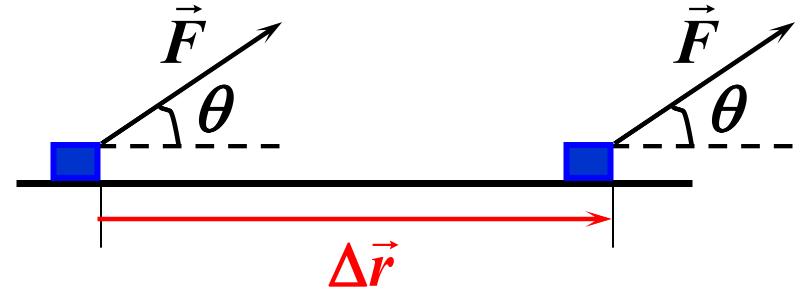
2.6 功 能 机械能守恒定律

一、功与功率

功等于质点受到的力和它的位移的标量积

质点受到的力是恒力时：



$$A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\cdot\left|\Delta\vec{r}\right|\cdot\cos\theta$$

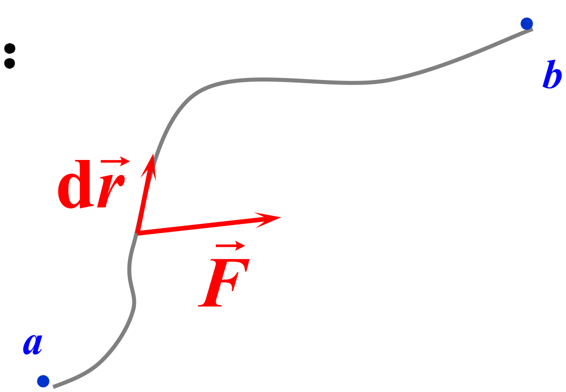
$0\le\theta<\pi/2$时力对质点做正功； $\pi/2<\theta\le\pi$时力对质点做负功，力对物体做负功也称物体克服力做功。

若质点从a到b沿曲线运动，并且作用在质点上力是变力时，在质点运动轨迹上取一微元dr，该微元处力可看做恒力，该微小位移过程中力做功：

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

从a到b的过程中，变力做的总功：

$$A = \int_{a\to b}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$



质点在多个力作用下沿路径L运动，则合力对质点做功：

$$A=\int_L\left(\sum_i\vec{F}_i\right)\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\sum_i\int_L\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\sum_i A_i$$

合力的功等于各分力沿同一路径所做的功的代数和

力F在Δt时间内对质点做功ΔA，定义F做功的平均功率

$$\bar{P}=\frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$\Delta t\rightarrow 0$时平均功率的极限值称瞬时功率，简称功率：

$$P=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int P\cdot\mathrm{d}t=\int\vec{F}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t$$

在直角坐标系下：

$$\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\qquad \mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}$$

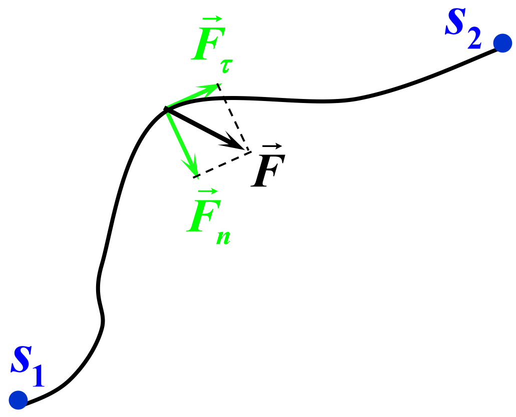
$$A=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{x_1}^{x_2}F_x\mathrm{d}x+\int_{y_1}^{y_2}F_y\mathrm{d}y+\int_{z_1}^{z_2}F_z\mathrm{d}z$$

一维情况下： $A=\int_{x_1}^{x_2}F_x\mathrm{d}x$

自然坐标系下：

$$\vec{F}=F_n\vec{n}+F_\tau\vec{\tau}\qquad \mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}s\vec{\tau}$$

$$A=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{s_1}^{s_2}F_\tau\mathrm{d}s$$



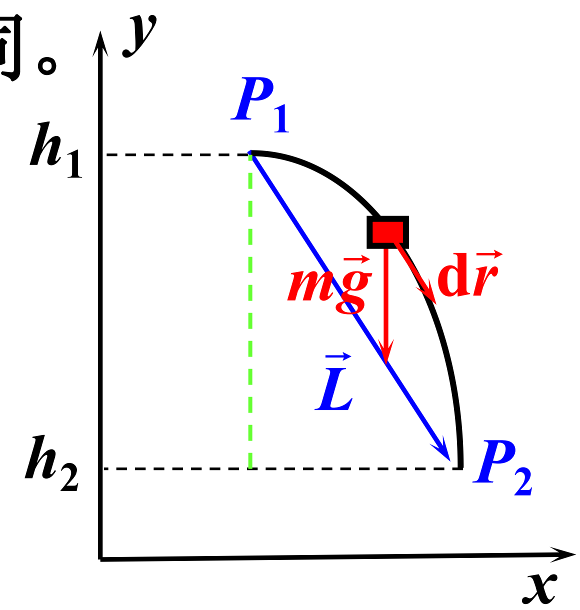
几种常见力做的功

例2-24 重力做的功

重力场中，质量为m的质点从P_1点(高h_1)运动到P_2(高h_2)，恒定的重力mg做功:

$$A=\int_{P_1\to P_2} m\vec{g}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=m\vec{g}\cdot\int_{P_1\to P_2}\mathrm{d}\vec{r}=m\vec{g}\cdot\vec{L}=mgh_1-mgh_2$$

本例中重力做功与路径无关，只与初末的位置有关。初末位置相同，做功相同。



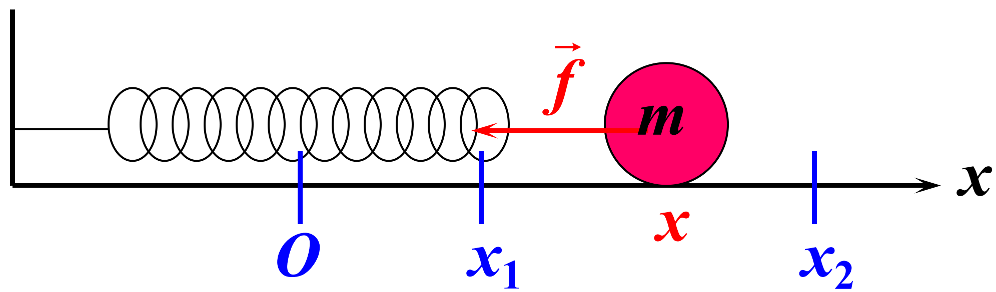
做功与路径无关的力，称为保守力。

保守力做功与路径无关，若质点沿任意闭合路径L运动一圈，保守力做功一定为零

$$\oint_L \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=0$$

例2-25 轻弹簧拉力做的功

弹簧的劲度系数为k，忽略其质量，一端固定，一端系一质量为m的质点，系统水平放置，质点沿x轴运动，取弹簧无形变时质点的位置为原点O。



质点在任一位置x处受到的弹力： $\vec{f} = -kx\vec{i}$

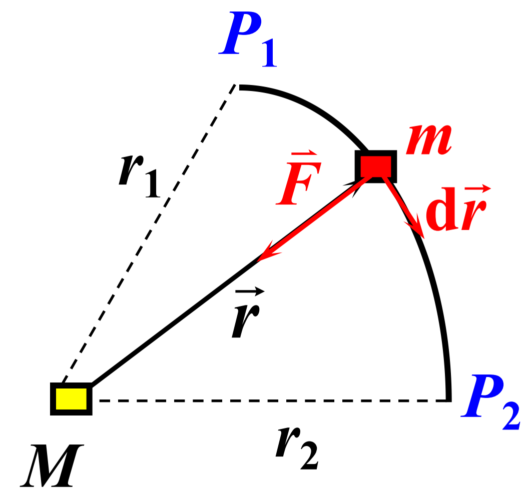
质点从x_1到x_2，弹力做功：

$$A = \int_{x_1 \to x_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} -kx\vec{i} \cdot \vec{i}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$$

本例中弹簧拉力也是保守力

例2-26 万有引力做的功

质量为M和m的两个质点，选质点M为坐标原点，m受到的万有引力为：



$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

m从P_1到P_2过程中，万有引力做功为

$$A = \int_{P_1 \to P_2} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{Mm}{r^3} r\mathrm{d}r = -(G\frac{Mm}{r_1} - G\frac{Mm}{r_2})$$

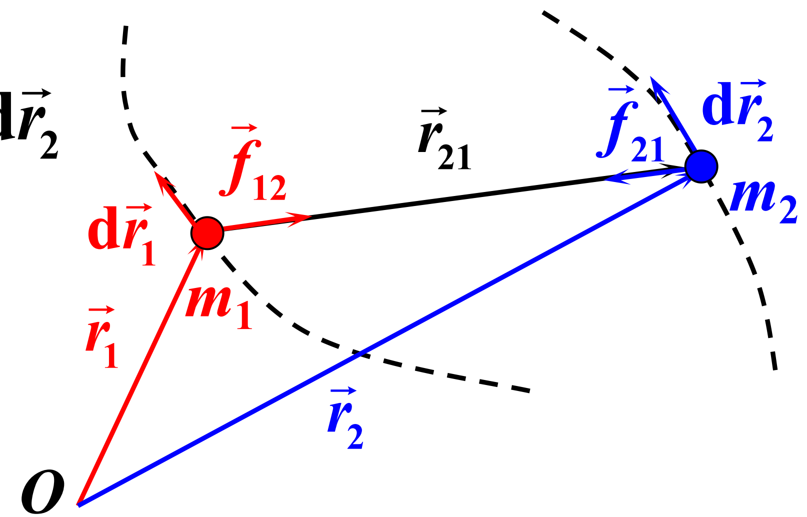
$$\vec{r} \cdot \vec{r} = r^2 \qquad 2\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 2r\mathrm{d}r$$

本例中万有引力也是保守力

例2-27 一对相互作用力做的总功

$\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$

质量为m_1和m_2的两质点相互作用，在dt时间内位移分别为dr_1和dr_2，它们的相互作用力f_{12}和f_{21}分别对两质点做功，它们做功的和：



$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}A_1 + \mathrm{d}A_2 = \vec{f}_{12}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$= -\vec{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_1 + \vec{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_2$$

$$= \vec{f}_{21}\cdot (\mathrm{d}\vec{r}_2 - \mathrm{d}\vec{r}_1)$$

$$= \vec{f}_{21}\cdot \mathrm{d}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \vec{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21}$$

dr_{21}是质点2相对质点1的位移

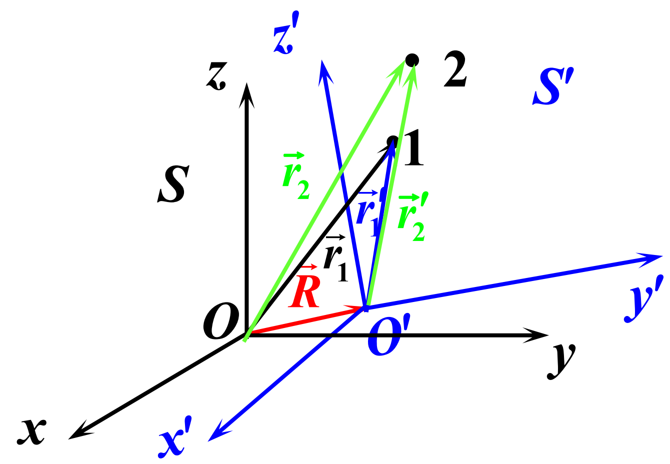
初位形为A，末位形为B $\quad A_{AB} = \int_{A\to B}\mathrm{d}A = \int_{A\to B}\vec{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21}$

$$A_{AB}=\int_{A\to B}\vec{f}_{21}\cdot d\vec{r}_{21}$$

两质点间的一对相互作用力所做功之和等于其中一个质点受的力沿着该质点相对于另一质点所移动的路径所做的功。

质点间的相对位移和相互作用力不随参考系变化，所以任何一对作用力与反作用力所做的总功具有与参考系选择无关的不变性质。

如图，质点1和2在参考系S和S'：



$$\vec{r}_1=\vec{r}_1'+\vec{R}\quad \vec{r}_2=\vec{r}_2'+\vec{R}$$

$$d\vec{r}_1=d\vec{r}_1'+d\vec{R}\quad d\vec{r}_2=d\vec{r}_2'+d\vec{R}$$

$$d\vec{r}_{21}=d(\vec{r}_2-\vec{r}_1)=d\vec{r}_2-d\vec{r}_1=d\vec{r}_2'-d\vec{r}_1'=d\vec{r}_{21}'$$

二、动能定理

1、质点的动能定理

牛顿第二定律： $F=\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$

$$P=\vec{F}\cdot\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}=m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{2}mv^2)$$

$E_\mathrm{k}=\dfrac{1}{2}mv^2$ 质点的动能

$\boxed{P=\dfrac{\mathrm{d}E_\mathrm{k}}{\mathrm{d}t}}$ 质点的动能定理的微分形式

在惯性系中，合力对质点做功的功率等于质点动能的时间变化率。

$$P=\frac{\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}}{\mathrm{d}t} \quad P\mathrm{d}t=\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}$$

t_1到t_2时间内，质点受力从P_1运动到P_2，速度从v_1变化到v_2，则：

$$A=\int_{P_1\to P_2}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}P\mathrm{d}t=\int_{E_{\mathrm{k}1}}^{E_{\mathrm{k}2}}\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\boxed{A=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2}$$

质点的动能定理的积分形式

在惯性系中，合力对质点做的功等于质点动能的增量

2、质点系的动能定理

对质点系，设$A_{i外}$、$A_{i内}$和E_{ik}分别为作用在第i个质点上的外力和内力做的功及第i个质点的动能，对第i个质点应用动能定理：

$$A_{i外}+A_{i内}=E_{ik2}-E_{ik1}=\Delta E_{ik}$$

$$\sum_i A_{i外}+\sum_i A_{i内}=\sum_i E_{ik2}-\sum_i E_{ik1}=E_{k2}-E_{k1}$$

$$E_k=\sum_i E_{ik}=\sum_i \frac{1}{2}m_i v_i^2$$ 质点系的动能

$$A_{外}+A_{内}=E_{k2}-E_{k1}=\Delta E_k$$ 质点系的动能定理

所有外力对质点系做的功和所有内力对质点系做的功之和等于质点系总动能的增量

$$A_{AB}=\int_{A\to B}\vec{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21}$$

$$A_{外}+A_{内}=\Delta E_{\mathrm{k}}$$

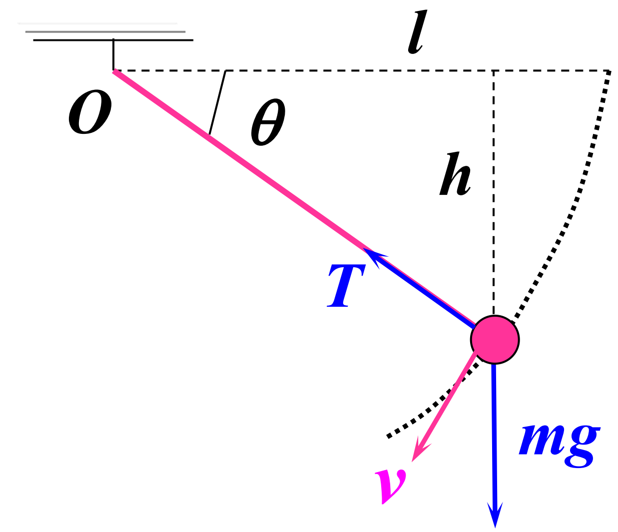
讨论

1、内力不能改变质点系的总动量、总角动量和质心的速度，但内力能改变质点系的总动能；质点系的内力是成对出现，但质点系所有内力的功之和不一定等于零。

2、动能是质点因运动而具有的能量，是物体的基本属性，反映了物体运动状态，是状态参量。而功是作用在物体上的力对物体空间移动过程中的累积，是过程量。求过程量时，可以通过状态量变化来求得。

3、动能定理只对惯性系成立，非惯性系需要加上惯性力做功。

例2-28 如图，小球在水平位置时，速度为零，**利用动能定理求**单摆在θ角时小球的速率



解： 考虑小球由水平到图示状态的过程，水平时，小球速度为零，由**动能定理**

$$A_{mg} + A_T = A = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

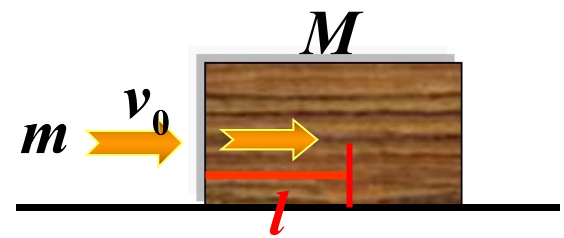
$$A_{mg} = mgh = mgl\sin\theta \quad A_T = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgl\sin\theta$$

$$v = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

例2-29 光滑水平桌面上放一静止的质量为M的木块，质量为m的子弹以水平速度v_0打击木块。子弹在木块中钻行时，受阻力f，**求：**子弹在木块中钻行的距离l。

解法一： 子弹和木块组成的系统在水平方向动量守恒，设v为碰撞结束时子弹与木块的共同速度



$$mv_0 = (m+M)v \cdots (1)$$

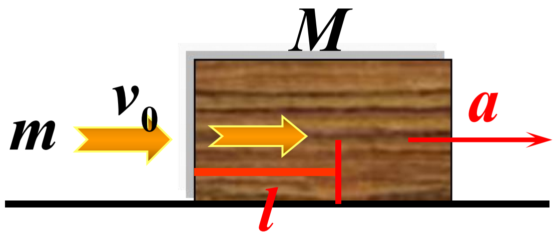
子弹击中木块到在木块中停下来，设木块相对桌面移动距离为s，则子弹相对桌面移动的距离为$s+l$，对木块和子弹分别应用动能定理：

$$f \cdot s = \frac{1}{2}Mv^2 \cdots (2)$$

$$-f \cdot (s+l) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \cdots (3) \qquad l = \frac{mMv_0^2}{2f(m+M)}$$

解法二：以木块为参考系，则子弹击中木块后，到停在木块的过程中，木块相对地面参考系加速运动，其加速度是：

$$a = \frac{f}{M}$$

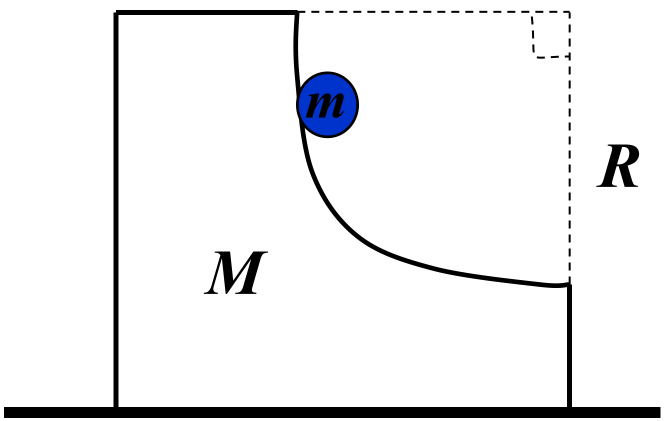


在木块参考系中考虑子弹，因木块参考系是非惯性系，要对子弹应用动能定理，必须加上惯性力做功：

$$-(f + ma)l = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$l = \frac{mMv_0^2}{2f(m+M)}$$

例2-30 有一面为1/4凹圆柱面(半径R)的物体(质量M)放置在光滑水平面，一小球(质量m)，从静止开始沿圆面从顶端无摩擦下落(如图)，小球从水平方向飞离大物体时对地速度v，**求**：1) 重力所做的功；2) 内力所做的功



解：1) 重力只对小球做功

$$A_{mg} = mg(h_1 - h_2) = mgR$$

2) 对M和m的系统，水平方向无外力，系统水平方向动量守恒，设小球飞离时，M的速度V

$$MV + mv = 0 \qquad V = -\frac{m}{M}v$$

对M应用动能定理，因只有内力对M做功

$$A_{M内} = \frac{1}{2}MV^2 - 0 = \frac{m^2v^2}{2M}$$

$$A_{mg}=mgR \quad A_{M内}=\frac{m^2v^2}{2M}$$

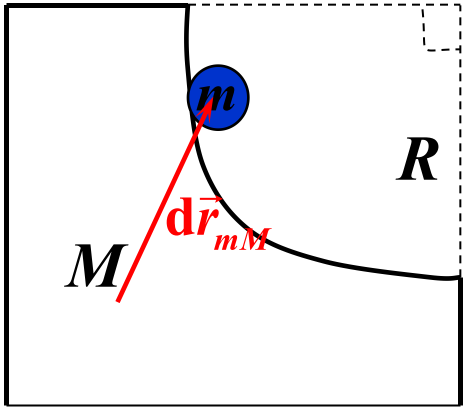
$$A_{AB}=\int_A^B \vec{f}_{21}\cdot \mathrm{d}\vec{r}_{21}$$

对m应用动能定理：

$$A_{mg}+A_{m内}=\frac{1}{2}mv^2$$

$$A_{m内}=\frac{1}{2}mv^2-A_{mg}=\frac{1}{2}mv^2-mgR$$

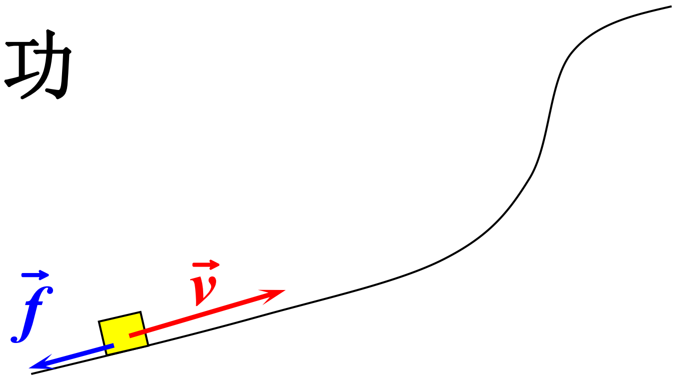
M和m系统内力做功之和：M和m间的内力与M和m的相对位移总是垂直，M和m间的内力所做的功总和为零。



$$A_{M内}+A_{m内}=\frac{m^2v^2}{2M}+\frac{1}{2}mv^2-mgR=0$$

不是所有一对相互作用的内力做功总和都为零，如图的摩擦力做功

$$A_{摩擦力}=-f\Delta s$$



例2-31 质量为10kg的物体沿x轴无摩擦地运动，设t=0时物体位于原点，速度为零。问：1) 物体在F=3+4t(N)作用下运行了3秒钟时的速度是多少？该力做功多少？2) 将力改成F=3＋4x(N)，并运动了3m，则速度？做功？

解： 1) 依题意，由牛顿第二定律：

$$a(t) = F / m = 0.3 + 0.4t$$

$$v(t) = \int_0^t a(t)\mathrm{d}t = \int_0^t (0.3 + 0.4t)\mathrm{d}t = 0.3t + 0.2t^2$$

$$v(3) = 2.7\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

$$A(t) = \int_0^t P(t)\mathrm{d}t = \int_0^t F(t)v(t)\mathrm{d}t = \int_0^t (3 + 4t)(0.3t + 0.2t^2)\mathrm{d}t$$

$$= 0.45t^2 + 0.6t^3 + 0.2t^4$$

$$A(3) = 36.45\mathrm{J}$$

2) 依题意：

$$A=\int_0^3 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^3 (3+4x)\mathrm{d}x=27\mathrm{J}$$

由动能定理：

$$A=\frac{1}{2}mv^2-0$$

$$v=\sqrt{\frac{2A}{m}}=2.324\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

三、势能

势能是针对存在有保守内力的系统而引入的

保守内力做功与各质点运动路径无关，只与系统始末的相对位置有关。引入一个由系统位置状态决定的函数，称为势能(也叫位能)，用E_P表示。

保守内力做功与势能的关系：$A_{保内(1\to2)} = E_{P1} - E_{P2}$

系统由位形1改变到位形2的过程中，保守内力做的功等于系统势能的减少(增量的负值)。

选标准位形(势能零点)，如设：$E_{P_2} = 0$

$$E_{P1} = A_{保内(1\to2)} = A_{保内(1\to零点)}$$

系统在任一位形时的势能等于它从此位形改变至标准位形(势能零点)时保守内力所做的功。

$$E_{\mathrm{P1}} = A_{\text{保内}(1\rightarrow\text{零点})}$$

注意

1、对保守内力才能引进势能的概念

2、势能是相互作用能，它归属于整个系统

3、某一位形的势能总是相对于选定的标准位形(零点势能)来说的。对不同的零点势能，系统在同一位形的势能值是不同的；但两个位形的势能差是一定的，与势能零点的选择无关。

4、常见的保守力有：重力、万有引力、弹性力、静电力等；与保守力相对力的称为耗散力，如摩擦力。

几种常见的保守力的势能

1、重力势能

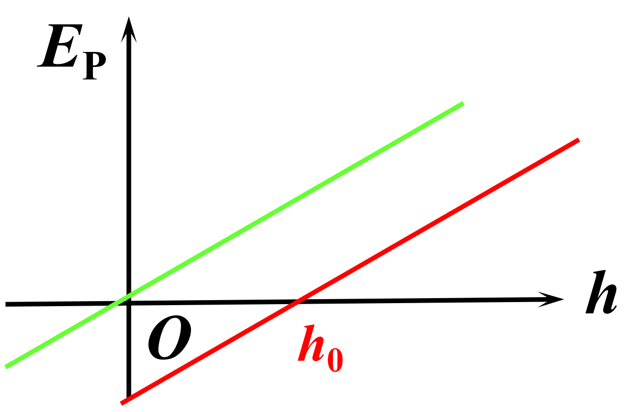
质量为m的质点从相对地面高h_1运动到高h_2，重力做功：

$$A = mgh_1 - mgh_2 = E_{P1} - E_{P2}$$

这也是质点和地球系统内力做的总功，质点高h_1、h_2分别代表系统的两种位形。

如果选取质点在地面的位置状态为系统势能零点，即$h_2=0$时$E_{P2}=0$，质点距地面h时重力势能：

$$E_P = mgh$$



若选取质点距地面h_0时的位置状态系统势能为零：

$$E_P = mgh - mgh_0$$

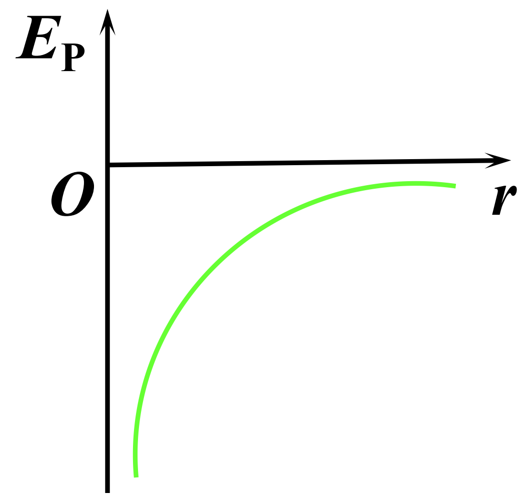
2、万有引力势能

质量为M和m的两个质点构成的系统，距离从r_1变化到r_2时，万有引力做功:

$$A = -\left(G\frac{Mm}{r_1} - G\frac{Mm}{r_2}\right) = E_{P1} - E_{P2}$$

如果选取两质点相距无限远的位形为系统势能零点，$r_2=\infty$时$E_{P2}=0$，两质点相距r时万有引力势能:

$$E_P = -G\frac{Mm}{r}$$



对质点和地球(半径R_E)的系统，若选质点在地面为势能零点($r_2= R_E$时$E_{P2}=0$)，质点距地面高h时，万有引力势能:

$$E_P = -GM_E m\left(\frac{1}{R_E + h} - \frac{1}{R_E}\right) = \frac{GM_E mh}{R_E(R_E + h)} \approx \frac{GM_E mh}{R_E^2} = mgh$$

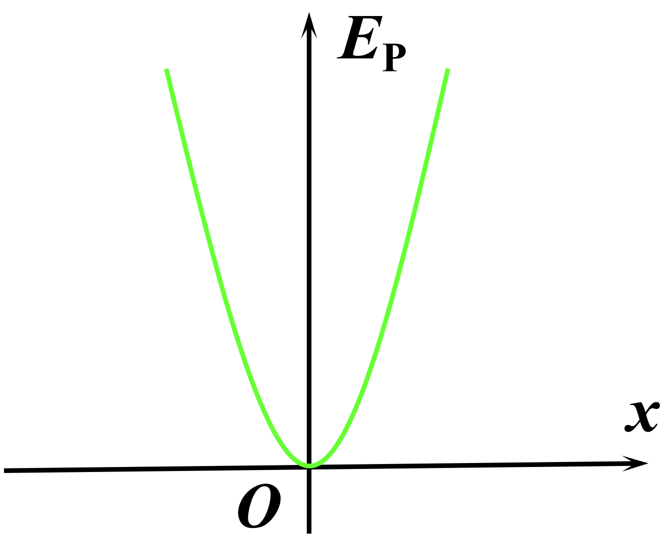
3、弹性势能

对质点和轻弹簧构成的系统，弹簧的劲度系数为k，忽略其质量，一端固定，一端系一质点，系统水平放置，质点从坐标x_1运动到x_2时，弹力做功：

$$A=\frac{1}{2}kx_1^2-\frac{1}{2}kx_2^2=E_{P1}-E_{P2}$$

如果选取弹簧伸长量为零的位形为系统势能零点，$x_2=0$时$E_{P2}=0$，则弹簧伸长量为x时弹性势能：

$$E_P=\frac{1}{2}kx^2$$



四、功能原理与机械能守恒定律

将质点系的内力分为保守内力和非保守内力，内力的功也就包括保守内力的功$A_{保内}$和非保守内力的功$A_{非保内}$

$A_{保内}$等于系统势能的减量，由动能定理：

$$E_{k2}-E_{k1}=A_{外}+A_{内}=A_{外}+A_{保内}+A_{非保内}$$

$$=A_{外}+E_{P1}-E_{P2}+A_{非保内}$$

$$A_{外}+A_{非保内}=(E_{k2}+E_{P2})-(E_{k1}+E_{P1})$$

定义系统的动能和势能之和为系统机械能：$E_{M}=E_{k}+E_{P}$

$$A_{外}+A_{非保内}=E_{M2}-E_{M1}=\Delta E_{M}$$ 功能原理

系统所受的外力的功与系统内非保守内力的功的总和等于系统的机械能的增量

如果一个系统只有保守内力做功，外力和非保守内力做功都为零，则该系统机械能守恒

$$A_{外} + A_{非保内} = 0 \quad \Delta E_{\mathrm{M}} = E_{\mathrm{M2}} - E_{\mathrm{M1}} = 0 \quad E_{\mathrm{M}} = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{P}} = 常量$$

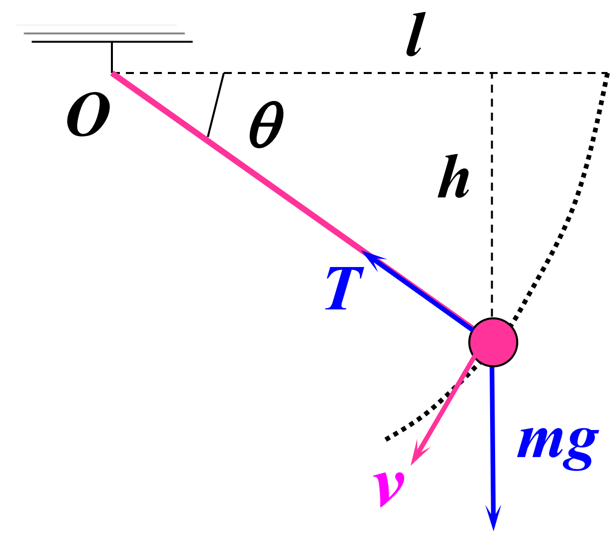
机械能守恒定律

只有保守内力做功的情况下，质点系的机械能保持不变

能量形式除了动能和势能，还有热能、电能、原子能等，一个不受外界作用的孤立系统，经过各种变化，系统所有能量的总和是不变的，这就是普遍的能量守恒定律。

例2-32 小球在水平位置时，速度为零，利用机械能守恒定律求：单摆在θ角时小球的速率

解： 将小球和地球做为一个系统，拉力T是外力，对系统做功为零；重力是保守内力，取如图θ角时小球的平面为势能零点，小球由水平位置到如图位置，机械能守恒，势能转换为动能：

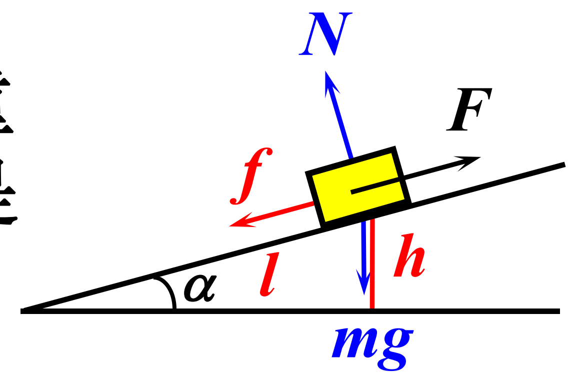


$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 = mgl\sin\theta$$

$$v = \sqrt{2gl\sin\theta}$$

例2-33 如图，质量m的小车，在外力F作用下，冲上很小坡度α的山坡，摩擦阻力f，小车初速度v_0，方向沿斜坡向上，**求**：小车沿斜坡前进到l距离时的速度v

解：将小车和地球组成一个系统，该系统中，摩擦阻力f是非保守内力，重力是保守内力，N是不做功内力，F是外力，取地面处为重力势能零点，由**功能原理**：



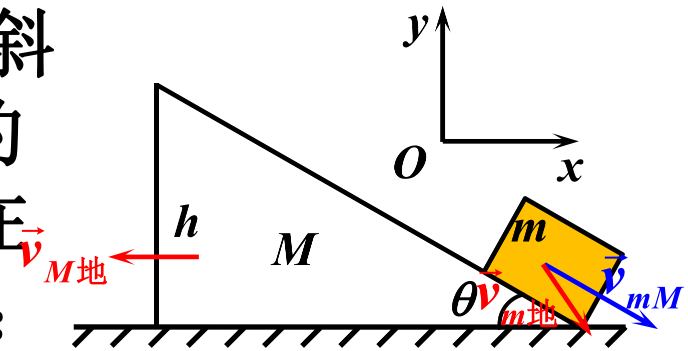
$$-fl + Fl = \left(\frac{1}{2}mv^2 + mgh\right) - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$h = l\sin\alpha \approx l\alpha$$

$$v = \sqrt{\frac{-2fl + 2Fl - 2mgl\alpha + mv_0^2}{m}}$$

例2-34 如图，质量m的物体从高h，倾角θ，质量M的斜面的顶端零初速度滑下，假设所有的接触面都是光滑的，**求：** 物体滑到斜面底端时相对斜面的速率v_{mM}

解： 在地面参考系中，设物体滑到斜面底端时，物体的速度$v_{m地}$，斜面的速度$v_{M地}$，物体和斜面构成的系统在水平方向动量守恒，直角坐标系下：



$$mv_{m地x} - Mv_{M地} = 0$$

以地面处为重力势能零点，物体、斜面、地球构成的系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}Mv_{M地}^2 + \frac{1}{2}m(v_{m地x}^2 + v_{m地y}^2) = mgh$$

由地面参考系和斜面参考系的速度关系：$\vec{v}_{m地} = \vec{v}_{mM} + \vec{v}_{M地}$

$$v_{m地x} = v_{mM}\cos\theta - v_{M地} \qquad v_{m地y} = v_{mM}\sin\theta$$

$$\begin{cases} m(v_{mM}\cos\theta - v_{M地}) - Mv_{M地} = 0 \\ \dfrac{1}{2}Mv_{M地}^2 + \dfrac{1}{2}m[(v_{mM}\cos\theta - v_{M地})^2 + (v_{mM}\sin\theta)^2] = mgh \end{cases}$$

联立解出：

$$v_{mM} = \sqrt{\frac{2(M+m)gh}{M+m\sin^2\theta}} \quad v_{M地} = \sqrt{\frac{m^2 gh\cos\theta}{(M+m)(M+m\sin^2\theta)}}$$

太空航行的三个宇宙速度

$R_E = 6.37\times10^6\,\mathrm{m}$

第一宇宙速度：人造卫星能够环绕地球运动所需的最小速度。

第二宇宙速度：物体能够脱离地球引力束缚所需的最小初速度。

第三宇宙速度：地球上抛射物体，能够脱离太阳引力束缚所需的最小初速度。

1、第一宇宙速度

在地心参考系，具有第一宇宙速度环绕地球表面飞行时，它所受的重力完全充当**向心力**：

$$mg = m\frac{v_1^2}{R_E} \qquad v_1 = \sqrt{gR_E}$$

第一宇宙速度：$v_1 \approx 7.9\times10^3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

2、第二宇宙速度

在地心参考系，将物体和地球看成一个质点系，忽略其他星体引力和空气阻力，内力只有物体和地球间的万有引力，选物体和地球相距无限远为势能零点，物体从发射到脱离地球，系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{M_E m}{R_E} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_E m}{r}$$

物体能够逃离地球，说明$r\to\infty$时，物体速度$v\geq 0$：

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - G\frac{M_E m}{R_E} \geq 0 \qquad v_2 = \sqrt{\frac{2GM_E}{R_E}} = \sqrt{2gR_E}$$

第二宇宙速度：$v_2 \approx 11.2\times 10^3 \mathrm{m\cdot s^{-1}}$

3、第三宇宙速度

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = G\frac{M_E m}{R_E}$$

地球上抛射物体要能够逃离太阳引力束缚，要经过两个阶段：一要先克服地球引力，二再克服太阳引力。

第一阶段，飞离地球过程中，用地心参考系，物体和地球看成一个质点系，如前所述，系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_3^2 - G\frac{M_E m}{R_E} = \frac{1}{2}mv_{物\text{-}E}^2 - G\frac{M_E m}{r}$$

飞离地球，$r \to \infty$ $\qquad v_3 = \sqrt{v_2^2 + v_{物\text{-}E}^2}$

第二阶段，飞离太阳过程中，用日心参考系，物体和太阳看成一个质点系，系统机械能守恒：

$$\frac{1}{2}mv_{物\text{-}S}^2 - G\frac{M_S m}{r_{初}} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_S m}{r_{末}}$$

$$v_3=\sqrt{v_2^2+v_{物\text{-E}}^2}$$

$$\frac{1}{2}mv_{物\text{-S}}^2-G\frac{M_S m}{r_{初}}=\frac{1}{2}mv^2-G\frac{M_S m}{r_{末}}$$

初始时刻是物体刚脱离地球，这时物体与太阳的距离$r_{初}$可近似为地球与太阳的距离R_{ES}，物体能够逃离太阳，说明$r_{末}\to\infty$时，物体速度$v\geq 0$：

$$\frac{1}{2}mv_{物\text{-S}}^2-G\frac{M_S m}{R_{ES}}\geq 0 \qquad v_{物\text{-S}}=\sqrt{\frac{2GM_S}{R_{ES}}}$$

$v_{物\text{-S}}$是物体在日心系的速度，换到地心系就是$v_{物\text{-E}}$，这时要考虑地球相对太阳的公转速度$v_{E\text{-S}}=29.8\times10^3 m\cdot s^{-1}$

$$\vec{v}_{物\text{-S}}=\vec{v}_{物\text{-E}}+\vec{v}_{E\text{-S}}$$

如果物体脱离地球的方向和地球公转速度方向一致，物体可以获得更大的对日出射速度：

$$v_{物\text{-S}}=v_{物\text{-E}}+v_{E\text{-S}}$$

第三宇宙速度 $v_3\approx 16.7\times10^3\,m\cdot s^{-1}$

五、碰撞问题

碰撞的主要特征：相互作用很强，冲力很大，相互作用时间很短，碰撞体构成的系统可认为动量守恒。

1、完全非弹性碰撞

完全非弹性碰撞：碰撞后物体变成一个整体，不再分开

两物体质量m_1和m_2，碰撞前速度v_1和v_2，碰撞后成为一个物体，速度u，由动量守恒：

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u} \qquad \vec{u} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{v}_C$$

由质心运动定理知：质心运动速度不变

两物体完全非弹性碰撞，机械能损失最大，损失的动能

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)u^2$$

2、部分弹性碰撞

部分弹性碰撞：碰撞后物体分开，但有能量损失。碰撞过程系统**机械能不守恒**，**动量守恒**。

注意：碰撞也包括物体之间的非接触相互作用

3、完全弹性碰撞

完全弹性碰撞：碰撞过程系统机械能守恒。

两物体质量m_1和m_2，碰撞前速度v_{10}和v_{20}，完全弹性碰撞后速度v_1和v_2，系统**动量守恒**和**机械能守恒**：

$$m_1\vec{v}_{10} + m_2\vec{v}_{20} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{20}^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$$

$$m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$$
$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

讨论两种简单情形的完全弹性碰撞

(1) 非对心碰撞

假设$m_1=m_2=m$，$v_{20}=0$，则：

$$\vec{v}_{10}=\vec{v}_1+\vec{v}_2 \qquad v_{10}^2=v_1^2+v_2^2$$

$$v_{10}^2=v_1^2+v_2^2+2\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2 \qquad \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$$

两个质量相同的物体，碰撞前其中一个物体是静止的，那么碰撞后两个物体分离的速度彼此垂直

(2) 对心碰撞

$$m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$$

$$\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2$$

对心碰撞后速度方向沿原来运动的沿线，可简化为一维情况：

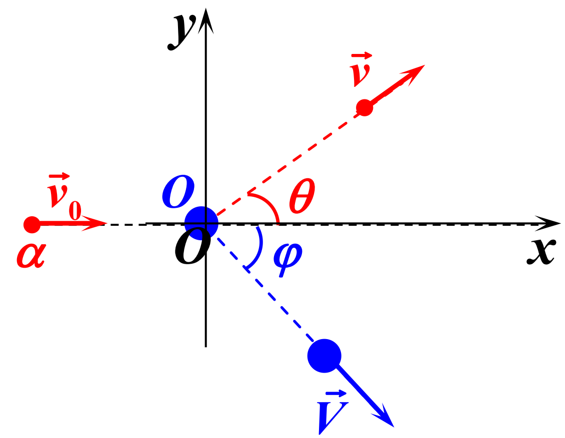
$$v_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_{10}+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_{20}\quad v_2=\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_{20}+\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_{10}$$

如果$m_1=m_2$，则$v_1=v_{20}$，$v_2=v_{10}$，两物体互换速度

如果$m_1<<m_2$，$v_{20}=0$，则$v_1=-v_{10}$，$v_2\approx 0$，轻物碰撞静止重物，轻物原速率被弹回，重物保持静止。

如果$m_1<<m_2$，$v_{20}\neq 0$，则$v_1=-v_{10}+2v_{20}$，$v_2\approx v_{20}$，轻物与运动重物相对碰撞，轻物弹回速率变大，重物保持原速度。

例2-35 如图，以速度v_0运动的α粒子(质量m)与静止的氧原子核(质量M)发生碰撞，碰撞后α粒子沿与入射方向成θ角的方向运动，氧原子核沿与α粒子入射方向成φ角的方向运动，**求：**碰撞后α粒子和氧原子核的速率



解：碰撞过程中α粒子与氧原子核构成的系统动量守恒，直角坐标系下：

$$mv_0 = mv\cos\theta + MV\cos\varphi \quad \cdots\cdots x\text{方向}$$

$$0 = mv\sin\theta - MV\sin\varphi \quad \cdots\cdots y\text{方向}$$

$$\boxed{\sin(\theta+\varphi) = \cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi}$$

$$v = \frac{v_0\sin\varphi}{\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi} = \frac{v_0\sin\varphi}{\sin(\theta+\varphi)}$$

$$V = \frac{mv_0\sin\theta}{M[\cos\theta\sin\varphi + \sin\theta\cos\varphi]} = \frac{mv_0\sin\theta}{M\sin(\theta+\varphi)}$$

守恒定律的讨论

除了动量守恒定律、角动量守恒定律、机械能守恒定律外，自然界还有很多守恒定律，如质量守恒定律、电荷守恒定律、宇称守恒定律等，守恒定律在实践和理论应用方面有重要意义。

守恒定律是关于变化过程的规律，变化的过程可能是未知的，或太复杂而难于处理。利用守恒定律可以避开过程细节，利用系统始末状态的某些特征量处理问题，这就是守恒定律的实践意义。

如果发现守恒定律存在某种缺陷，人们会努力去解决，从而进一步加深对自然界的认识，这就是守恒定律的理论意义。

有些守恒定律是从牛顿运动定律得出，但在牛顿运动定律不适应的领域，这些守恒定律依然正确。