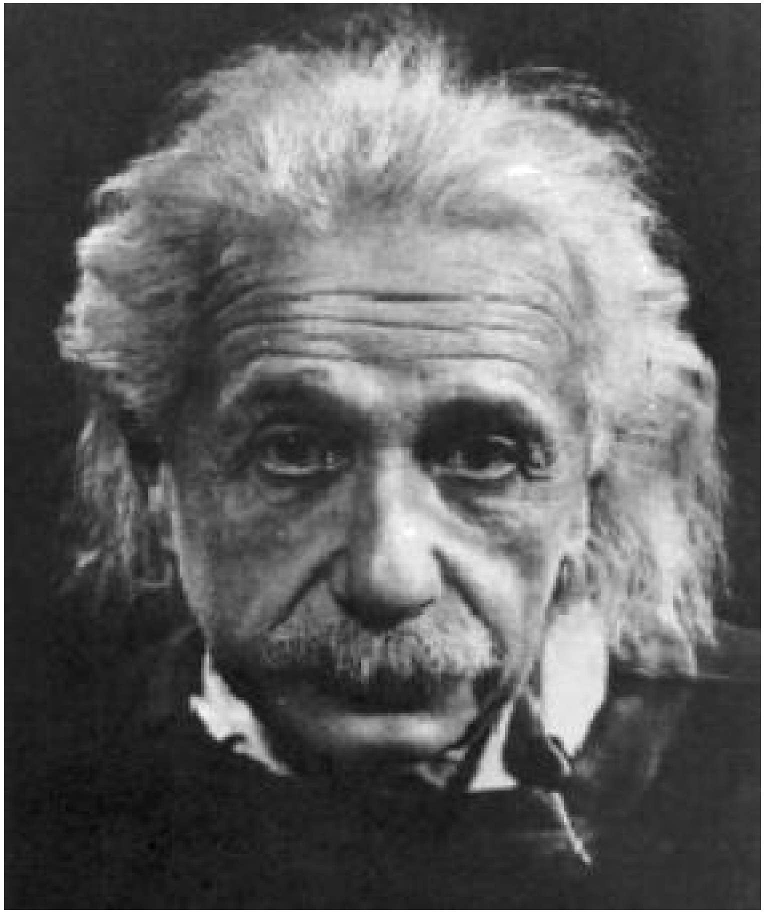
第六章 相对论基础



6.1 经典时空观

一、经典时空观(牛顿的绝对时空观)

牛顿在建立经典力学过程中提出了绝对时间和绝对空间的概念

绝对时空观：时间和空间是互相独立的；时间间隔和空间间隔的量度与参考系的选择无关。

绝对空间：长度的量度与参考系无关 $\Delta x = \Delta x'$

绝对时间：时间的量度与参考系无关 $\Delta t = \Delta t'$

二、惯性参考系

经典力学以绝对时空为基石的，以牛顿定律为基础，而牛顿定律成立的参考系必须是惯性系。

相对于一个惯性系作匀速直线运动的参考系也是惯性系，即存在无穷多个惯性系。

在众多的惯性系中，是否存在一个特殊的惯性系：绝对静止的惯性系，其他惯性系都是相对于这个绝对静止的惯性系定义的?

牛顿认为存在这么个绝对静止的惯性系，但“人类无能为力，只有上帝知道！”。

三、伽利略的相对性原理

伽利略相对性原理：在一切惯性系中，**力学规律**是相同的。

在一个惯性系内部所做的任何力学实验，都不能确定这一惯性系是处于静止状态还是在做匀速直线运动。

四、伽利略变换

在经典时空观下，两个惯性系中对同一事件的时空坐标关系式、速度变换式称伽利略变换

事件：任意一个具有确定的发生时间和确定的发生地点的物理现象。

时空坐标：一个事件发生的时间和地点

时空变换：同一事件在两个惯性系中的时空坐标之间的变换关系。

不同形式的时空变换，涉及到在不同参考系中对时间和空间的测量，代表不同的时空性质，反映不同的时空观。

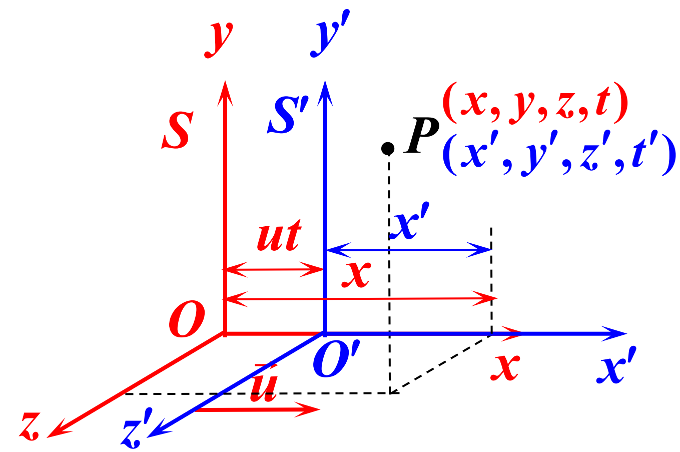
伽利略变换

$$\vec{i}=\vec{i}' \quad \vec{j}=\vec{j}' \quad \vec{k}=\vec{k}'$$

当两个参考系S和S'以速度u相对做匀速直线运动时，如图，考虑简单情形：两坐标系的x轴和x'轴重合，y轴平行y'轴，z轴平行z'轴，速度u平行x轴，初始时刻，O与O'重合：

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P} \qquad x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=ut\vec{i}+x'\vec{i}'+y'\vec{j}'+z'\vec{k}'$$

$$\begin{cases} x=x'+ut \\ y=y' \\ z=z' \\ t=t' \end{cases} \quad or \quad \begin{cases} x'=x-ut \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=t \end{cases}$$



上式称伽利略坐标变换式。它完全体现了绝对时空观，是绝对时空观的数学表述。

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}x' + u\mathrm{d}t \quad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y' \quad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z' \quad \mathrm{d}t = \mathrm{d}t'$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x = x' + ut \\ y = y' \quad z = z' \quad t = t' \end{array}}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + u\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} + u = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + u = v'_{x'} + u$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(v'_{x'} + u)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v'_{x'}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v'_{x'}}{\mathrm{d}t'} = a'_{x'}$$

$$v_y = v'_{y'} \quad v_z = v'_{z'} \quad a_y = a'_{y'} \quad a_z = a'_{z'} \qquad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \quad \vec{a} = \vec{a}'$$

绝对时空观中力和惯性质量与参考系无关

$$\vec{F} = F' \quad m = m' \qquad \vec{F} = m\vec{a} \quad \vec{F}' = m'\vec{a}'$$

牛顿定律在伽利略变换下形式不变(协变、对称)

以牛顿定律为基础的牛顿力学规律(包括动量守恒定律、机械能守恒定律等)在伽利略变换下也保持形式不变

6.2 狭义相对论和洛伦兹变换

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$$
$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$$

一、经典时空观的困惑

$$\vec{f}' = q'\vec{E}' + q'\vec{v}' \times \vec{B}'$$

1、经典时空观在电磁学中的困惑

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

绝对时空观认为：B、E、q、f与参考系无关

$$\vec{f}' = \vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = q'\vec{E}' + q'(\vec{v}' + \vec{u}) \times \vec{B}'$$

伽利略变换下洛伦兹力公式的形式没有保持协变

$$x' = x - ut \quad y' = y \quad z' = z \quad t' = t$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\nabla' \cdot \vec{D}' = \rho' \quad \nabla' \times \vec{E}' = -\frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'}$$

$$\nabla' \cdot \vec{B}' = 0 \quad \nabla' \times \vec{H}' = \vec{J}_0' + \frac{\partial \vec{D}'}{\partial t'}$$

绝对时空观认为B、H、E、D、ρ、J与参考系无关

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{\partial}{\partial x'} \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y'} \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z'}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} = \frac{\partial}{\partial x'}\vec{i}' + \frac{\partial}{\partial y'}\vec{j}' + \frac{\partial}{\partial z'}\vec{k}' = \nabla'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} = -u\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'}$$

伽利略变换下麦克斯韦方程组的形式没有保持协变

$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}$

在电磁场理论给出真空中电磁波的传播速度：

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

其中ε_0和μ_0都是与参考系无关的常数

真空中光的速率与参考系无关(即与光源的运动和观察者的运动无关)。

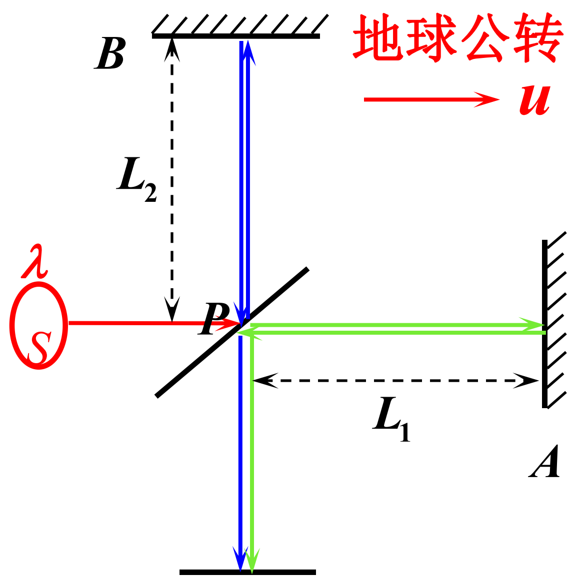
光速与参考系无关这一点是与人们的预计相反的，日常经验总是使人们确信伽利略变换是正确的。

我们不应该期望在低速情况下适用的规律在很高速的情况下也适用。

2、以太引出的困惑

迈克耳孙-莫雷实验

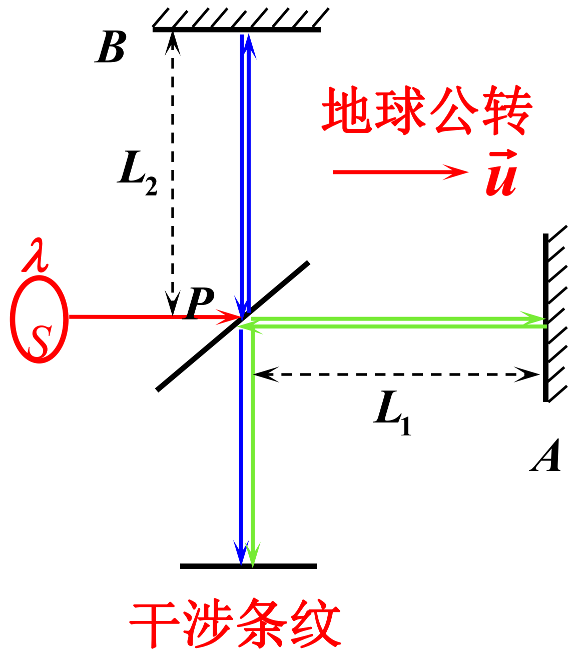
19世纪下半叶，物理学家提出，真空中存在着一种无所不在的绝对静止的东西：以太，光速*c*就是相对以太而言的，找到了以太，也就找到了绝对参考系

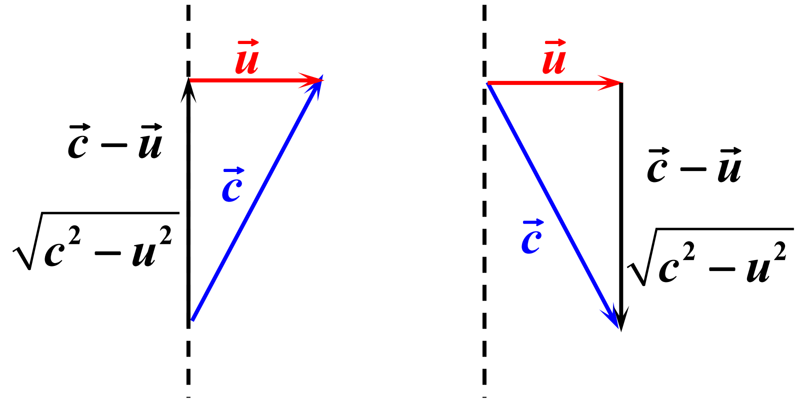


迈克耳孙-莫雷实验：将迈克耳孙干涉仪转过90°，观测转过后的干涉条纹相对转动前的移动情况。

干涉仪转动前

$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$





沿着地球公转方向： $t_{PAP} = \dfrac{L_1}{c-u} + \dfrac{L_1}{c+u} = \dfrac{2L_1}{c(1-u^2/c^2)}$

垂直地球公转方向： $t_{PBP} = \dfrac{2L_2}{\sqrt{c^2-u^2}} = \dfrac{2L_2}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}$

$$\Delta t = t_{PBP} - t_{PAP} = \frac{2}{c}\left(\frac{L_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{L_1}{1-u^2/c^2}\right)$$

当两束光的时间差为一个光源振动周期T，两束光相遇处的相位差为2π；

当相遇处两束光的时间差满足

$$\Delta t = \pm mT \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$ 干涉加强，是明条纹

$$\Delta t = \pm(2m+1)\frac{T}{2} \quad m = 0, 1, 2, \cdots$$ 干涉减弱，是暗条纹

在观察处不同位置，两束光的时间差不同，干涉形成了明暗相间的条纹

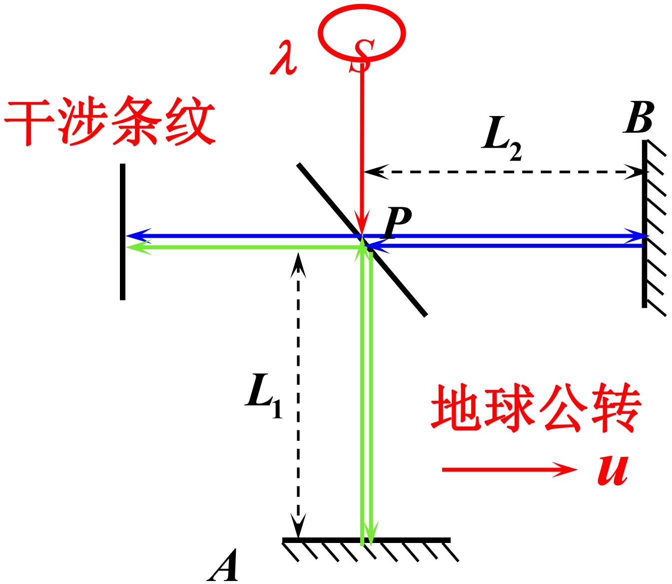
相邻两条明条纹的两束光的时间差的差值是一个光源振动周期T；相邻两条暗条纹的两束光的时间差的差值也是一个周期T；相邻明条纹和暗条纹的两束光的时间差的差值是半个周期T；

干涉仪转动90°

$$\Delta t = \frac{2}{c}\left(\frac{L_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{L_1}{1-u^2/c^2}\right)$$

沿着地球公转方向：

$$t'_{PBP} = \frac{L_2}{c-u} + \frac{L_2}{c+u} = \frac{2L_2}{c(1-u^2/c^2)}$$



垂直地球公转方向：

$$t'_{PAP} = \frac{2L_1}{\sqrt{c^2-u^2}} = \frac{2L_1}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Delta t' = t'_{PBP} - t'_{PAP} = \frac{2}{c}\left(\frac{L_2}{1-u^2/c^2} - \frac{L_1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

干涉仪转动前后时间差的变化：

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c}\left(\frac{L_1+L_2}{1-u^2/c^2} - \frac{L_1+L_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

$x \ll 1 \quad (1-x)^{\mu} \approx 1-\mu x$

$$\Delta t' - \Delta t = \frac{2}{c}\left(\frac{L_1+L_2}{1-u^2/c^2} - \frac{L_1+L_2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right)$$

$$\approx \frac{2(L_1+L_2)}{c}\left[\left(1+\frac{u^2}{c^2}\right)-\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right)\right]$$

$$= \frac{L_1+L_2}{c}\frac{u^2}{c^2}$$

当时间差变化一个周期T时，明条纹(暗条纹)移动一个条纹间距(相邻两条明条纹的间距)

实验中，时间差的变化引起的移动的条纹间距数

$$\Delta N = \frac{\Delta t' - \Delta t}{T} = \frac{L_1+L_2}{cT}\frac{u^2}{c^2} = \frac{L_1+L_2}{\lambda}\frac{u^2}{c^2}$$

$L_1+L_2 = 22\mathrm{m} \quad u = 3\times 10^4\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \quad \lambda = 589\mathrm{nm} \quad \Delta N = 0.4$

实验值为$\Delta N=0$

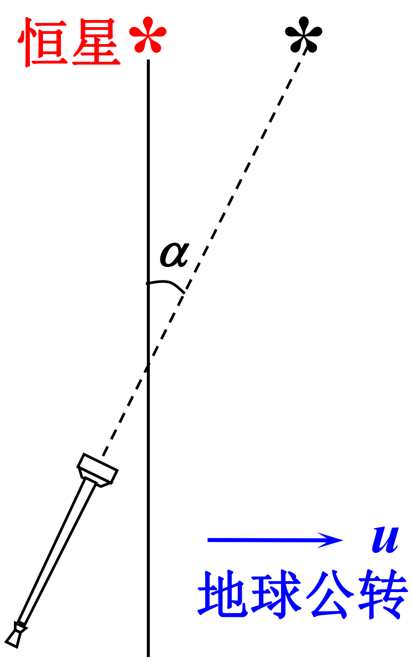
3、光速引出的困惑

恒星光行差现象

光行差：运动的观测者观察到的光的方向与同一时间同一地点静止的观测者观察到的方向有偏差。

周年光行差：地球绕太阳公转造成的光行差

周日光行差：地球自转造成的光行差



$$\tan\alpha = \frac{u}{c}$$

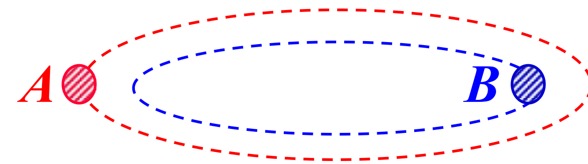
周年光行差角： $\alpha = 20.5''$

所有恒星的光行差角都是一样的。

所有恒星发出的光的光速相同。

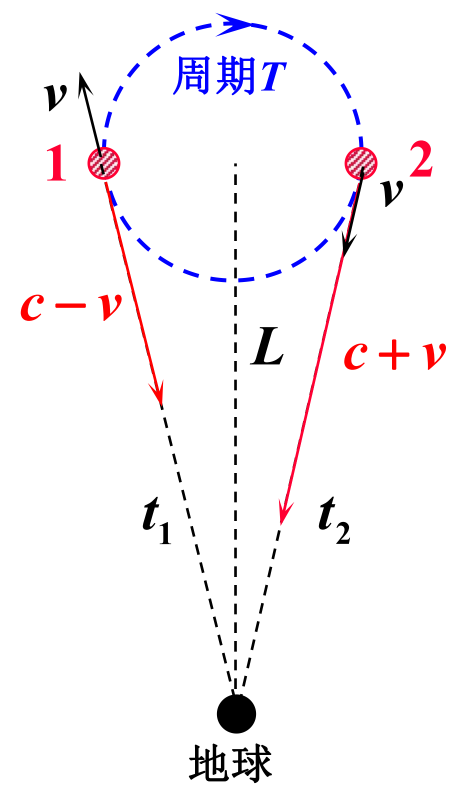
恒星观测结果

双星：两个恒星绕质心运动，若光速与光源运动有关，则向着地球运动的恒星发出的光比另一个恒星发出的光要快，双星轨道将扭曲：**实际未扭曲**



一个恒星：某位置远离地球运动，半个周期后向着地球运动，若光速与光源运动有关，星光到达地球的时间：

$$t_1 = \frac{L}{c-v} \qquad t_2 = \frac{L}{c+v} + \frac{T}{2}$$



因此可能出现$t_1=t_2$，即同一时刻观测到同一颗星处于不同位置：**实际未观测到**

其他测量光速实验

同步加速器产生速度为0.99975 c 的π^0

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma$$

沿π^0运动方向测得的γ运动速度，与用静止辐射源测得的γ速度(光速c) 极其一致！

结果表明，光速与光源运动无关。

二、狭义相对论的基本原理

1、狭义相对论的相对性原理：一切惯性系都是等价的(在一切惯性系中物理规律相同)。

在一个惯性系内部所做的任何物理实验，都不能确定这一惯性系是处于静止状态还在做匀速直线运动。

2、光速不变原理：在一切惯性系中，所测得的真空中的光速 c 都是相等的。

一切物理运动都不可能达到(更不可能超过)真空光速c

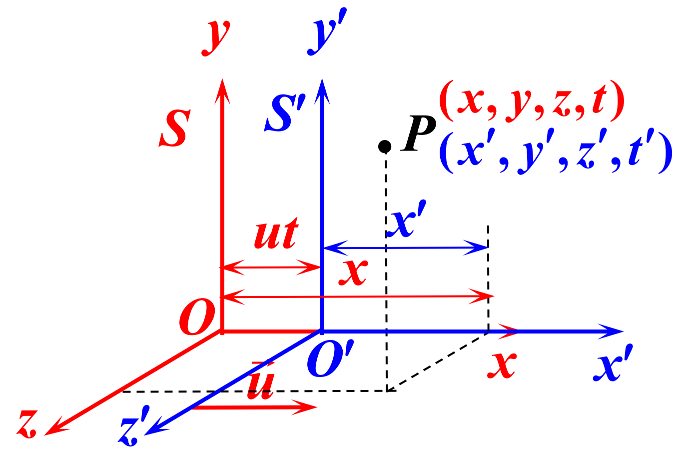
在这两条基本假设的基础上，可以建立一套完整的理论，这里涉及的只是无加速运动的惯性系，所以叫狭义相对论，以区别于后来爱因斯坦发展的广义相对论。

三、洛仑兹变换

要满足狭义相对论的两个基本原理，则相对做匀速直线运动的两个惯性系之间的变换则取代为洛伦兹变换

两个参考系S和S'以速度u相对做匀速直线运动时，考虑两坐标系的x轴和x'轴重合，y轴平行y'轴，z轴平行z'轴，速度u平行x轴，O与O'重合时刻，$t_o=t'_{o'}=0$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x-ut) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t-\dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t-\dfrac{ux}{c^2}\right) \end{cases}$$

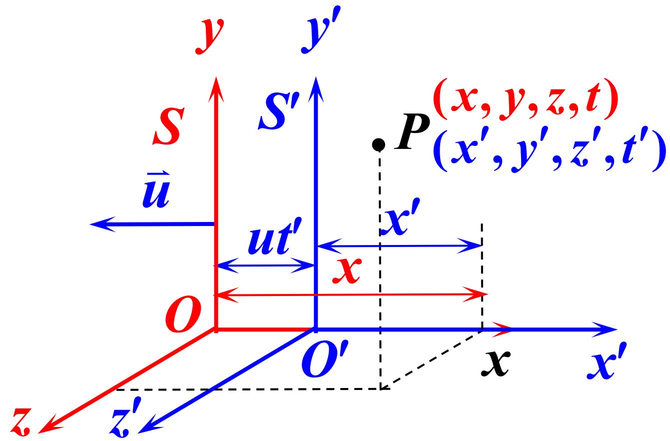


$$\beta = \frac{u}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

换个立场，若在S'测量，则S系沿x'轴负向以u相对S'做匀速直线运动，洛伦兹变换为：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x-ut) \quad y'=y \quad z'=z \\ t' = \dfrac{t-\dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(t-\dfrac{ux}{c^2}) \quad \beta=\dfrac{u}{c} \quad \gamma=\dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{x'+ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x'+ut') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t'+\dfrac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(t'+\dfrac{ux'}{c^2}) \end{cases}$$

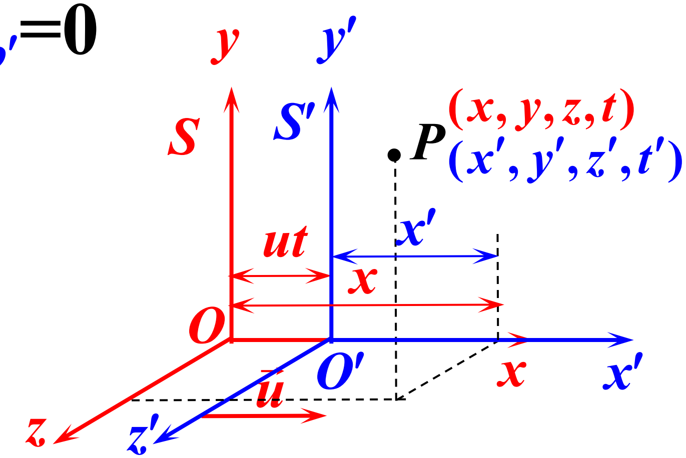


洛伦兹变换显示，若彼此运动，则时间和空间彼此混合，所以称四维时空坐标。

四维时空的观点认为，三维空间的所有事物，是四维时空中的原物在空间上的投影。

洛伦兹变换可以由狭义相对论的相对性原理和光速不变原理推导出来。

参考系S和S'以速度u相对做匀速直线运动，两坐标系的x轴和x'轴重合，y轴平行y'轴，z轴平行z'轴，速度u平行x轴，O与O'重合时刻，$t_o=t'_{o'}=0$



测量O点位置

在S系测量，任意时刻：$x_O = 0$

在S'系测量，t'时刻：$x'_O = -ut'$

即在S'系，任意时刻有关系：$x'_O + ut' = 0$

对O点，任意时刻两参考系都有关系：$x_O = x'_O + ut'$

对任何一点的x，在任何时刻x和$x'+ut'$应该具有线性比例关系：

$$x = k(x' + ut')$$

坐标变换是线性比例关系的理由

在同一参考系中时空均匀区域某事件发生的时间间隔与空间间隔要求与它们在什么时间发生、什么地点发生无关。这就要求不同参考系的坐标变换是线性的。

用反证法证明，比如说x坐标的变换是： $x=\alpha x'^2$

一个木棒在S'系头尾两坐标：x_1', x_2' $\quad \Delta x' = x_2' - x_1'$

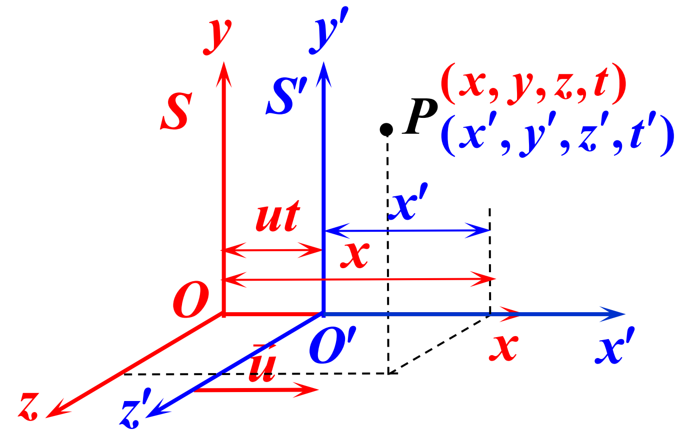
该木棒在S系头尾两坐标： x_1, x_2 $\quad \Delta x = x_2 - x_1$

在A地点，在S'系头尾两坐标为0，1： $\Delta x' = 1 \quad \Delta x = \alpha$

在B地点，在S'系头尾两坐标为1，2： $\Delta x' = 1 \quad \Delta x = 3\alpha$

空间坐标变换只能是线性关系；同样时间坐标变换也只能是线性关系

测量O'点位置



在S'系测量，任意时刻：$x'_{O'} = 0$

在S系测量，t时刻：$x_{O'} = ut$

即在S系，任意时刻有关系：$x_{O'} - ut = 0$

对O'点，任意时刻两参考系都有关系：$x'_{O'} = x_{O'} - ut$

对任何一点的x'，在任何时刻x'和x-ut应该具有线性比例关系：

$$x' = k'(x - ut)$$

$$\boxed{x = k(x' + ut')}$$

狭义相对论的相对性原理：物理规律对所有惯性系等价

$$k = k'$$

公式中的负号是运动方向引起的，可不必一致。

光速不变原理

$x = k(x' + ut') \quad x' = k(x - ut)$

在O与O'重合的瞬时($t_O = t'_{O'} = 0$)，从重合点发出一光信号，在$x(x')$方向上，光信号到达P点处的时空坐标

S系： $P(x = ct, t)$ S'系： $P(x' = ct', t')$

$$ct = k(ct' + ut') = kt'(c + u)$$

$$ct' = k(ct - ut) = kt(c - u)$$

$$c^2 tt' = k^2 tt'(c + u)(c - u) = k^2 tt'(c^2 - u^2)$$

$$k = \frac{c}{\sqrt{c^2 - u^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

$$x=\frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad x'=\frac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$t'=\frac{1}{u}(\sqrt{1-\beta^2}\,x-x')$$

$$=\frac{1}{u}(\sqrt{1-\beta^2}\,x-\frac{x-ut}{\sqrt{1-\beta^2}})=\frac{(1-\beta^2)x-x+ut}{u\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$=\frac{ut-\beta^2x}{u\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{ut-u^2x/c^2}{u\sqrt{1-\beta^2}}=\frac{t-ux/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

同样方法可得： $t=\dfrac{t'+\dfrac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$

洛仑兹变换的讨论

1、伽利略变换是洛仑兹变换的低速近似

洛仑兹变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

$$u \ll c$$

$$\beta = \frac{u}{c} \approx 0$$

$$\frac{ux}{c^2} \approx 0$$

伽利略变换

$$\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}$$

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x - ut)$$

$$y' = y \quad z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(t - \frac{ux}{c^2})$$

2、物质之间的相对运动速度$u<c$

若$u>c$，$\sqrt{1-\beta^2}$为虚数，时空坐标也变为虚数，失去了时空坐标的意义

若$u=c$，$\gamma=\infty$，时空坐标也无意义

3、洛仑兹变换指同一事件在两个惯性系中时空坐标之间的关系

4、使用洛仑兹变换时，时空基准必须一致

各惯性系中的钟、尺必须相对各自的惯性系保持静止

时间、空间的单位应有一共同标准