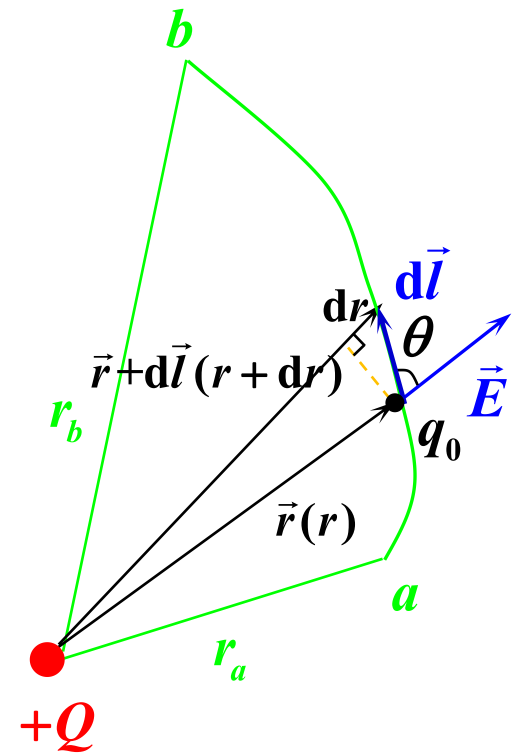
7.2 场强环路定理 电势

一、静电场的保守性

1、静电场是保守场

一试验电荷q_0在距离点电荷Q为$\vec{r}$处有一微小位移$\mathrm{d}\vec{l}$，移动到$\vec{r}+\mathrm{d}\vec{l}$处，则电场力做功：



$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0E\mathrm{d}l\cos\theta$$

$$=q_0E\mathrm{d}r=q_0\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

q_0从a移动到b，电场力做功：

$$A=\int_a^b\mathrm{d}A=\int_a^b\frac{q_0Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q_0Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

$$A=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right) \quad \int_a^b \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a}-\frac{1}{r_b}\right)$$

试验电荷在点电荷的电场中移动，电场力对试验电荷做功只与始末位置有关，与路径无关。

同样，在点电荷系和电荷连续分布的带电体产生的静电场中移动的电荷(带电体)，静电场力做功与路径无关

做功与路径无关的力场称为保守力场。

对静电场，电场强度的线积分只取决于起点和终点的位置，而与积分的路径无关，这称为静电场的保守性。

静电场的保守性来源于点电荷静电场的各向同性

2、静电场的环路定理(保守性的表述)

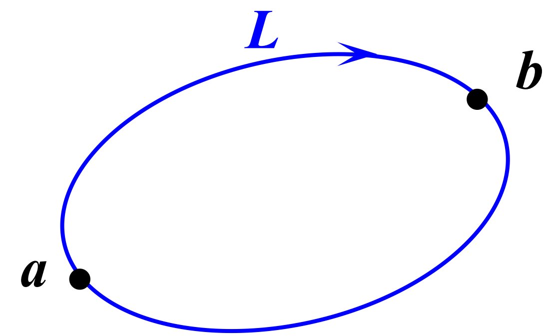
$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S}$$

如图沿一顺时针闭合回路l，静电场强的线积分：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{a(\text{顺时针})}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{b(\text{顺时针})}^{a} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{a(\text{顺时针})}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{l} - \int_{a(\text{逆时针})}^{b} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= 0$$



$$\boxed{\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0}$$ 场强环路定理

静电场强沿任意闭合路径的线积分(环流)等于零

定义旋度： $\text{rot}\vec{E} = \nabla\times\vec{E}$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S (\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = 0$$ $$\boxed{\nabla\times\vec{E} = 0}$$ 无旋场

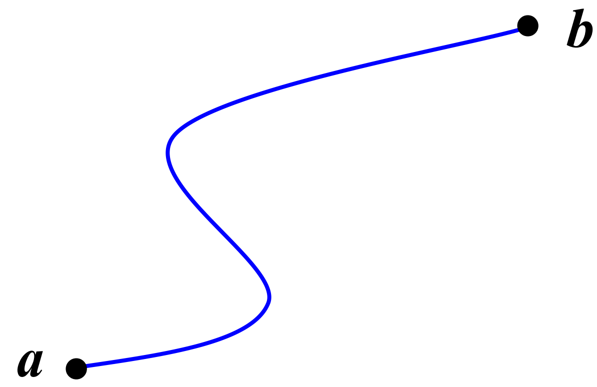
运动电荷的电场，不是保守场，环路积分不为零

二、电势能和电势

1、电势能

由于静电场力是保守力，对试验电荷和静电场组成的系统，可以引入电势能加以描述。

由势能定义，在静电场中，试验电荷从a移动到b，静电场力所做的功等于系统电势能的减少



$$A = W_a - W_b$$

定义试验电荷在a处，系统(试验电荷和静电场)的电势能

$$W_a = A_{a \to 0势} = q_0 \int_a^{0势} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电势能的单位J

2、电势

$$W_a = q_0 \int_a^{0势} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电势能是试验电荷和静电场组成的系统共同拥有的，不能用来描述静电场。从电势能中去除试验电荷，可以定义一个能描述静电场的物理量：电势(电位)

$$U_a = \frac{W_a}{q_0} = \int_a^{0势} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

电势的物理意义：把单位正电荷放到某点处时，系统的电势能。或者，把单位正电荷从某点移动到电势零点，电场力所做的功。

一个电荷在静电场中某点的电势能等于它的电量与静电场中该点的电势的乘积。

$$W_a = q_0 U_a$$

电势、电势能的大小与选定的电势零点有关

3、电势差

静电场中任意两点的电势差(电压)：

$$U_a - U_b = \int_a^{0势} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_b^{0势} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

可用电势差来计算电荷在静电场中移动时电场力作的功

$$A_{ab} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0(U_a - U_b) = W_a - W_b$$

电势零点的选择：

电荷分布在有限范围时，一般选无限远处为电势零点；
电荷分布到无限远时，电势零点不能选在无限远处；
地球是个稳定的大导体，常被选为零电势位(当认为大地是无限大平面时，地为零电势与无限远处为电势零点可同时成立)

三、电势的计算

1、电势叠加原理

电势叠加原理： 一个电荷系的电场中，任一点的电势等于每个电荷单独在该点产生的电势的代数和

$$U = \sum_i U_i$$

各电荷的电势零点必须相同

由场强叠加原理可得电势叠加原理：

$$U_P = \int_P^{0势} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_P^{0势} (\sum_i \vec{E}_i) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \int_P^{0势} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

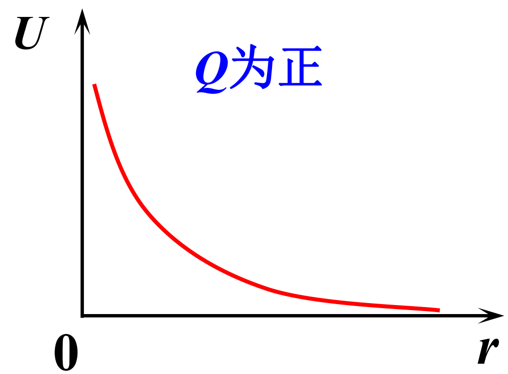
$$= \sum_i U_i$$

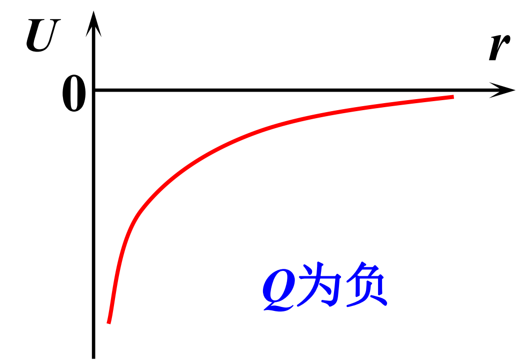
2、点电荷的电势

点电荷电量Q，设无限远处为电势零点，由电势定义，沿电场线积分得到距离点电荷r处的P点电势：

$$U(r)=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}\frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot \mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{U(r)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$





点电荷为正时，各点电势为正，越远电势越低；点电荷为负时，各点电势为负，越远电势越高。

注意：第二类曲线积分(对坐标的曲线积分)的计算要求：dr各分量的方向是各坐标轴正向，积分下限对应积分路径的起点，积分上限对应积分路径的终点

3、点电荷系的电势(无限远处为电势零点)

$$U_P = \sum_i \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

其中r_i是第i个点电荷Q_i到P点的距离

4、电荷连续分布系统的电势(无限远处为电势零点)

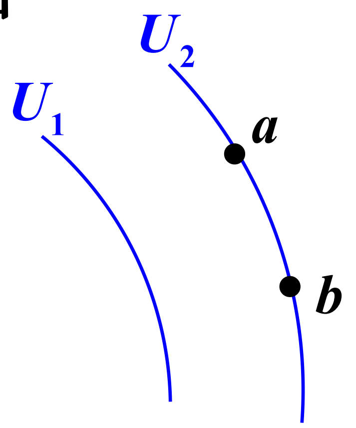
当带电体电荷连续分布时，求和变成了积分：

$$U_P = \int \mathrm{d}U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\mathrm{d}q}{r}$$

积分范围是带电体所分布的空间V

四、等势面

等势面： 电势相等的空间各点所组成的面



等势面的性质：

A、 沿等势面移动电荷，静电场力不作功

$$A_{ab}=q_0(U_a-U_b)=0$$

B、 等势面处处与电场线正交

$$A_{ab}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=q_0(U_a-U_b)=0$$

$$q_0\neq 0 \quad \vec{E}\neq 0 \quad \mathrm{d}\vec{l}\neq 0 \quad \rightarrow \vec{E}\perp\mathrm{d}\vec{l}$$

C、等势面密集处场强大，稀疏处场强小(规定相邻两等势面的电势差为定值)

移动电荷从一个等势面垂直地到相邻的等势面(两等势面很近)，电场力做功

$$\mathrm{d}A = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -q_0\mathrm{d}U$$

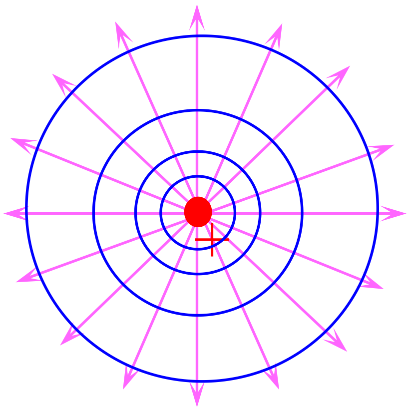
等势面密集，相邻等势面间距dl小，电场强度的值大。

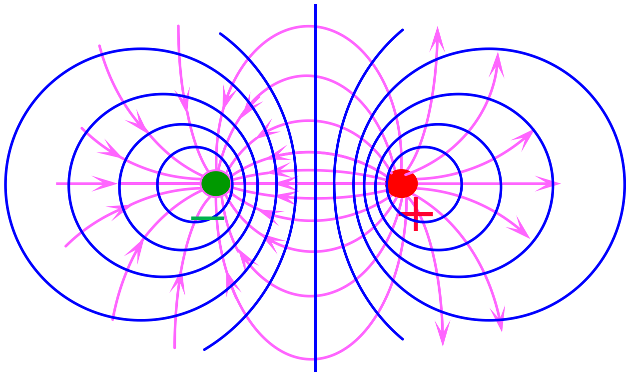
D、电场线指向电势降落的方向

$$U_a - U_b = \int_a^b \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} > 0 \qquad E\text{从}a\text{指向}b$$

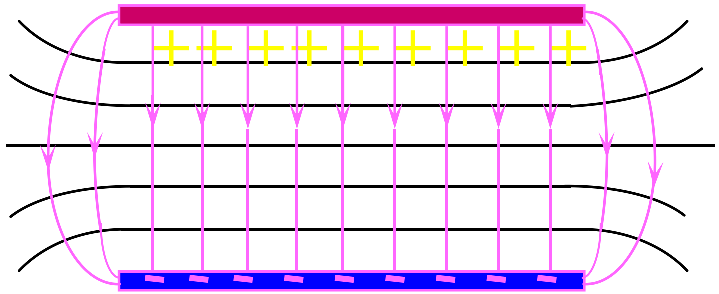
电势最大值在正电荷处，电势最小值在负电荷处。

点电荷的电场线与等势面　电偶极子的电场线与等势面

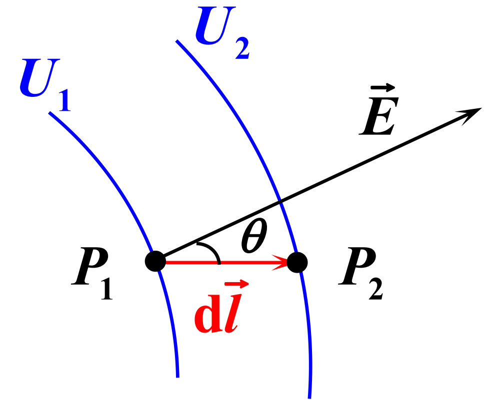




平行板电容器的电场线与等势面



五、场强和电势的微分关系



场强与电势之间有积分关系：

$$U(r)=\int_a^{0\text{势}}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

为得出场强与电势间的微分关系，考虑相距很近的P_1、P_2，两处场强相等，两点间电势差：

$$-\mathrm{d}U = U_1-U_2=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=E\cos\theta\mathrm{d}l$$

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}=-E\cos\theta=-E_l$$

静电场中任一点的场强沿某方向的分量等于电势沿该方向的空间变化率(方向导数)的负值

$$\theta=0\quad E=-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}$$

沿着电场方向电势降低最快

数学上，若某一标量函数对某一方向有最大变化率，则可用此方向上单位矢量和方向导数来定义该标量函数的梯度

电势梯度： $\mathbf{grad}U = \dfrac{\partial U}{\partial n}\vec{e}_n$

$$\vec{E} = -\mathbf{grad}U = -\nabla U$$ 场强与电势的微分关系

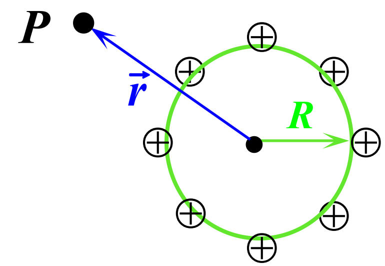
静电场中某点的场强等于电势在该点的空间变化率

在直角坐标中： $\nabla = \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

$$\vec{F} = q_0\vec{E} = -q_0\nabla U = -\nabla(q_0 U) = -\nabla W$$

推论：电势是连续的

例7-14 电量Q、半径R的均匀带电球面的电势



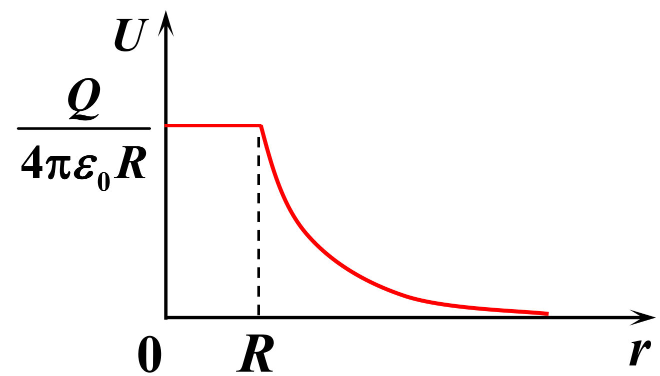
解：设无限远处为电势零点，由电势定义，沿电场线积分得到距离球心r的P点处电势：

$$U(r)=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & r>R\end{cases}$$

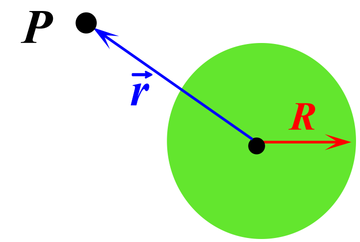
$r\le R$ $$U(r)=\int_r^{R}0\cdot \mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$r>R$ $$U(r)=\int_r^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



球面内等电势，等于球面上的电势；球面外的电势等同于处于球心的带相同电荷的点电荷的电势。

例7-15 电量Q、半径R的均匀带电球体的电势



解：设无限远处为电势零点，由电势定义，沿电场线积分得到距离球心r的P点处电势：

$$U(r)=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

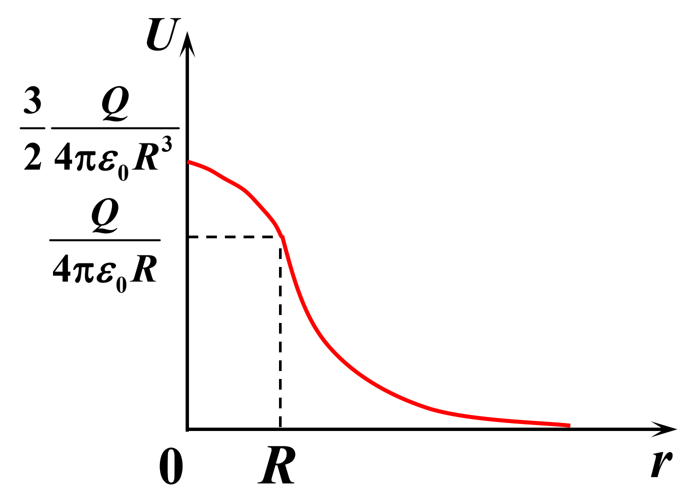
$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\dfrac{\vec{r}}{r} & r\le R\\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\dfrac{\vec{r}}{r} & r>R\end{cases}$$

$r\le R$ $\quad U(r)=\int_r^R \dfrac{Qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\mathrm{d}r+\int_R^{\infty}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$

$$=\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(3R^2-r^2)$$

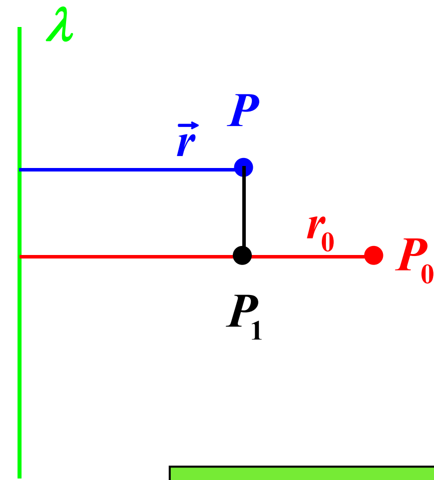
$r>R$ $\quad U(r)=\int_r^{\infty}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

球心 $\quad U(0)=\dfrac{3}{2}\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}=\dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}$



例7-16 无限长均匀带电直线(电荷线密度λ)的电势

解： 如图取距离直线r_0的P_0点为**电势零点**

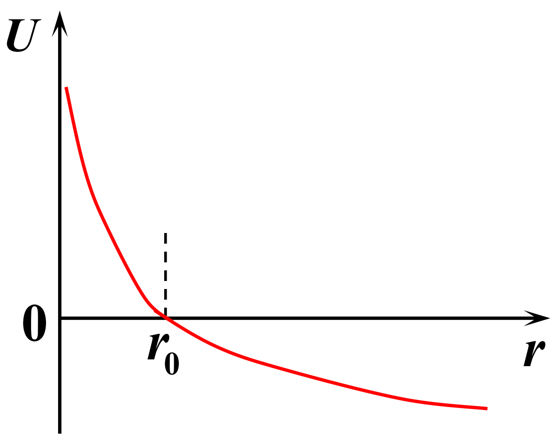


$$U(r)=\int_P^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_P^{P_1}\vec{E}\cdot d\vec{r}+\int_{P_1}^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$=\int_{P_1}^{P_0}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{r_0}E\cdot dr=\int_r^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot dr$$

$$=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_0-\ln r)$$

$$\boxed{\vec{E}=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\vec{r}}{r}}$$

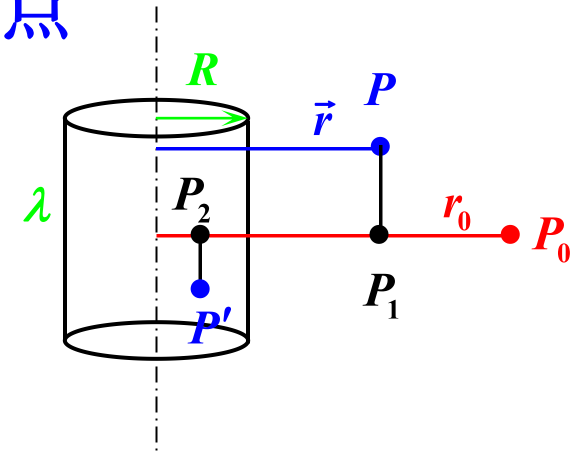


电势零点不能选在无限远

问题：电势零点变化，电势如何变化？

例7-17 无限长均匀带电圆柱面(电荷线密度λ)的电势

解： 如图选面外一点$P_0(r=r_0)$为电势零点



$r > R \quad U(r) = \int_P^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$$= \int_P^{P_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{P_1}^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^{r_0} E\cdot dr$$

$$= \int_r^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

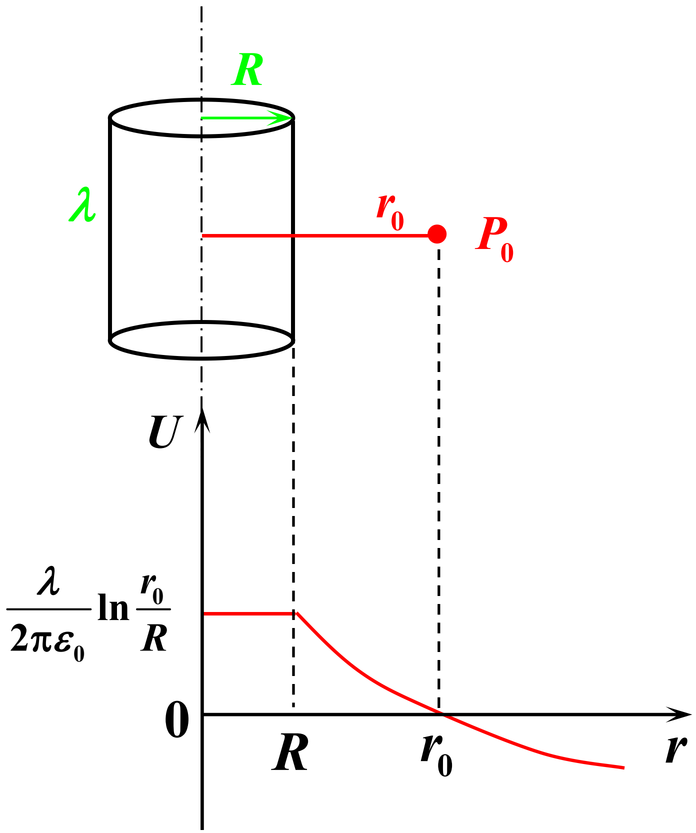
$$\vec{E} = 0 \quad r < R,$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\frac{\vec{r}}{r} \quad r > R$$

$r \le R \quad U(r) = \int_{P'}^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{P'}^{P_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{P_2}^{\text{柱面}} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \int_{\text{柱面}}^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

$$= \int_{\text{柱面}}^{P_0} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_R^{r_0} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{R}$$

$$U(r)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_0}{R} & r\le R\\[2ex] \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_0}{r} & r>R\end{cases}$$

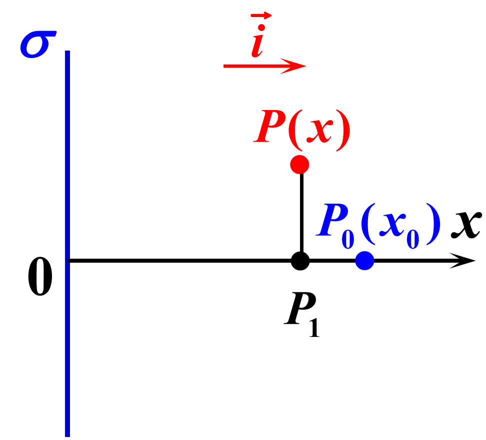


电势零点选在圆柱面外一点时，圆柱面内等电势，等于圆柱面上的电势；圆柱面外的电势等同于处于轴线上的带相同电荷的无限长均匀带电直线的电势

问题：电势零点选择在圆柱面上或圆柱面内，上述结论是否还成立？

例7-18 无限大均匀带电平面(电荷面密度σ)的电势

解：取距离平面x_0处的P_0点为电势零点，如图建立坐标系，取原点在平面上，x轴通过x_0点



P点在平面右侧时($x \geq 0$)：

$$U(x) = \int_P^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_P^{P_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} + \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_x^{x_0} E \cdot \mathrm{d}x$$

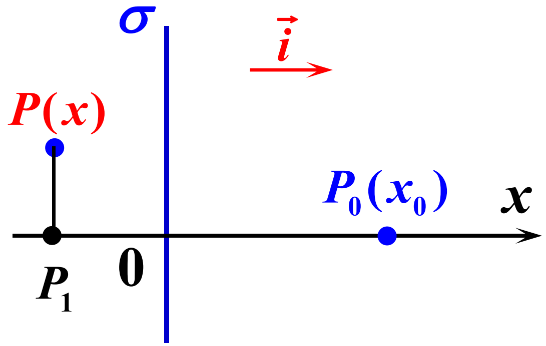
$$= \int_x^{x_0} \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \cdot \mathrm{d}x = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_0 - x)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} \quad x > 0$$

$$\vec{E} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i} \quad x < 0$$

P点在平面左侧时($x<0$):

$$\vec{E}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}\quad x>0\qquad \vec{E}=-\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{i}\quad x<0$$



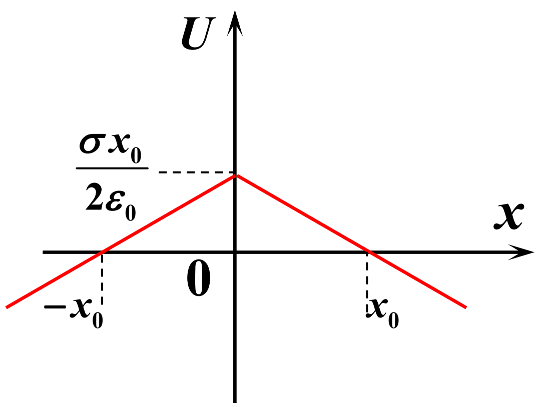
$$U(x)=\int_P^{P_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_P^{P_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{P_1}^{0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_0^{P_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\int_{P_1}^{0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_0^{P_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-\int_x^0 E\cdot\mathrm{d}x+\int_0^{x_0}E\cdot\mathrm{d}x$$

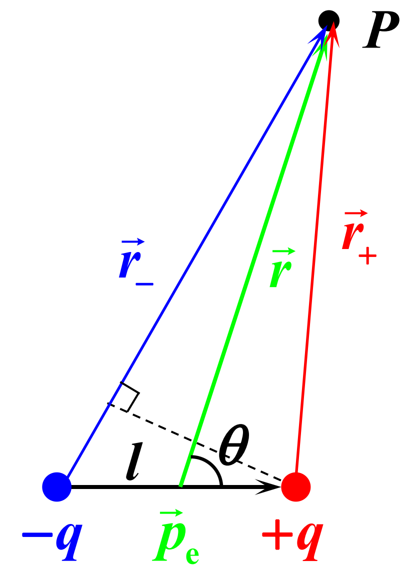
$$=-\int_x^0\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\mathrm{d}x+\int_0^{x_0}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\mathrm{d}x=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_0+x)$$

$$U(x)=\begin{cases}\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_0+x) & x<0\\[2ex] \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_0-x) & x\geq 0\end{cases}$$



例7-19 电偶极子的电势分布

解： 取无限远处为电势零点



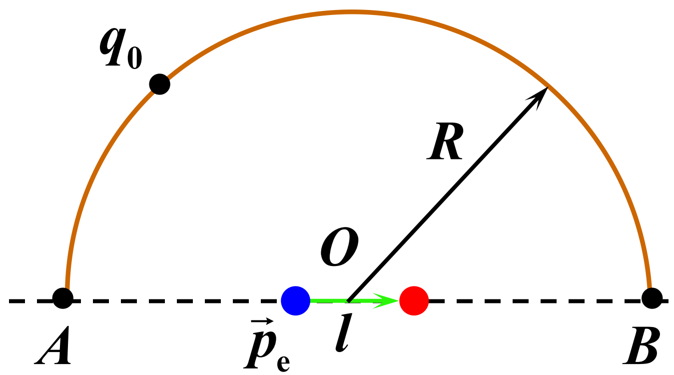
$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}=\frac{q(r_- - r_+)}{4\pi\varepsilon_0 r_+ r_-}$$

$$\approx\frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{p_e\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\vec{p}_e\cdot\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\boxed{r\gg l \quad r_+ r_- \approx r^2 \quad r_- - r_+ \approx l\cos\theta}$$

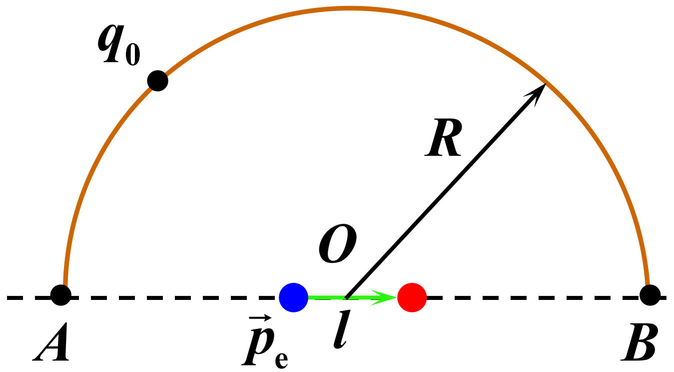
电偶极子的电势 $\propto\dfrac{1}{r^2}$ 点电荷的电势 $\propto\dfrac{1}{r}$

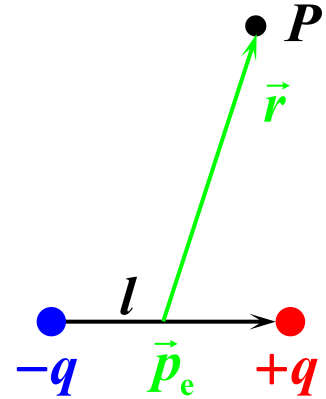
例7-20 如图所示，在电矩为p_e的电偶极子的电场中，将一电量为q_0 的点电荷从A点沿半径为R的圆弧(圆心与电偶极子中心重合，$R>>l$) 移到B点，**求：** 此过程中电场力所做的功。



解： 电偶极子产生的电场是静电场，静电场力作功与路径无关，电荷q_0 从A到B，电场力作功只与初(A)、末(B)位置有关，从电势差计算做功：

$$A = q_0(U_A - U_B)$$





$$A = q_0(U_A - U_B)$$

取无限远处为电势零点，电偶极子在P点的电势：

$$U = \frac{\vec{p}_e \cdot \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

电偶极子在A、B点的电势：

$$U_A = -\frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad U_B = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$A = q_0(U_A - U_B) = -\frac{q_0 p_e}{2\pi\varepsilon_0 R^2}$$

例7-21 氢原子中电子的静电势能

解： 选无限远处为电势零点

氢原子的原子核(质子)带正电$+e$，其电势：

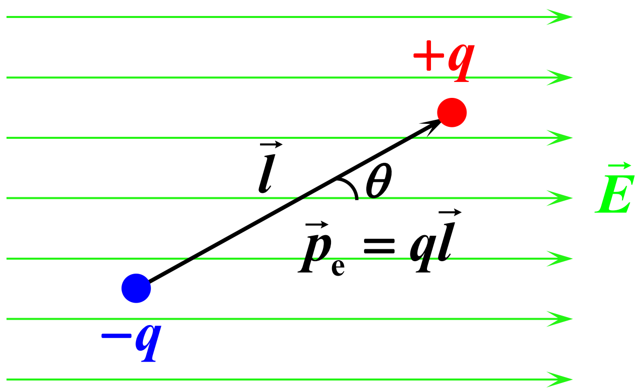
$$U(r)=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

氢原子核外有一个电子，带负电荷$-e$，该电子在氢原子中的静电势能(电子与氢原子核共同拥有)：

$$W=(-e)U(r)=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

例7-22 电偶极子在均匀外电场中的静电势能

解： 任选一点为电势零点



$$W = W_+ + W_- = qU_+ - qU_-$$

$$= q(U_+ - U_-) = q\int_+^- \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q\vec{E}\cdot\int_+^- \mathrm{d}\vec{l} = -q\vec{E}\cdot\vec{l}$$

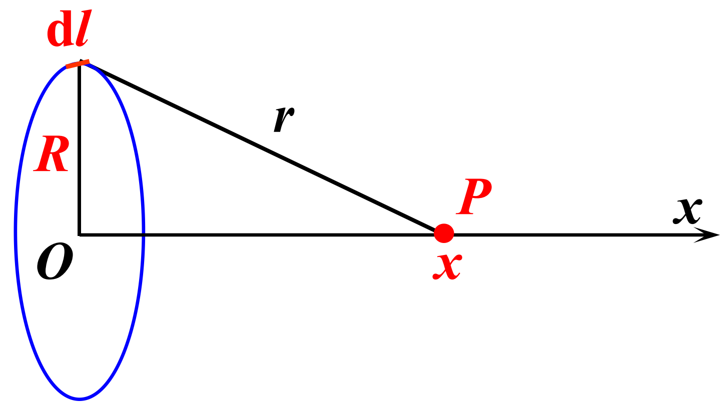
$$= -q\vec{l}\cdot\vec{E}$$

$$= -\vec{p}_{\mathrm{e}}\cdot\vec{E}$$

例7-23　总电量Q，半径R的均匀带电圆环轴线上的电势与场强。

$$\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

解：选无限远处为电势零点，在圆环上任取一线元dl，其电势：



$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{Q\mathrm{d}l}{2\pi R}$$

$$U = \int \mathrm{d}U = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\frac{Q\mathrm{d}l}{2\pi R} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2 + x^2}}$$

$$\vec{E}(x,y,z) = -\nabla U(x,y,z) = -\vec{i}\frac{\partial}{\partial x}U(x,y,z)$$

$$= \vec{i}\frac{xQ}{4\pi\varepsilon_0(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

例7-24 由电偶极子的电势求场强

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta}$$

解：选无限远处为电势零点，取极坐标系，电偶极子的电势：

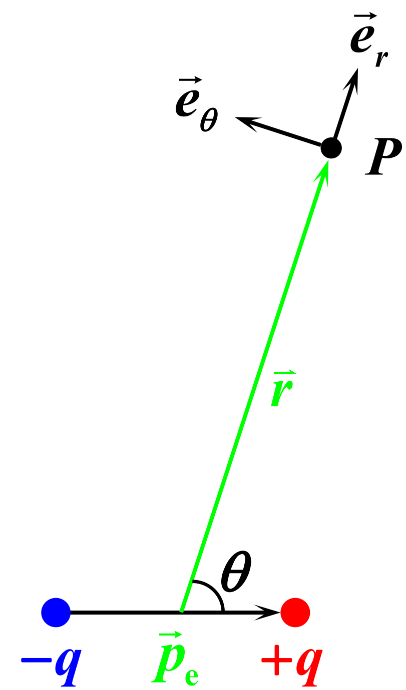
$$U(\theta,r) = \frac{p_e \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}(\theta,r) = -\nabla U(\theta,r)$$

$$= -[\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} U(\theta,r) + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta} U(\theta,r)]$$

$$= -\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r}(\frac{p_e \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}) - \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial\theta}(\frac{p_e \cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2})$$

$$= \frac{p_e \cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_r + \frac{p_e \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta$$



$\theta = 0 \quad \vec{E}(\theta,r) = \frac{p_e}{2\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_r, \quad \theta = \frac{\pi}{2} \quad \vec{E}(\theta,r) = \frac{p_e}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta$

例7-25 均匀带电球面，由电势分布求场强分布。

解：选无限远处为电势零点，

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{\partial}{r\sin\theta\partial\varphi}$$

取球坐标系，球面的势能：

$$U(r,\theta,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & r \le R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

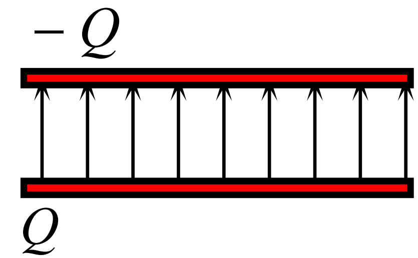
$$\vec{E}(r,\theta,\varphi) = -\nabla U(r,\theta,\varphi) = -\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} U(r,\theta,\varphi)$$

$$= \begin{cases} 0 & r \le R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & r > R \end{cases}$$

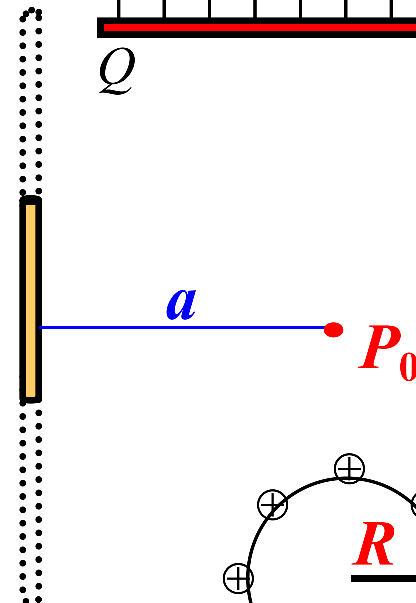
例7-26 下例说法对否？ 举例说明

$$U=\int_r^{0\text{势}}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r} \qquad \vec{E}=-\nabla U$$

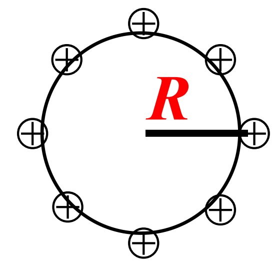
1、场强相等的区域，电势处处相等



2、电势为零处，场强一定为零



3、场强为零处，电势一定为零



4、场强大处，电势一定高