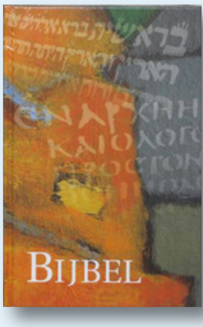
π: een pizonder getal

π IN DE BIJBEL

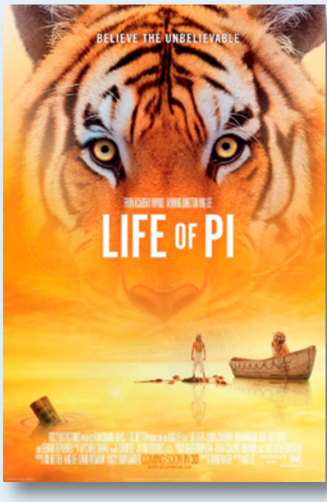


De waarde van π is in de loop van de geschiedenis steeds dichter benaderd. In het Oude Testament wordt π gelijkgesteld aan 3. In het boek Koningen (1 Kon. 7:23) staat: *'Ook maakte hij de gegoten zee. Haar kom was 10 el breed, van rand tot rand gemeten. Zij was helemaal rond en 5 el diep; men kon haar slechts met een koord van 30 el omspannen.'*
Zelfs zonder te weten dat een bijbelse el ongeveer 49,5 cm meet, kun je hieruit besluiten dat de waarde van het getal π drie was: de diameter was immers 10 el en de omtrek was 30 el. Nu was er in die tijd (ongeveer 150 jaar na Christus) een rabbijn, Nehemiah, die ook een wiskundige was. Hij stelde π gelijk aan $3\frac{1}{7}$ of $\left(3+\frac{1}{7}\right)$, maar hij kon niet om de bijbel heen, die als waarde 3 aangaf. Hij loste dit op door te stellen dat de kom 10 el breed was, van rand tot rand gemeten. Als je voor de dikte van de wand $\frac{1}{7}$ nam, kwam je tot de oplossing die zowel de wetenschap als de religie tevreden kon stellen.

Druk op de π-toets van je rekenmachine en daar krijg je de waarde van deze Griekse, kleine letter *p*. Dat dit getal van ver komt, proberen we nu te illustreren. Het werd oorspronkelijk alleen maar gebruikt om de omtrek van een cirkel te bepalen. π was dan de omtrek van een cirkel met diameter 1.
Op de vraag waarom het de Griekse letter *p* werd (en niet een andere letter) is het antwoord dat de *p* de afkorting is van 'perimeter' of 'periferie', wat omtrek betekent. Tot in de 18e eeuw werd trouwens de letter *p* gebruikt om π aan te duiden. De geschiedenis van π begint enkele duizenden jaren geleden …

π IN DE POËZIE

Boeken met alleen de 500 000 000 000 cijfers van π erin, kunstwerken rond het magische getal en vriendenclubs rond π, het bestaat allemaal. Zelfs poëzie!
'Ook u kunt u zeker vergissen, uw zwakke brein kan plots verkeerd beslissen.' Wat dit met π te maken heeft?
Tel het aantal letters van elk woord en plaats die netjes achter elkaar. Je krijgt 3,141592653589 …!



π IN DROEDELS EN IN DE MEDIA

Toen Ferdinand Lindemann in 1882 bewees dat π oneindig veel decimalen telde, zonder ook maar één periode, had hij wellicht nog niet gedacht aan deze leuke taalspelletjes. Absoluut niet wetenschappelijk, maar wel leuk om te zoeken.

π IN DE GESCHIEDENIS

Vierduizend jaar geleden werkten de **Babyloniërs** ook eerst met de waarde van 3 voor het getal π. Nog niet zo lang geleden, in 1936, vonden archeologen echter in Susa, een paar honderden kilometers van Babylon, een aantal kleitabletten waaruit kon worden afgeleid dat de onbekende auteur $3\frac{1}{8}$ heeft gebruikt als waarde van π om de oppervlakte van een cirkel te berekenen.

Rond 1500 voor Christus stelde de **Egyptische** klerk **Ahmes** in de Rhindpapyrus dat de oppervlakte van een cirkel gelijk is aan het kwadraat van $\frac{8}{9}$ van de diameter. Hiermee werd π gelijkgesteld aan $\left(\frac{16}{9}\right)^2$ of 3,160493827 …

Archimedes wist dat π tussen $\frac{223}{71}$ en $\frac{220}{70}$ lag. Hij kwam tot die conclusie door de omtrek van de cirkel te benaderen door ingeschreven en omgeschreven veelhoeken. De breuk $\frac{220}{70}$ is gelijk aan $\frac{22}{7}$, een breuk die vaak in de lagere school gebruikt werd om de omtrek of oppervlakte van een cirkel te berekenen in vraagstukjes.

Claudius **Ptolemaeus**, ook een Griek, schreef de Almagest rond 150 na Christus. Het werd een astronomisch meesterwerk met veel aandacht voor de goniometrie, een onderdeel van de wiskunde dat je later zult bestuderen, en een koordentafel voor verschillende hoeken. Hij gaf $\frac{377}{120}$ (= 3,14166 …) als waarde van π.

Aan het andere eind van de wereld, in China, werd door ene **Zu Chongzhi** (430–501) een nauwkeurige waarde gevonden met de breuk $\frac{355}{113}$. De berekening die hij en zijn zoon uitvoerden om de waarde te krijgen, is echter verloren gegaan. Maar ze waren in China zo blij dat ze een stukje van de maan naar hem genoemd hebben.

Andere bronnen vermelden echter dat die breuk door de Nederlander **Metius** gevonden zou zijn. Wie was eerst? Niemand weet het. Wel kun je stellen dat de Chinezen en Grieken elkaar hebben beïnvloed, want de waarde van Zu Chongzhi $\left(\frac{355}{113}\right)$ kan toevallig verkregen worden door uit de waarde $\frac{377}{120}$ (Ptolemaeus) en $\frac{22}{7}$ (Archimedes) de tellers en de noemers van elkaar af te trekken. Ieder zijn eigen waarheid natuurlijk, vandaar dat π soms de 'waarde van Metius' genoemd wordt. In Duitsland werd het aangeduid met de 'constante van Ludolph' en in de Engelstalige landen de 'constante van Archimedes'.

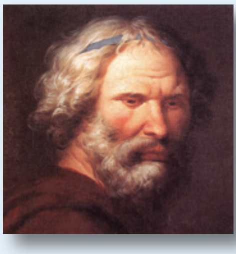
Al-Khasji, een Arabische wetenschapper, gaf in de vijftiende eeuw de waarde 6,2831853071795865 aan $2 \cdot \pi$. De Nederlander **Ludolph Van Ceulen** wijdde zelfs een deel van zijn leven aan de decimalenstudie van het getal π. In 1596 had hij er 20, en in 1615 had hij 35 decimalen gevonden. Pas in de 18e eeuw wordt het symbool π ingevoerd. Dat gebeurde door **Euler** in Introductio (1748). In 2020 bracht Tomothy Mullican het aantal gekende decimalen van π op exact 50 biljoen.

Hoe verfijnd de benaderingen ook worden, we weten dat π nooit helemaal door een breuk bepaald kan worden. je kunt π wel benaderen via rijen en reeksen. Twee voorbeelden:

$\frac{1}{4} \cdot \pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$ (James Gregory)

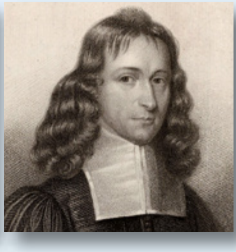
$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \ldots$$

In het licht van de geschiedenis heb jij het als leerling toch gemakkelijk, niet? Je hoeft maar de π-knop op je rekenmachine in te drukken en daar heb je onmiddellijk negen decimalen. Je machine kent zelfs nog meer cijfers dan hij je laat zien. Probeer er maar eens achter te komen …


Archimedes
(287–212)


Ptolemaeus
(90–168)


Zu Chongzhi
(429–500)


Gregory
(1638–1675)


Euler
(1707–1783)

4 Vectoren

dit moet ik leren		pagina	ik ken het!	oké voor examen
❒	Ik weet wat een vector is en ken het verband tussen een vector en een verschuiving.	233	☺	☺
❒	Ik ken de nulvector als een speciaal geval van een vector.	233	☺	☺
❒	Ik weet wat bedoeld wordt met gelijke en tegengestelde vectoren.	234	☺	☺
❒	Ik kan bij contexten kracht, verplaatsing en snelheid de link leggen met het vak fysica.	236	☺	☺
❒	Ik kan de som en het verschil tekenen van vectoren in het vlak.	240	☺	☺
❒	Ik ken de formule van Chasles-Möbius en kan die toepassen.	241	☺	☺
❒	Ik ken de eigenschappen van de optelling van vectoren.	242	☺	☺
❒	Ik kan de scalaire vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal tekenen in het vlak.	244	☺	☺
❒	Ik ken de eigenschappen van de scalaire vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal.	244	☺	☺

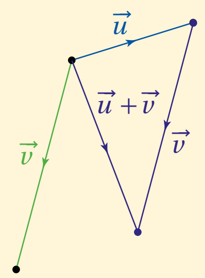
4 Vectoren

Naam	Totaal	Punten

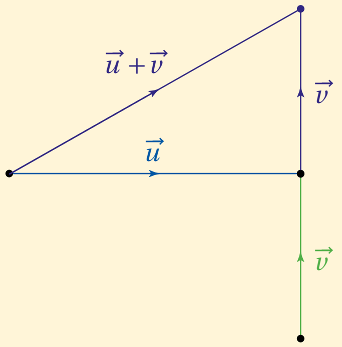
Klas	Nummer	Datum	Orde / Stiptheid	Correctheid

1 Bepaal telkens $\vec{u} + \vec{v}$. ...... / 1

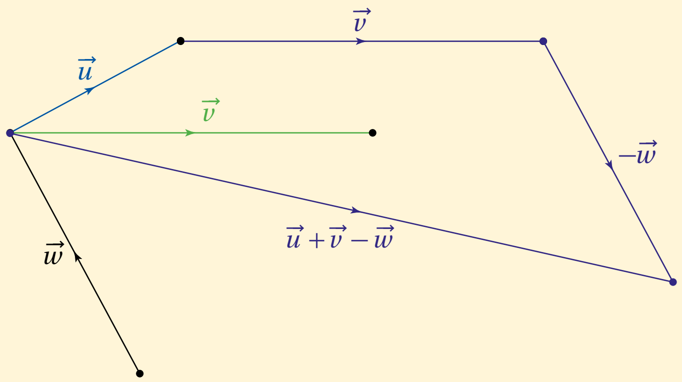
a



b



2 Bepaal $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$. ...... / 1



3 Noteer korter: ...... / 2

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AA} = \vec{o}$

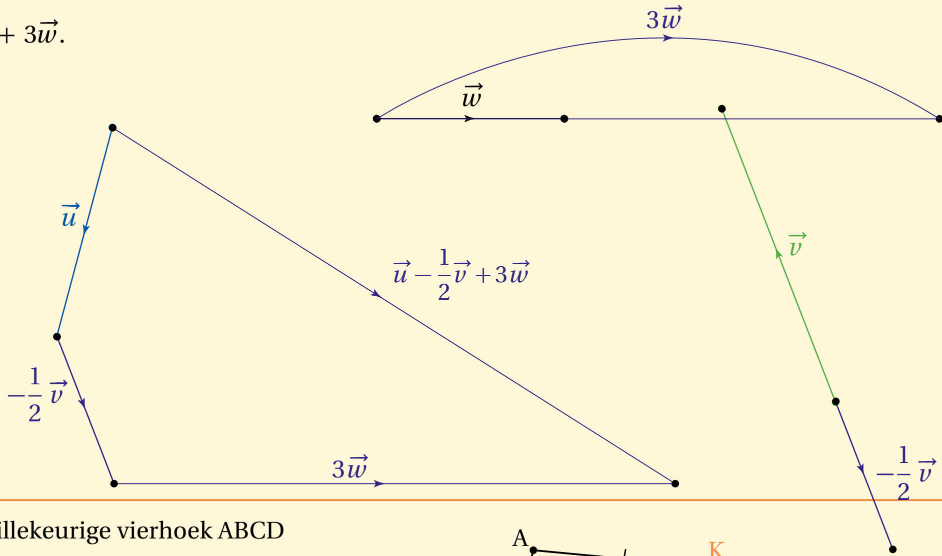
4 Vereenvoudig: ...... / **2**

$$(r-s)\cdot(\vec{x}-\vec{y})+(s-r)\cdot(\vec{x}+\vec{y}) = \cancel{r\vec{x}} - r\vec{y} - \cancel{s\vec{x}} + s\vec{y} + \cancel{s\vec{x}} + s\vec{y} - \cancel{r\vec{x}} - r\vec{y}$$

$$= s\vec{y} + s\vec{y} - r\vec{y} - r\vec{y}$$

$$= 2s\vec{y} - 2r\vec{y}$$

5 Teken $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + 3\vec{w}$. ...... / **2**

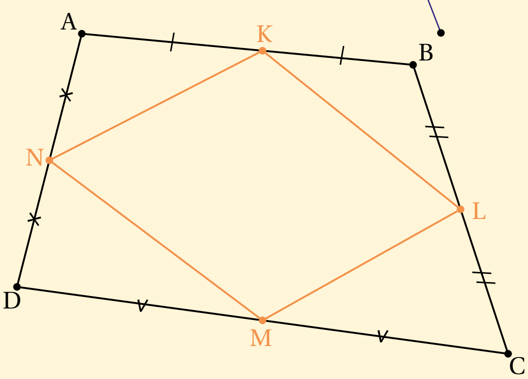


6 Gegeven: willekeurige vierhoek ABCD ...... / **2**

K = mi[AB] M = mi[CD]

L = mi[BC] N = mi[DA]

Gevraagd: bewijs met behulp van vectoren dat KLMN een parallellogram is.



$$\begin{cases} \overrightarrow{NK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} & \text{(middenparallel van } \Delta \text{ ABD)} \\ \overrightarrow{ML} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} & \text{(middenparallel van } \Delta \text{ BCD)} \end{cases}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{NK} = \overrightarrow{ML}$

$\Rightarrow$ NKLM is een parallellogram.