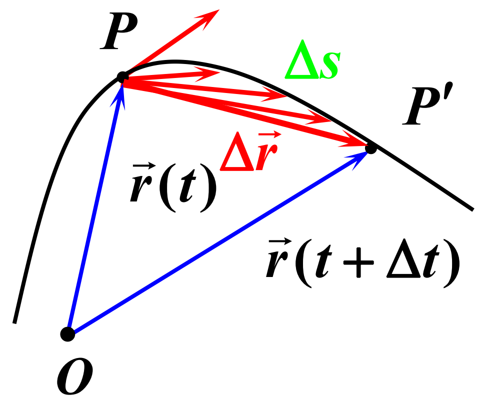
$$\Delta\vec{r} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

$$= \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

位移是矢量，方向是 $\Delta\vec{r}$ 方向，大小是 $|\Delta\vec{r}|$

当$\Delta t \to 0$，位移的方向就是质点运动轨道在该点的切线方向

PP'间的路程Δs是标量与位移不同



$$\Delta s = \overset{\frown}{PP'}$$

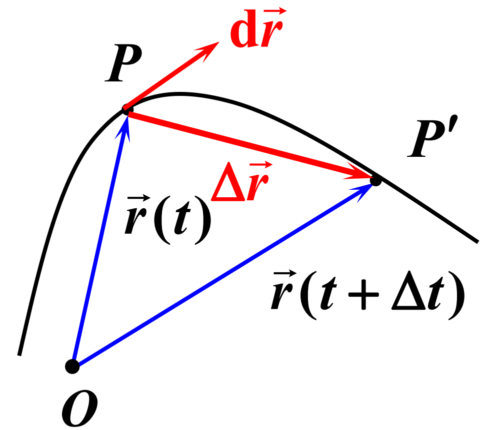
$$\Delta \vec{r} = \overrightarrow{PP'}$$

通常： $\left|\Delta \vec{r}\right| \neq \Delta s$ $\qquad \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\left|\Delta \vec{r}\right|}{\Delta s} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = 1$

直线运动中，如果运动方向不变(单向直线运动)，位移等于路程

二、速度

速度是描述质点运动快慢的物理量



平均速度

$$\bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

平均速度的方向是**位移的方向**

瞬时速度(简称速度)

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

速度的方向是质点运动轨道在P点的**切线方向**

平均速度与速度的关系

$$\bar{\vec{v}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\vec{v}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta t}\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_0+\Delta\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right| = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s} = 1$$

速率(速度大小)

$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right| \cdot \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right| \cdot \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

平均速率(速率的平均值) $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

平均速率与速率的关系

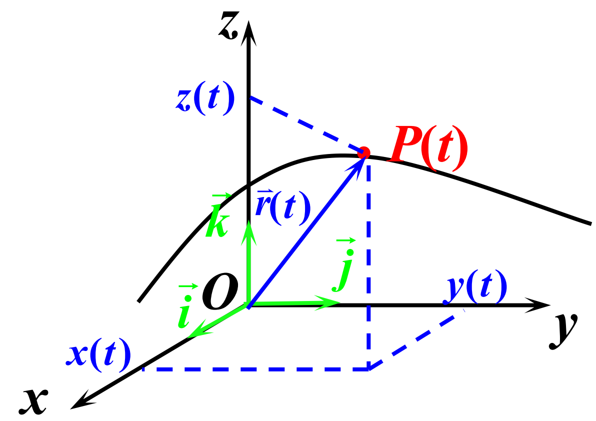
$$\bar{v} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} v\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta t}\int_{s_0}^{s_0+\Delta s} \mathrm{d}s = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

注意：平均速率是速率的平均值，不是平均速度的大小

一般情况下： $\bar{v} = \overline{|\vec{v}|} \neq |\bar{\vec{v}}|$

直角坐标系中速度的表示式

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

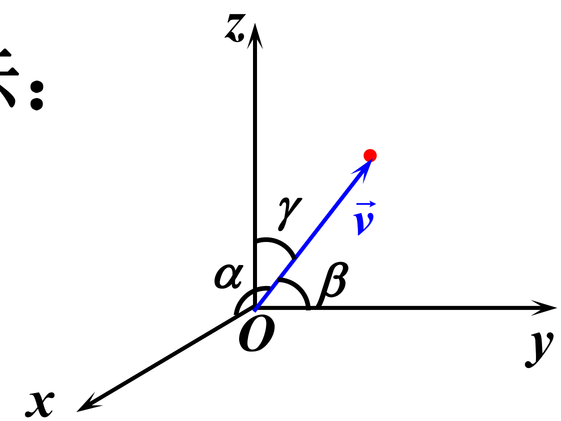


$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}$$

速度的方向有时可以用方向余弦表示：



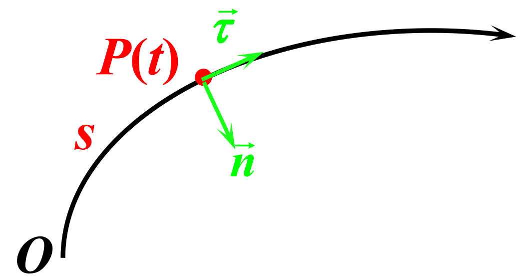
$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} \quad \cos\beta = \frac{v_y}{v} \quad \cos\gamma = \frac{v_z}{v}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

自然坐标系中速度的表示式

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}=v\vec{\tau}$$



$$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}\right|=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta s}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}=1$$

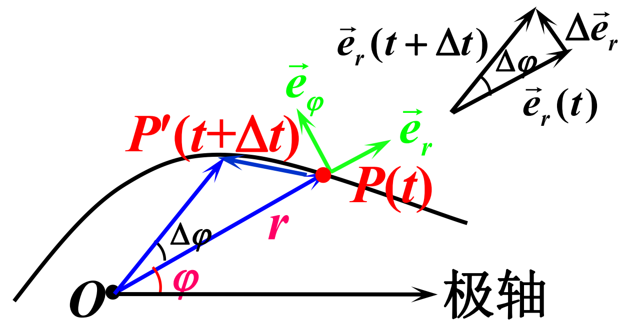
$\mathrm{d}\vec{r}$ 方向就是质点运动轨道在该点的切线方向

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}s}=\vec{\tau}$$

质点做曲线运动时，$\vec{\tau}$ 是个变量

极坐标系中速度的表示式

$$\vec{r}(t)=r\vec{e}_r$$



$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$$

$$=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\omega\vec{e}_\varphi=v_r\vec{e}_r+v_\varphi\vec{e}_\varphi \qquad v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \qquad v_\varphi=r\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{e}_r}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left|\vec{e}_r\right|\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\vec{e}_\varphi=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\vec{e}_\varphi=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi=\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$$

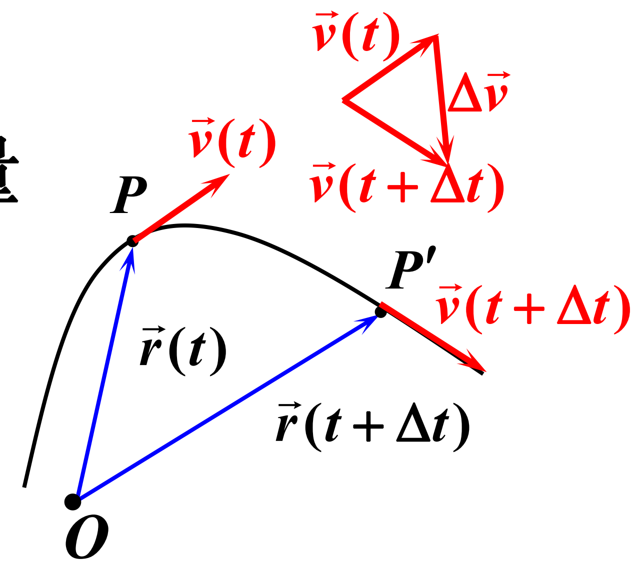
角速度：角坐标随时间的变化率

$$v=\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}=\sqrt{(v_r\vec{e}_r+v_\varphi\vec{e}_\varphi)\cdot(v_r\vec{e}_r+v_\varphi\vec{e}_\varphi)}=\sqrt{v_r^2+v_\varphi^2}$$

问题：柱坐标系中速度的表达式是什么？

三、加速度

加速度是描述速度变化快慢的物理量



平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

瞬时加速度(简称加速度)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}$$

加速度的方向总是指向质点运动轨道曲线凹的一侧

平均加速度与加速度的关系

$$\bar{\vec{a}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\vec{a}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t}\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta t}\int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}_0+\Delta\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

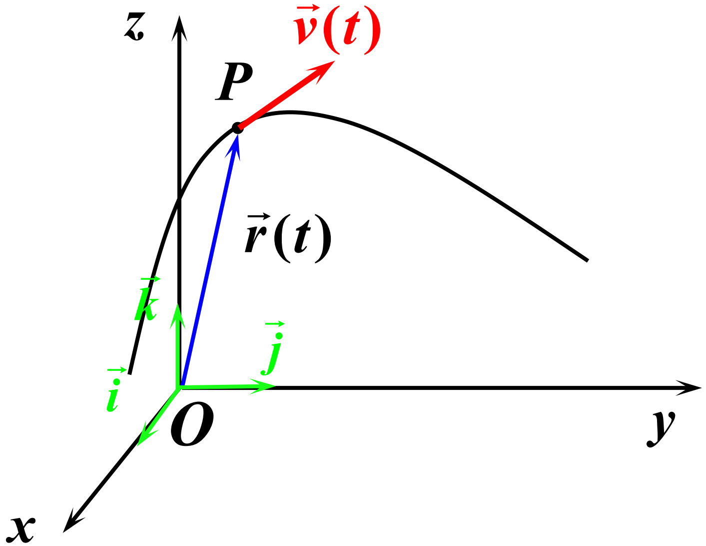
$$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

直角坐标系中

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$$

$$=\frac{dv_x}{dt}\vec{i}+\frac{dv_y}{dt}\vec{j}+\frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

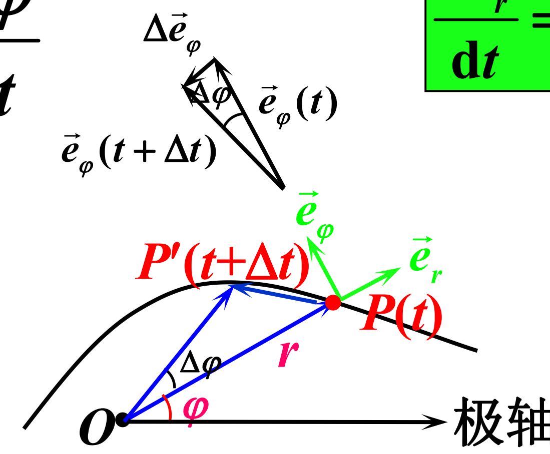


$$a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$$

速度的单位是米·秒$^{-1}$(m·s^{-1})，
加速度的单位是米·秒$^{-2}$(m·s^{-2})

极坐标系中 $\vec{v}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\omega\vec{e}_\varphi \qquad \omega=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}=\omega\vec{e}_\varphi}$$



$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r+r\omega\vec{e}_\varphi\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_r+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\omega\vec{e}_\varphi$$

$$+r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\varphi+r\omega\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}$$

$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}$ 角加速度

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\varphi}{\mathrm{d}t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\vec{e}_\varphi}{\Delta t}=-\lim_{\Delta t\to0}\frac{|\vec{e}_\varphi|\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\vec{e}_r=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r=-\omega\vec{e}_r$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_r+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cdot\omega\vec{e}_\varphi+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\omega\vec{e}_\varphi+r\alpha\vec{e}_\varphi-r\omega\omega\vec{e}_r$$

$2v_r\omega$

$$=\left(\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\omega^2\right)\vec{e}_r+(2v_r\omega+r\alpha)\vec{e}_\varphi=a_r\vec{e}_r+a_\varphi\vec{e}_\varphi$$

科里奥利
角加速度

四、运动经典描述的先决条件

运动经典描述的先决条件：在任一时刻，质点总有一个位置

对宏观物体，我们采用的是远比分子、原子线度大得多的尺度，这样总可以认为宏观物体具有确定的位置

微观粒子，由于波粒二象性，并非在任何情况下都有一个确定的位置

在某些特殊情况下，微观粒子只能在很小的空间体积内被发现，可以近似地使用位置的概念

运动学求解的两类问题：微分问题和积分问题

微分问题：

$$\vec{r}=\vec{r}(t)\Rightarrow\vec{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\quad \vec{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

积分问题：

$$\vec{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}\quad \mathrm{d}\vec{v}(t)=\vec{a}(t)\mathrm{d}t\quad \int_{v_0}^{v(t)}\mathrm{d}\vec{v}(t)=\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)\mathrm{d}t$$

$$\vec{v}(t)-\vec{v}_0=\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)\mathrm{d}t\quad \vec{v}(t)=\vec{v}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{a}(t)\mathrm{d}t$$

$$\vec{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}\Rightarrow\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)\mathrm{d}t$$

$$v(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}\Rightarrow s(t)=s_0+\int_{t_0}^{t}v(t)\mathrm{d}t$$

积分问题：加速度是位置的函数，求速度与位置的关系

$$a(x) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{v\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

$$v\mathrm{d}v = a(x)\mathrm{d}x \qquad \int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = \int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x$$

$$v^2 - v_0^2 = 2\int_{x_0}^{x} a(x)\mathrm{d}x$$

如果加速度a是常量

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

例1-3 质点运动函数 $\vec{r}(t)=(3t+5)\vec{i}+(0.5t^2+3t-4)\vec{j}$ (SI)

求： 1) 质点的速度，加速度；

2) t_1=1s，t_2=2s的位矢及$t_1 \to t_2$的位移和平均速度；

3) 质点的轨迹方程。

解： 1) $\vec{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\vec{k}$

$$=3\vec{i}+(t+3)\vec{j}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = (3t+5)\vec{i} + (0.5t^2 + 3t - 4)\vec{j} \quad \text{(SI)}$$

2) $$\vec{r}(t_1) = \vec{r}(1) = 8\vec{i} - 0.5\vec{j}$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(2) = 11\vec{i} + 4\vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = 3\vec{i} + 4.5\vec{j} \qquad \bar{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = 3\vec{i} + 4.5\vec{j}$$

3) $$x = 3t + 5 \quad y = 0.5t^2 + 3t - 4$$

消去t 质点的轨迹方程

$$y = \frac{1}{18}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{137}{18}$$

例1-4 导出加速度恒定的质点的位移公式

解： 质点的加速度恒定

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_0$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}_0+\int_0^t \vec{a}(t)\mathrm{d}t=\vec{v}_0+\vec{a}_0 t=\frac{\mathrm{d}\vec{r}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathrm{d}\vec{r}(t)=(\vec{v}_0+\vec{a}_0 t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}(t)=\int_0^t(\vec{v}_0+\vec{a}_0 t)\mathrm{d}t$$

$$\vec{r}(t)-\vec{r}_0=\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2 \qquad \vec{r}(t)=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}_0 t^2$$

例1-5 静止在x_0处的质量为m的物体，在力 $F=k/x^2$ 的作用下沿x轴运动，**求：** 物体在x处的速率

解： 由牛顿第二定律：

$$a=\frac{F}{m}=\frac{k}{mx^2}$$

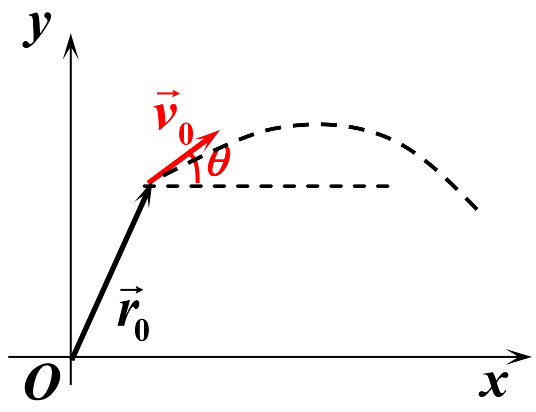
$$v^2-v_0^2=2\int_{x_0}^{x}a(x)\mathrm{d}x=2\int_{x_0}^{x}\frac{k}{mx^2}\mathrm{d}x=2\frac{k}{m}(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x})$$

$$v^2=2\frac{k}{m}(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x})\qquad v=\sqrt{\frac{2k}{m}(\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x})}$$

$\vec{a} = -g\vec{j}$

例1-6 重力场中的抛体运动函数(不计空气阻力)

质点初始时刻位矢 $\vec{r}_0 = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ 和速度 $\vec{v}_0$ (大小 v_0，与水平方向夹角 θ)



解： $$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}(t)\mathrm{d}t = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v}(t)\mathrm{d}t = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

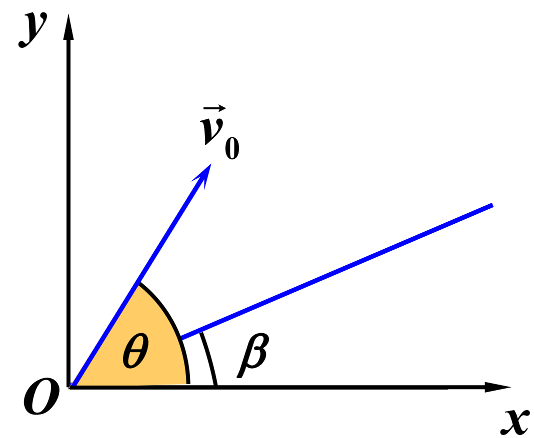
$$= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + v_0\cos\theta\cdot t\cdot\vec{i} + v_0\sin\theta\cdot t\cdot\vec{j} - \frac{1}{2}gt^2\vec{j}$$

$$= (x_0 + v_0\cos\theta\cdot t)\vec{i} + (y_0 + v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{j}$$

抛体运动是水平匀速直线运动和竖直上抛运动的合成

例1-7 在山脚下用迫击炮攻击山坡上目标，炮弹初速度v_0，发射角θ，山坡与水平面夹角β。

求： 炮弹速度，弹道方程，炮弹射程。



解： 如图建立坐标系

$$\vec{v}(t) = v_0\cos\theta\vec{i} + (v_0\sin\theta - gt)\vec{j}$$

$$\vec{r}(t) = (v_0\cos\theta\cdot t)\vec{i} + (v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2)\vec{j}$$

$$x = v_0\cos\theta\cdot t \quad y = v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

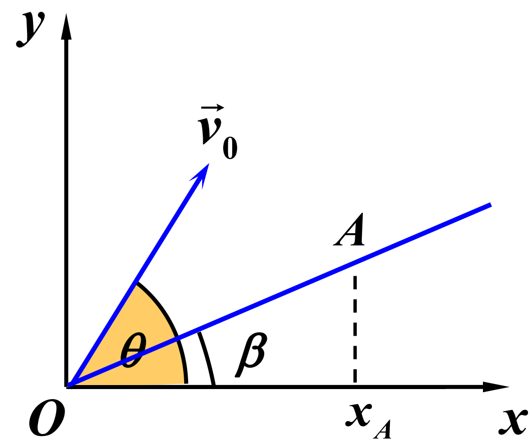
消去t，得弹道方程：

$$y = \tan\theta\cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

$\sin(\theta-\beta)=\sin\theta\cos\beta-\cos\theta\sin\beta$

$$y=\tan\theta\cdot x-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2$$

坡面方程：$y=\tan\beta\cdot x$



坡面方程与弹道方程联合得出落点A：

$$x_A=\frac{2(\tan\theta-\tan\beta)v_0^2\cos^2\theta}{g}$$

$$\overline{OA}=\frac{x_A}{\cos\beta}=\frac{2(\tan\theta-\tan\beta)v_0^2\cos^2\theta}{g\cos\beta}$$

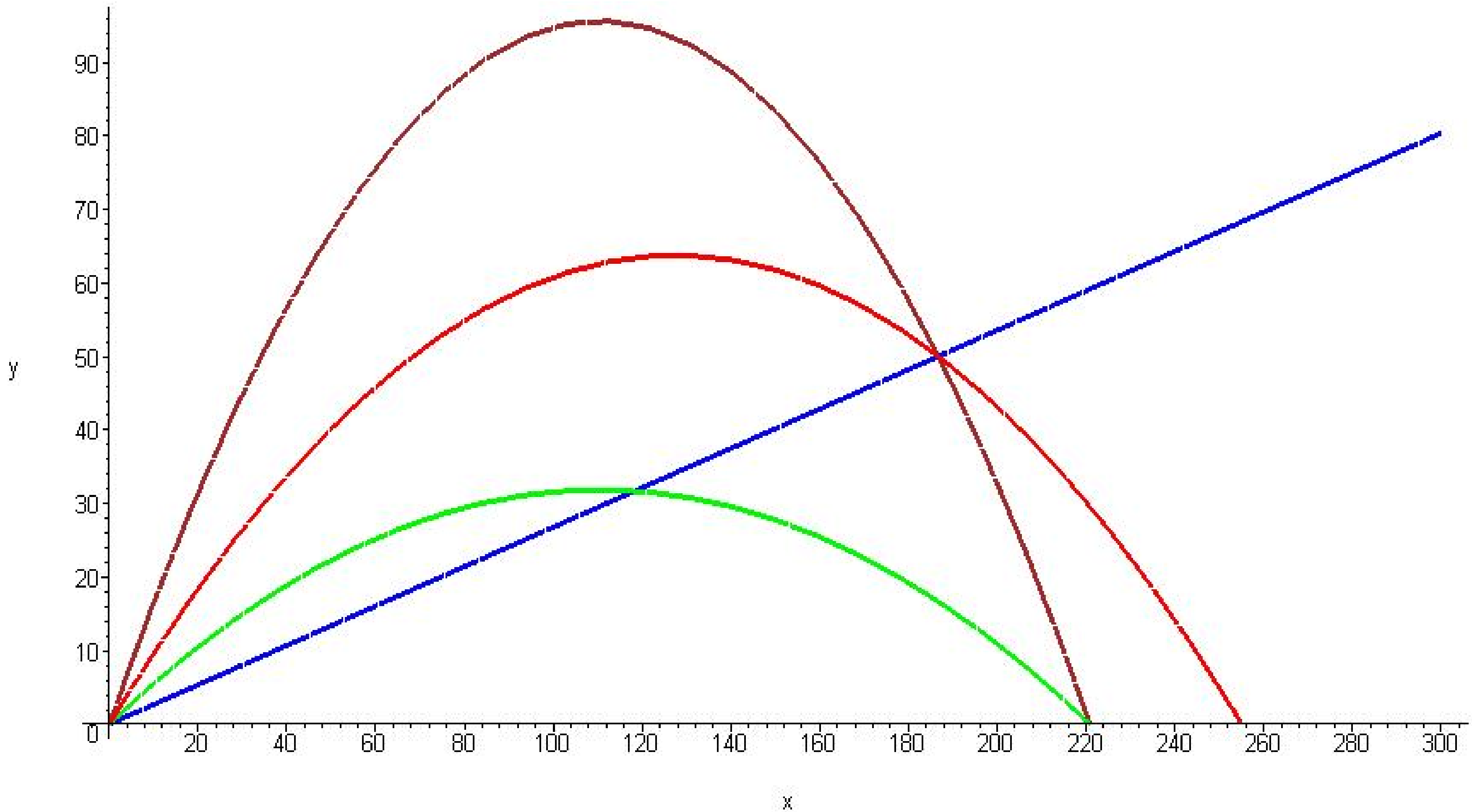
$$=\frac{2(\sin\theta\cos\beta-\sin\beta\cos\theta)v_0^2\cos\theta}{g\cos^2\beta}=\frac{2v_0^2\cos\theta\sin(\theta-\beta)}{g\cos^2\beta}$$

$$\beta=0\quad \overline{OA}_{水平}=\frac{v_0^2\sin(2\theta)}{g}$$

$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 \quad \overline{OA} = \frac{2v_0^2\cos\theta\sin(\theta-\beta)}{g\cos^2\beta}$$

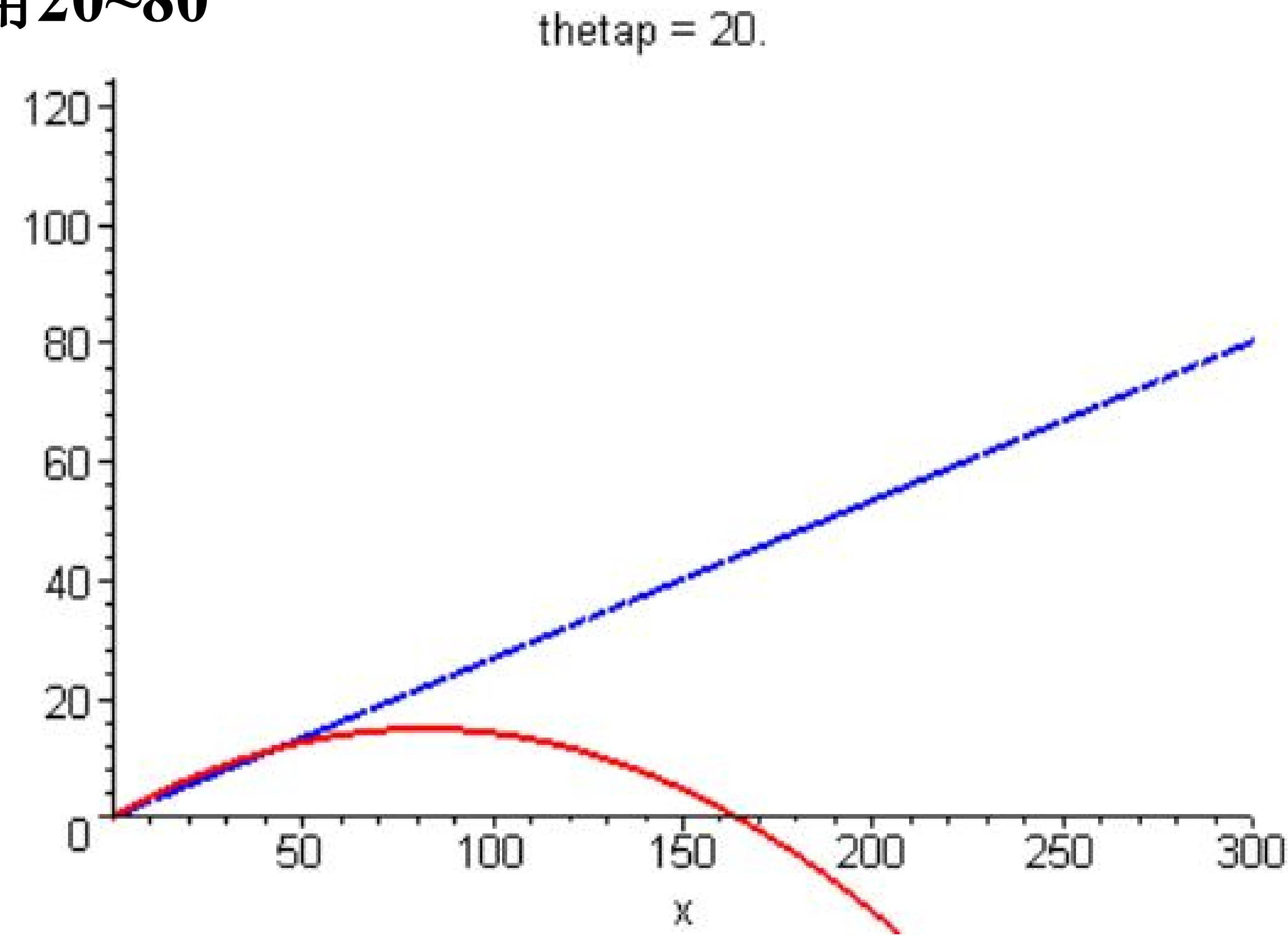
炮弹初速度50m·s⁻¹，山坡与水平面夹角15°

发射角45°、60°、30°



$$y = \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 \quad \overline{OA} = \frac{2v_0^2\cos\theta\sin(\theta-\beta)}{g\cos^2\beta}$$

炮弹初速度$50\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，山坡与水平面夹角15°发射角20~80°



例1-8 船在水上直线滑行，由于水的阻力，船速逐渐减小；假定其加速度和船速方向相反，大小成正比，讨论船的运动。

$$\vec{r}(t)=\vec{r}_0+\int_{t_0}^{t}\vec{v}(t)\mathrm{d}t$$

解： 以船前进方向x轴为正向，则：

$$v(t)>0 \quad a(t)<0 \quad a(t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}=-kv(t) \quad (k>0)$$

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{v(t)}=-k\mathrm{d}t \qquad \int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v(t)}{v(t)}=\int_0^t -k\mathrm{d}t \qquad \ln\frac{v(t)}{v_0}=-kt$$

$$v(t)=v_0e^{-kt} \qquad v_0=v(0)$$

$$x(t)=x(0)+\int_0^t v(t)\mathrm{d}t=x_0+\int_0^t v_0e^{-kt}\mathrm{d}t=x_0+\frac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$$

船的位移随时间增长而增大，但有一个上限 $\dfrac{v_0}{k}$

例1-9 (1) 位移和路程有何区别？

(2) 瞬时速度和瞬时速率有何区别？

(3) 瞬时速度和平均速度的区别和联系？

(4) 平均速率等于平均速度的模，对吗？

(5) $\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$，是否正确？

解: (1) $\Delta\vec{r}$ $\quad \Delta s$

(2) $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \quad v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad v = |\vec{v}|$

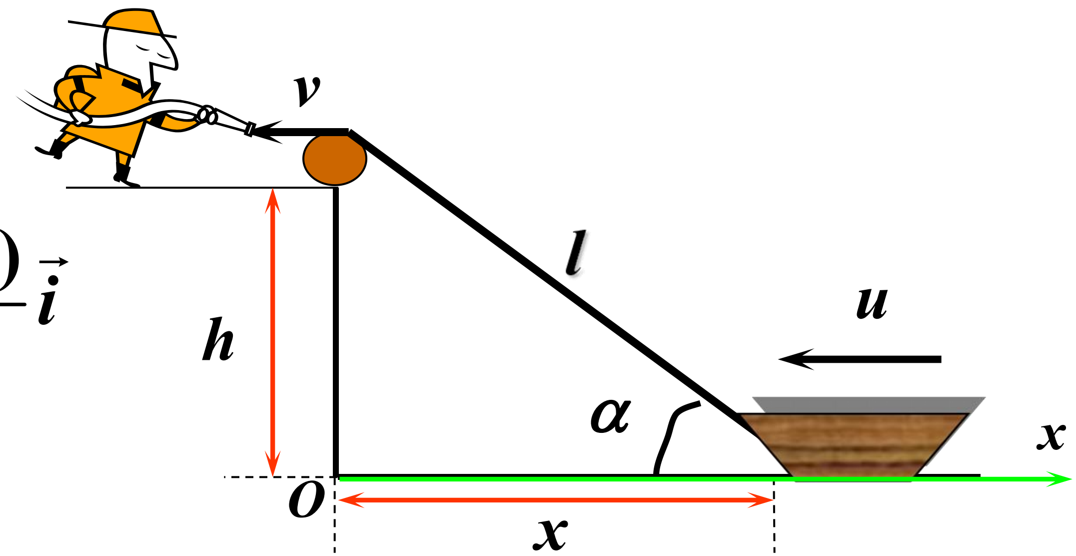
(3) $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \quad \overline{\vec{v}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad \overline{\vec{v}} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \vec{v}\,\mathrm{d}t$

(4) $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \left|\overline{\vec{v}}\right| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| \quad \overline{v} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} v\,\mathrm{d}t = \overline{|\vec{v}|}$

(5) $\left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + v_\varphi \vec{e}_\varphi \quad \left|\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right| = v = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t})^2 + v_\varphi^2}$

例1-10 如图，在离水面高度h的岸边有一人用绳子跨过一定滑轮用恒定的速度v来拉船靠岸，**求：**船拉到离岸边x处的速率和加速度大小。

解：如图建立坐标系，设船的速率为u



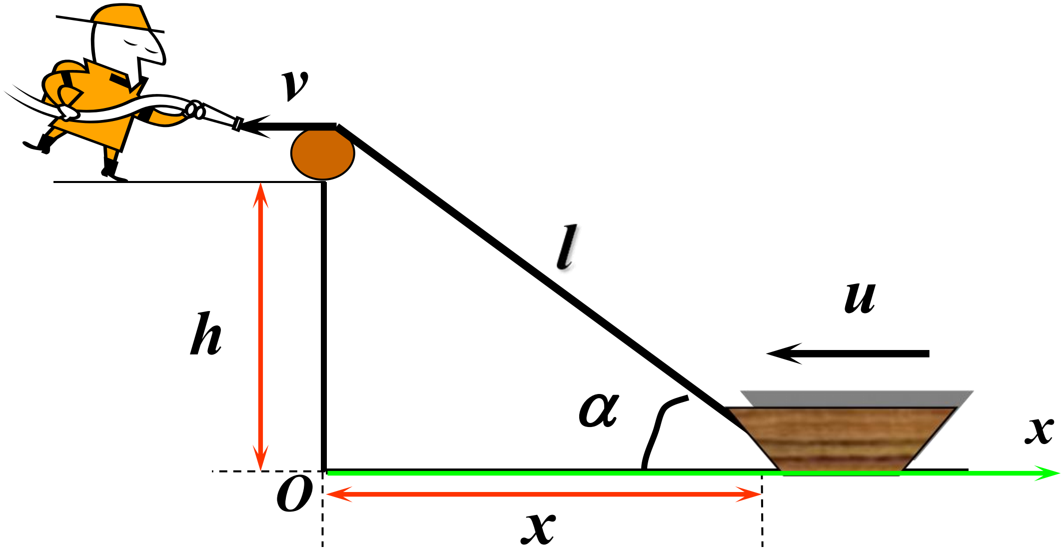
$$\vec{u}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}=\frac{\mathrm{d}(\sqrt{l^2-h^2})}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$

$$=\frac{l}{\sqrt{l^2-h^2}}\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\vec{i}$$

$$=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v\vec{i}$$

$$u=|\vec{u}|=\frac{l}{x}v=\frac{v}{\cos\alpha}$$

船速率大于绳头速度v，船前进时α角增大，故船的速率越来越快，船作变加速直线运动。



$$\vec{u}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}=-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v\vec{i}$$

为什么不能用
$u= v\cos\alpha$ 来求
船速？

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x}v\vec{i}\right)$$

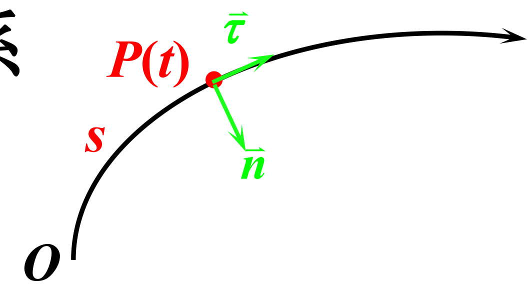
$$=\left(\frac{\sqrt{x^2+h^2}}{x^2}v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{\sqrt{x^2+h^2}}v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\vec{i}$$

$$=\left(-\frac{x^2+h^2}{x^3}v^2+\frac{1}{x}v^2\right)\vec{i}=-\frac{h^2v^2}{x^3}\vec{i}$$

$$a=\frac{h^2v^2}{x^3}$$

1.3 切向加速度与法向加速度

质点做曲线运动，可采用自然坐标系



$$\vec{v}(t)=v(t)\vec{\tau}(t) \quad v(t)=\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[v(t)\vec{\tau}(t)]=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}(t)+v(t)\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t}$$

第一项是与速度方向平行的矢量，称为切向加速度 $\vec{a}_t$

第二项是与速度方向垂直的矢量，称为法向加速度 $\vec{a}_n$

切向加速度 $\vec{a}_t(t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}(t)=\frac{\mathrm{d}^2s(t)}{\mathrm{d}t^2}\vec{\tau}(t)$

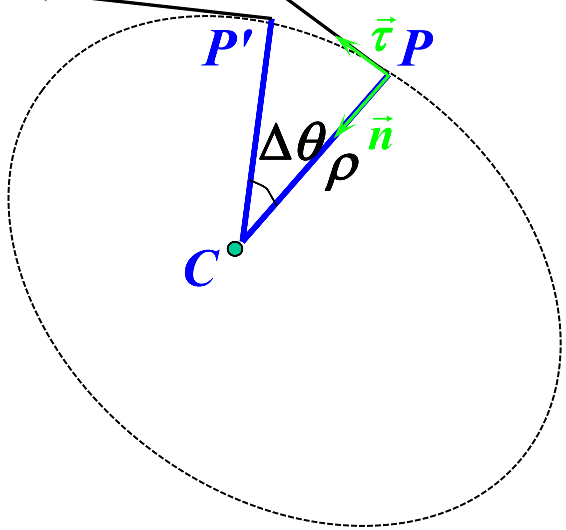
切向加速度的大小：等于速率的时间变化率，

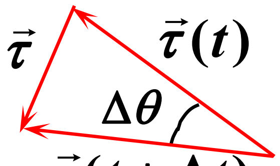
切向加速度的方向：沿着或逆着速度方向(切线方向)

法向加速度

$$\boxed{\vec{a}_n(t) = v(t)\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t}}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta}}$$



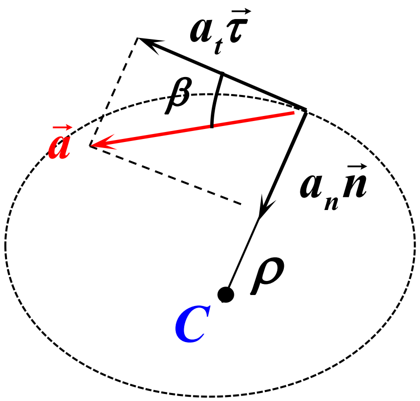


$$\frac{\mathrm{d}\vec{\tau}(t)}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \vec{n}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\vec{\tau}|\Delta\theta}{\Delta t} = \vec{n}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \vec{n}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \vec{n}\frac{v(t)}{\rho}$$

$$\vec{a}_n(t) = \vec{n}\frac{v^2(t)}{\rho}$$

法向加速度也称向心加速度，表示由于速度方向的改变而引起的速度变化率

$$\vec{a}(t)=\vec{a}_t(t)+\vec{a}_n(t)=\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}(t)+\frac{v^2(t)}{\rho}\vec{n}(t)$$



$$a=\sqrt{a_t^2+a_n^2}=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{v^2}{\rho})^2}\qquad \beta=\tan^{-1}\frac{a_n}{a_t}$$

曲线运动必有法向加速度，合加速度指向曲线凹的一侧，若只有法向加速度，则质点做匀速率曲线运动

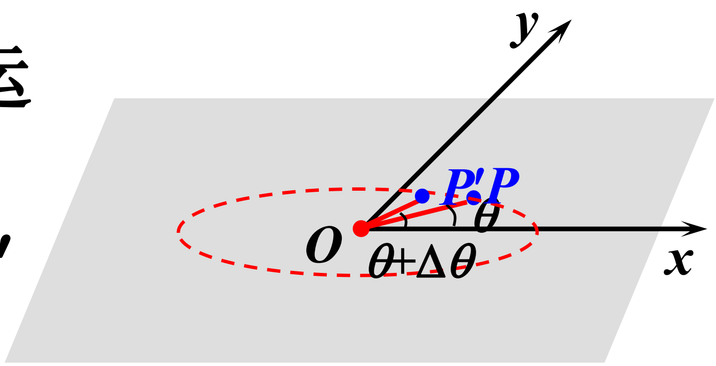
对圆周运动，若圆的半径为R

$$\vec{a}_t=a_t\vec{\tau}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}\qquad \vec{a}_n=a_n\vec{n}=\frac{v^2}{R}\vec{n}$$

1.4 圆周运动的角量描述

质点做圆周运动，也常用角位移、角速度、角加速度等角量来描述

质点在xy平面内，绕原点做圆周运动，t时刻在P点，半径OP与Ox轴成θ角；$t+\Delta t$时刻在P'点，半径OP'与Ox轴成$\theta+\Delta\theta$角，$\theta(t)$叫**角位置**，$\Delta\theta$角叫质点对O点的**角位移**



平均角速度：$\bar{\omega}=\dfrac{\Delta\theta(t)}{\Delta t}$ 瞬时角速度(角速度)：$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}$

平均角加速度：$\bar{\alpha}=\dfrac{\Delta\omega(t)}{\Delta t}$

瞬时角加速度(角加速度)：$\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}^2\theta(t)}{\mathrm{d}t^2}$

角加速度α不变的转动称匀加速转动

$$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta(t)}{\mathrm{d}t}\qquad \alpha=\frac{\mathrm{d}\omega(t)}{\mathrm{d}t}$$

对匀加速转动有：

$$\mathrm{d}\omega=\alpha\mathrm{d}t \qquad \int_{\omega_0}^{\omega}\mathrm{d}\omega=\int_0^t\alpha\mathrm{d}t \qquad \omega(t)=\omega_0+\alpha t$$

$$\mathrm{d}\theta=\omega\mathrm{d}t \qquad \int_{\theta_0}^{\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^t\omega\mathrm{d}t=\int_0^t(\omega_0+\alpha t)\mathrm{d}t$$

$$\theta(t)=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$$

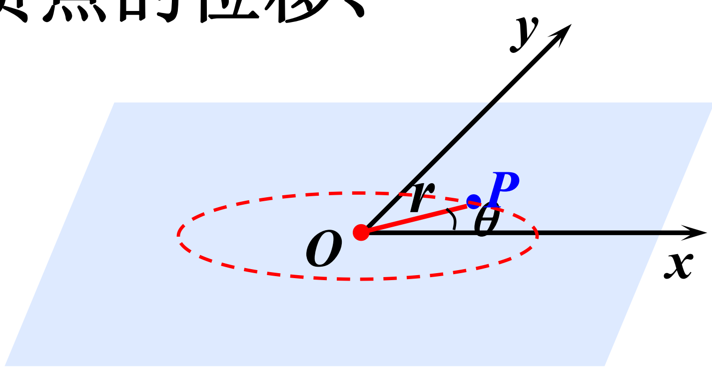
其中： $\omega_0=\omega(t=0) \quad \theta_0=\theta(t=0)$

$$\omega\mathrm{d}\omega=\omega\alpha\mathrm{d}t=\alpha\mathrm{d}\theta \qquad \int_{\omega_0}^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=\int_{\theta_0}^{\theta}\alpha\mathrm{d}\theta$$

$$\omega^2-\omega_0^2=2\alpha(\theta-\theta_0)$$

$\Delta s = r\Delta\theta$

描述质点做圆周运动的角位移、角速度和角加速度，这些量称为角量；描述质点的位移、速度和加速度，这些量称为线量。



设质点到轴的距离为r，则线量和角量之间的关系：

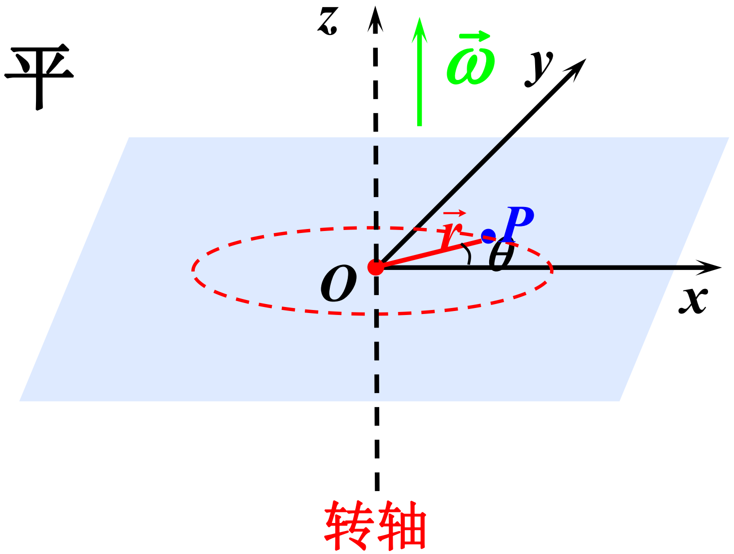
$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{r\Delta\theta}{\Delta t} = r\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r\alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

质点在xy平面内绕O点做圆周运动，也就是质点绕通过O点垂直xy平面的转轴(图中的z轴)转动

定义角速度矢量$\vec{\omega}$：方向与转轴平行，满足右手螺旋法则

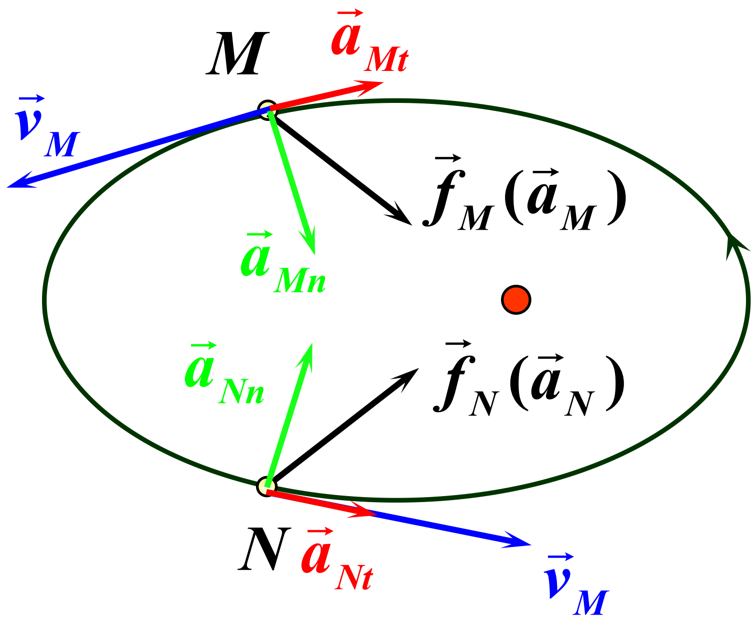


$$\vec{\alpha}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}$$

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{\alpha}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{v}$$

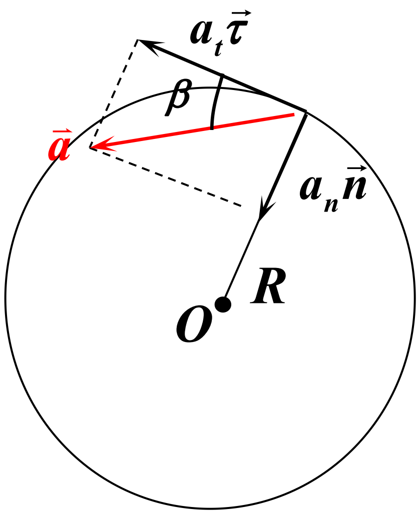
例1-11 分析行星通过M、N点时速率分别是增大趋势还是减小趋势？



在M点速度与切向加速度方向相反，速率将减小；
在N点速度与切向加速度方向相同，速率将增大！

例1-12 质点沿固定的圆形轨道，若速率v均匀增加，a_t、a_n、a以及加速度与速度间的夹角中哪些量随时间变化？

$$v = v_0 + kt \quad k > 0$$



$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = k$$ 不变

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 + kt)^2}{R}$$ 变化

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$ 变化

$$\beta = \tan^{-1}\frac{a_n}{a_t}$$ 变化

1.5 参考系变换

两个不同的参考系对同一个质点运动(位移、速度和加速度)的描述可能是不同的，这就是运动的相对性

两个参考系各自固定直角坐标系S和S'，同一质点相应的位矢： $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k}$ $\vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$

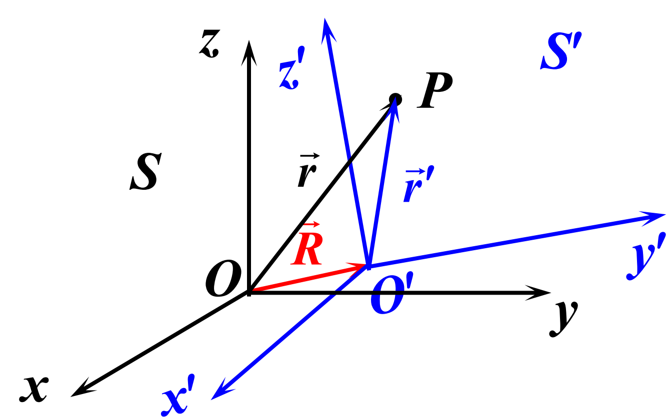
一、平动参考系

考虑S'和S相对平动(S'相对S运动时，O'可任意运动，S'的坐标轴保持方向不变)，设初始时刻，O与O'重合，t时刻O'相对O的位矢R，同一质点相对S和S'两个参考系有关系(伽利略变换)：

$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}'(t) + \vec{u}(t) \qquad \vec{u}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{R}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t) + \vec{a}_0(t) \qquad \vec{a}_0(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t}$$

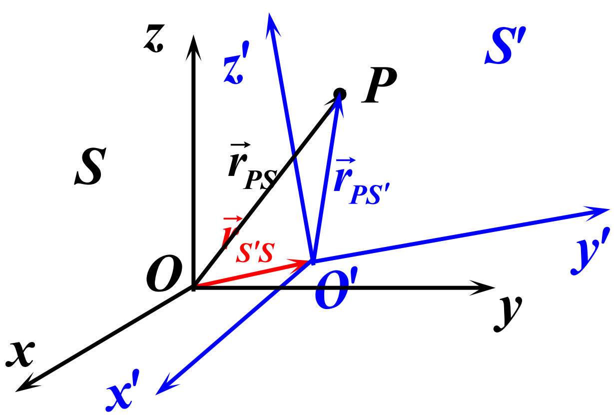


在两个参考系相对平动情况下，我们也可以用容易记忆的**下角标**来描述一质点相对两个参考系的关系

两个参考系各自固定直角坐标系S和S'，同一质点相应的位矢：

$$\vec{r}_{PS} = x\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k} \quad \vec{r}_{PS'} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

初始时刻，O与O'重合，t时刻O'相对O的位矢$r_{S'S}$，则有关系：



$$\vec{r}_{PS}(t) = \vec{r}_{PS'}(t) + \vec{r}_{S'S}(t)$$

$$\vec{v}_{PS}(t) = \vec{v}_{PS'}(t) + \vec{v}_{S'S}(t) \quad \vec{v}_{S'S}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{S'S}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a}_{PS}(t) = \vec{a}_{PS'}(t) + \vec{a}_{S'S}(t) \quad \vec{a}_{S'S}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{S'S}(t)}{\mathrm{d}t}$$

当两个参考系相对做匀速直线运动时，$\vec{u}$ 恒定， $a_0=0$，$\vec{R}(t)=\vec{u}t$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}'(t)+\vec{u}t \quad \vec{a}(t)=\vec{a}'(t)$$

$$\vec{r}(t)=\vec{r}'(t)+\vec{R}(t)$$

$$\vec{v}(t)=\vec{v}'(t)+\vec{u}(t) \quad \vec{u}(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{R}(t)}{\mathrm{d}t}$$

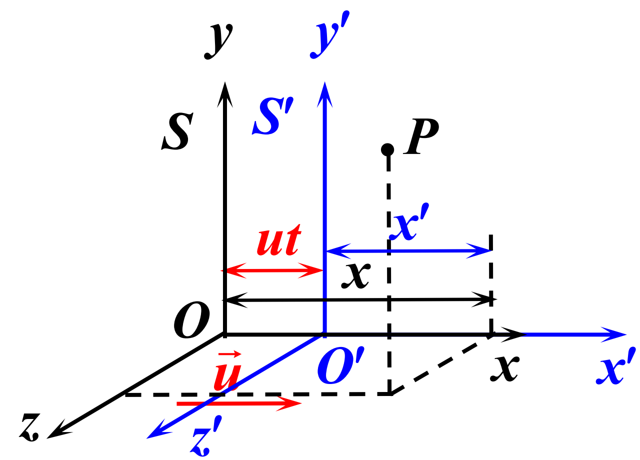
$$\vec{a}(t)=\vec{a}'(t)+\vec{a}_0(t) \quad \vec{a}_0(t)=\frac{\mathrm{d}\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t}$$

两个相对做匀速直线运动的参考系中，同一质点的加速度是相同的。

$$\vec{i}=\vec{i}' \quad \vec{j}=\vec{j}' \quad \vec{k}=\vec{k}'$$

考虑简单情形：两坐标系x轴重合，y轴和z轴分布平行，$\vec{u}$ 平行x轴，初始时刻，O与O'重合(S与S'重合)：

$$\begin{cases} x=x'+ut \\ y=y' \\ z=z' \\ t=t' \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} x'=x-ut \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=t \end{cases}$$

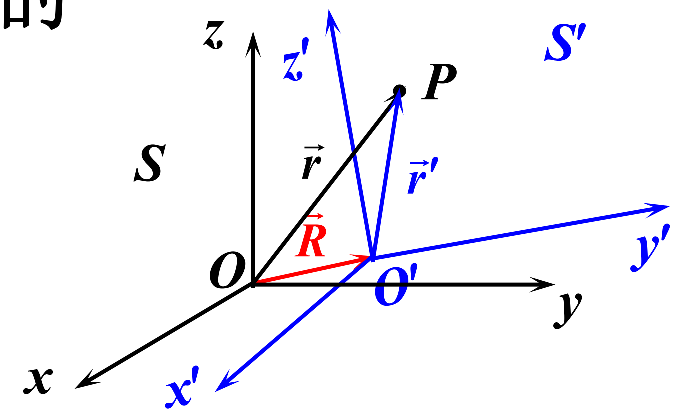


上式称伽利略坐标变换式。伽利略变换是在长度和时间的测量与参考系无关的前提下得出的。

二、转动参考系

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + x\vec{k} \quad \vec{r}' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$

考虑S'相对S转动(O'任意运动，S'的坐标轴相对S转动)



$$\vec{r}(t) = \vec{r}'(t) + \vec{R}(t)$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}'(t)}{dt} + \frac{d\vec{R}(t)}{dt}$$

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{i}' \quad \frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{j}' \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{k}'$$

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')$$

$$= \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + x'\frac{d\vec{i}'}{dt} + y'\frac{d\vec{j}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}$$

$$= \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + x'\vec{\omega}\times\vec{i}' + y'\vec{\omega}\times\vec{j}' + z'\vec{\omega}\times\vec{k}'$$

$$= \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{v}' = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}' + \vec{u}(t) \quad \vec{u}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}' + \vec{u}(t) \qquad \vec{u}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{R}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{i}'}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\vec{i}' \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{j}'}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\vec{j}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{k}'}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\vec{k}'$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}'(t)}{\mathrm{d}t} = \vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}'$$

$$\vec{v}' = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\vec{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\vec{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\vec{k}'$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}' + \vec{u}(t)]$$

$$= \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$= \vec{a}' + \omega\times\vec{v}' + \vec{\alpha}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{v}' + \vec{\omega}\times\vec{r}') + \frac{\mathrm{d}\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \vec{a}' + \omega\times\vec{v}' \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{\alpha}$$

$$\vec{a}(t) = \vec{a}' + \vec{\alpha}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') + 2\vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{a}_0(t) \qquad \vec{a}_0(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{u}(t)}{\mathrm{d}t}$$

例1-13 高树上有只猴子，枪瞄准猴子，枪响同时猴子掉落，试说明：无论子弹初速度如何，都会击中猴子。

解：选取地面参考系和猴子参考系

$\vec{v}_{PS}(t) = \vec{v}_{PS'}(t) + \vec{v}_{S'S}(t)$

子弹在地面参考系中的速度：$\vec{v}_{弹地}(t) = \vec{v}_0 + \vec{g}t$

猴子在地面参考系中的速度：$\vec{v}_{猴地}(t) = \vec{g}t$

子弹在猴子参考系中的速度

$$\vec{v}_{弹猴}(t) = \vec{v}_{弹地}(t) + \vec{v}_{地猴}(t) = \vec{v}_{弹地}(t) - \vec{v}_{猴地}(t)$$

$$= \vec{v}_0 + \vec{g}t - \vec{g}t = \vec{v}_0 = 常量$$

在猴子看来：子弹相对猴子做匀速直线运动。猴子难逃被击中的命运！

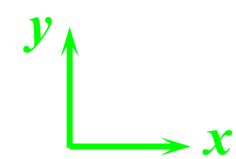
叠加：在同一个坐标系；变换：涉及不同坐标系

例1-14 无风情况下，雨滴速度18m·s^{-1}垂直下落，车以速度9m·s^{-1}向东行驶，**求：** 雨滴相对于车的速度

解： 以地面为S系，以车为S'系，以东为x轴(x'轴) 正向，垂直向上为y轴(y'轴)正向。

$$\boxed{\vec{v}_{PS}(t)=\vec{v}_{PS'}(t)+\vec{v}_{S'S}(t)}$$

雨滴在地面参考系中的速度：$\vec{v}_{雨地}(t)=-18\vec{j}$



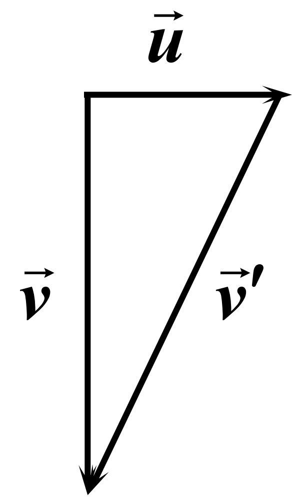
车在地面参考系中的速度： $\vec{v}_{车地}(t)=9\vec{i}$

雨滴在车参考系中的速度

$$\vec{v}_{雨车}(t)=\vec{v}_{雨地}(t)+\vec{v}_{地车}(t)$$

$$=\vec{v}_{雨地}(t)-\vec{v}_{车地}(t)$$

$$=-18\vec{j}-9\vec{i}\quad(\mathrm{m\cdot s^{-1}})$$



1.6 物理量纲

量纲(dimension)：导出量对基本量依赖的幂次关系

量纲说明物理量由哪些基本量组成，以及如何组成，反映了物理特性。量度量纲的尺度是单位。

国际单位制：

基本量	长度	质量	时间	电流	温度	物质的量	发光强度
单位符号	m	kg	s	A	K	mol	cd
量纲符号	L	M	T	I	Θ	N	J

物理量Q的量纲式：

$$\dim Q = \mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma}\mathrm{I}^{\delta}\Theta^{\varepsilon}\mathrm{N}^{\xi}\mathrm{J}^{\eta}$$ $\alpha\beta\gamma$称为量纲指数

无量纲量：所有量纲指数为零的物理量，如折射率

力学中只有三个基本量L M T

$$\dim r = \mathrm{L} \quad \dim v = \mathrm{LT}^{-1} \quad \dim a = \mathrm{LT}^{-2}$$

$$\dim p = \mathrm{LMT}^{-1} \quad \dim F = \mathrm{LMT}^{-2} \quad \dim W = \mathrm{L}^2\mathrm{MT}^{-2}$$

量纲应用(量纲分析):

检验物理方程的正确性

量纲相同的量才能相加、相减，相等

指数函数、对数函数、三角函数是无量纲的数

为推导某些复杂关系提供线索

例1-15 若已知自由落体的路程s与其所经历的时间t和重力加速度g有关，试求其规律。

解： 设路程s与其所经历的时间t和重力加速度g的规律为：

$$s = kg^{\alpha} t^{\beta}$$

由量纲式：

$$\dim s = \mathrm{L} \quad \dim g = \mathrm{LT}^{-2} \quad \dim t = \mathrm{T}$$

$$\mathrm{L} = \dim s = (\dim g)^{\alpha} (\dim t)^{\beta} = (\mathrm{LT}^{-2})^{\alpha} (\mathrm{T})^{\beta} = \mathrm{L}^{\alpha} \mathrm{T}^{-2\alpha+\beta}$$

$$\alpha = 1 \quad -2\alpha + \beta = 0 \qquad \beta = 2$$

$$s = kgt^{2}$$