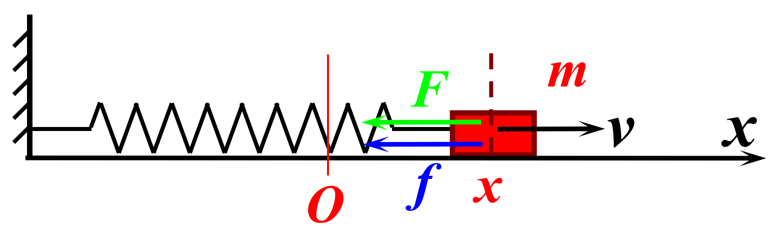
4.3 阻尼振动

在恢复力和阻力的共同作用下的振动称为阻尼振动

由于振动系统克服阻力做功而不断消耗能量，因此振幅不断减小，所以阻尼振动又被称为减幅振动。

弹簧振子在空气或液体中，当振动质点速度不太大时，质点受到的阻力与其速度成正比：

$$f = -\gamma v = -\gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$



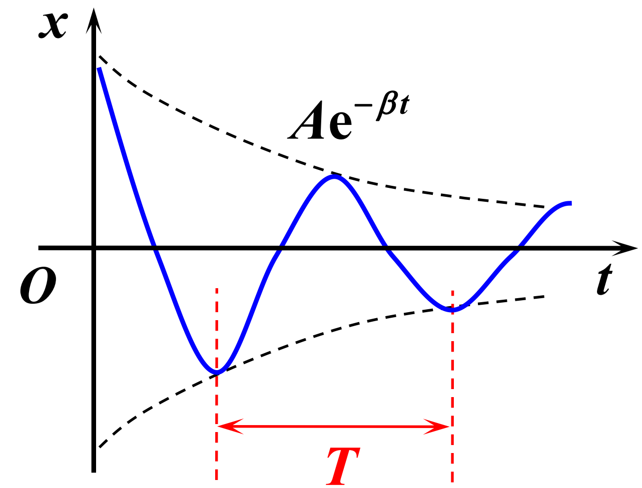
弹簧振子

$$-kx - \gamma \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = ma = m\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$ 阻尼振动的动力学方程

$$\beta = \frac{\gamma}{2m}$$ 阻尼系数 $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$ 系统的固有频率

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + 2\beta \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$



特征方程：

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \quad p = 2\beta \quad q = \omega_0^2$$

1、$\beta < \omega_0$ 小阻尼(欠阻尼)状态

$$\Delta = p^2 - 4q < 0 \qquad \lambda = -\beta \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

方程的解：

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

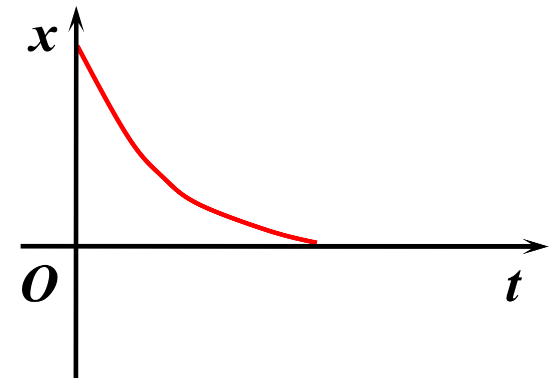
A和φ由初始条件决定

阻尼振动不是严格的周期运动，可看成准周期振动：

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

2、$\beta=\omega_0$ 临界阻尼状态

$$\Delta = p^2 - 4q = 0 \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = -\beta$$



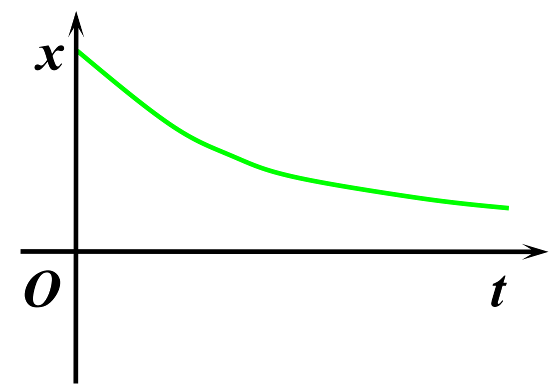
方程的解： $x = \mathrm{e}^{-\beta t}(At + B)$

A和B由初始条件决定

质点以非周期的方式很快地回到平衡位置

3、$\beta>\omega_0$ 大阻尼(过阻尼)状态

$$\Delta = p^2 - 4q > 0 \qquad \lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$



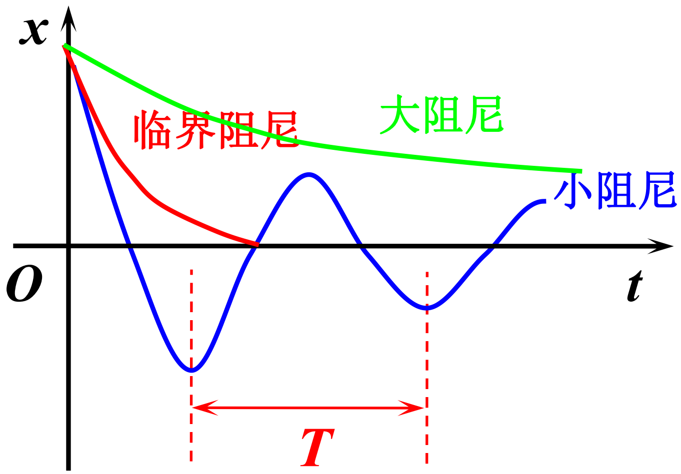
方程的解：

$$x = A\mathrm{e}^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + B\mathrm{e}^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

A和B由初始条件决定

质点以非周期的方式缓慢地回到平衡位置

三种阻尼状态比较



$$\beta < \omega_0 \quad \text{小阻尼，准周期振动} \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$\beta = \omega_0 \quad \text{临界阻尼}$$

$$\beta > \omega_0 \quad \text{大阻尼}$$

例4-7 一阻尼系统(小阻尼)某一时刻的振幅为$A_0=10\text{cm}$；10s后，其振幅变为$A_1=1\text{cm}$；**求：** 振幅变为 $A_2=0.3\text{cm}$还需多少时间？

解： 取振幅A_0的时刻为0，由小阻尼的振动函数

$$x = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)$$

$$A_0 = A \quad A_1 = A\mathrm{e}^{-10\beta} \quad A_2 = A\mathrm{e}^{-\beta(10+\Delta t)}$$

$$\frac{A_0}{A_1} = \mathrm{e}^{10\beta} \quad \frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}^{\beta\Delta t}$$

$$\ln A_0 - \ln A_1 = 10\beta \quad \ln A_1 - \ln A_2 = \beta\Delta t$$

$$\Delta t = 10\frac{\ln A_1 - \ln A_2}{\ln A_0 - \ln A_1} = 5.23\text{s}$$

例4-8 阻尼振动时($\omega_0>\beta$)，位移的两个相邻的极大值之比是多少?

解：$\omega_0>\beta$是小阻尼振动

$$x = A\mathrm{e}^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi) \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}$$

设t时刻振幅极大，$t+T$则是相邻的振幅极大时刻

$$\frac{A\mathrm{e}^{-\beta t}}{A\mathrm{e}^{-\beta(t+T)}} = \mathrm{e}^{\beta T} = \mathrm{e}^{\beta\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}}}$$

4.4 受迫振动

受迫振动是系统在周期性的外力作用下的振动，周期性的外力称为策动力。

设策动力是按余弦函数变化的简谐力$F=F_0\cos\omega t$，此外质点还受到弹性力和阻尼力：

$$-kx-\gamma\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+F_0\cos\omega t=m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t$$ 受迫振动的动力学方程

$$\beta=\frac{\gamma}{2m}\quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\quad f_0=\frac{F_0}{m}$$

方程的解是齐次方程(阻尼振动方程)的通解$x'(t)$和受迫振动方程的特解$x_0(t)$的代数和

$$x(t)=x'(t)+x_0(t)$$

假设特解为：$x_0(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\beta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=f_0\cos\omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}x_0(t)}{\mathrm{d}t}=-A\omega\sin(\omega t+\varphi)\qquad\frac{\mathrm{d}^2x_0(t)}{\mathrm{d}t^2}=-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

上面这些式子代入受迫振动方程：

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$f_0\cos\omega t=A[(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t+\varphi)-2\beta\omega\sin(\omega t+\varphi)]$$

$$=A\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}\cos(\omega t+\varphi+\theta)$$

$x=Ae^{-\beta t}\cos(\omega t+\varphi)\quad\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\quad\beta<\omega_0$

$x=e^{-\beta t}(At+B)\quad\beta=\omega_0$

$x=Ae^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}+Be^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}\quad\beta>\omega_0$

其中：$\theta=\arctan\dfrac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$

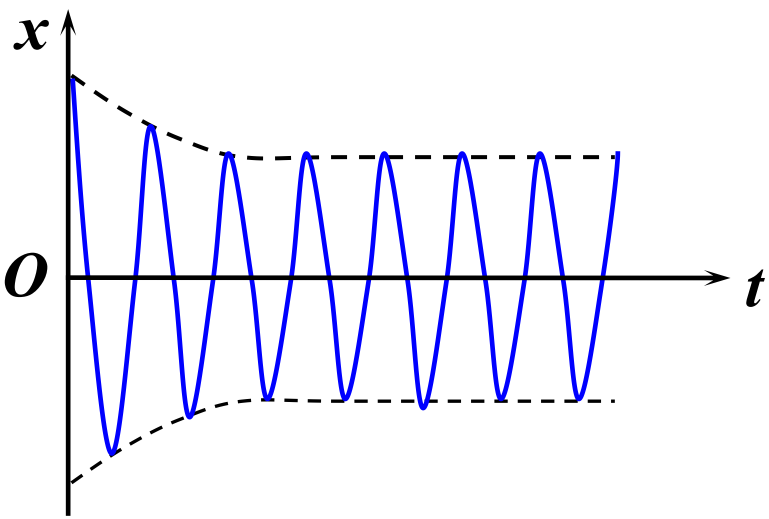
$$A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}}\qquad\varphi=-\theta=-\arctan\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

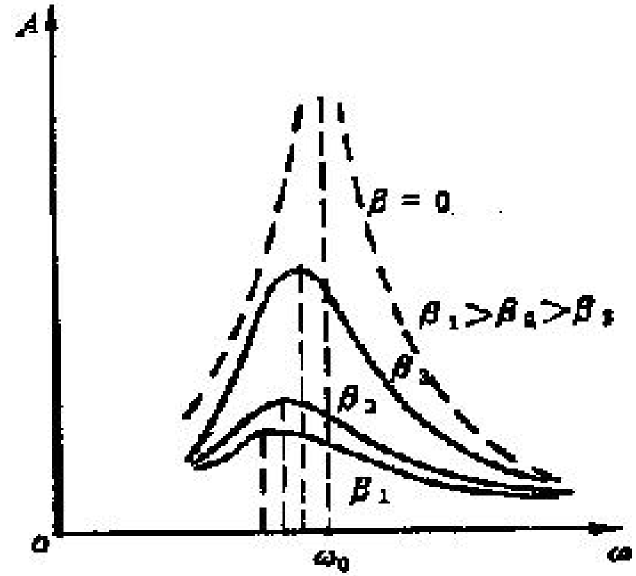
通解在任何情况下都随时间的增长而趋于零，所以稳态时：

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \qquad A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2}} \qquad \tan\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

简谐力驱动的受迫振动稳态时按简谐振动的规律变化，稳态受迫振动与起始状态无关





当策动力的频率等于某个特定值时，位移振幅出现极大值，这种现象叫位移共振。

$$\frac{dA}{d\omega} = 0 \qquad \frac{d^2A}{d\omega^2} < 0 \qquad \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} \qquad \beta < \frac{\omega_0}{\sqrt{2}} \qquad A_r = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$

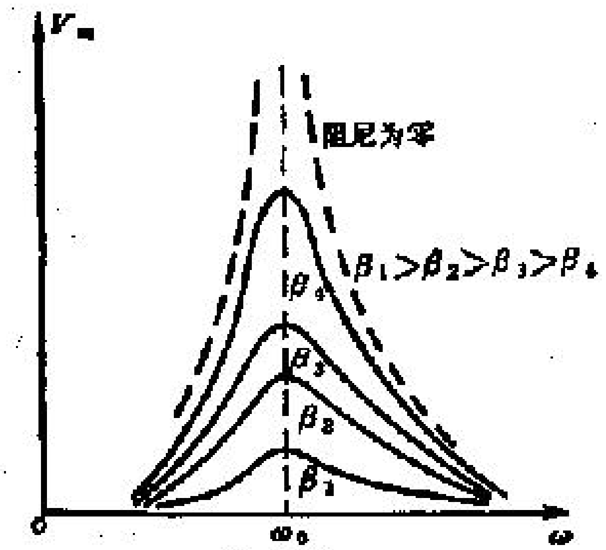
稳态时受迫振动质点的速度：

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega A \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = \frac{f_0}{\sqrt{\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + (2\beta)^2}} \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

当策动力的频率等于系统固有频率$\omega = \omega_0$时，受迫振动速度的振幅达到极大值，这种现象叫速度共振。

速度共振时，速度的振幅最大

$$v_m = \frac{f_0}{2\beta} \qquad \tan\varphi = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = 0 \qquad \varphi = 0$$



阻尼很小时，$\omega_r \approx \omega_0$，位移共振和速度共振同时发生，这时两种共振可以不加区分。

例4-9 在简谐力作用下弹簧振子作受迫振动。重物质量是10kg，弹簧的劲度系数是700N·m⁻¹，阻力系数γ是40N·s·m⁻¹，简谐力的振幅是100N，角频率是10rad·s⁻¹，**求**：1) 稳态时各时刻重物的速度大小；2) 简谐力的角频率为多大时产生速度共振？共振时速度的振幅是多大？

解：1) 稳态时 $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$A = \frac{f_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\beta\omega)^2]^{1/2}} \qquad \varphi = -\arctan\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$f_0 = \frac{F}{m} = \frac{100}{10} = 10 \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m} = \frac{700}{10} = 70$$

$$\beta = \frac{\gamma}{2m} = \frac{40}{2\cdot 10} = 2 \qquad \omega = 10$$

$$A = 0.2\mathrm{m} \quad \varphi = 0.295\pi \qquad x(t) = 0.2\cos(10t + 0.295\pi)$$

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = 0.2\cos(10t + 0.295\pi)$$

$$v(t) = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) = 2\cos(10t + 0.795\pi)$$

2) 简谐力的角频率与固有频率相同时，产生速度共振：

$$\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 8.37\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

$$v_\mathrm{m} = \frac{f_0}{2\beta} = 2.5\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

判断一个物体作简谐振动的部分方法

1、物体运动的加速度与其位移的大小成正比而方向相反 $a=-\omega^2 x$

2、物体受到的力(或力矩)的大小与其位移(或角位移)大小成正比而方向相反 $F=-kx \quad M=-C\theta$

3、位移(或其他物理量)满足微分方程(简谐运动的动力学方程) $\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 x=0$

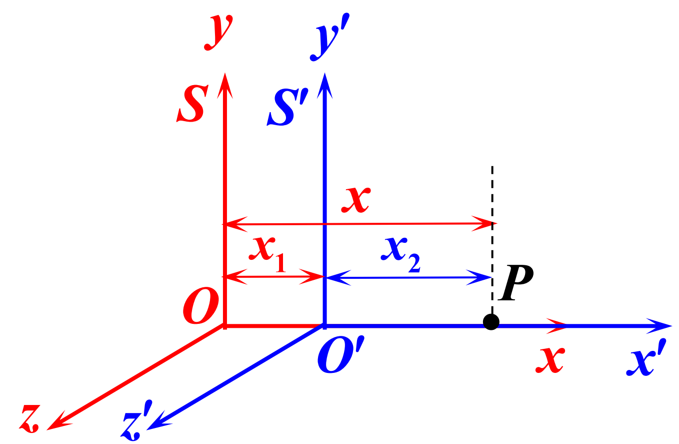
4、稳态时的受迫振动

$$x=A\cos(\omega t+\varphi) \quad A=\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\beta\omega)^2}} \quad \tan\varphi=-\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

4.5 同方向简谐振动的合成(一维简谐振动的合成)

坐标系xOy为S系，$x'O'y'$为S'系，两坐标系x轴与x'轴重合，y轴与y'轴平行，z轴与z'轴平行。若S'系相对S系沿x轴做简谐振动，则O'点相对S系的振动函数：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$



若一质点P在x'轴上相对S'系做简谐振动，振动函数：

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

则该质点P相对S系的振动函数：

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

同一直线上两简谐振动的合成法则

两列波在空间相遇，相遇处的质点也有振动的合成问题

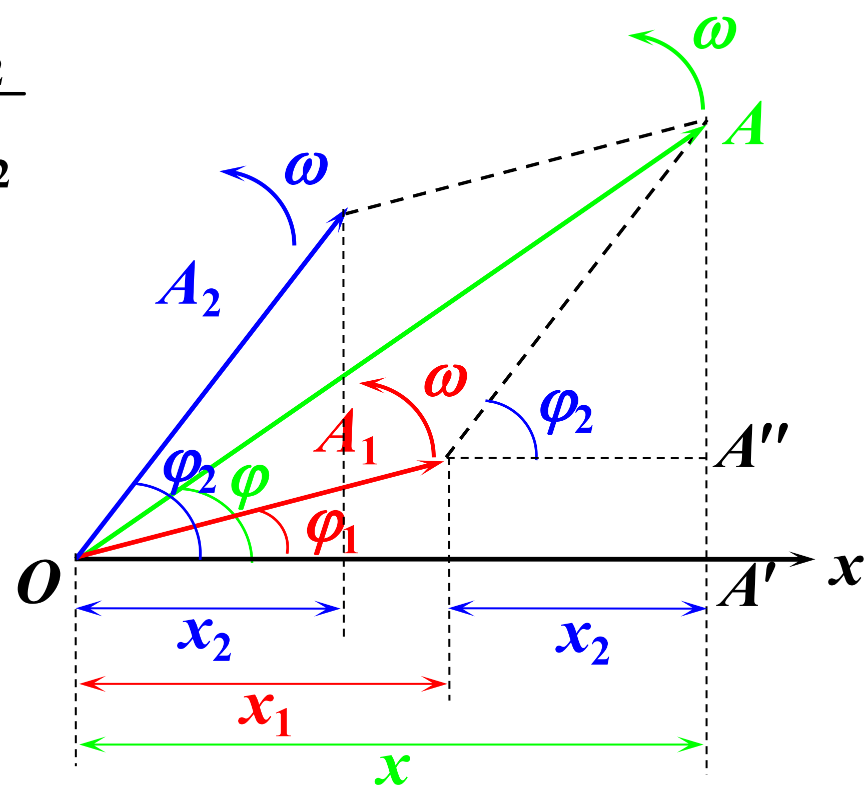
一、同方向同频率的简谐振动的合成

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\varphi_a$$
$$\cos(\pi - \varphi_a) = -\cos\varphi_a$$

$$x = x_1 + x_2 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$



利用旋转矢量图，容易得出上面结论：

A由余弦定理可得出，

$\tan\varphi$由图中各量关系得出。

整个图形也以ω旋转，合矢量的长度固定不变。

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$

(1)若两分振动同相： $\varphi_2-\varphi_1=\pm 2k\pi \quad (k=0,1,2,\ldots)$

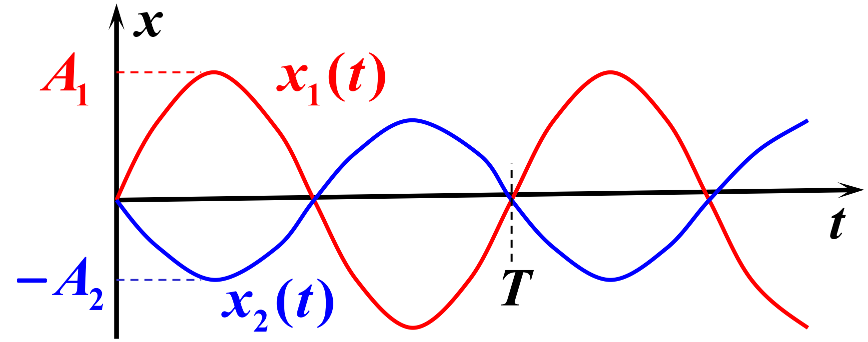
$$A=A_1+A_2$$ 合振动振幅最大

(2)若两分振动反相： $\varphi_2-\varphi_1=\pm(2k+1)\pi \quad (k=0,1,2,\ldots)$

$$A=\left|A_1-A_2\right|$$ 合振动振幅最小

当相位差$\varphi_2-\varphi_1$为其它值时，合振幅的值在A_1+A_2与$|A_1-A_2|$之间。

例4-10 两个同方向的简谐振动曲线(如图所示)，**求：**
1) 合振动的振幅，2) 合振动的振动方程。



解： 1) 从图中看出两个简谐振动反相，且$A_1>A_2$

$$A = A_1 - A_2$$

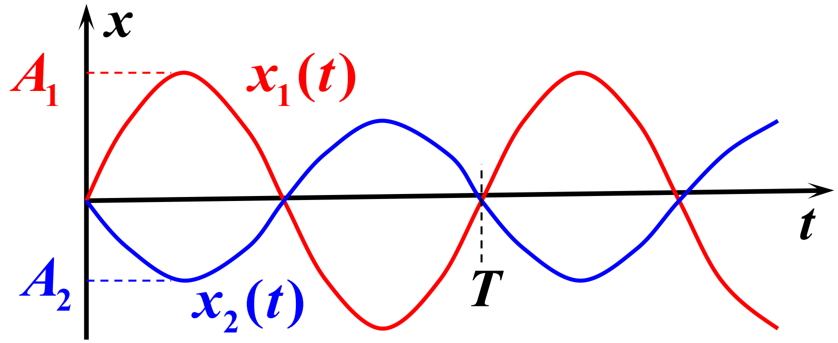
2) 从图中可以得出两个简谐振动的初相

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

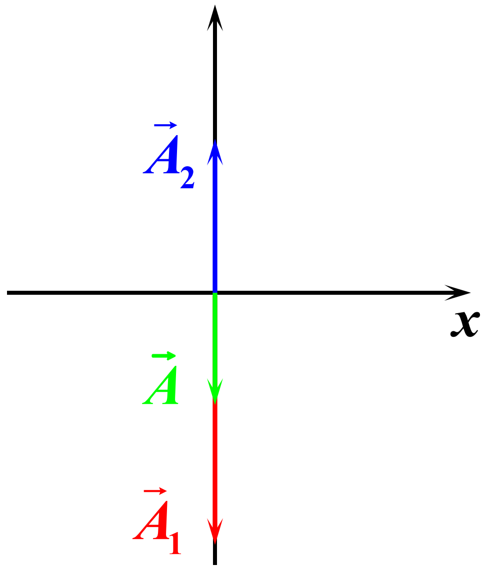
$$\tan\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} = -\infty \qquad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) = (A_1 - A_2)\cos(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2})$$

从简谐振动曲线，得出两个简谐振动的初相，再用旋转矢量图可以很简单地得出结果



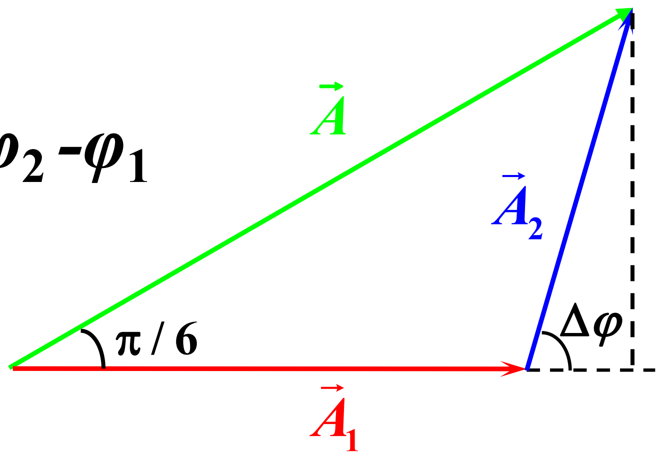
$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$$



$$A = A_1 - A_2$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}$$

例4-11 两个同方向，同频率的简谐振动，其合振动的振幅为20cm，与第一个振动的相位差为 $\varphi-\varphi_1=\pi/6$。若第一个振动的振幅为$10\sqrt{3}$ cm。求：1) 第二个振动的振幅，2) 两简谐振动的相位差



解：用旋转矢量图分析，其中 $\Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$

$$A_2=\sqrt{A^2+A_1^2-2AA_1\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$=10\text{cm}$$

$$A_2\sin\Delta\varphi=A\sin\frac{\pi}{6}\qquad \sin\Delta\varphi=1$$

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{2}$$

二、同方向不同频率的简谐振动的合成

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

特殊情况，当两分振动的圆频率间有公倍数时：

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi}{T_1} / \frac{2\pi}{T_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2$$

合振动是周期函数

一般情况，考虑简单的情形：$A_1 = A_2 = A$； $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_1 t + \varphi) + A\cos(\omega_2 t + \varphi)$$

$$= 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi)$$

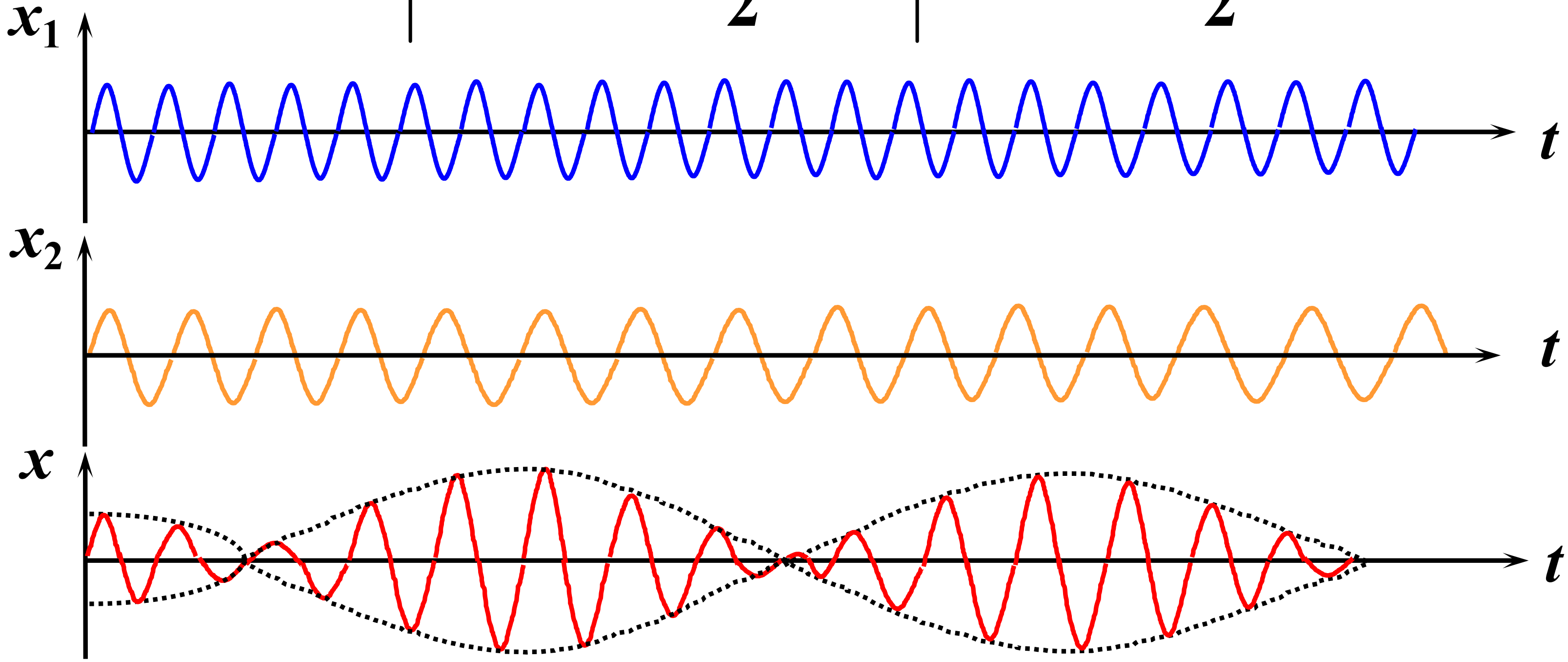
合振动不是简谐振动

$$x = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)$$

当$\omega_2 \sim \omega_1$时，$\omega_2 - \omega_1 << \omega_2 + \omega_1$：

合振动可以看成是下面振幅和角频率的近似简谐振动

$$A(t) = \left|2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\right| \quad \omega = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$$



这种振动称为拍，拍振动会出现忽强忽若的现象。

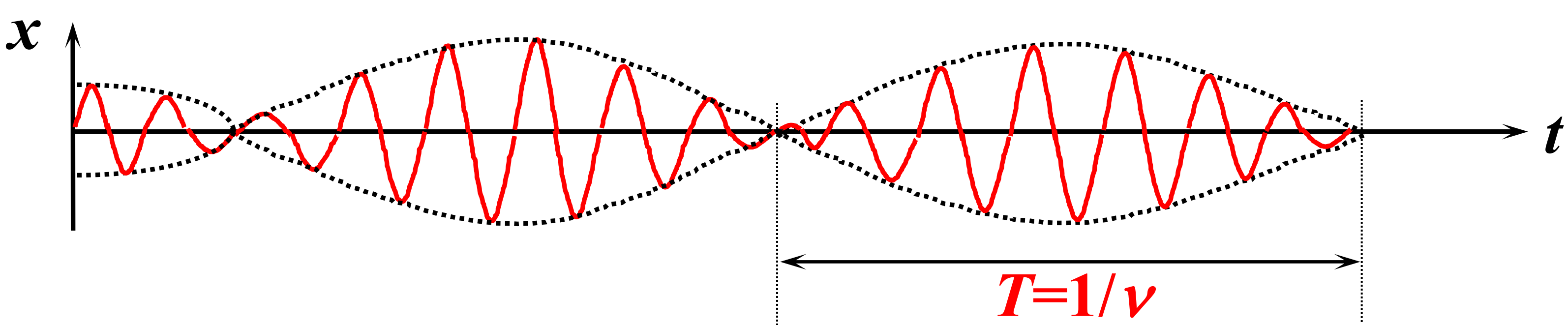
$$x = 2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)$$

拍的振幅变化的频率称拍频

$2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)$ 的频率： $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} / 2\pi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{4\pi}$

$\left|2A\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\right|$ 的频率： $2\frac{\omega_2 - \omega_1}{4\pi} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$

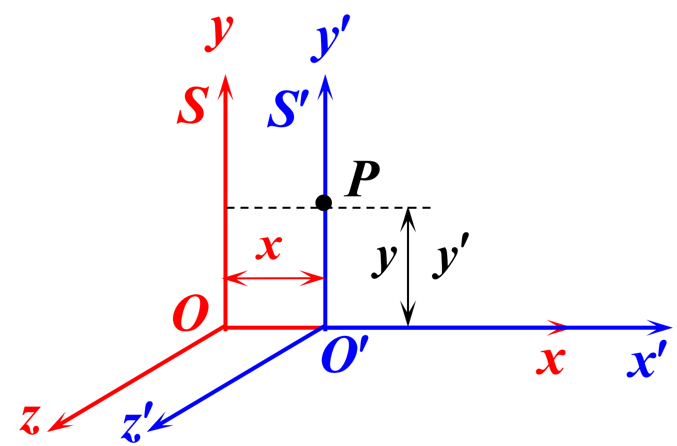
拍频等于两个分振动频率之差： $\nu = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \nu_2 - \nu_1$



4.6 互相垂直简谐振动的合成(二维简谐振动的合成)

坐标系xOy为S系，$x'O'y'$为S'系，两坐标系x轴与x'轴重合，y轴与y'轴平行，z轴与z'轴平行。若S'系相对S系沿x轴做简谐振动，则O'点相对S系的振动函数：

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$



若一质点P在y'轴上相对S'系做简谐振动，振动函数：

$$y' = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

则该质点相对K系是同时参与两个互相垂直的简谐振动，该振动的运动函数：

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad y = y' = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

两振动函数的联立就是质点的合振动函数。

一、同频率互相垂直的简谐振动的合成

1、分振动

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$$x = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \quad y = A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$$

2、合运动(轨道方程)

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$a = x/A_1 = \cos(\omega t+\varphi_1) = \cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1$$

$$b = y/A_2 = \cos(\omega t+\varphi_2) = \cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2$$

$$a\cos\varphi_2 - b\cos\varphi_1 = \sin\omega t(\sin\varphi_2\cos\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2)$$

$$= \sin\omega t\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$a\sin\varphi_2 - b\sin\varphi_1 = \cos\omega t(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\varphi_2\sin\varphi_1)$$

$$= \cos\omega t\sin(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$a^2+b^2-2ab\cos\varphi_2\cos\varphi_1-2ab\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \sin^2(\varphi_2-\varphi_1)$$

$$a^2+b^2-2ab\cos(\varphi_2-\varphi_1)=$$

$a = x / A_1 \quad b = y / A_2$

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - 2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos\Delta\varphi = \sin^2\Delta\varphi \quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$$

A、合运动一般是在 $2A_1$ (x向)、$2A_2$ (y向)范围内的一个椭圆

B、椭圆的性质(方位、长短轴、左右旋)在 A_1、A_2确定之后，主要决定于$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi \quad x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \quad y=A_2\cos(\omega t+\varphi_1+\Delta\varphi)$$

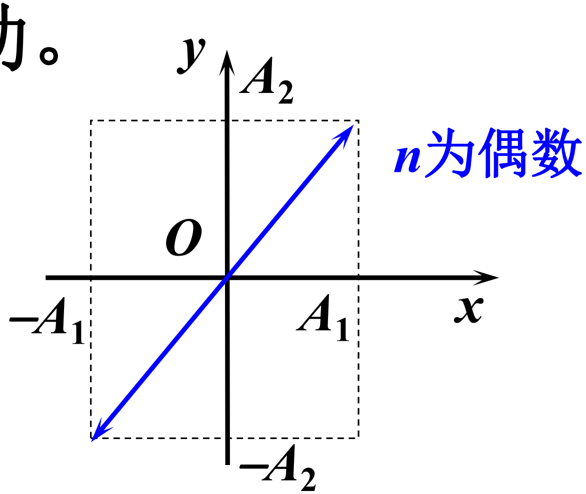
(1) $\Delta\varphi = n\pi$ (n=0，1，2，···)：

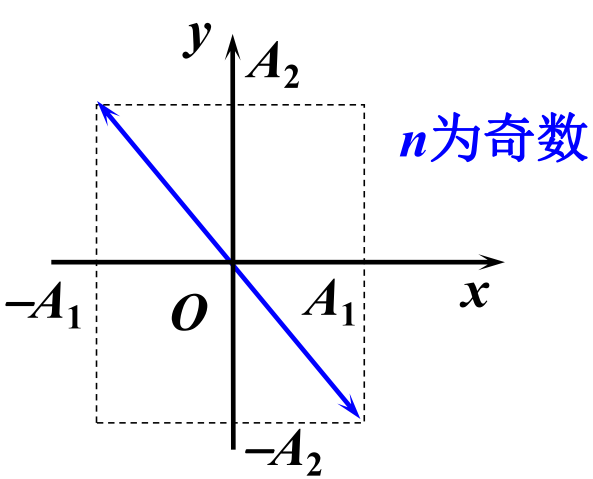
$$y=(-1)^n\frac{A_1}{A_2}x$$

直线方程：质点做直线运动

n为偶数时，两分振动同相，直线斜率为正，质点在一、三象限运动。

n为奇数时，两分振动反相，直线斜率为负，质点在二、四象限运动。





$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi \quad x=A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \quad y=A_2\cos(\omega t+\varphi_1+\Delta\varphi)$$

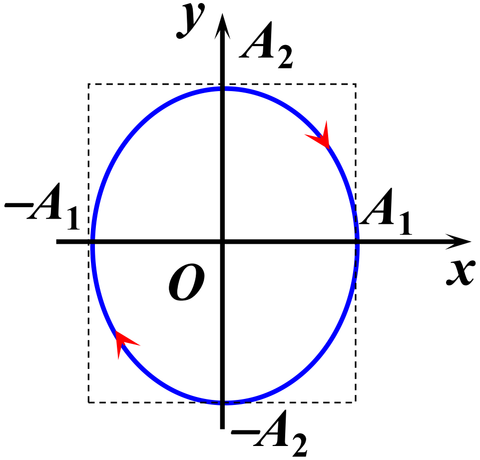
(2) $\Delta\varphi = 2n\pi\pm\pi/2$ (n=0，1，2，…):

$$(\frac{x}{A_1})^2+(\frac{y}{A_2})^2=1$$

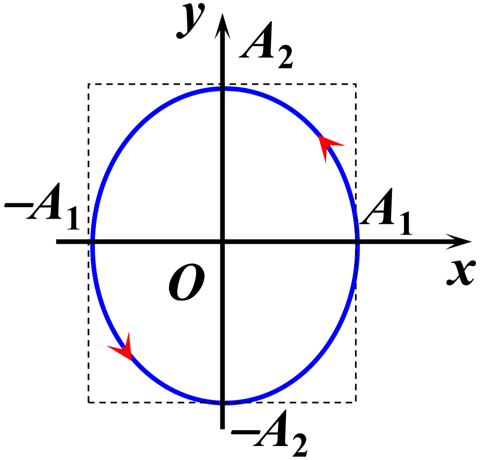
正椭圆方程：质点的运动轨迹是以坐标轴为主轴的椭圆

当$\Delta\varphi = 2n\pi+\pi/2$时，$y$比$x$超前$\pi/2$，质点运动方向顺时针

当$\Delta\varphi = 2n\pi-\pi/2$时，$y$比$x$落后$\pi/2$，质点运动方向逆时针



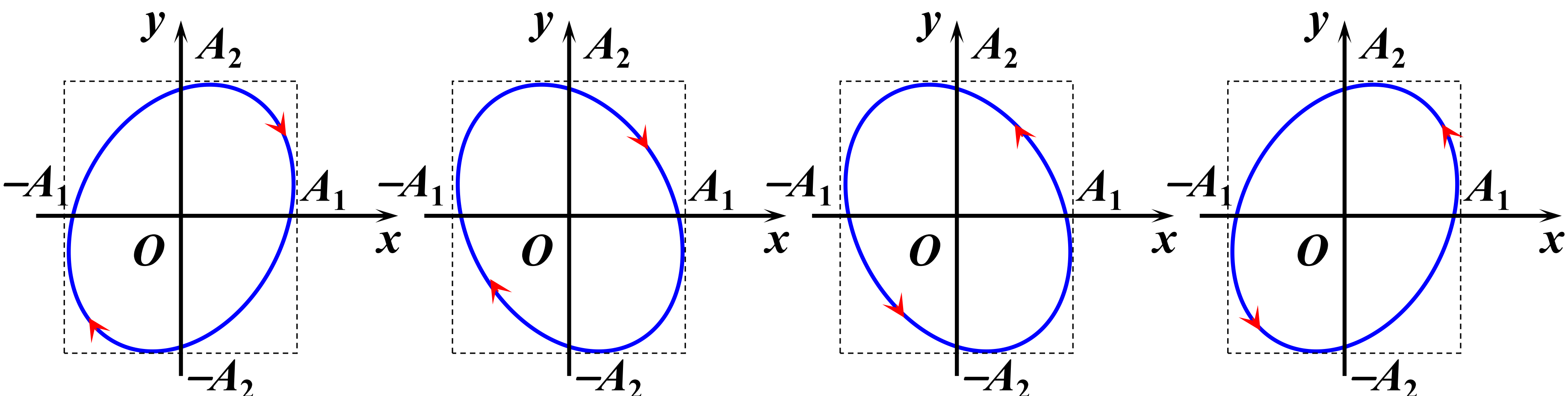
$\Delta\varphi = \pi/2$



$\Delta\varphi = -\pi/2$

$$\frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{A_2^2}-2\frac{x}{A_1}\frac{y}{A_2}\cos\Delta\varphi=\sin^2\Delta\varphi \quad \Delta\varphi=\varphi_2-\varphi_1$$

(3) $\Delta\varphi$为其他值时，质点的运动轨迹是斜椭圆，其具体形状(长、短轴的方向和大小)和运动方向由分振动的振幅的大小和相差决定。

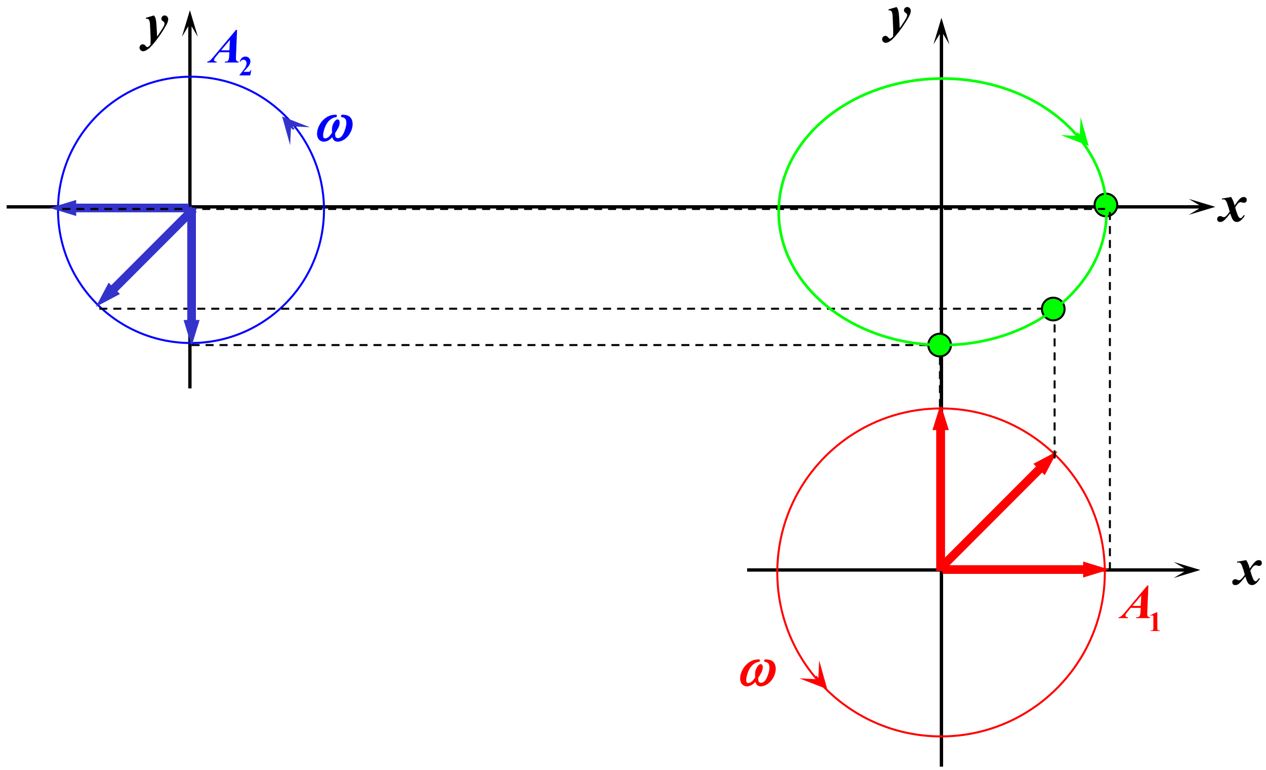


$\Delta\varphi=\pi/4$　　$\Delta\varphi=3\pi/4$　　$\Delta\varphi=5\pi/4$　　$\Delta\varphi=7\pi/4$

当$\Delta\varphi$在一、二象限时，$\Delta\varphi$ (<π的值)>0，y比x超前，质点运动方向顺时针；当$\Delta\varphi$在三、四象限时，$\Delta\varphi$ (<π的值)<0，y比x落后，质点运动方向逆时针；

同频率两垂直方向振动合成----旋转矢量作图法

$$x = A_1 \cos \omega t \quad y = A_2 \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

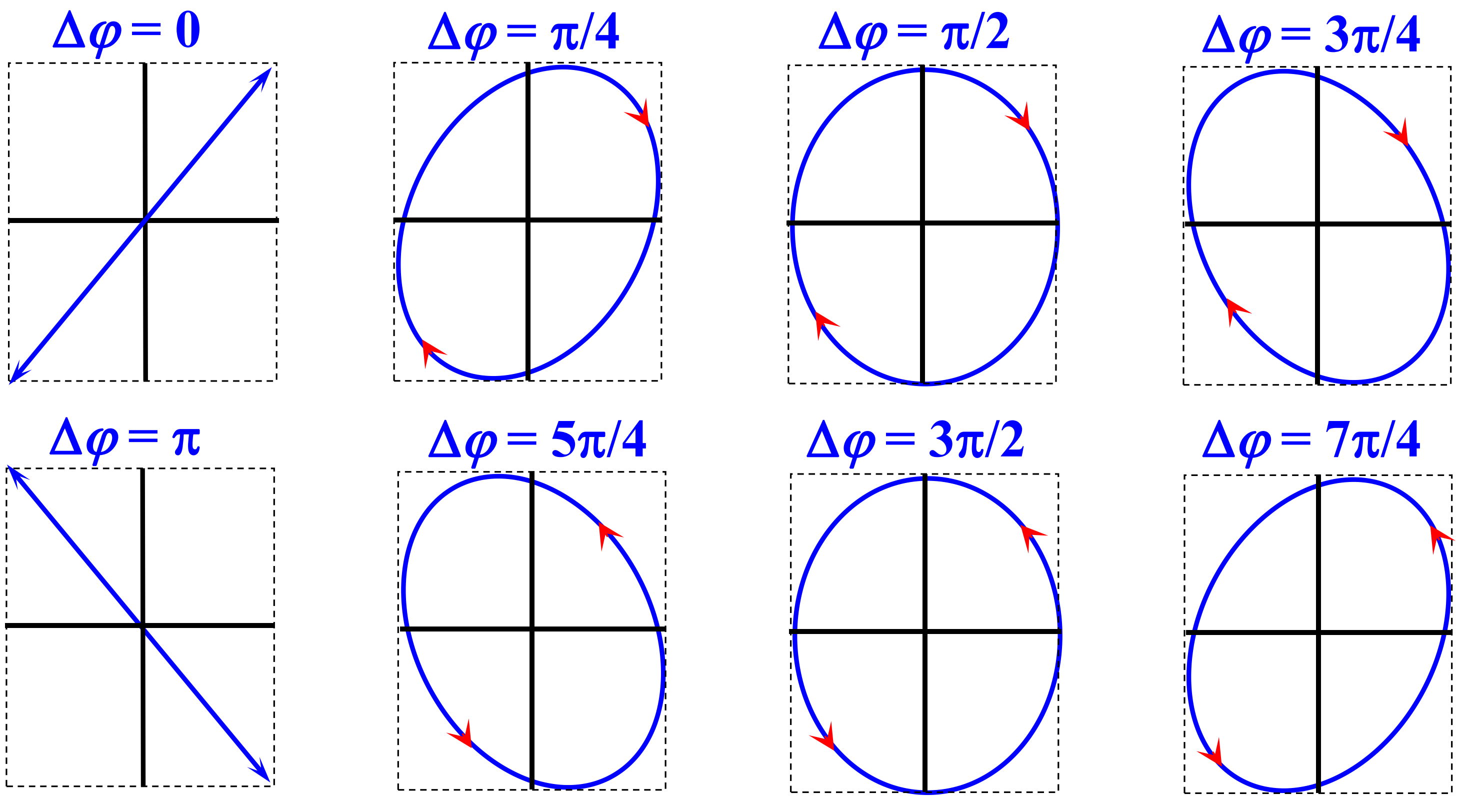


二、不同频率互相垂直的简谐振动的合成

1、两分振动频率相差很小

$$x = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad y = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \Delta\varphi = (\omega_2 - \omega_1)t + \varphi_2 - \varphi_1$$

合振动可近似看成是同频率的两互相垂直的简谐振动的合成，但由于相位差随时间缓慢变化，合运动轨迹将按下面图示的次序不断变化：



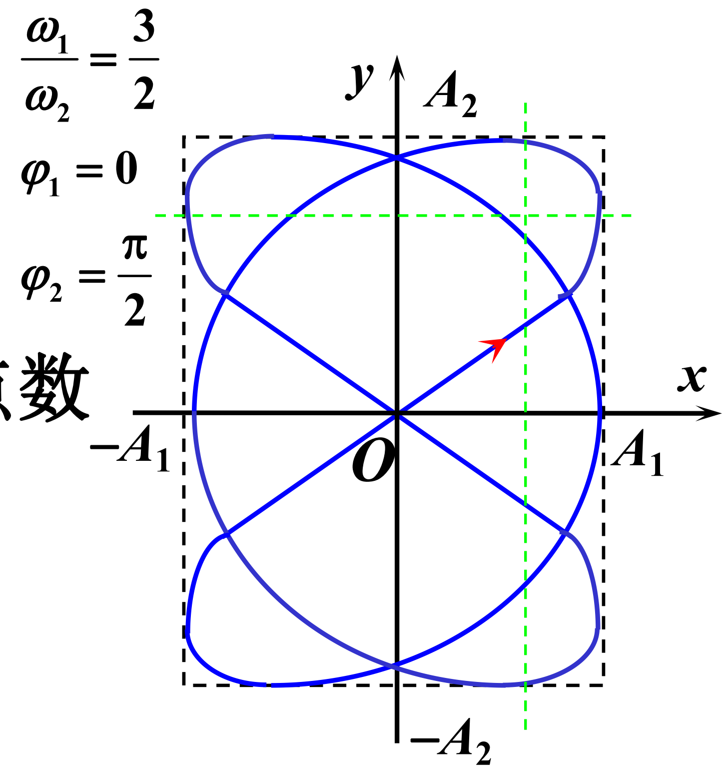
2、两分振动频率相差较大，但有简单的整数比关系

$$x = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) \quad y = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

合振动具有稳定闭合的轨道，这轨道称为李萨如图形

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\pi}{T_1} / \frac{2\pi}{T_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{m}{n}$$

$$T = mT_1 = nT_2$$



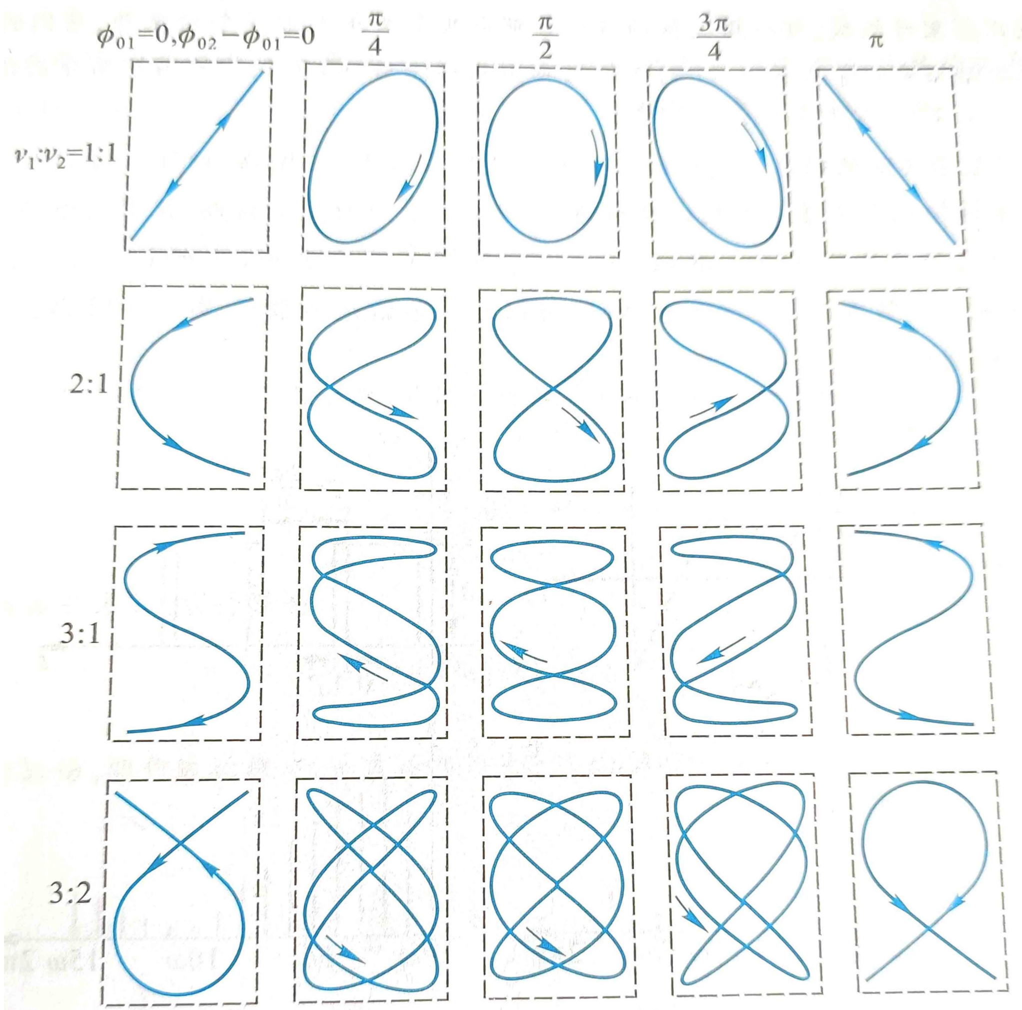
图形与x轴(y=0)、y轴(x=0)的交点数

$$N_x = 2n \quad N_y = 2m$$

$$\frac{N_x}{N_y} = \frac{n}{m} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

如已知一个振动的周期，根据李萨如图形就可求出另一振动的频率，这是常用测定频率的方法。

李萨如图形的形状与两分振动的频率比和相位差有关



李萨如图形(来自程守洙《普通物理学》)

4.7 谐振分析(振动的分解)

任何一个复杂的周期性振动都可以分解成一系列简谐振动之和，这就是谐振分析。

若$F(t)$是周期性振动函数，周期T，频率ν，由傅里叶级数展开：

$$F(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\cos(2\pi k\nu t)+b_k\sin(2\pi k\nu t)] \quad a_0=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}F(t)\mathrm{d}t$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}F(t)\cos(2\pi k\nu t)\mathrm{d}t \quad b_k=\frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}F(t)\sin(2\pi k\nu t)\mathrm{d}t$$

也可以写成：

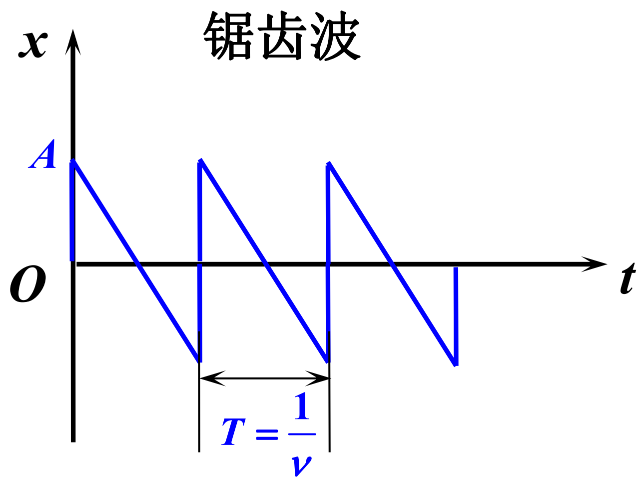
$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(2\pi k\nu t+\varphi_k)]$$

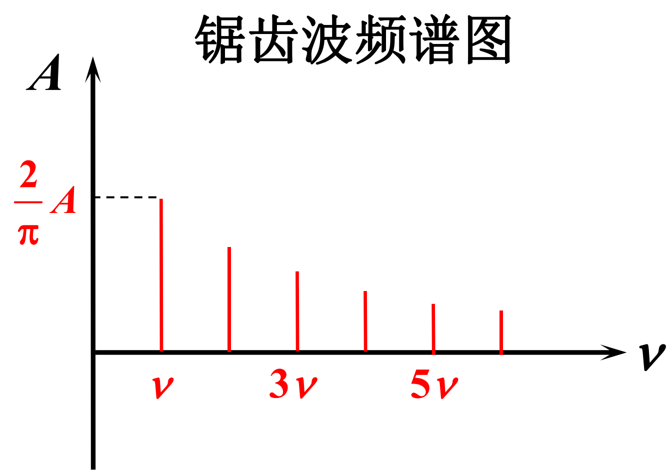
$$A_0=a_0 \quad A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2} \quad \varphi_k=-\arctan\frac{a_k}{b_k}$$

$$F(t)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(2\pi k\nu t+\varphi_k)]$$

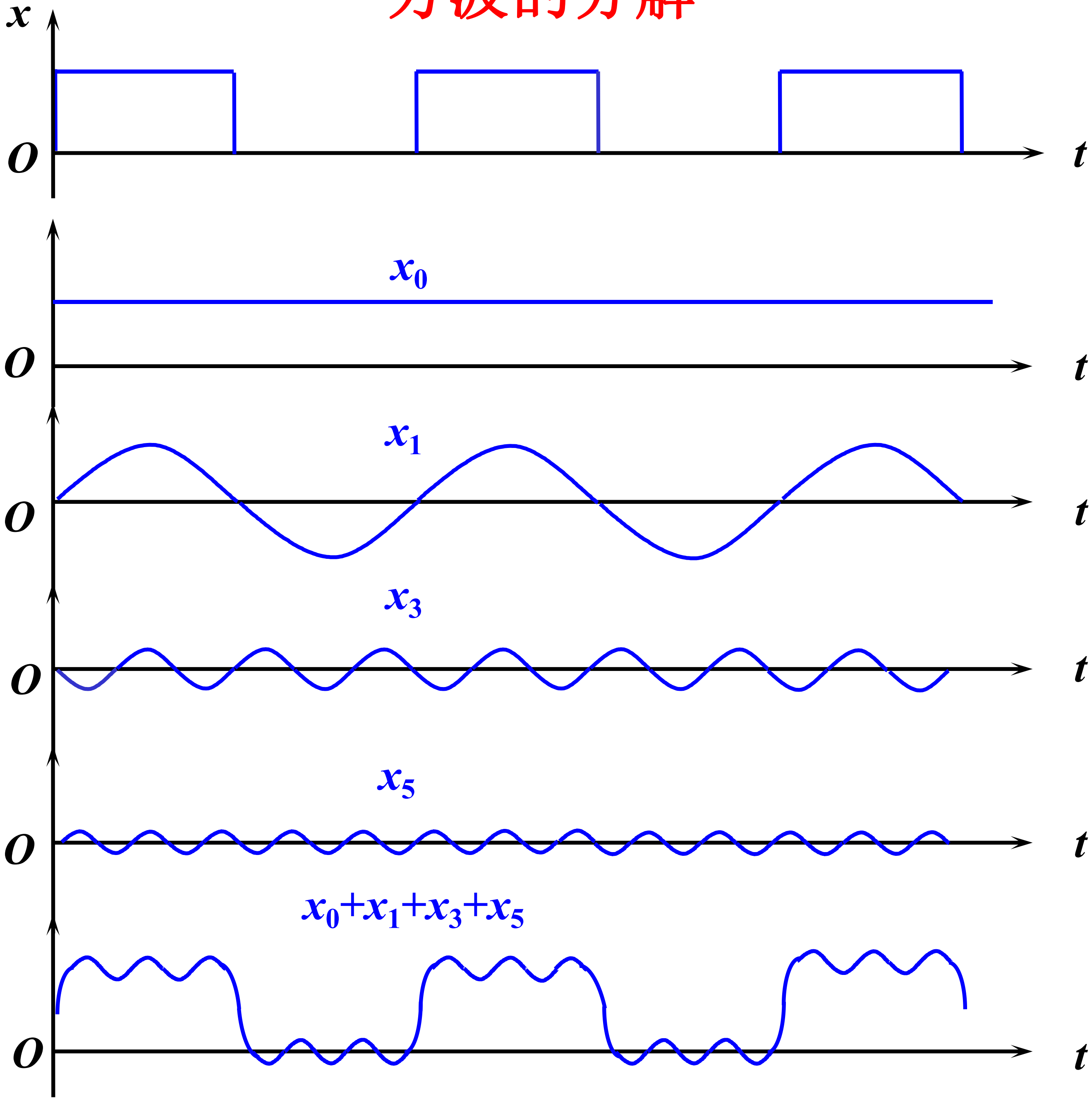
各分振动的频率为：ν(基频)，2ν(二次谐频)，3ν(三次谐频)，…

表示实际振动的各简谐振动成分的振幅和频率的图线称**频谱**，周期振动的频谱是分立的**线状谱**



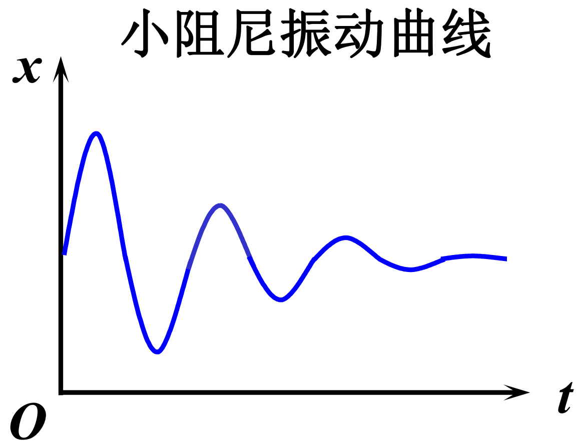


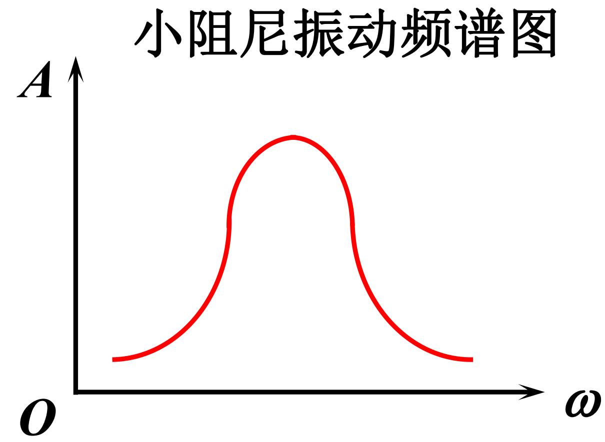
方波的分解



一个非周期性振动可分解为无限多个频率连续变化的简谐振动

非周期振动的频谱是连续谱





一个实际的复杂振动的特征都是由它的频谱决定的，如基频相同(音高相同)的声音的音色决定于它们的高次谐频的个数和相应的振幅

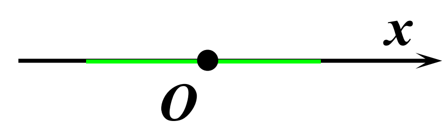
4.8 相空间中振动的轨道

位形空间： 由质点的位置坐标x，y，z构成的空间

相空间： 由质点的位置 x 和动量 P 构成的空间。

一、简谐振动的相图

在位形空间，简谐振动的轨道是一线段

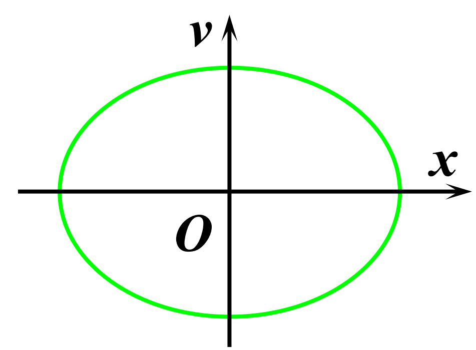


简谐振动位形空间曲线

由做简谐振动的质点的机械能守恒：

$$E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 = 常量$$

在相空间，简谐振动的轨道是一椭圆



简谐振动相空间曲线

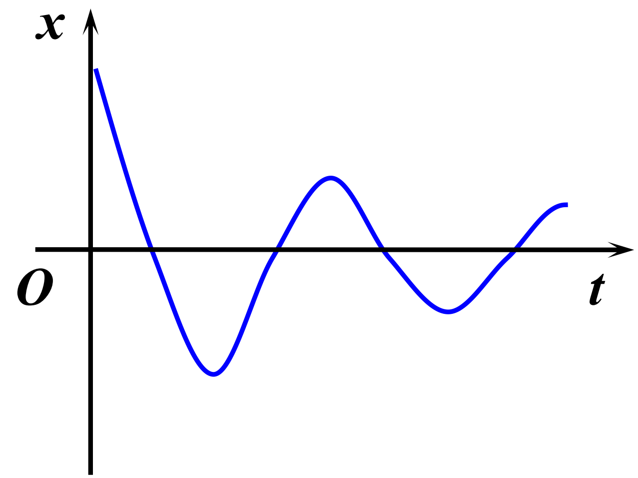
二、阻尼振动的相图

小阻尼振动的表达式：

$$x = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

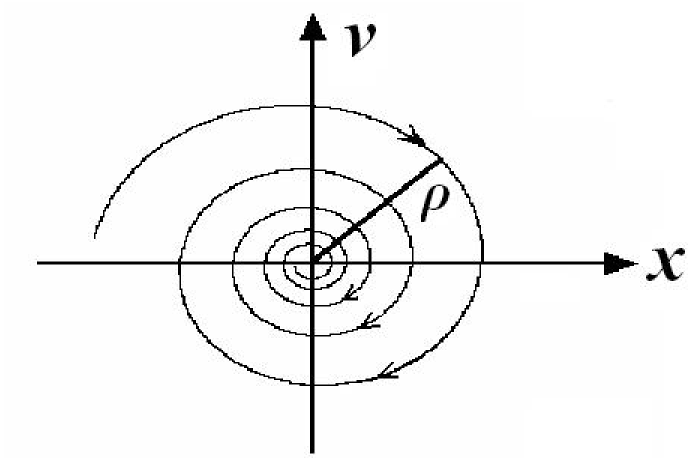
质点的动量：

$$p = mv = m\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$



小阻尼振动振动曲线

$$= -m\beta Ae^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) - m\omega Ae^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$$



小阻尼振动相空间曲线