第二篇　电磁学

电磁学是研究有关电和磁现象的科学

电能可以通过某些传感器很方便地转化为其他形式的能量；电能便于远距离传输，而且效率很高；

磁也广泛出现在人类的生活， 如电磁铁、磁卡、磁盘等等。

电磁波的传播速度就是光速，用来远距离传递信息。

第七章　静电场和恒定电场

7.1 静电场 高斯定理

一、电荷

1、电荷只有正、负两种

电荷：一种是正电荷，一种是负电荷。同种电荷相排斥；异种电荷相吸引。

宏观物体的电磁现象实质上都来源于微观粒子的状态和运动。荷电性是基本粒子的重要属性。

例如：电子带有负电荷；质子带有正电荷；光子不带电荷；π^+介子带正电荷；π^-介子带负电荷。

中性原子和带电的离子都是由原子核与电子依靠电相互作用而构成的。

2、电荷是量子化的

密立根通过带电油滴实验测量了基本电荷

基本电荷：$e = 1.60\times10^{-19}\mathrm{C}$

质子有电荷e，电子有电荷$-e$， π^+介子有电荷e

实验表明，所有基本粒子所带的电荷都是基本电荷的整数倍，因此任何宏观带电体的电荷，只能是基本电荷的整数倍，即电荷是量子化的。

夸克(层子)带分数电荷$\pm e/3$和$\pm 2e/3$

电荷仍然是量子化的，基本电荷的数值应该更正为$e/3$

对于通常的宏观带电体，由于所带电量比基本电荷大得多，其电荷的增减及分布仍可以认为是连续的。

点电荷

当一个带电体本身的线度比我们所研究的问题中所涉及的距离小很多时，该带电体的形状与电荷在其上的分布状况均无关紧要，该带电体就可以看作一个带电的点，称为点电荷

3、电荷守恒

电荷守恒定律：在一孤立系统内发生的任何过程中总电荷数不变，即在任一时刻存在于系统中的正电荷和负电荷的代数和不变。

宏观现象中电荷守恒定律是成立的，如静电感应现象和摩擦起电，正负电量的代数和仍为零

涉及原子、原子核和基本粒子的微观现象中，电荷守恒定律也都是严格成立的，如一个高能光子的消失，会产生正负电子对。

4、电荷是一个洛仑兹不变量

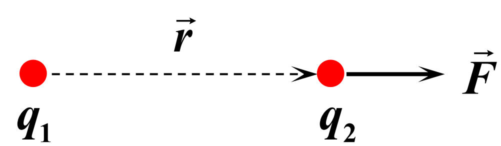
一个电荷的电量与它的运动状态无关，在不同惯性系中观测，同一带电粒子的电量相同。

二、库仑定律与静电场力叠加原理

1、库仑定律

库仑定律： 真空中两静止(或低速)点电荷间的静电作用力与两个点电荷所带电量的乘积成正比，与它们间距离的平方成反比，作用力的方向沿着它们的连线。

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^3}\vec{r}}$$



$$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2\cdot N^{-1}\cdot m^{-2}}$$ 真空介电常量

2、静电场力的叠加原理

实验表明：两个点电荷之间的作用力并不因第三个点电荷的存在而改变。

静电场力叠加原理：两个以上的点电荷对一个点电荷的作用力，等于各个点电荷单独存在时对该点电荷作用力的矢量和。

$$\boxed{\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i}$$

在电磁场的量子效应中，经典叠加原理不成立。

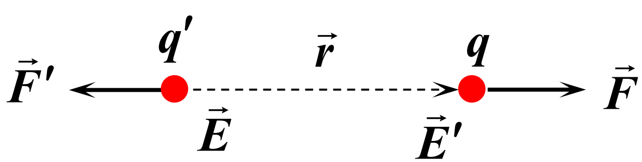
三、电场强度及其叠加原理

1、电场

早期认为库仑力是超距作用

后来法拉第提出场的观点：物质间的相互作用力要靠中介物质来传递，这种物质就是场。

带电体周围存在着传递电相互作用的电场，处于电场中的电荷要受到电场力(电场对电荷的作用力)的作用。



电荷↔电场↔电荷

静止电荷间的库仑力满足牛顿第三定律，一般来说，两个有相对运动的电荷间的相互作用力并不是作用力和反作用力。

电场也具有能量、动量和质量

在电磁相互作用下，带电粒子及其场的总能量和总动量是守恒量

电磁场是量子化的，具有波动性和粒子性，电磁场对应的基本粒子是光子。

相对于观察者静止的电荷产生的电场称静电场(本章中如不特别强调，所说的电荷都是静止电荷，所说的电场都是静电场)

静电场对外的表现有两点：

1、对场中的电荷有力的作用(电场力)

2、电荷在电场中移动时，电场力做功，且静电场对电荷做功与电荷移动路径无关

2、电场强度

电场强度(场强)：描述电场中各点电场的强弱的物理量

设一空间带电体(场源电荷)产生电场，取一试验电荷(电量充分地小，线度足够地小)q_0，静止地放到电场中的P点，测量其受到的电场力F。

定义电场强度(也适用于非静电场)：

$$\boxed{\vec{E} = \vec{F} / q_0}$$

电场强度是矢量，其大小等于单位电荷在该点受的电场力的大小，方向为正电荷在该点受的电场力的方向

电场强度的单位：$\mathrm{N \cdot C^{-1}}$ 或 $\mathrm{V \cdot m^{-1}}$

电场存在于电荷周围的整个空间，可用矢量函数描述

$$\vec{E} = \vec{E}(r) = \vec{E}(x, y, z)$$

3、场强叠加原理

对多个点电荷q_1，q_2，…，q_n组成的系统(点电荷系统)，对试验电荷q_0，由静电场力叠加原理：

$$\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n$$

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}=\frac{\vec{F}_1}{q_0}+\frac{\vec{F}_2}{q_0}+\cdots+\frac{\vec{F}_n}{q_0}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_n=\sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$$

场强叠加原理：点电荷系在某点产生的电场强度等于每个点电荷单独在该点产生的电场强度的矢量和。

场强的可叠加性，不仅对点电荷系成立，对任意连续带电体所产生的电场也是正确的。

4、电场力

点电荷q 在电场(包括非静电场)中受的电场力 $\boxed{\vec{F}=q\vec{E}}$

5、电场强度的计算

$$\vec{F}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qq}{r^3}\vec{r}$$

1、点电荷的电场强度

$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^3}\vec{r}$$

$\vec{r}$ 是点电荷到场点的矢径

点电荷的电场强度球对称

2、点电荷系统的电场强度

由场强叠加原理：$\vec{E}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^3}\vec{r}_i$

3、电荷连续分布的带电体的电场强度

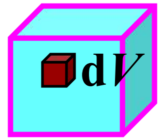
求和改为积分：$\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}=\int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^3}\vec{r}$

问题：点电荷场强公式中$r\to 0$，$E\to\infty$，怎么理解？

$\mathrm{d}V = \mathrm{d}S \cdot \mathrm{d}l$

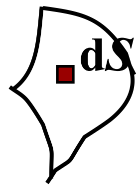
电荷密度

电荷体密度



$$\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V} \qquad \mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$$

电荷面密度



$$\sigma = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}S} \qquad \mathrm{d}q = \sigma \mathrm{d}S$$

电荷线密度

$$\lambda = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}l} \qquad \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l$$

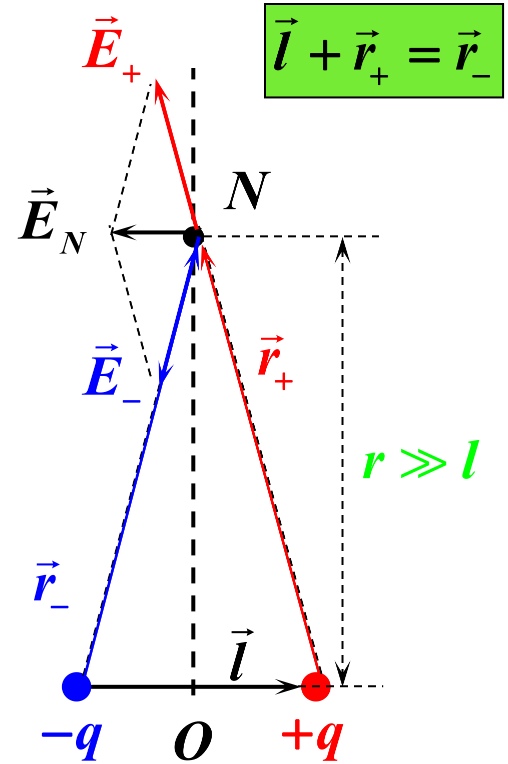
$$\mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V = \rho \mathrm{d}S \cdot \mathrm{d}l = \sigma \mathrm{d}S = \lambda \mathrm{d}l \qquad \sigma = \rho \mathrm{d}l \qquad \lambda = \rho \mathrm{d}S$$

问题：λ与σ有什么关系？

有了点电荷的电场强度公式和场强叠加原理，原则上从电荷分布求电场强度的问题都可以解决

例7-1 电偶极子中垂面和轴线延长线上任意点的场强

解：电偶极子是由间距l，大小相等，符号相反的点电荷$+q$和$-q$组成的系统



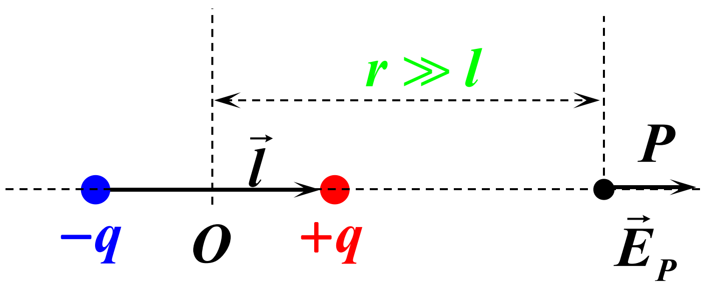
$$\vec{E}_N=\vec{E}_+ + \vec{E}_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_+^3}\vec{r}_+ + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-q}{r_-^3}\vec{r}_-$$

$$\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-)}{r^3} = \frac{-q\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{-\vec{p}_\text{e}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

定义电偶极矩：$\vec{p}_\text{e}=q\vec{l}$ 规定 $\vec{l}$ 方向由$-q$指向$+q$

电偶极子是一个重要的物理模型，在电介质的极化，电磁波的发射与吸收等研究中都要用到。

如图，在电偶极子轴线延长线上的一点*P*，负电荷产生的场强向左，正电荷产生的场强向右，它们产生的场强方向都沿着轴线。



$$E_P = E_{P+} - E_{P-} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r-l/2)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r+l/2)^2}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qlr}{(r^2-l^2/4)^2} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2qlr}{r^4} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p_e}{r^3}$$

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}_e}{r^3}$$

$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

均匀外电场中，电偶极子受的合力为零

均匀外电场中，对任意O点，电偶极子受的力矩：

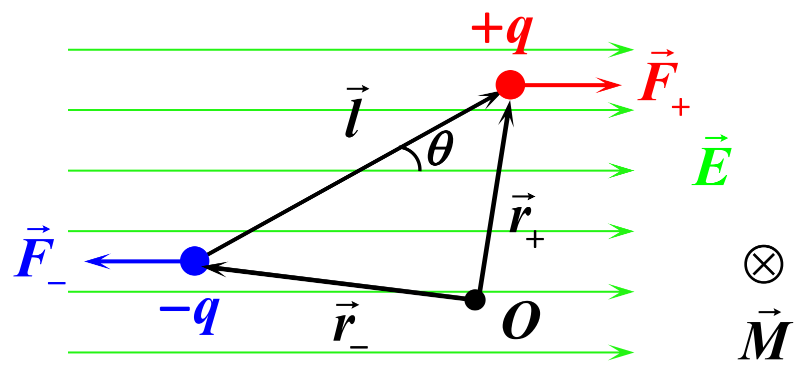
$$\vec{M} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_-$$

$$= q\vec{r}_+ \times \vec{E} - q\vec{r}_- \times \vec{E}$$

$$= q(\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \times \vec{E}$$

$$= q\vec{l} \times \vec{E}$$

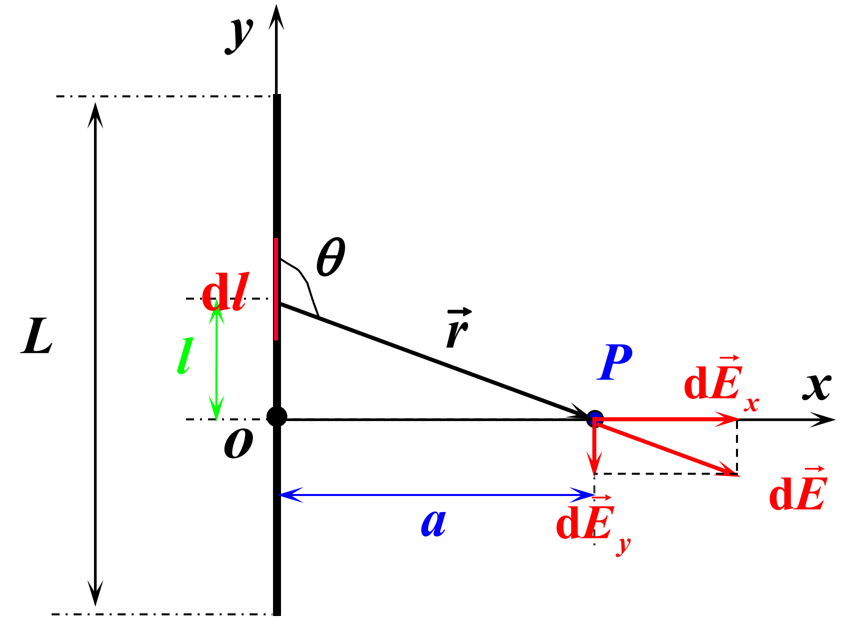
$$= \vec{p}_e \times \vec{E}$$



外电场的作用总是使电偶极矩转向外电场的方向

在非均匀外电场中，电偶极子受的合力、合力矩一般都不为零，所以转动和平动同时发生

例7-2 长为L，电荷线密度为λ的均匀带电直线的线外一点P的场强 。



解： 如图垂直直线方向为x轴，平行直线方向为y轴建立坐标系，取P点对直导线的垂足为原点，距原点 l 处的任一线元$\mathrm{d}l$在P点的电场

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^3}\vec{r}$$

$$r = \frac{a}{\sin\theta} \qquad l = -\frac{a}{\tan\theta} \qquad \mathrm{d}l = \frac{a}{\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

P点电场大小：

$$\mathrm{d}E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda \mathrm{d}l}{r^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\mathrm{d}\theta$$

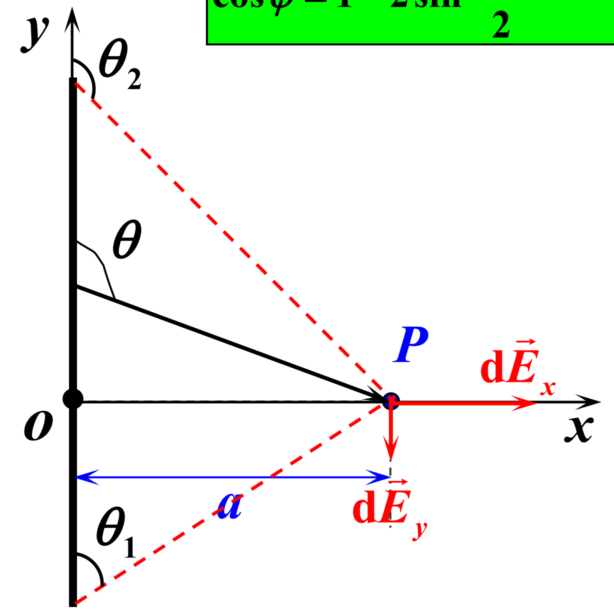
P点电场的x、y分量： $\mathrm{d}E_x = \mathrm{d}E\sin\theta \quad \mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\theta$

$$\mathrm{d}E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\mathrm{d}\theta \quad \mathrm{d}E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$\cos(\alpha-\beta)$
$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\cos\varphi = 1-2\sin^2\frac{\varphi}{2}$

积分得到场强：



$$E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

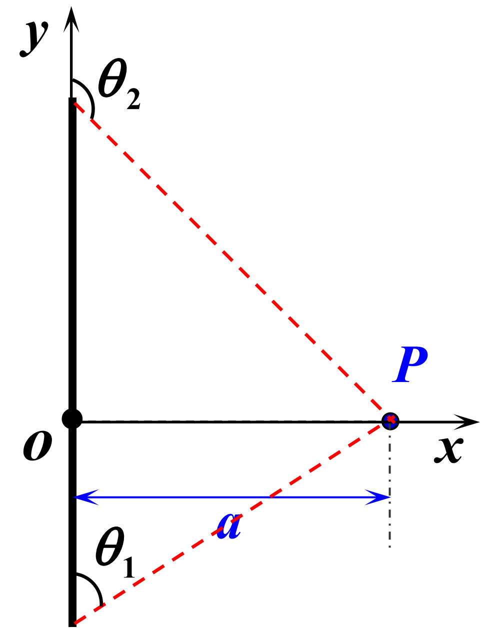
$$E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

$$E = \sqrt{E_x^2+E_y^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{2-2\cos\theta_1\cos\theta_2-2\sin\theta_1\sin\theta_2}$$

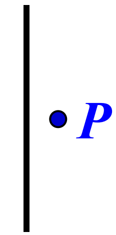
$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}\sqrt{2-2\cos(\theta_1-\theta_2)} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a}\left|\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right|$$

$$E_\perp = E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \qquad E_{//} = E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}(\sin\theta_2 - \sin\theta_1)$$

特例：

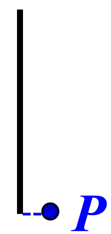


直线无限长时，$\theta_1 = 0$，$\theta_2 = \pi$



$$E_\perp = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 a} \qquad E_{//} = 0$$

直线半无限长时，$\theta_1 = \pi/2$，$\theta_2 = \pi$

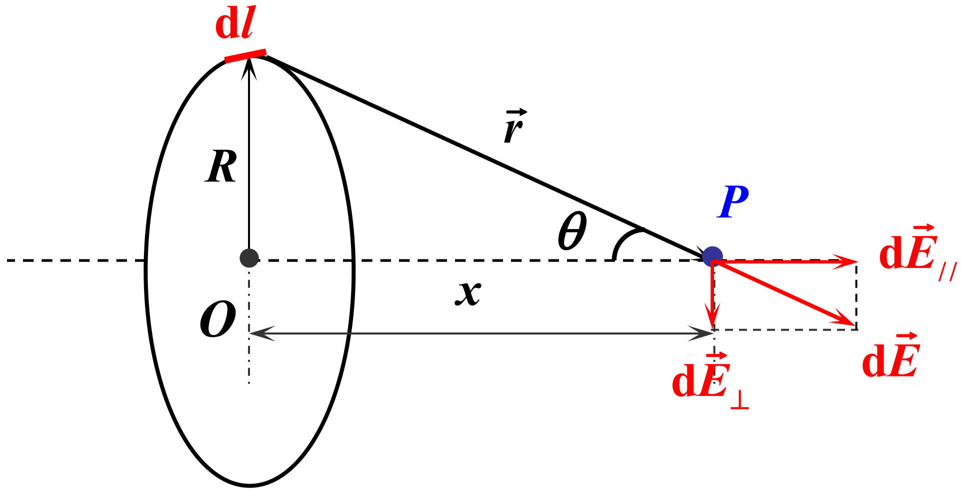


$$E_\perp = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a} \qquad E_{//} = -\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

P点在无限远时，$\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ $\quad E_\perp = 0 \quad E_{//} = 0$

P点在很远处时，带电直线可看做点电荷

例7-3 总电量q，半径R的均匀带电细圆环轴线上任一点P的场强。



解： 如图，以圆心O为原点，设细圆环的电荷线密度为λ，其上任一线元$\mathrm{d}l$所带的电量$\mathrm{d}q$产生的电场的大小：

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}l}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2\pi R}\frac{\mathrm{d}l}{r^2}$$

因圆环对其轴线对称，电场垂直轴线的分量互消，平行轴线分量

$$\mathrm{d}E_{//}=\mathrm{d}E\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{2\pi R}\frac{\mathrm{d}l}{r^2}\cos\theta$$

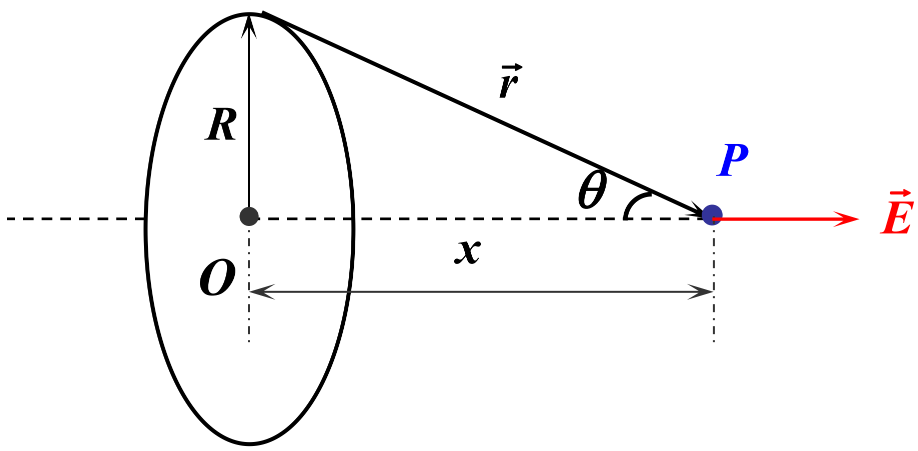
对整个细圆环积分：

$$E = \int \mathrm{d}E_{//}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{2\pi R} \frac{\cos\theta}{r^2} \int_0^{2\pi R} \mathrm{d}l$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\cos\theta}{r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$



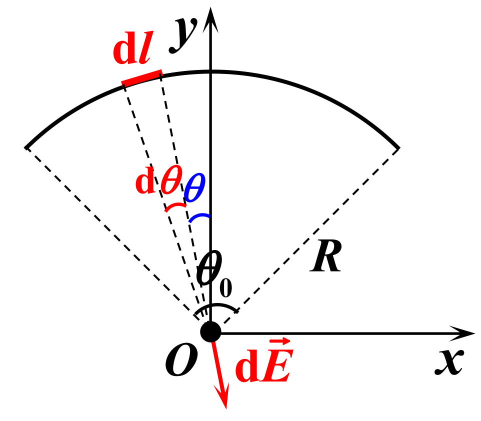
$$r^2 = x^2 + R^2 \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}}$$

方向：沿轴线方向向右

特例： 1) 圆心处 $x = 0$ $\boxed{E = 0}$

2) 无限远处 $x >> R$ $\boxed{E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}}$

例7-4 圆心角θ_0，电荷线密度λ的一段圆弧在圆心O处产生的场强



解： 如图，以圆心O为原点，过圆弧中点为y轴，建立坐标系：

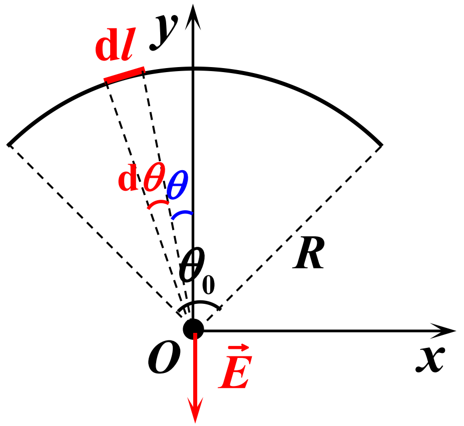
在圆弧上任选一线元dl，其在圆心O产生的电场的大小：

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}q}{R^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}l}{R^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda R\mathrm{d}\theta}{R^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}\theta}{R}$$

圆弧关于y轴对称，电场x轴方向的分量互消，y轴方向分量

$$\mathrm{d}E_y=\mathrm{d}E\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\mathrm{d}\theta}{R}\cos\theta$$

对整段圆弧积分：



$$E=\int \mathrm{d}E_y=2\int_0^{\frac{\theta_0}{2}}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{R}$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}\sin\frac{\theta_0}{2}$$

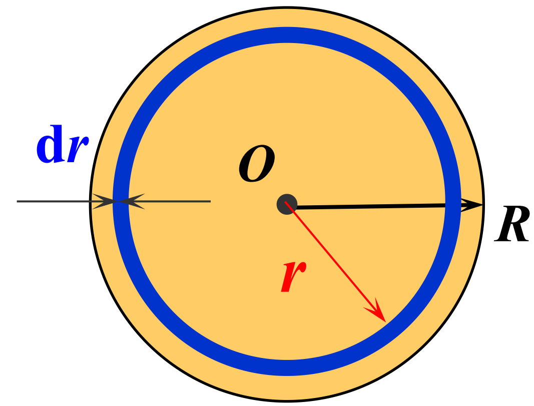
方向：沿着圆弧中点与圆心连线方向向下

特例： 1) 半圆 $\theta_0=\pi$ $\boxed{E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R}}$

2)圆 $\theta_0=2\pi$ $\boxed{E=0}$

例7-5 总电量Q，半径R的均匀带电圆盘轴线上的场强

解：设圆盘电荷面密度σ，取半径r，宽$\mathrm{d}r$的细圆环，细圆环上电荷$\mathrm{d}Q$：



$$\mathrm{d}Q = \sigma 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{Q}{\pi R^2} 2\pi r \mathrm{d}r = \frac{2Qr}{R^2} \mathrm{d}r$$

$\mathrm{d}Q$在轴线上距离圆心O为x处产生的场强：

$$\mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} r\mathrm{d}r$$

$$E = \int \mathrm{d}E = \int_0^R \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \frac{x}{(x^2+r^2)^{3/2}} r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} [1 - \frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}]$$

方向：沿着轴线向外

$\boxed{(1+x)^{\mu} = 1 + \mu x + \cdots}$

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}[1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}]$$

当$R >> x$，无限大均匀带电平面场强：

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

当$R << x$：

$$1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} = 1 - \frac{1}{[1 + (R/x)^2]^{1/2}} = 1 - [1 + (\frac{R}{x})^2]^{-1/2}$$

$$\approx 1 - [1 - \frac{1}{2}(\frac{R}{x})^2] = \frac{1}{2}(\frac{R}{x})^2$$

$$E = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R^2}[1 - \frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}] \approx \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$$