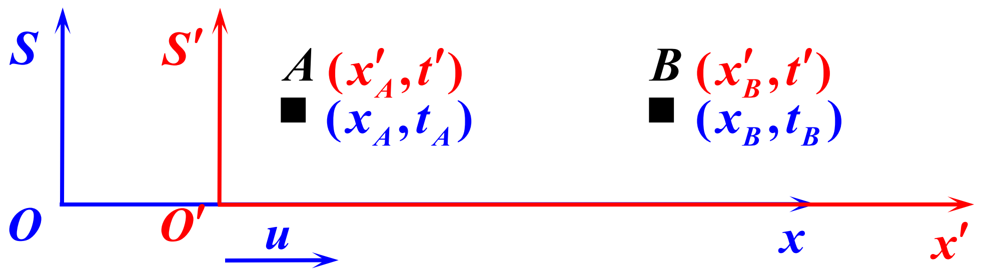
6.3 狭义相对论的时空观

$$t=\frac{t'+\frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad \beta=\frac{u}{c}$$

一、“同时”的相对性

S'系相对于S系沿x轴以速度u运动，O与O'重合时刻，

$t_o=t'_{o'}=0$



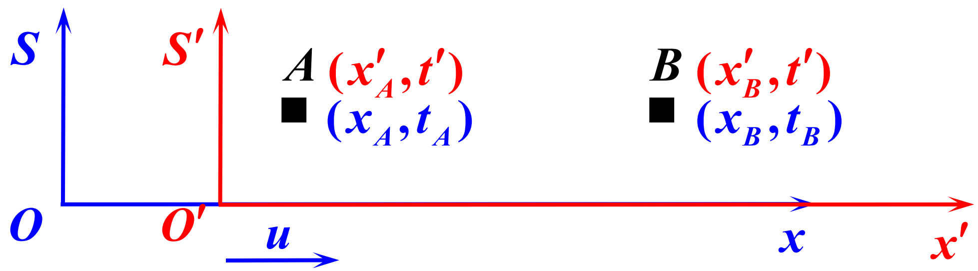
S'系看A、B同时发生， S系看A、B还同时发生吗？

$$t_A=\frac{t'+\frac{ux'_A}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad t_B=\frac{t'+\frac{ux'_B}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}\qquad \begin{array}{c} x'_A\neq x'_B \\ \downarrow \\ t_A\neq t_B \end{array}$$

在S'中沿两惯性系相对运动方向不同空间地点同时发生两个事件，在S中这两事件不会同时发生； 同样在S中沿两惯性系相对运动方向不同空间地点同时发生两个事件，在S'中这两事件也不会同时发生。

不同时发生就有发生的先后顺序

$$t_A = \frac{t' + \frac{u x'_A}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_B = \frac{t' + \frac{u x'_B}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

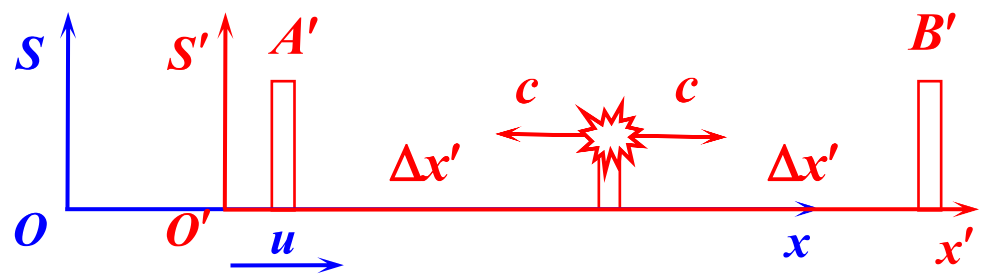


$$x'_A < x'_B \qquad t_A < t_B$$

沿两个惯性系相对运动的方向配置的两个事件，在一个惯性系中这两个事件同时发生，在另一惯性系中观测，处于这个惯性系运动方向后方的事件先发生。

在一个惯性系中同时发生的两事件，在另一个与其相对运动的惯性系中，就不一定是同时发生的，这就是"同时"的相对性。

从光速不变也可以得出同时的相对性



在S'系，A'和B'同时看到闪光

在S系中观测，光向A'传播是逆S'系运动方向，其行程短，光向B'传播是沿S'系运动方向，其行程长。由于光速不变，A'先看到闪光，B'后看到闪光。

在S'系观测的同时发生的事件，在S系中观测却不是同时发生，而是在运动方向后方的事件先发生。

“同时”相对性的讨论

1、如果在一个惯性系中的同一地点同时发生两事件，则在另一个惯性系中也将是同时发生的。

在S'系中同一空间地点同时发生两个事件

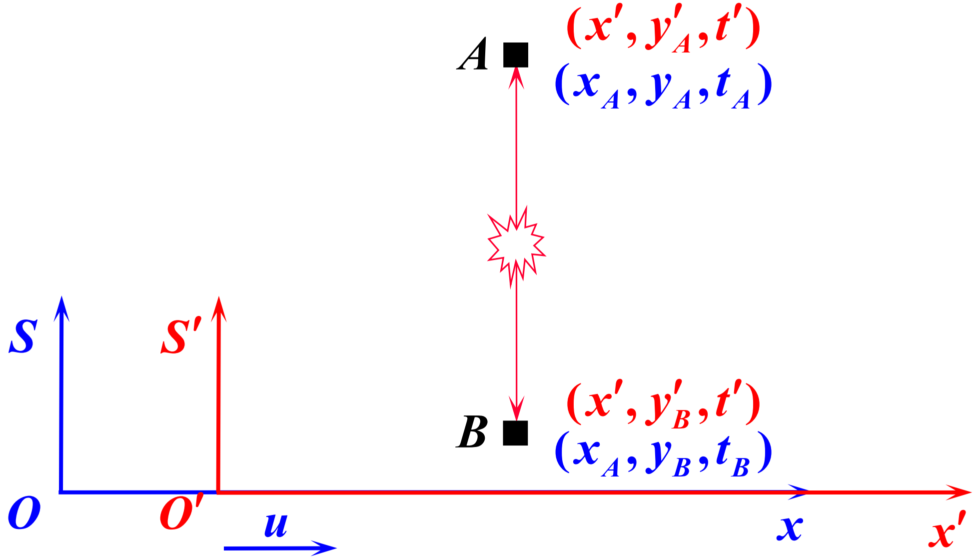
$$A(x',t') \quad B(x',t')$$

$$t_A = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad t_B = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_A = t_B$$

S系中测量，这两事件也是同时发生的

同样，在S系中同一空间地点同时发生的两个事件，在S'系中测量，这两事件也是同时发生的

2、垂直于相对运动方向上发生的两个事件的同时性是绝对的



在S'系中同时发生两个事件

$$A(x', y'_A, t') \qquad t_A = \frac{t' + \dfrac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_B = \frac{t' + \dfrac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} \qquad t_A = t_B$$

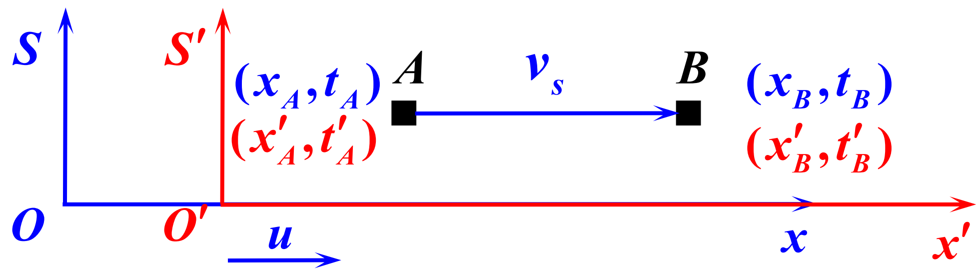
$$B(x', y'_B, t')$$

在S系中测量，也是同时发生的

3、因果关系的绝对性

因果关系具有绝对性，与参考系无关

$$t'=\frac{t-\frac{ux}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma(t-\frac{ux}{c^2})$$



在S系中有因果关系的两事件A、B，其信息联系v_s：

$$v_s=\frac{x_B-x_A}{t_B-t_A}$$

$$t'_B-t'_A=\gamma(t_B-\frac{ux_B}{c^2})-\gamma(t_A-\frac{ux_A}{c^2})=\gamma(t_B-t_A)-\gamma\frac{u(x_B-x_A)}{c^2}$$

$$=\gamma(t_B-t_A)-\gamma(t_B-t_A)\frac{uv_s}{c^2}=\gamma(t_B-t_A)(1-\frac{uv_s}{c^2})$$

$$t_B>t_A\rightarrow t'_B>t'_A \qquad 1-\frac{uv_s}{c^2}>0 \qquad v_s\le c$$

两事件的信息联系速度不能超过光速

4、时刻顺序的相对性

$$t'_B - t'_A = \gamma(t_B - t_A) - \gamma\frac{u(x_B - x_A)}{c^2}$$

有因果关系的两事件A、B，当其信息联系v_s不超过光速(也必须不能超过光速)时，在任何参考系中保持因果关系的绝对性。

无因果(无信息联系)的两事件，发生的先后次序在不同惯性系中可能保持先后次序，可能变成同时，也可能颠倒先后次序。

$$t=\gamma(t'+\frac{ux'}{c^2})$$

5、时间的度量是相对的

对不同参考系，沿相对运动方向配置的同样的两个事件之间的时间间隔一般是不同的。

两个事件在S'系中表示为： $A(x'_A,t'_A)$ $B(x'_B,t'_B)$

两个事件在S系中表示为： $A(x_A,t_A)$ $B(x_B,t_B)$

$$\Delta t=t_B-t_A=\gamma(t'_B+\frac{ux'_B}{c^2})-\gamma(t'_A+\frac{ux'_A}{c^2})$$

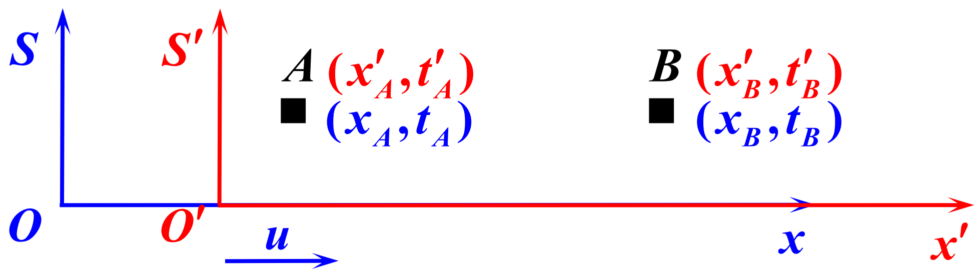
$$=\gamma(t'_B-t'_A)+\gamma\frac{u}{c^2}(x'_B-x'_A)=\gamma\Delta t'+\gamma\frac{u}{c^2}\Delta x'$$

一般情况下： $\Delta t\neq\Delta t'$

二、“时间间隔”的相对性

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t' + \gamma \frac{u}{c^2} \Delta x'}$$

如图，S'系相对于S系沿x轴以速度u运动，O与O'重合时刻，$t_o = t'_{o'} = 0$，考虑有关时间的相对论效应



同时的相对性：　$\Delta x' \neq 0,\quad \Delta t' = 0 \quad \rightarrow \Delta t \neq 0$

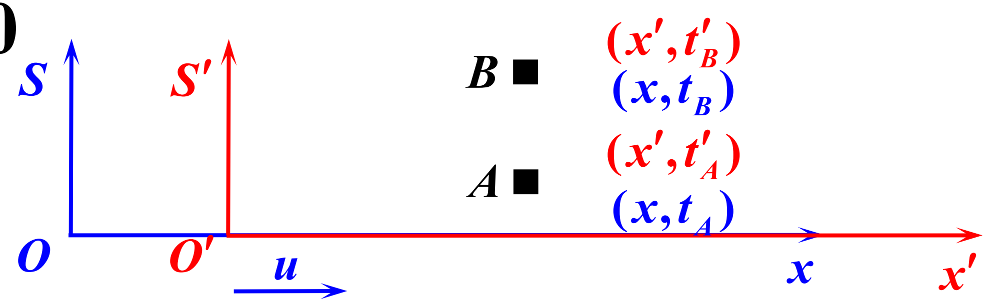
特例：　$\Delta x' = 0,\quad \Delta t' = 0 \quad \rightarrow \Delta t = 0$

时间度量是相对：$\Delta x' \neq 0,\quad \Delta t' \neq 0 \quad \rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t' + \gamma \frac{u}{c^2} \Delta x'$

特例：　$\Delta x' = 0,\quad \Delta t' \neq 0 \quad \rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t'$

$\Delta t = \gamma \Delta t'$

S'系相对于S系沿x轴以速度u运动，O与O'重合时刻，$t_o = t'_{o'} = 0$



在惯性系S'中测量的相对S'系静止的同一地点的两个事件的时间间隔称为原时(固有时间)。在惯性系S中观测的相对S系运动的这两个事件的时间间隔，称为测时。

原时：$\Delta t' = t'_B - t'_A$　测时：$\Delta t = t_B - t_A$　$\Delta t = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t'$

在一个惯性系中(S系)观测，另一个相对该惯性系做匀速直线运动的惯性系(S'系)中同地发生的两个事件的时间间隔变大。这称为时间延缓效应，也称钟慢效应

时间延缓是一种相对效应：S系的观测者认为S'系的时间延缓；S'系的观测者同样认为 S系的时间延缓。

在低速运动的情况下

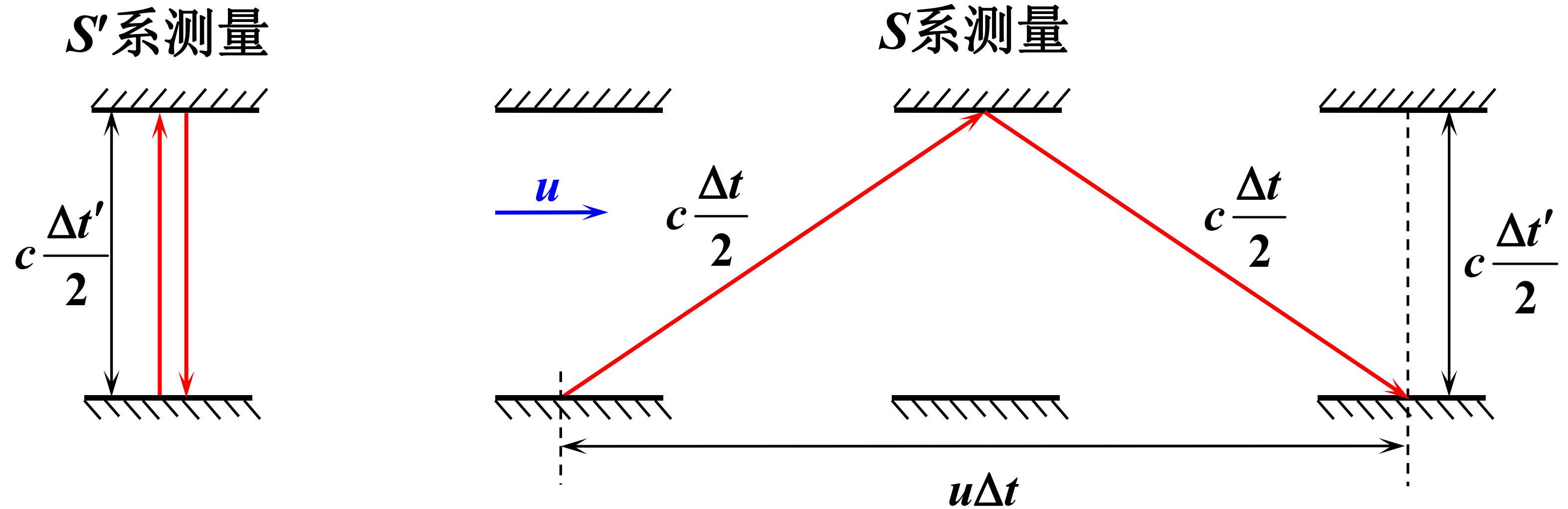
$$u \ll c \quad \beta \approx 0 \quad \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\Delta t' \approx \Delta t'$$

低速运动时两个事件之间的时间间隔在各个参考系中测得的结果都是一样的，即时间的测量与参考系无关，这就是牛顿的绝对时间概念。

牛顿的绝对时间概念是爱因斯坦相对时间概念在参考系间的相对运动速度很低时的近似。

从光速不变也可以得出钟慢效应

S'系相对S系以速度u沿x方向运动，在随S'系运动的仪器中测量光脉冲沿垂直运动的方向往返一次的时间$\Delta t'$



在S系中观测，仪器以速度u沿x方向运动，光沿斜线往返，在S系测量光脉冲往返一次的时间间隔Δt

光速不变，由勾股定理：

$$\left(c\frac{\Delta t}{2}\right)^2=\left(c\frac{\Delta t'}{2}\right)^2+\left(u\frac{\Delta t}{2}\right)^2 \qquad \Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

孪生子佯谬和孪生子效应

孪生子佯谬：有一对孪生兄弟，哥哥告别弟弟乘宇宙飞船去太空旅行，返回后相见。由于时间延缓效应，弟弟认为哥哥比自己年轻。同样，哥哥认为弟弟相对自己运动，弟弟比自己年轻。问题：到底谁年轻？

时间延缓效应是狭义相对论的结果，要求飞船和地球同为惯性系。飞船在起飞、降落和掉头时有加速度，不是惯性系了。这一问题的严格求解要用到广义相对论，计算结果是，兄弟相见时哥哥比弟弟年轻。

1971年，科学家用Cs(铯)原子钟放在飞机中做环球飞行，然后与地面的基准钟比较。发现在误差范围内，广义相对论的理论值和实验值一致，验证了孪生子效应。

μ子的寿命实验 (B. Rossi, D. B. Hall 1941)

μ子在高空大气顶层形成，静止平均寿命τ_0=2.15×10^{-6}s，速率u=0.995c。若无时间膨胀效应，它行走的距离：

$$l = u\tau_0 = 640\mathrm{m}$$

地面观测不到

在地面上观测，由于时间膨胀效应：

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = 2.15\times10^{-5}\mathrm{s}$$

μ子衰变前可飞行距离：

$$l = u\Delta t = 6400\mathrm{m}$$

实际上可到达地面

例6-1 π^+介子是一种不稳定的粒子(衰变为μ介子与中微子)。其静止时平均寿命为$\tau_0=2.5\times10^{-8}$s。用高能加速器把介子加速到u=0.99c，**求**：介子平均一生最长行程。

解：介子静止时平均寿命为原时，介子运动时，在实验室测得的平均寿命(测时)：

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

在实验室测得它通过的平均距离：

$$l = u\Delta t = 53\text{m}$$

理论与实验结果符合的很好

例6-2 飞船以$u=9\times10^3\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$的速率相对地面飞行。飞船上的钟走了5秒，问：用地面上的钟测量经过了几秒？

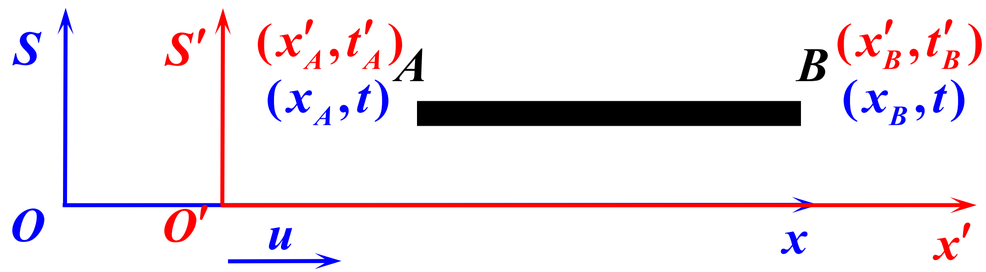
解： 飞船上的钟测量的是原时，地面上的钟测量的是测时

$$\Delta t=\frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=5.000000002\text{s}$$

低速情况，时间延缓效应很难发现！

三、“长度”的相对性

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



在S'系中测得相对S'系静止的杆AB的长度称**静长**：

$$\Delta L' = x'_B - x'_A$$

静长测量时不要求同一时间测量两端

在S系中测量相对S系运动的杆AB的长度称**测长**：

$$\Delta L = x_B - x_A$$

测长测量时要求要同时测量物体两端的位置坐标

$$\Delta L' = x'_B - x'_A = \frac{x_B - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_A - ut}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_B - x_A}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{\Delta L}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\Delta L' = \frac{\Delta L}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \Delta L = \sqrt{1-\beta^2}\,\Delta L'$$

在物体静止的惯性系中测量物体的长度(静长)$\Delta L'$最长；在与物体有相对运动的惯性系中测量物体的长度(测长)ΔL总要比静长短一些，这种效应称为尺缩效应(长度收缩效应)。

长度收缩也是一种相对效应：S系中测量静止于S'系的物体的长度要短于S'系测量的该物体的长度；S'系中测量静止于S系的物体的长度要短于S系测量的该物体的长度。

在不同的惯性系中测量同一物体的长度是不同的，长度的测量依赖于惯性系，长度的测量是相对的。

当$u<<c$时：$\sqrt{1-u^2/c^2}\approx 1 \quad \Delta L' \approx \Delta L$

在低速运动的情况下，在各个参考系中测得物体的长度都是一样的，即空间的测量与参考系无关。这就是牛顿的绝对空间概念。牛顿的绝对空间概念是爱因斯坦相对空间概念在参考系的相对运动速度很低时的近似。

$$\Delta L = \sqrt{1-u^2/c^2}\,\Delta L'$$

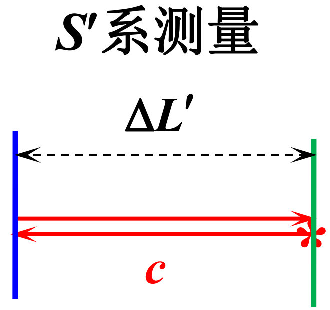
若$u \geq c$，则测长为零或虚数，不合理。

u是参考系间的相对速度，它不能超过c，而参考系是以具体物体来体现的，所以真空中的光速，是实际物体速度的上限。

从光速不变也可以得出尺缩效应

如图，仪器随S'系运动，在S'系中测量仪器长度(运动方向)为$\Delta L'$，测量仪器中光脉冲往返一次(运动方向)的时间间隔为$\Delta t'$

$$\Delta t' = \frac{2\Delta L'}{c}$$



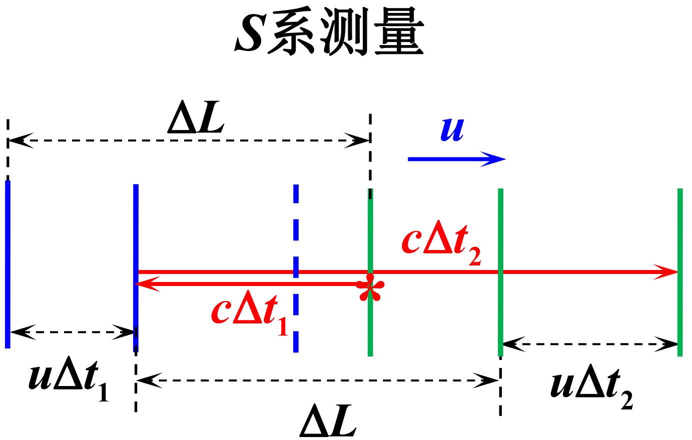
在S系中仪器以速度u沿x方向运动，在S系中测量仪器长度为ΔL，测量仪器中光脉冲往返一次的时间间隔为Δt，由钟慢效应：

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{2\Delta L'}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Delta t = \frac{2\Delta L'}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

在S系中测量，光脉冲逆仪器运动方向传播的时间间隔Δt_1与沿仪器运动方向传播的时间间隔Δt_2不一样，总时间：

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$$



如图光脉冲逆仪器运动方向传播：

$$\Delta L = c\Delta t_1 + u\Delta t_1 \qquad \Delta t_1 = \frac{\Delta L}{c+u}$$

光脉冲再沿仪器运动方向传播：

$$\Delta L = c\Delta t_2 - u\Delta t_2 \qquad \Delta t_2 = \frac{\Delta L}{c-u}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{c+u} + \frac{\Delta L}{c-u} = \frac{2c\Delta L}{c^2-u^2} = \frac{2\Delta L}{c(1-u^2/c^2)} = \frac{2\Delta L'}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Delta L = \sqrt{1-u^2/c^2}\,\Delta L'$$

问题：与运动方向垂直的长度收缩吗？

静长：$\Delta l' = y'_B - y'_A$

测长：$\Delta l = y_B - y_A = y'_B - y'_A = \Delta l$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x' + ut')$$

$$y = y' \quad z = z'$$

$$t = \frac{t' + \frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(t' + \frac{ux'}{c^2})$$

与运动方向垂直的长度不收缩

长度测量的相对性是同时相对性的必然结果

对相对运动的参考系测量物体长度时，要求同时测量，而一个参考系时同时，另一参考系不一定是同时。不同参考系有各自的同时性标准，因此长度的测量变得具有相对性了。

例6-3 长度5m的飞船，相对地面的速度为$9\times10^3 \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，
求：在地面测量飞船长度(测长)

解：在与飞船一起运动的坐标系中测量飞船的长度为静长

$$\Delta l' = 5\mathrm{m}$$

在地面上测量飞船的长度为测长：

$$\Delta l = \sqrt{1-u^2/c^2}\,\Delta l' = 4.999999998\mathrm{m}$$

低速运动时，长度收缩效应也很难测出。

例6-4 离地面6000m的高空大气层中，产生一π介子，其以速度v=0.998c飞向地球。假定π介子在自身参照系中的平均寿命τ=2×10^{-6}s，问：

(1) 地球上的观测者判断π介子能否到达地球？

(2) 与π介子一起运动的参考系中的观测者的判断结果又如何？

解：(1) π介子在自身参考系中的平均寿命为原时：

$$\Delta t' = 2\times10^{-6}\text{s}$$

地球上观测者，测得π介子的寿命为测时：

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = 3.16\times10^{-5}\text{s}$$

在地球观测者看来，π介子一生可飞行距离：

$$l = v\Delta t = 9470\text{m} > 6000\text{m}$$ π介子能达到地球

(2) 在与π介子共同运动的参考系中， π介子是静止的，地球以速率v=0.998c接近π介子

从地面到π介子产生处的高度是在地球参考系中测得的静长：

$$\Delta L' = 6000\text{m}$$

在π介子参考系中，这段距离是测长：

$$\Delta L = \sqrt{1 - v^2 / c^2}\Delta L' = 379\text{m}$$

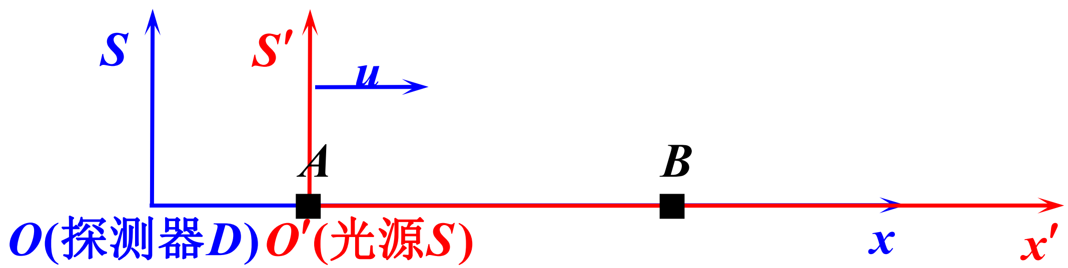
在π介子参考系中测得地球在π介子一生的时间内的行程：

$$l = v\tau = 599\text{m} > 379\text{m}$$

地球能达到π介子

例6-5 推导光(电磁波)的多普勒效应公式

解： 选光源参考系(S'系)和探测器参考系(S系)，光源在O'点，探测器在O点，光源(S'系)相对探测器(S系)沿x方向(光源S和探测器D连线方向)以速度u远离，两坐标系x轴重合，O与O'重合时刻，$t_o=t'_{o'}=0$



光源参考系(S'系)中，t'时刻光源振动状态为A事件，一光源振动周期T_S(光源静止情形的波的周期)后光源振动状态沿$x'(x)$轴传播到的位置为B事件，两事件在S'系的时空坐标为：

$$S': \quad A(0,t') \quad B(\lambda = cT_S, t' + T_S)$$

$$S': \quad A(0,t') \quad B(\lambda = cT_S, t'+T_S)$$

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

由洛伦兹变换，两事件在S系的时空坐标为：

$$S: \quad A\left(\frac{ut'}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, t_A\right) \quad B\left(\frac{cT_S + u(t'+T_S)}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, t_B\right)$$

在S系中测的波长(探测器接收的波长)为：

$$\lambda' = \frac{cT_S + u(t'+T_S)}{\sqrt{1-(u/c)^2}} - \frac{ut'}{\sqrt{1-(u/c)^2}} = \frac{cT_S + uT_S}{\sqrt{1-(u/c)^2}}$$

光源和探测器相互远离时，探测器接收的频率为：

$$\nu_D = \frac{c}{\lambda'} = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}}\frac{1}{T_S} = \sqrt{\frac{c-u}{c+u}}\nu_S$$

光源和探测器相互接近时，u取负值

例6-6 一选手在地球上以10s的时间跑完100m，在飞行速度为–0.98c的飞船上观察者看来，这选手跑了多长时间和多长距离？(设飞船S系沿地球S'系的负向运动)

有人作出如下解答(正确与否未知，要判断)：

地球S'系相对飞船S系以速度u=0.98c运动：

$$\Delta t' = 10\text{s} \quad \Delta L' = 100\text{m} \quad u = 0.98c$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{10}{\sqrt{1-0.98^2}} = 50.25(\text{s})$$

$$\Delta L = \Delta L'\sqrt{1-u^2/c^2} = 100\sqrt{1-0.98^2} = 20(\text{m})$$

试分析此解答是否正确，如有错误请指出，并叙述出正确的解题思路。

解(1)：地面的100米跑道是静止在地面上，从地面参考系看，这是静长；从飞船上看，是测长：

$$\Delta L = \Delta L'\sqrt{1-u^2/c^2} = 100\sqrt{1-0.98^2} = 20(\mathrm{m})$$

从飞船上看，人跑完这段路程的始末时刻不是同一地点，要用洛伦兹坐标变换后再求时间

$$x = \frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma(x'+ut')$$

$$t = \frac{t'+\dfrac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\left(t'+\frac{ux'}{c^2}\right)$$

人在跑道起点和终点的时空坐标：

$$S':(x_1', t_1'),\quad (x_1'+100, t_1'+10)$$

$$S:(x_1, t_1),\quad (x_2, t_2)$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t' + \dfrac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{10+\dfrac{0.98c}{c^2}\times 100}{\sqrt{1-0.98^2}} \approx 50.25(\mathrm{s})$$

解(2)： 直接从两个事件(人在跑道起点和终点)的时空坐标的洛伦兹变换出发：

$$x=\frac{x'+ut'}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma(x'+ut')$$

$$t=\frac{t'+\frac{ux'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}=\gamma\left(t'+\frac{ux'}{c^2}\right)$$

$$S':(x_1',t_1'),\quad (x_1'+100,t_1'+10)$$

$$S:(x_1,t_1),\quad (x_2,t_2)$$

$$\Delta x=\frac{\Delta x'+u\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{100+0.98c\times 10}{\sqrt{1-0.98^2}}\approx 1.48\times 10^{10}(\mathrm{m})$$

$$\Delta t=\frac{\Delta t'+\frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{10+\frac{0.98c}{c^2}\times 100}{\sqrt{1-0.98^2}}\approx 50.25(\mathrm{s})$$

这里的Δx不是从飞船上测的跑道的长度，因为不是同时测量的跑道两端，测量跑道的起点是在t_1时刻，测量跑道的终点是在t_2时刻。

想从飞船上同时测量跑道的长度，需要用t_2时刻跑道终点的空间坐标减去t_2时刻跑道起点的空间坐标

从飞船上看跑道起点t_1时刻和跑道起点t_2时刻的坐标为：

$$\Delta x = \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$(x_1,\ t_1) \quad (x_1 + u\Delta t,\ t_2)$$

$$\Delta L = x_2 - (x_1 + u\Delta t) = \Delta x - u\Delta t$$

$$= \frac{\Delta x' + u\Delta t'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - \frac{u(\Delta t' + \frac{u}{c^2}\Delta x')}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$$

$$= \frac{\Delta x' - \frac{u^2}{c^2}\Delta x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \Delta x'\sqrt{1-u^2/c^2}$$

$$= 100\sqrt{1-u^2/c^2} = 20(\mathrm{m})$$