第 3 章 刚体力学

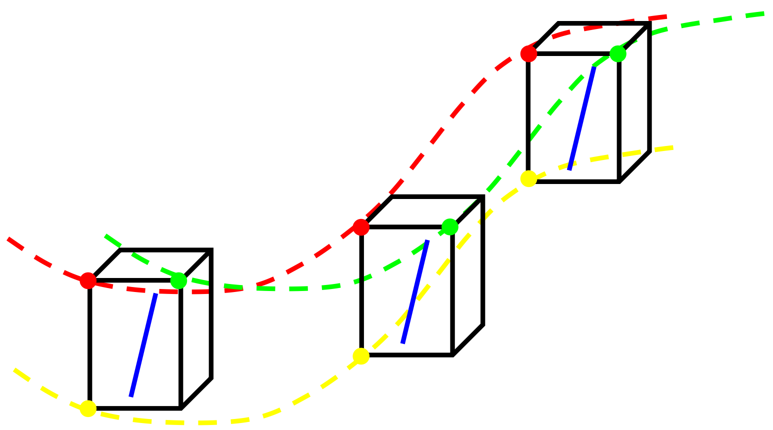
刚体：一种特殊的质点系，该系统中任意两个质点间的距离固定不变，是一种理想模型。

3.1 刚体运动学

一、刚体的平动

刚体运动过程中，如果其中任意两点间的连线始终保持平行，这种运动就称为平动。

平动时，刚体内各质点的运动轨迹彼此平行，且同一时刻的速度与加速度都相等，故可用刚体内的任一点来描述整个刚体的运动，通常用刚体质心的运动来代表整个刚体的平动。



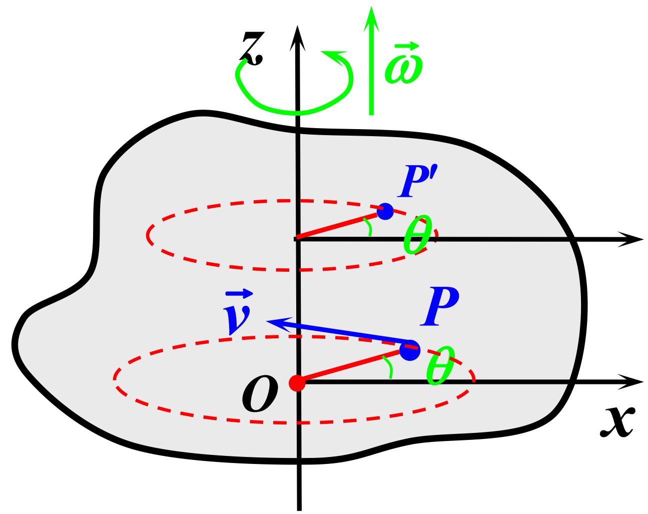
用质心运动定理可确定刚体平动的运动规律

二、刚体的定轴转动

任意两个质点间的距离固定不变

刚体在运动时，如刚体上有两个点是不动的，那么在它们连线上的各点也都不动，连线外其它的点只能绕了解这两点的直线做圆周运动。这条直线称为**转轴**，刚体的这种运动称为**定轴转动**。

刚体做定轴转动时，其上的每一质点都在垂直转轴的平面内做圆周运动，如图，可以θ来描述P点的位置，θ称**角坐标**，角坐标随时间变化，即：



$$\theta=\theta(t)$$

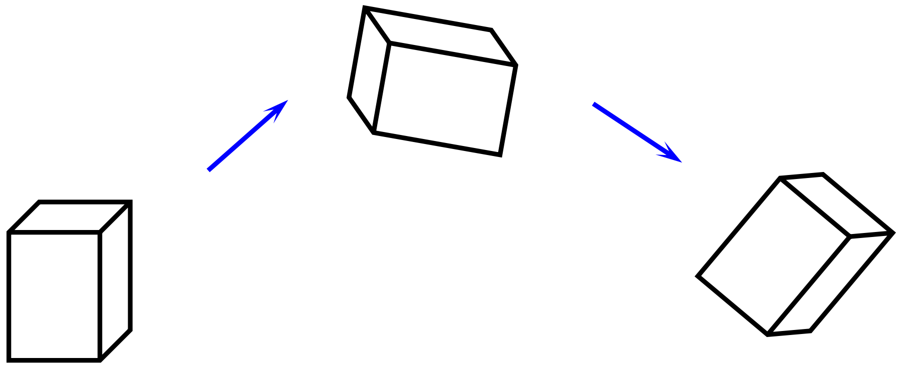
刚体绕定轴转动的运动学方程

对刚体定轴转动，其所有质点有**相同的角速度**ω。

刚体定轴转动时转轴固定不动，规定好正负，各角量可用标量表示。

三、刚体的一般运动

刚体的一般运动比较复杂，但可看成是平动和绕某瞬时轴的转动的合成。瞬时轴会随时间变化。



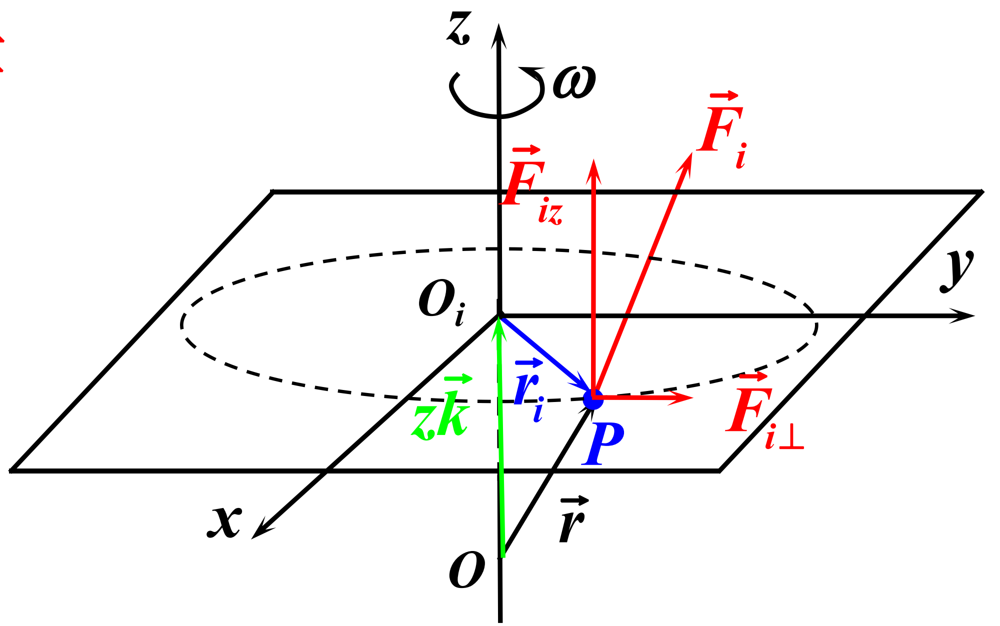
通常情况下，刚体的一般运动可分解成刚体质心的平动和绕通过质心的某瞬时轴的转动。

刚体的一般运动中比较简单是平面平行运动和定点转动。平面平行运动指刚体运动时，刚体内任意质点始终在某一固定平面内运动。

3.2 刚体定轴转动定律

一、刚体的定轴转动定律

z轴为刚体定轴转动的转轴，F_i是作用在刚体上P点的一个外力，O_i为转轴与P点转动平面的交点，O是转轴上的一固定点，O到O_i的有向线段为 $z\vec{k}$



F_{iz}和$F_{i\perp}$是F_i平行和垂直转轴z的分力，则F_i对O的力矩：

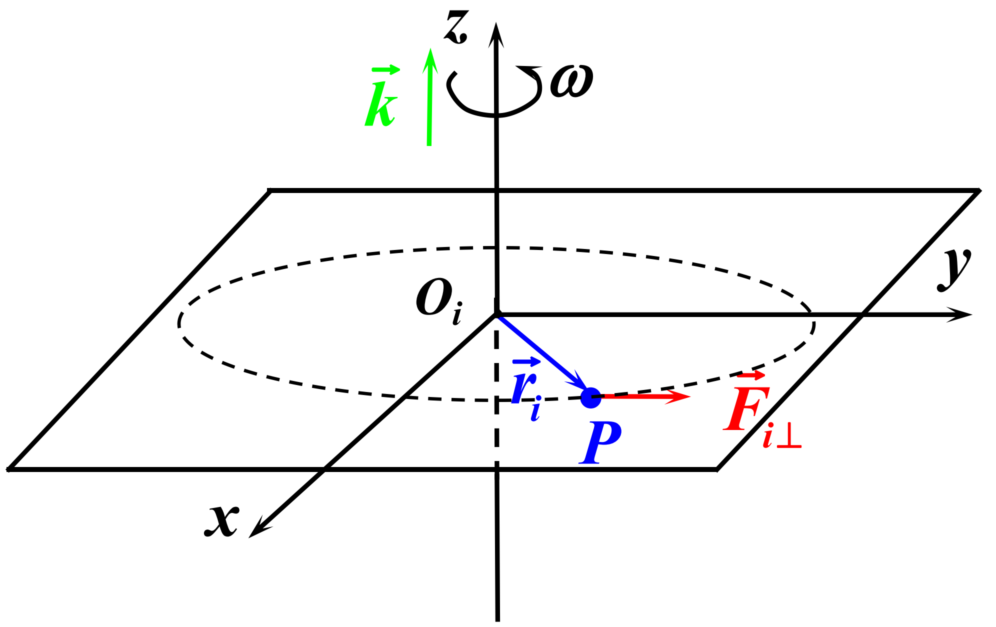
$$\vec{M}_i = \vec{r} \times \vec{F}_i = (z\vec{k} + \vec{r}_i) \times (\vec{F}_{iz} + \vec{F}_{i\perp}) = z\vec{k} \times \vec{F}_{i\perp} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{iz} + \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\perp}$$

刚体绕z轴转动，只有M_i的z分量(F_i对z轴的力矩)对转动有贡献：

$$M_{iz} = \vec{M}_i \cdot \vec{k} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\perp} \cdot \vec{k}$$

M_{iz}与O在转轴上的位置无关

$$\boxed{M_{iz} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\perp} \cdot \vec{k}}$$



M_{iz}的大小

$$\left|M_{iz}\right| = \left|\vec{r}_i \times \vec{F}_{i\perp}\right|$$

刚体转向与k满足右手螺旋，M_{iz}为正

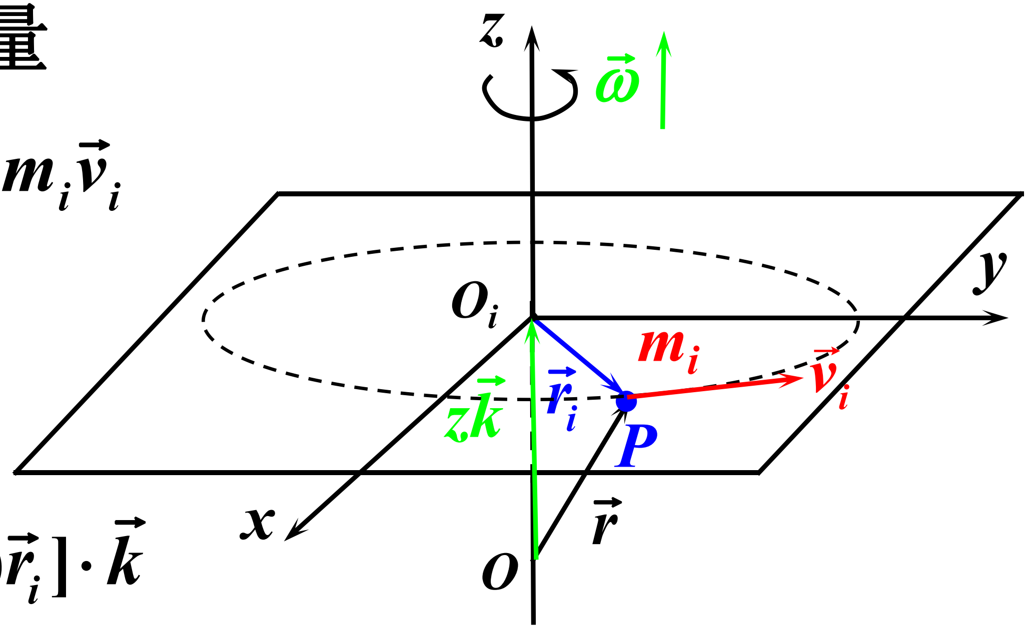
刚体受到多个对z轴的外力矩时，定义刚体受到的对z轴的合外力矩：

$$M_z = (\sum_i \vec{M}_i) \cdot \vec{k} = \sum_i M_{iz}$$

求和是各力矩的代数和

设P点处质点的质量m_i，速度v_i，该质点对O的角动量

$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r} \quad (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$



$$\vec{L}_i=\vec{r}\times m_i\vec{v}_i=(z\vec{k}+\vec{r}_i)\times m_i\vec{v}_i$$

$$L_{iz}=\vec{L}_i\cdot\vec{k}=\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i\cdot\vec{k}$$

$$=\vec{r}_i\times m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot\vec{k}$$

$$=m_i[(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{\omega}-(\vec{\omega}\cdot\vec{r}_i)\vec{r}_i]\cdot\vec{k}$$

$$=m_ir_i^2\vec{\omega}\cdot\vec{k}=m_ir_i^2\omega$$

L_{iz}与O在转轴上的位置无关

整个刚体的角动量的z分量为：

$$L_z=(\sum_i\vec{L}_i)\cdot\vec{k}=\sum_i L_{iz}=(\sum_i m_ir_i^2)\omega=J\omega$$

$$J=\sum_i m_ir_i^2$$ 刚体对z轴的转动惯量

L_z也常称为刚体对z轴的角动量

对刚体应用质点系角动量定理的z分量表达式：

$\vec{F} = m\vec{a}$

$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega) = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\alpha$$

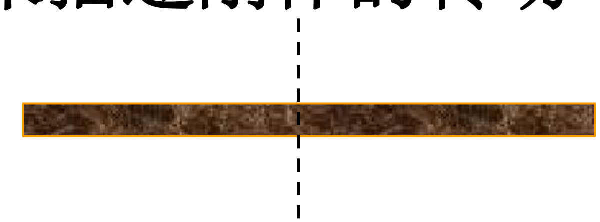
刚体的定轴转动定律：刚体所受的对于某一固定转轴的合外力矩等于刚体对此转轴的转动惯量与刚体在此合外力矩作用下所获得的角加速度的乘积。

转动惯量是量度定轴刚体转动惯性的物理量

刚体的定轴转动定律，实际上就是质点系角动量定理在定轴上的分量式，是质点系角动量定理应用于刚体绕定轴转动时的特殊表现形式。

问题：为什么用角动量而不是动量来描述刚体的转动？

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C \quad L_z = J\omega$$



二、转动惯量的计算

质量分立和质量连续分布的刚体，转动惯量的计算：

$$J=\sum_i m_i r_i^2 \qquad J=\int r^2\mathrm{d}m$$

刚体质量分布有三种描述类型：线密度λ、面密度σ和体密度ρ，则对应的质元：

$$\mathrm{d}m=\lambda\mathrm{d}l \quad \mathrm{d}m=\sigma\mathrm{d}S \quad \mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V$$

刚体的转动惯量与三个因素有关：转轴的位置、刚体的质量及质量对转轴的分布情况。

计算转动惯量的定理

1、叠加定理

几个物体组成的刚体对某一轴的转动惯量等于各个物体对该转轴的转动惯量之和

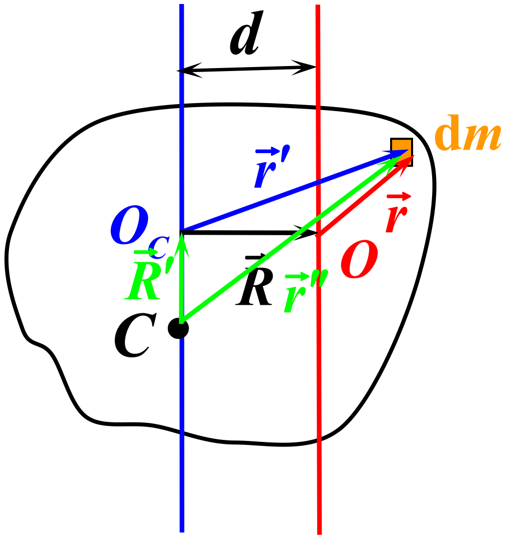
$$J=\sum_i J_i$$

2、平行轴定理

$d = |\vec{R}|$　　$m\vec{r}_C = \int_m \vec{r}\,\mathrm{d}m$

质量为m的刚体，对通过其质心C的轴的转动惯量为J_C，若另一轴与过质心的轴平行且相距d，则刚体对该轴的转动惯量为：

$$J = J_C + md^2 \quad J_C\text{是最小转动惯量}$$



如图，在刚体上任选一质元dm，过质元垂直轴的平面与通过质心的轴交点O_C，与平行的轴交点O，则刚体对平行轴的转动惯量为：

$$J = \int r^2 \mathrm{d}m = \int (\vec{r}' - \vec{R})^2 \mathrm{d}m = \int r'^2 \mathrm{d}m + \int R^2 \mathrm{d}m - 2\int \vec{R}\cdot\vec{r}'\mathrm{d}m$$

$$= J_C + md^2 - 2\vec{R}\cdot\int \vec{r}'\mathrm{d}m = J_C + md^2$$

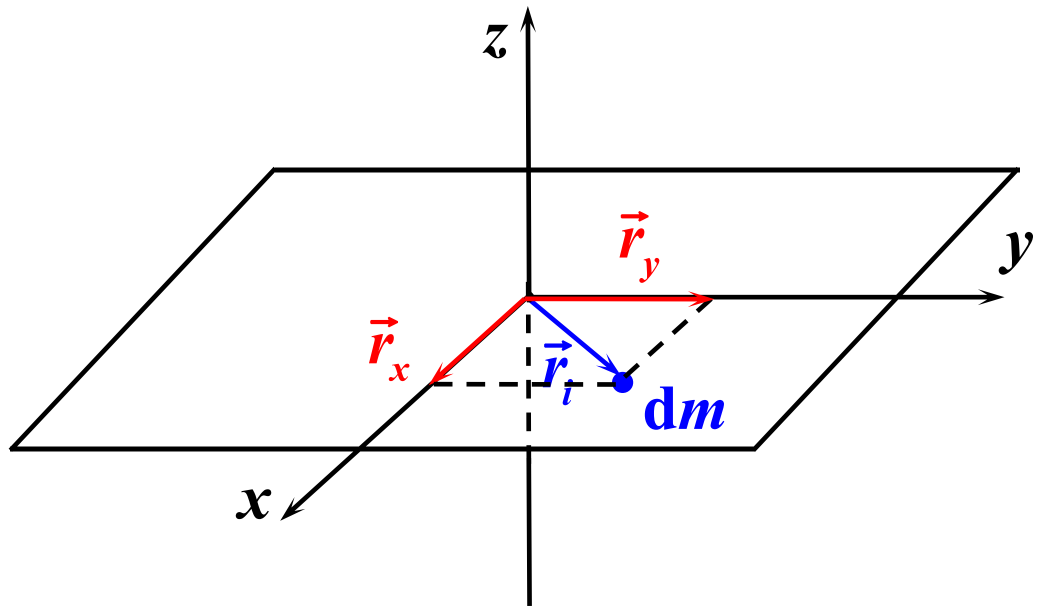
$$\int \vec{r}'\mathrm{d}m = \int (\vec{r}'' - \vec{R}')\mathrm{d}m = \int \vec{r}''\mathrm{d}m - \int \vec{R}'\mathrm{d}m = m\vec{r}_C - \int \vec{R}'\mathrm{d}m$$

3、垂直轴定理(正交轴定理)

薄板状刚体对板内正交的x轴和y轴的转动惯量之和等于该刚体对通过两轴交点垂直于板面的z轴的转动惯量

$$J_z = J_x + J_y$$

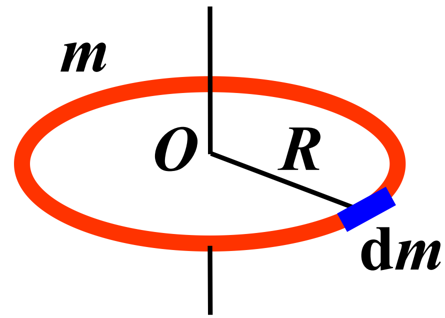
如图，z轴到薄板状刚体上任一质元dm的位矢可分解成沿x轴和y轴的两个分量，则：



$$J_z = \int r_i^2 \mathrm{d}m = \int \vec{r}_i^{\,2} \mathrm{d}m = \int (\vec{r}_x + \vec{r}_y)^2 \mathrm{d}m$$

$$= \int r_x^2 \mathrm{d}m + \int r_y^2 \mathrm{d}m + 2\int \vec{r}_x \cdot \vec{r}_y \mathrm{d}m = J_y + J_x$$

例3-1 如图，计算质量为m, 半径为R的均匀薄圆环对垂直圆环平面并通过圆心的轴的转动惯量。



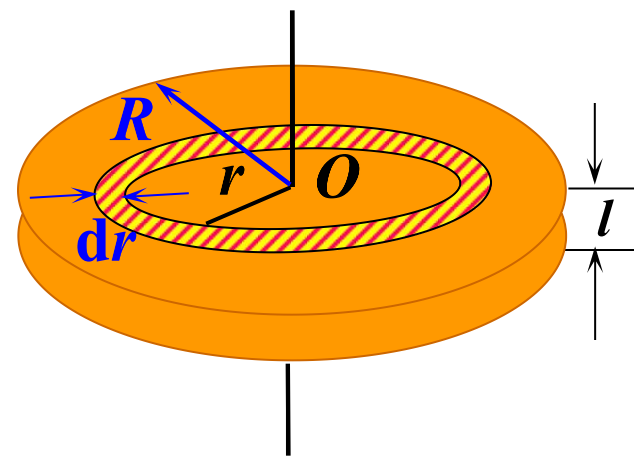
解： 各质元dm到轴的垂直距离相等

$$J=\int R^2\mathrm{d}m=mR^2=J_C$$

上式也是质量m, 半径R的薄壁圆筒对其轴的转动惯量

例3-2 如图，计算质量为m, 半径为R，高l 的均匀圆盘对垂直圆盘平面并通过圆心的轴的转动惯量。

解： 取距圆心r，宽dr的薄壁圆筒：



$$\mathrm{d}J=r^2\mathrm{d}m=r^2\rho\cdot 2\pi r l\mathrm{d}r$$

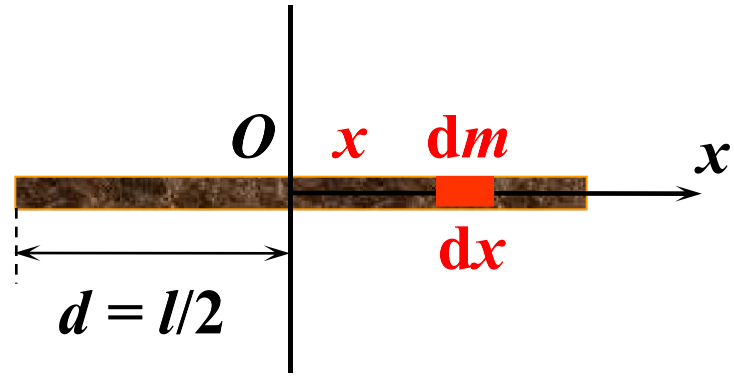
$$=\frac{m}{\pi R^2 l}r^2\cdot 2\pi r l\mathrm{d}r=\frac{2m}{R^2}r^3\mathrm{d}r$$

$$J=\int\mathrm{d}J=\int_0^R\frac{2m}{R^2}r^3\mathrm{d}r=\frac{1}{2}mR^2=J_C$$

上式也是圆柱体对其轴的转动惯量

例3-3 计算质量为m, 长为l 的均匀细杆的转动惯量，(1)转轴通过杆中心并与杆垂直；(2) 转轴通过杆的端点与杆垂直。

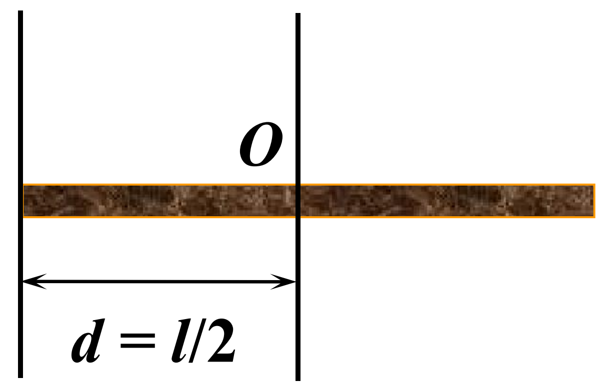
解：(1) 如图，以杆中心为原点O，距原点x处取一宽dx的质元



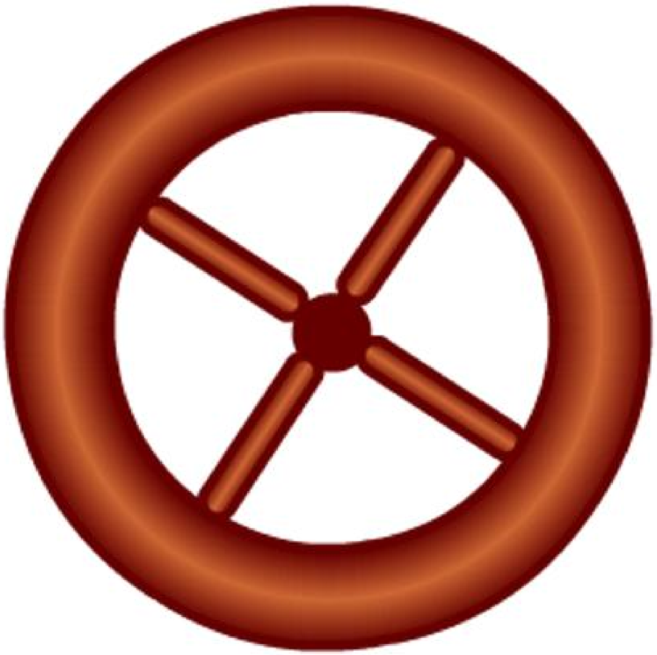
$$\mathrm{d}J = x^2 \mathrm{d}m = x^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}x$$

$$J = \int \mathrm{d}J = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} \mathrm{d}x = \frac{1}{12} ml^2 = J_C$$

(2) 杆的质心在杆的中心，转轴与通过杆中心的轴相距$l/2$，由平行轴定理：



$$J = J_C + md^2 = \frac{1}{12} ml^2 + \frac{1}{4} ml^2 = \frac{1}{3} ml^2$$



飞轮的质量为什么
大都分布于外轮缘？

竿子长些还是短些较安全？

三、刚体定轴转动的角动量守恒定律

$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(J\omega)$$

当刚体所受的对轴的合外力矩为零时，则系统转动过程中对该轴的角动量保持不变

$$M_z = 0\text{时，}\quad L_z = J\omega = \text{恒量}$$

刚体定轴转动的角动量守恒定律

多个物体(包括质点)所受的对轴的合外力矩为零时，则系统转动过程中对该轴的总角动量保持不变

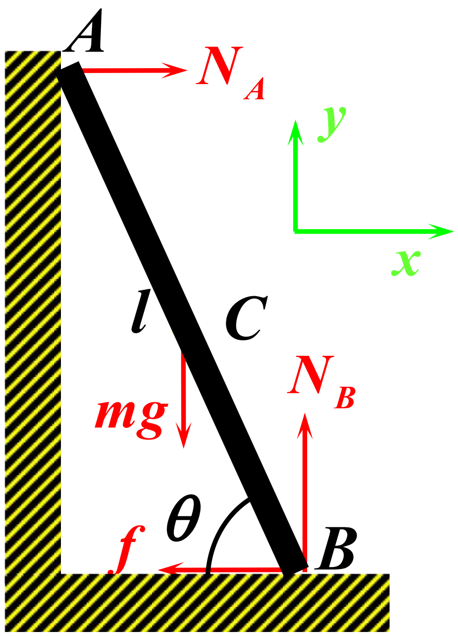
$$M_z = 0\text{时，}\quad L_z = \sum_i J_i\omega_i = \text{恒量}$$

求和时注意是代数和

$M_{iz} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{i\perp} \cdot \vec{k}$

例3-4 如图，墙面光滑，地面不光滑，长为l，质量为m的梯子处于平衡状态，

分析：梯子受到的力及大小



解：梯子受力如图，平衡时合外力为零

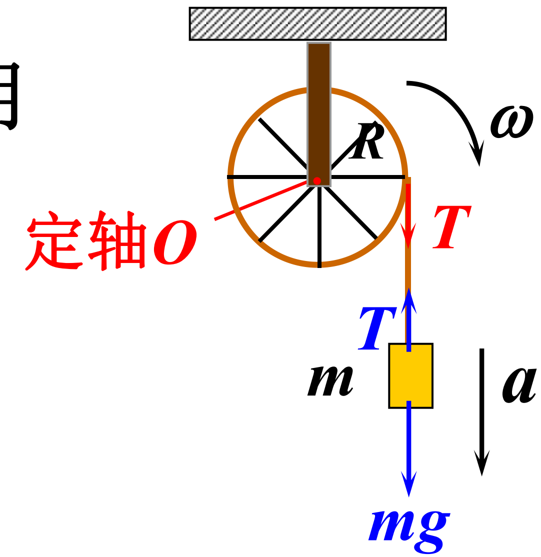
$$N_A = f \quad N_B = mg$$

对过B点垂直杆的定轴(轴垂直纸面沿着z轴方向)，由定轴转动定律：

$$mg\frac{l}{2}\cos\theta - N_A l\sin\theta = J\alpha \ = 0$$

$$N_A = \frac{1}{2}mg\bullet\cot\theta$$

例3-5 在半径为R的定滑轮上绕着一细绳，绳的一端固定在滑轮上，另一端挂着质量为m的物体。当物体下落时，带动滑轮转动。设滑轮的转动惯量为J，**求：**物体下落的加速度。



解：物体在重力mg和绳子的拉力T作用下以加速度a运动，由牛顿定律：

$$mg - T = ma$$

滑轮在绳子拉力T的作用下对定轴O以角加速度α转动，由定轴转动定律：

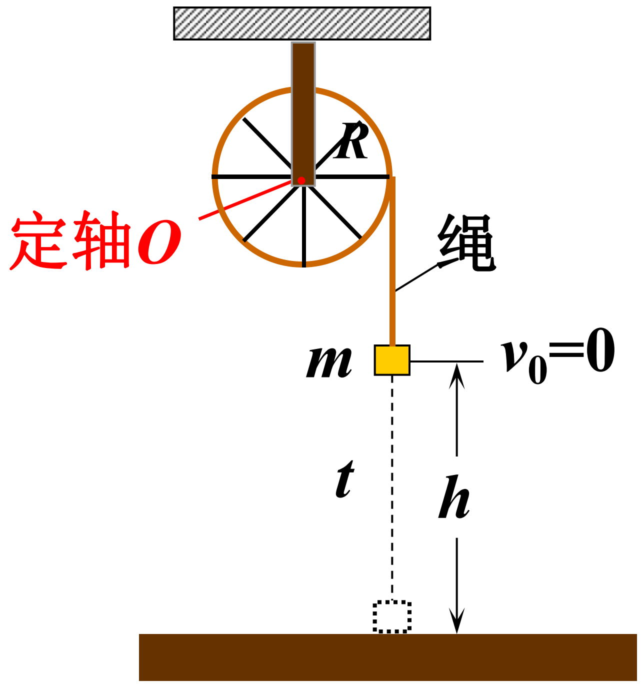
$$TR = M = J\alpha$$

由角加速度和滑轮边缘处的切向加速度的关系：$a = R\alpha$

$$a = \frac{g}{1 + J / mR^2}$$

例3-6 如图，R=0.2m，m=1kg，v_0=0，h=1.5m，绳轮无相对滑动，绳不可伸长，下落时间t=3s，求：轮对O轴的J。

解：由动力学关系：



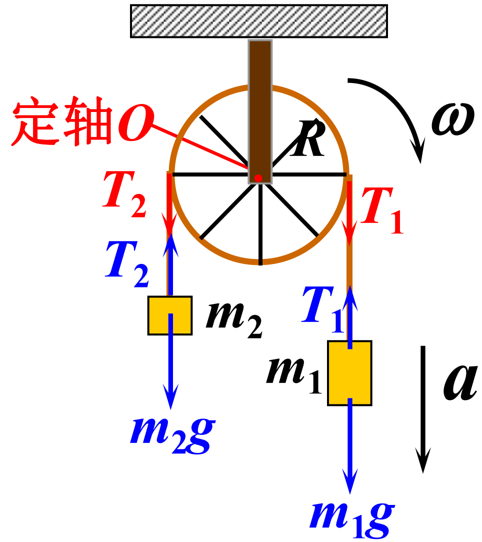
$$h = \frac{1}{2}at^2$$

绳轮无相对滑动，绳的质量又可忽略，可将轮和贴着轮的绳看成一个刚体，由上一题结论：

$$a = \frac{g}{1 + J / mR^2}$$

$$J = (\frac{gt^2}{2h} - 1)mR^2 = 1.14\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

例3-7 如图，滑轮(看作均匀圆盘)质量M，半径R，绳两端分别挂质量m_1和m_2的物体，绳轮无相对滑动，**求：**物体下落的加速度



解：对m_1和m_2分别用牛顿第二定律

$$m_1 g - T_1 = m_1 a$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a$$

将轮和贴着轮的绳看成一个刚体，由定轴转动定律：

$$RT_1 - RT_2 = J\alpha = \frac{1}{2} MRa$$

$$J = \frac{1}{2} MR^2 \qquad a = R\alpha$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2} M} g$$

3.3 刚体转动的动能定理

一、内力做功

刚体内各质点间的相对位置不变，则一对质点间：

$$r_{ij} = \text{常量} \qquad \mathrm{d}r_{ij} = 0$$

$$\vec{r}_{ij}^{\,2} = r_{ij}^{2} \qquad \vec{r}_{ij} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{ij} = r_{ij} \cdot \mathrm{d}r_{ij} = 0 \qquad \vec{r}_{ij} \perp \mathrm{d}\vec{r}_{ij}$$

$$\vec{f}_{ij} // \vec{r}_{ij} \qquad \vec{f}_{ij} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{ij} = 0$$

则刚体内一对内力做功：

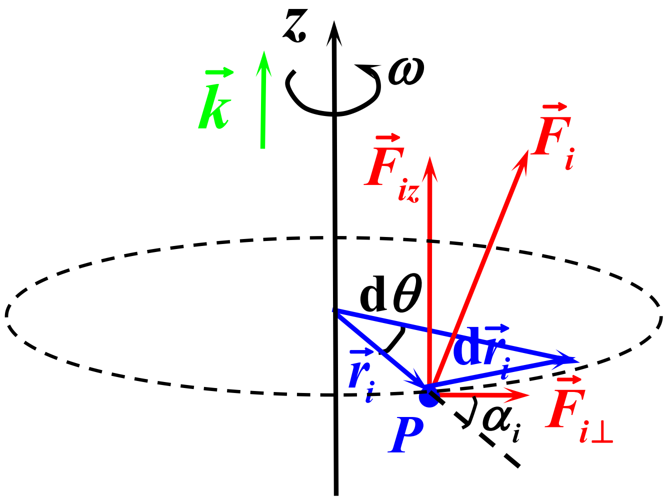
$$A_{ij} = \int \vec{f}_{ij} \cdot \mathrm{d}\vec{r}_{ij} = 0$$

刚体所有的内力做功： $\boxed{A_{\text{内}} = 0}$

二、外力矩的功(外力做功)

$$M_{iz}=\vec{r}_i\times\vec{F}_{i\perp}\cdot\vec{k}=r_iF_{i\perp}\sin\alpha_i$$

F_i是作用在刚体上P点的一个外力，将F_i分解为平行和垂直转轴的分力F_{iz}和$F_{i\perp}$，P点的角位移为$\mathrm{d}\theta$，P点位移为$\mathrm{d}r_i$，则F_i对刚体做功：



$$\mathrm{d}A_i=\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i=(\vec{F}_{iz}+\vec{F}_{i\perp})\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i$$

$$=\vec{F}_{i\perp}\cdot\mathrm{d}\vec{r}_i=F_{i\perp}\cdot\mathrm{d}s_i\cdot\sin\alpha_i=F_{i\perp}\cdot r_i\mathrm{d}\theta\cdot\sin\alpha_i=M_{iz}\mathrm{d}\theta$$

刚体从θ_1转到θ_2：$A_i=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_{iz}\mathrm{d}\theta$

刚体受多个外力矩作用，所有外力矩的总功：

$$A_{外}=\sum_i A_i=\sum_i\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_{iz}\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sum_i M_{iz}\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_z\mathrm{d}\theta$$

三、刚体的转动动能

$\vec{v}=\vec{\omega}\times\vec{r}\qquad \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$

刚体作定轴转动的总动能就是系统内各质点动能的总和

$$E_{\mathrm{k}}=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_i\frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2=\frac{1}{2}(\sum_i m_ir_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

由刚体的转动而具有的动能称为刚体的转动动能

刚体作定点转动的总动能

$$E_{\mathrm{k}}=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2=\frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{v}_i\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{\omega}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{v}_i)=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\sum_i(\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i)=\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L}$$

四、定轴转动的动能定理

对刚体定轴转动应用质点系的动能定理：

$$A_{外}+A_{内}=E_{k2}-E_{k1}=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

由刚体的定轴转动定律同样可推出定轴转动的动能定理

$$A_{外}=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M_z\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}J\alpha\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2}J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2}J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$$

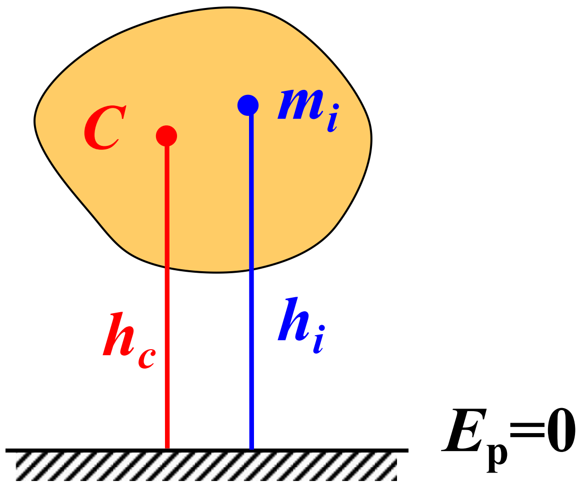
五、刚体的重力势能

$$mh_C=\sum_i m_i h_i$$

由刚体和地球构成的系统，也可引入重力势能。刚体具有的重力势能是组成刚体的各质点的重力势能总和

如图，确定零势能参考高度后，设刚体总质量m，质心高度h_C，则刚体的重力势能：

$$E_p=\sum_i m_i g h_i = g\sum_i m_i h_i = gmh_C$$



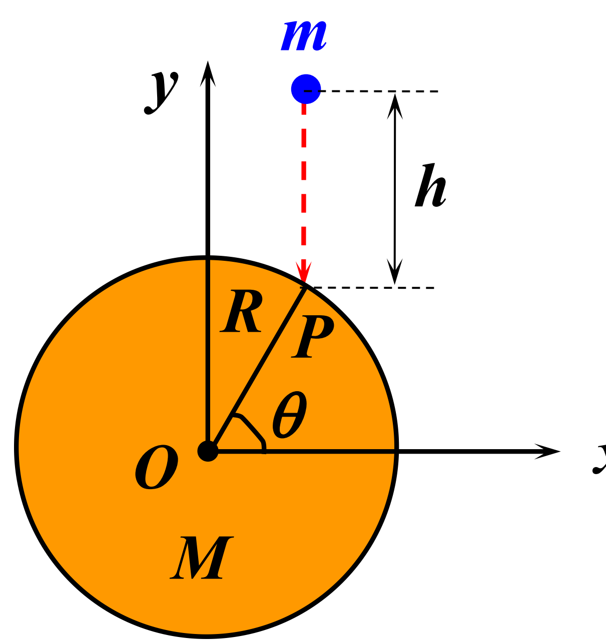
重力场中一个不太大的刚体的重力势能可以用质量全部集中在质心时质点的重力势能表示。

对于包含有刚体的系统，如果外力和非保守内力不做功，则系统的机械能守恒。

刚体平动和定轴转动对比

刚体平动	刚体定轴转动
$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\quad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$	$\omega=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\quad \alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$
力 $\vec{F}$ 质量 m 牛顿第二定律 $\vec{F}=m\vec{a}$	力距 M_z 转动惯量 J 转动定律 $M_z=J\alpha$
动量 $m\vec{v}$ 动量定理 $\int\vec{F}\mathrm{d}t=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$ 动量守恒定律 $\sum m\vec{v}=$常量	角动量 $J\omega$ 角动量定理 $\int M_z\mathrm{d}t=J\omega_2-J\omega_1$ 角动量守恒定律 $\sum J\omega=$常量
平动动能 $\frac{1}{2}mv^2$ 力做功 $A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ 动能定理 $A=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$	转动动能 $\frac{1}{2}J\omega^2$ 力矩做功 $A=\int M_z\mathrm{d}\theta$ 动能定理 $A=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2$

例3-8 如图，质量$M=2m$，半径R的均匀圆盘，可绕通过圆心O垂直圆盘面的光滑轴转动，圆盘边缘的一点P与水平x轴方向的夹角为θ，一质量m的粘土块，从P点的正上方h处自由下落，初始碰撞前圆盘静止，求：碰撞后瞬间圆盘的角速度ω_0以及P点转到x轴时圆盘的角速度ω和角加速度α。



解：m与M碰撞时间极短，对m和M构成的系统冲力远大于重力，忽略重力矩，系统对O轴角动量守恒，设m到P点时速度为v，则：

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad v = \sqrt{2gh}$$

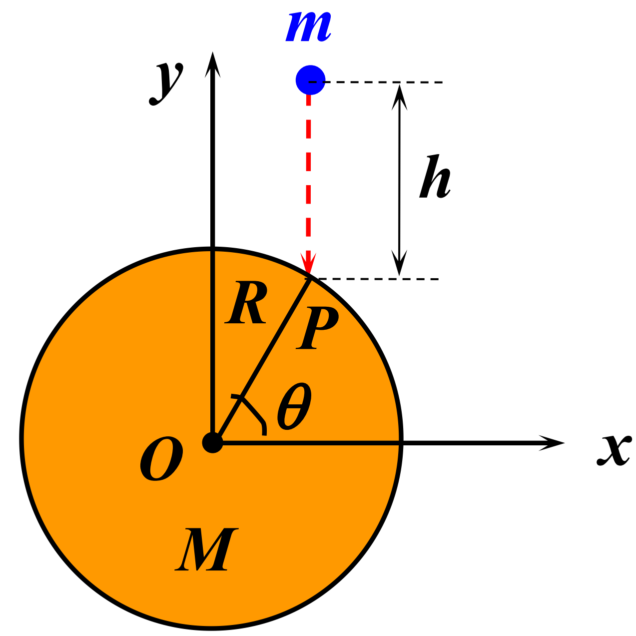
$$mvR\cos\theta = J\omega_0$$

$$J = \frac{1}{2}MR^2 + mR^2 = 2mR^2 \qquad \omega_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{2R}\cos\theta$$

对m、M和地球构成的系统，P点从θ到水平的过程中，系统机械能守恒，设P点在x轴上时，重力势能为零，则：

$$mgR\sin\theta+\frac{1}{2}J\omega_0^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{gh}{2R^2}\cos^2\theta+\frac{g}{R}\sin\theta}$$



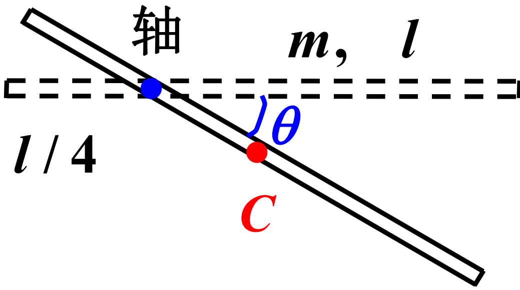
P点到x轴时，对圆盘(m和M)来说，m的重力矩是合外力矩，由定轴转动定律：

$$\alpha=\frac{M_z}{J}=\frac{mgR}{2mR^2}=\frac{g}{2R}$$

也可以：$\alpha(\theta)=\dfrac{\mathrm{d}\omega(\theta)}{\mathrm{d}t}$ 然后取$\theta=0$得出α

例3-9 如图，质量m，长l的均匀直杆，初始水平静止，光滑的轴在杆四分之一处，求：杆下摆θ角时，杆的角速度ω和轴对杆的作用力N。

解：杆和地球构成的系统中，选初始状态(杆水平)为重力势能零点，系统机械能守恒：



$$E_{p1}=0 \quad E_{k1}=0 \quad E_{p2}=-mg\frac{l}{4}\sin\theta$$

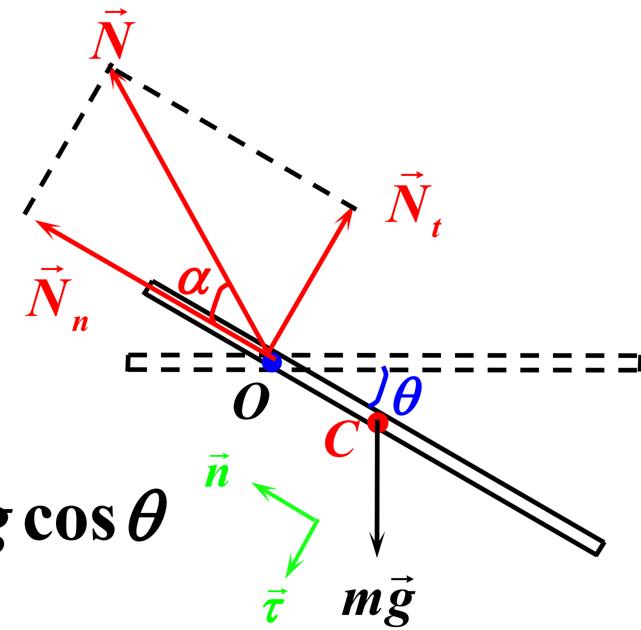
$$E_{k2}=\frac{1}{2}J\omega^2=\frac{7}{96}ml^2\omega^2$$

由平行轴定理得：$J=J_C+md^2=\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{1}{4}l)^2=\frac{7}{48}ml^2$

$$E_{k1}+E_{p1}=E_{k2}+E_{p2}=\frac{7}{96}ml^2\omega^2-mg\frac{l}{4}\sin\theta=0$$

$$\omega=\sqrt{\frac{24g\sin\theta}{7l}}$$

杆受重力mg和轴对杆的支持力N，按图示取自然坐标系，将N分解成N_t和N_n。在θ角时，杆的质心做圆周运动的法向加速度和切向加速度：



$$a_n = \frac{l}{4}\omega^2 = \frac{l}{4}\left(\frac{24}{7l} g\sin\theta\right) = \frac{6}{7} g\sin\theta$$

$$a_t = \frac{l}{4}\alpha = \frac{l}{4}\frac{M}{J} = \frac{l}{4}\left(\frac{l}{4} mg\cos\theta\right)/J$$

$$= \frac{l}{4}\left(\frac{l}{4} mg\cos\theta\right)/\left(\frac{7}{96} ml^2\omega^2\right) = \frac{3}{7} g\cos\theta$$

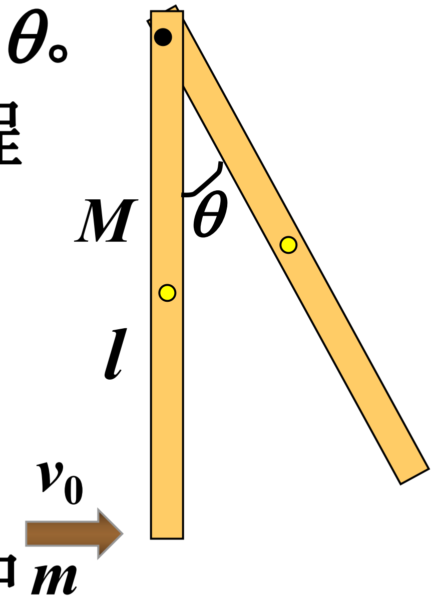
由质心运动定理：

$$N_n - mg\sin\theta = ma_n \quad mg\cos\theta - N_t = ma_t$$

$$N_n = \frac{13}{7} mg\sin\theta \quad N_t = \frac{4}{7} mg\cos\theta$$

$$N = \frac{mg}{7}\sqrt{153\sin^2\theta + 16} \quad \alpha = \arctan\left(\frac{4}{13}\cot\theta\right)$$

例3-10 一根长为l、质量为M的均匀细棒，静止在竖直位置上，上端有一光滑固定转轴。质量为m的子弹，以水平初速v_0射入细棒下端，**求**：子弹和棒在碰撞结束时的共同角速度ω及两者一起摆动的最大摆角θ。



解：在子弹和木棒构成的系统中，碰撞过程中，外力的力矩为零，系统的角动量守恒：

$$mv_0 l = J\omega = (\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)\omega \qquad \omega = \frac{3mv_0}{(3m+M)l}$$

碰撞后子弹、棒和地球的系统在上摆过程中机械能守恒，以转轴水平处为重力势能零点

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2)\omega^2 - mgl - \frac{1}{2}Mgl = -mgl\cos\theta - \frac{1}{2}Mgl\cos\theta$$

得最大摆角：$\theta = \arccos[1 - \frac{(M+3m)l\omega^2}{3(M+2m)g}]$

3.4 刚体的一般运动

刚体的一般运动可以分解为刚体质心的平动和刚体绕质心转动的叠加。可以选择以刚体的质心为原点的质心参考系，再利用参考系间的相对关系分析刚体运动

以质点系质心C为原点但坐标轴不旋转的参考系称为质心参考系(质心系)，质心可能做加速运动，质心系一般不是惯性系，是以质心加速度a_C运动的加速平动参考系

考虑参考系间的相对关系时，首先要分析质心的运动，其基础是质心运动定理

$$\vec{F} = m\vec{a}_C$$

其次分析刚体在质心系的运动，基础是刚体的定轴转动定律(在质心系仍然成立)

$$M = J\alpha$$

定轴转动定律中的轴是通过质心的瞬时轴

一、质心系的特点

1、质心系的动量

质点系第i个质点在其质心系的位矢r_i'，则：

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = m\vec{r}_C' = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_i m_i \vec{r}_i' = \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$

质心系中系统的总动量为零，质心系也称零动量参考系

$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$$

2、质心系的角动量定理

质心系一般是非惯性系，需要在角动量定理中考虑惯性力的力矩，设质心系的加速度是a_C，质心系中考虑对质心的力矩和角动量，由任一质点m_i的惯性力：

$$\vec{F}_{惯i} = -m_i \vec{a}_C \qquad \vec{M}_{惯i} = \vec{r}_i' \times \vec{F}_{惯i} = -\vec{r}_i' \times (m_i \vec{a}_C) = -m_i \vec{r}_i' \times \vec{a}_C$$

$$\vec{M}_{惯} = \sum_i \vec{M}_{惯i} = -\sum_i (m_i \vec{r}_i' \times \vec{a}_C) = -(\sum_i m_i \vec{r}_i') \times \vec{a}_C = 0$$

质心系中惯性力的合力矩为零，质点系的角动量定理(固定点为质心)在质心系中依然成立

$$\sum_i (\vec{r}_i' \times \vec{F}_i) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{L}' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i \vec{L}_i' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_i (\vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i')$$

如果构成质心系的质点系是刚体，则刚体的定轴转动定律对通过质心的转轴也成立。

$$\sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$

3、质心系的动能定理

在质心系的动能定理中要考虑惯性力做功，在质心系中惯性力对任一质点m_i的功率：

$$P_{惯i} = \vec{F}_{惯i} \cdot \vec{v}_i' = -m_i \vec{a}_C \cdot \vec{v}_i' = -m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{a}_C$$

$$P_{惯} = \sum_i P_{惯i} = -\sum_i (m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{a}_C) = -(\sum_i m_i \vec{v}_i') \cdot \vec{a}_C = 0$$

质心系中惯性力的合功率为零，质点系的动能定理在质心系中依然成立

$$A_{外}' + A_{内}' = E_{\mathrm{k2}}' - E_{\mathrm{k1}}' = \Delta E_{\mathrm{k}}'$$

$$E_{\mathrm{k}}' = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

质心系中质点系的动能：内动能

$$\sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$

二、惯性系与质心系间的变换关系

1、动量的变换关系

惯性参考系(S系)，其原点O，某质点系质心C在S系中位矢r_C，其第i个质点在S系和质心系(S'系)中有关系：

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i'$$

在惯性参考系(S系)中，质点系的总动量为各质点的动量之和：

$$\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_C + \sum_i m_i \vec{v}_i' = m\vec{v}_C$$

质点系相对于惯性系的总动量等于该质心系的质心动量

2、角动量的变换关系：角动量柯尼希定理

$$\vec{r}_i = \vec{r}_C + \vec{r}_i'$$
$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i'$$
$$\sum_i m_i \vec{r}_i' = 0$$
$$\sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$

在惯性参考系(S系)中，质点系的总角动量为各质点的角动量之和：

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{r}_C + \vec{r}_i') \times m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_i \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_C + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_C + \sum_i \vec{r}_C \times m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

$$= \vec{r}_C \times m \vec{v}_C + (\sum_i m_i \vec{r}_i') \times \vec{v}_C + \vec{r}_C \times \sum_i m_i \vec{v}_i' + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

$$= \vec{r}_C \times m \vec{v}_C + \sum_i \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

质点系相对于惯性系的总角动量等于质心的角动量与质点系对质心的角动量之和：角动量柯尼希定理

3、动能的变换关系：柯尼希定理

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}'_i$$

$$\sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

在惯性参考系(S系)中，质点系的总动能为各质点的动能之和：

$$E_\mathrm{k} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_C + \vec{v}'_i)^2$$

$$= \sum_i \frac{1}{2} m_i v_C^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_C$$

$$E_{\mathrm{k}C} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_C^2 = \frac{1}{2} m v_C^2$$ 质心动能(质点系的轨道动能)

$$E'_\mathrm{k} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$ 内动能(教材上用$E_{\mathrm{k},in}$表示)

$$\boxed{E_\mathrm{k} = E_{\mathrm{k}C} + E'_\mathrm{k}}$$

质点系相对于惯性系的总动能等于该质点系的质心动能和内动能之和，这就是柯尼希定理

$$E_{\mathrm{k}} = E_{\mathrm{k}C} + E'_{\mathrm{k}}$$

在完全非弹性碰撞中，损失的能量就是系统的内动能

对刚体：

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$$

ω和J_C是刚体对过质心轴的角速度和转动惯量

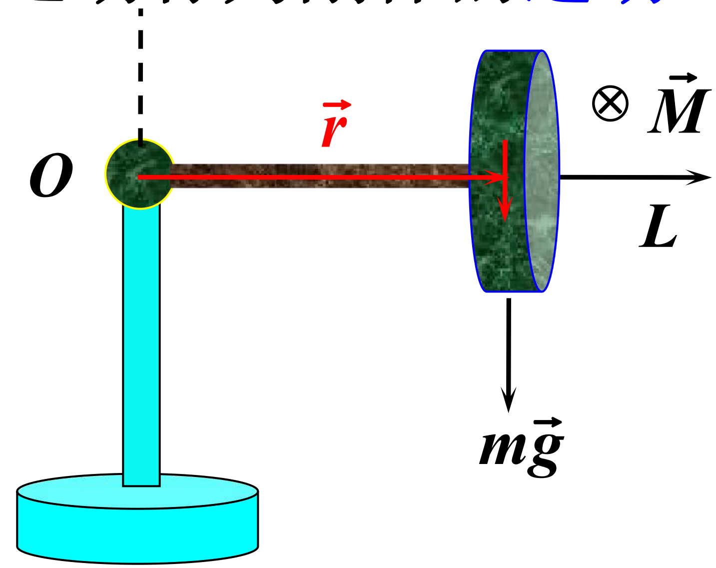
考虑重力势能，刚体的机械能：

$$E = m g h_C + \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2$$

三、进动

绕自身的对称轴高速自旋的刚体，当外力矩不为零时，它的转轴可以在空间转动，这种运动称为刚体的进动。

如图示的刚体，可绕其水平对称轴转动，对称轴上有一固定不动的支点O，刚体质心相对O的位矢r，对O点，重力矩：



$$\vec{M}=\vec{r}\times m\vec{g}$$ 方向垂直向里⊗

当刚体绕对称轴高速自转时，自转角速度远大于其他角速度，忽略其他角速度(速度)，则刚体对O的角动量垂直对称轴的分量抵消，只有平行对称轴的角动量L，由质点系角动量定理：

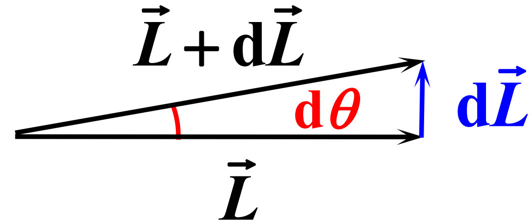
$$\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\mathrm{d}t$$

dL与M方向一致，垂直向里，对称轴在水平面内转动(进动)。

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\mathrm{d}t}$$

设$\mathrm{d}t$时间进动的角度为$\mathrm{d}\theta$，定义进动角速度：

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$



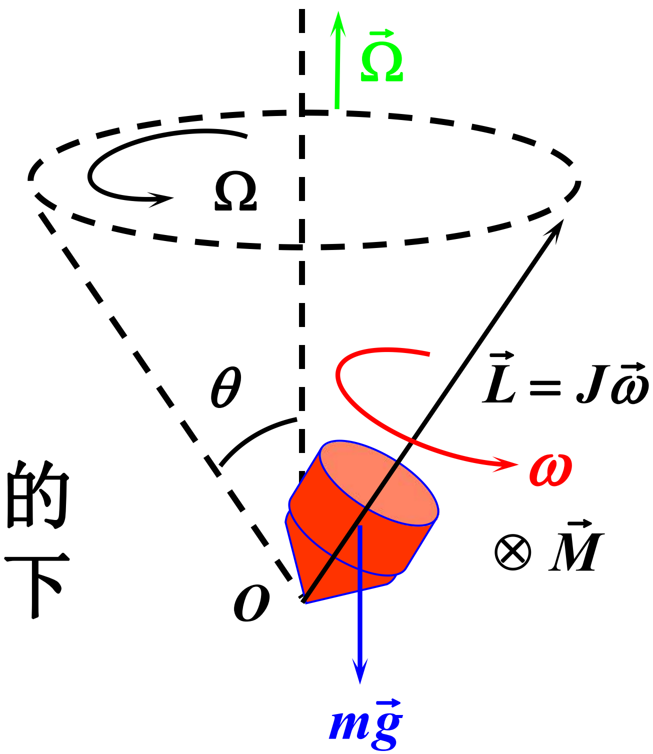
俯视图

$$\mathrm{d}L = L\mathrm{d}\theta = L\Omega\mathrm{d}t \; = M\mathrm{d}t$$

$$\Omega = \frac{M}{L} = \frac{M}{J\omega} \qquad \vec{M} = \vec{\Omega}\times J\vec{\omega}$$

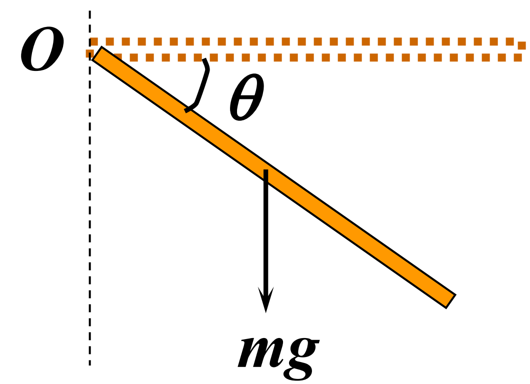
对陀螺： $$\Omega = \frac{M}{J\omega\sin\theta}$$

如果刚体自转的角速度不大，刚体的对称轴在进动的同时，还会上上下下周期性地摆动，这种摆动叫章动。



例3-11 质量m，长l的均匀细杆，可绕固定端O转动。令杆从水平静止状态下落，**求**：转角为θ时的ω和α

解法1：由定轴转动定律，选过O垂直纸面的轴为定轴z，则只有重力矩：



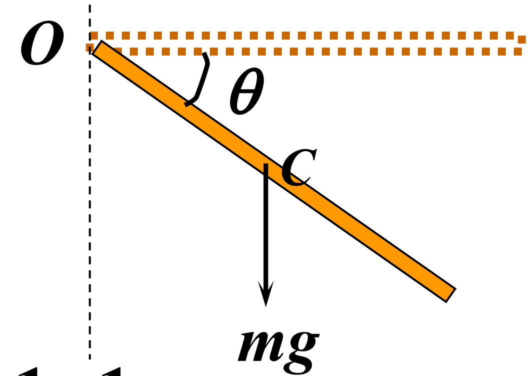
$$M_z = mg\frac{l}{2}\cos\theta = J\alpha = \frac{1}{3}ml^2\alpha$$

$$\alpha = \frac{3g\cos\theta}{2l} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\omega$$

$$3g\cos\theta\mathrm{d}\theta = 2l\omega\mathrm{d}\omega \qquad \int_0^\theta 3g\cos\theta\mathrm{d}\theta = \int_0^\omega 2l\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

解法2：用机械能守恒定律，以棒处于水平位置为重力势能零点，则杆与地球的系统有：



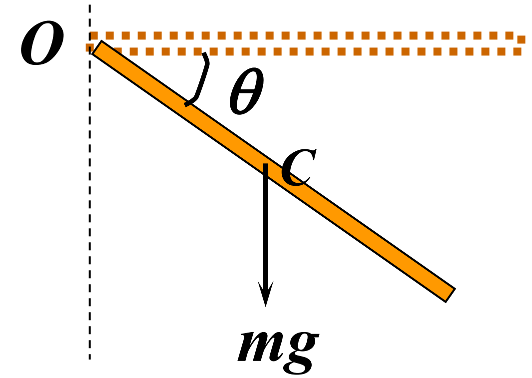
$$0 = -mg\frac{l}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}J\omega^2 = -mg\frac{l}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ml^2\omega^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{3g\sin\theta}{l}\right)^{-1/2}\frac{3g\cos\theta}{l}\frac{d\theta}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3g\sin\theta}{l}\right)^{-1/2}\frac{3g\cos\theta}{l}\omega = \frac{3g\cos\theta}{2l}$$

解法3：用柯尼希定理，以棒处于水平位置为重力势能零点，则杆与地球的系统有：



$$0=-mg\frac{l}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}J_C\omega^2$$

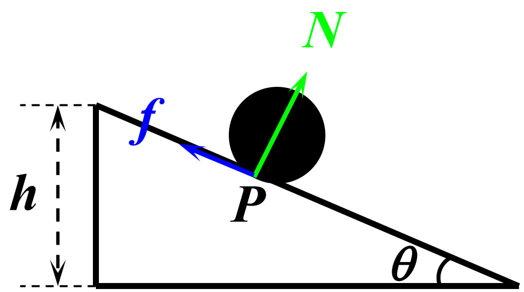
$$v_C=\frac{1}{2}l\omega \quad J_C=\frac{1}{12}ml^2$$

$$\omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

$$\alpha=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{3g\cos\theta}{2l}$$

例3-12 质量m，半径R的圆柱体从静止开始沿斜面顶端向下无滑动地滚动，**求：**它到达斜面底端时质心的速率

解法1： 圆柱、斜面(地球)系统，支持力和静摩擦力(无滑动地滚动)不做功，选斜面底端为重力势能零点，系统机械能守恒(柯尼希定理)



$$mgh = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2$$

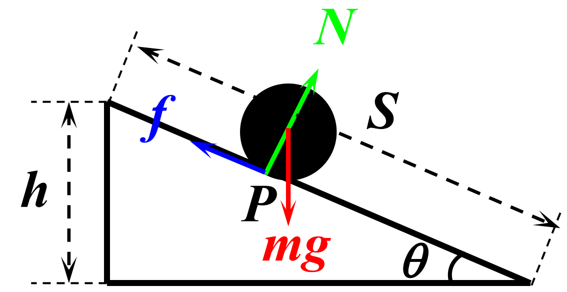
v_C是圆柱体在斜面底端时质心的速率，v_C方向平行斜面，ω是圆柱体在斜面底端时绕质心的角速率

无滑动滚动，圆柱与斜面接触点P相对斜面(地)速度$v_{P地}$为零，由地面参考系与圆柱体质心参考系速度关系：

$$\vec{v}_{P地} = \vec{v}_{P柱} + \vec{v}_{柱地} \qquad 0 = -R\omega + v_C$$

$$v_C = R\omega \qquad J_C = \frac{1}{2}mR^2 \qquad v_C = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$

解法2：用定轴转动定律，设圆柱质心加速度为a_C，a_C方向平行斜面，取过圆柱与斜面接触点P平行圆柱轴线的轴为定轴，f和N的作用线通过P点，只有mg的力矩：



$$mgR\sin\theta = J\alpha = J\frac{a_C}{R}$$

由平行轴定理：

$$J = J_C + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

解得：$a_C = \dfrac{2}{3}g\sin\theta$

由匀加速直线运动公式：

$$v_C = \sqrt{2a_C S} = \sqrt{2(\frac{2}{3}g\sin\theta)S} = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$$