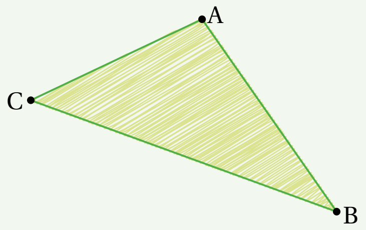
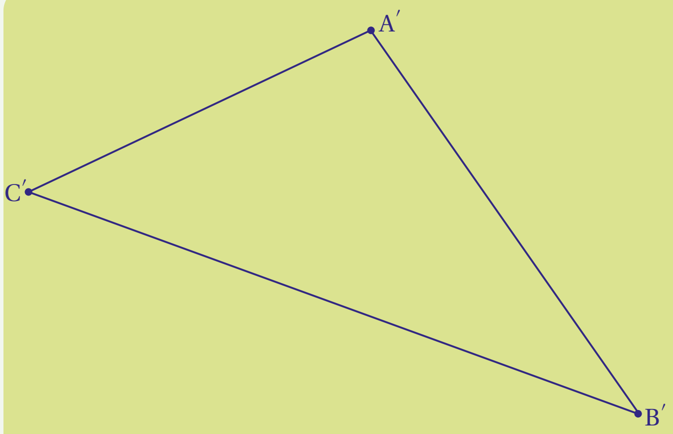
14 Oefeningen

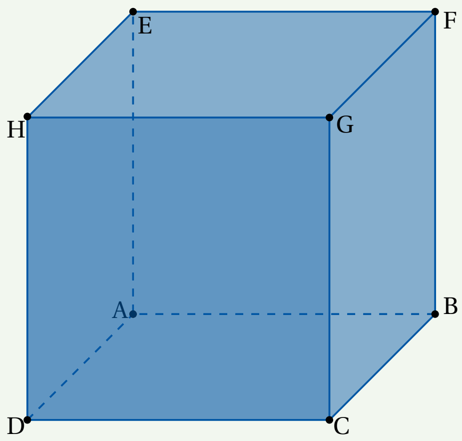
1 Tekenopdrachten.

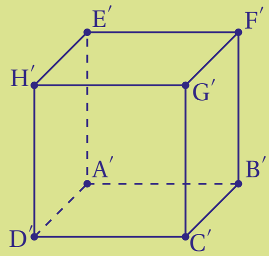
a Teken $\Delta A'B'C'$ als $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
De gelijkvormigheidsfactor is 2.





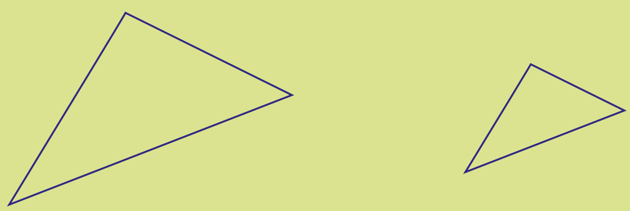
b Teken kubus $\begin{pmatrix} E'F'G'H' \\ A'B'C'D' \end{pmatrix}$ als je weet dat $\begin{pmatrix} EFGH \\ ABCD \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E'F'G'H' \\ A'B'C'D' \end{pmatrix}$ en de gelijkvormigheidsfactor 0,5 is.





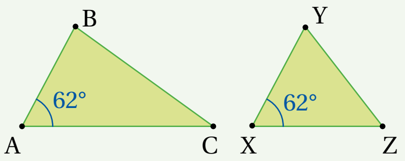
c Teken rechthoek $A'B'C'D'$ als
$ABCD \sim A'B'C'D'$.
De gelijkvormigheidsfactor is $\frac{4}{3}$.

d Teken twee driehoeken die gelijkvormig zijn, maar niet congruent.



2 Zijn volgende figuren gelijkvormig? Verklaar.

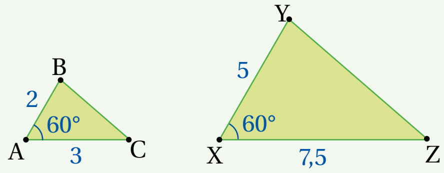
a



☒ NEEN ☐ JA

Er is enkel een hoek gelijk.

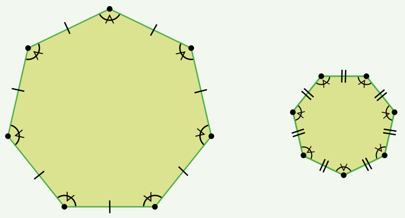
e



☐ NEEN ☒ JA

Gelijkvormig $\left(\frac{Z}{Z}H\frac{Z}{Z}\right)$.

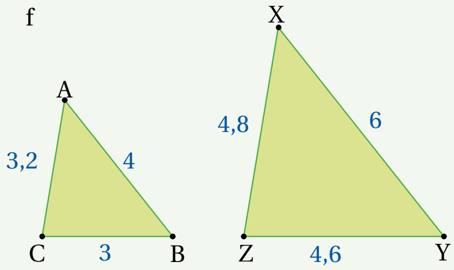
b



☐ NEEN ☒ JA

De overeenkomstige zijden bepalen een evenredigheid en de overeenkomstige hoeken zijn gelijk.

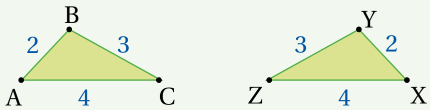
f



☒ NEEN ☐ JA

Geen evenredigheid.

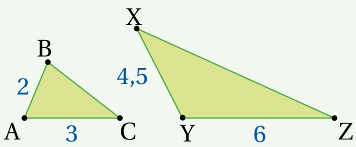
c



☐ NEEN ☒ JA

Ze zijn zelfs congruent.

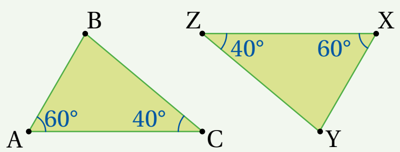
g



☒ NEEN ☐ JA

De ingesloten hoek is niet gelijk.

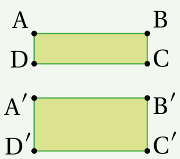
d



☐ NEEN ☒ JA

Gelijkvormig (HH).

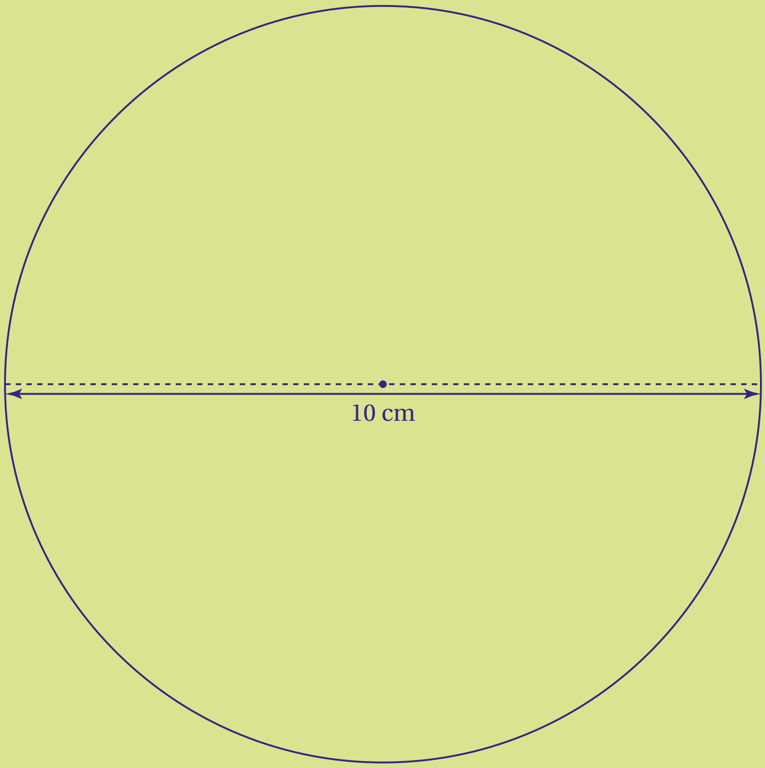
h



☒ NEEN ☐ JA

Geen evenredigheid.

3 Romane heeft in haar tuin een cirkelvormige vijver aangelegd waarvan de diameter 5 m is. Teken de vijver op schaal 1 : 50. Bereken de oppervlakte en de omtrek van de getekende vijver op schaal en van de vijver in werkelijkheid.



Op schaal:

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 5 \text{ cm} \approx 31{,}42 \text{ cm} \\ A &= \pi r^2 \\ &= \pi (5 \text{ cm})^2 \\ &= 25 \cdot \pi \text{ cm}^2 \approx 78{,}54 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

In werkelijkheid:

$$\begin{aligned} p &= 2\pi r \\ &= 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \text{ m} \approx 15{,}71 \text{ m} \\ A &= \pi r^2 \\ &= \pi (2{,}5 \text{ m})^2 \\ &= 6{,}25 \cdot \pi \text{ m}^2 \approx 19{,}63 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

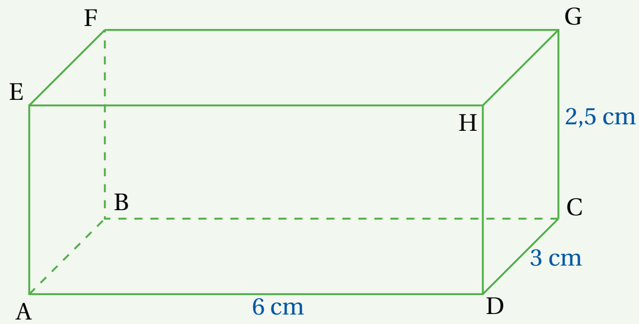
4 Een balk heeft als afmetingen: $l = 12$ cm, $b = 8$ cm en $h = 10$ cm. Een andere balk is gelijkvormig met die balk. Vul de afmetingen verder aan.

a $l' = 6$ cm — $b' =$ 4 cm — $h' =$ 5 cm

b $l' =$ 18 cm — $b' =$ 12 cm — $h' = 15$ cm

c $l' =$ 4,8 cm — $b' = 3{,}2$ cm — $h' =$ 4 cm

5 Deze balk is getekend op schaal 1 : 500.



a Bereken de werkelijke totale oppervlakte in m².

$$\begin{aligned} l &= 30 \text{ m } (= 6 \cdot 5 \text{ m}) \\ b &= 15 \text{ m } (= 3 \cdot 5 \text{ m}) \\ h &= 12{,}5 \text{ m } (= 2{,}5 \cdot 5 \text{ m}) \\ A &= 2 \cdot (30 \cdot 15 + 30 \cdot 12{,}5 + 15 \cdot 12{,}5) \text{ m}^2 \\ &= 2025 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

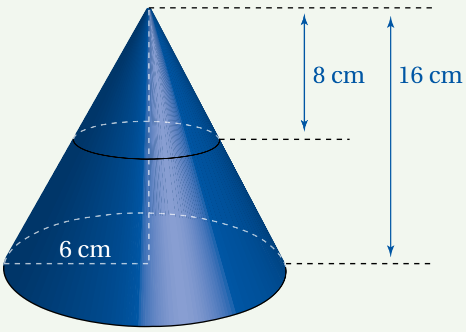
ANTWOORD: De totale oppervlakte bedraagt 2025 m² in werkelijkheid.

b Bereken het werkelijke volume in m³.

$$\begin{aligned} V &= 30 \cdot 15 \cdot 12{,}5 \text{ m}^3 \\ &= 5625 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

ANTWOORD: Het volume bedraagt 5625 m³ in werkelijkheid.

6 Bereken $\frac{V_{\text{kleinste kegel}}}{V_{\text{grootste kegel}}}$ en het volume van de kleinste kegel.



- $k = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$
- $\frac{V_{\text{kleine kegel}}}{V_{\text{grote kegel}}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$
- $$\begin{aligned} V_{\text{kleine kegel}} &= \frac{1}{8} \cdot V_{\text{grote kegel}} \\ &= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 16 \text{ cm}^3 \\ &= 75{,}398 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

7 Het volume van een kubus is 1728 dm^3.

a Bereken de lengte van een ribbe.

$V = z^3 \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{V} \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{1728 \text{ dm}^3} = 12 \text{ dm}$

b Wat wordt het volume als we elke ribbe zes maal kleiner maken?

$V' = \frac{V}{6^3} = \frac{1728 \text{ dm}^3}{216} = 8 \text{ dm}^3$

c Wat wordt het volume als we elke ribbe vier maal groter maken?

$V'' = 4^3 \cdot 1728 \text{ dm}^3 = 110\,592 \text{ dm}^3$

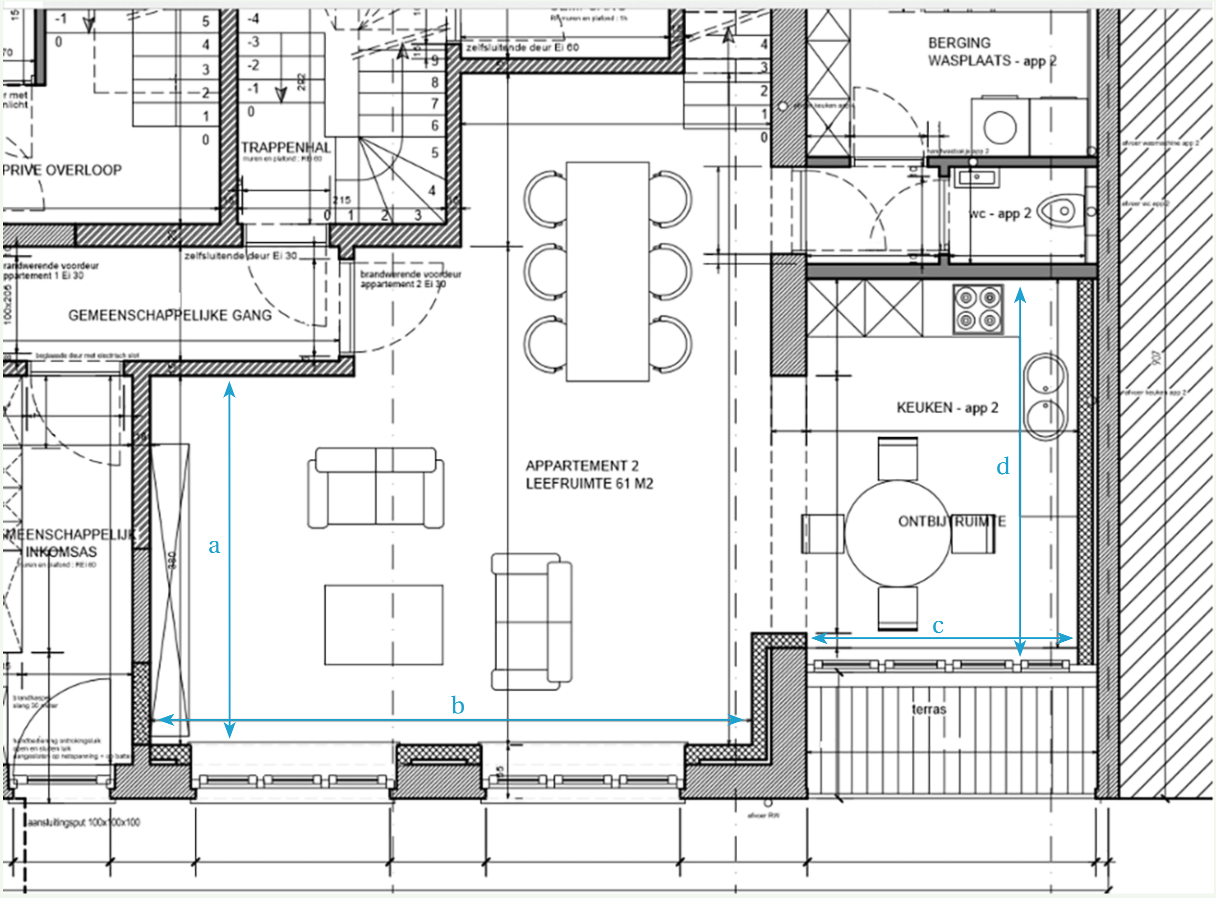
d Wat is de totale oppervlakte van de gegeven kubus?

$A_{\text{tot}} = 6 \cdot 12^2 \text{ dm}^2 = 864 \text{ dm}^2$

8 **WISKUNDE & ARCHITECTUUR**

Het plan van een appartement wordt getekend op schaal 1 : 75.

Meet de gevraagde lengten en bereken de ware grootte.



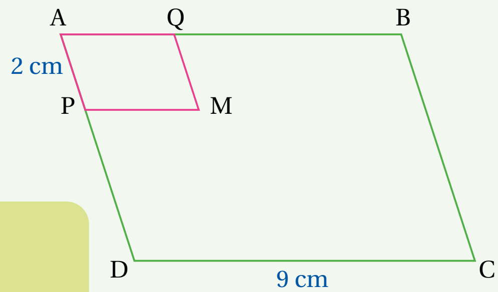
$a = 75 \cdot 4{,}8$ cm $= 360$ cm $= 3{,}6$ m

$b = 75 \cdot 8{,}0$ cm $= 600$ cm $= 6$ m

$c = 75 \cdot 3{,}6$ cm $= 270$ cm $= 2{,}7$ m

$d = 75 \cdot 4{,}9$ cm $= 367{,}5$ cm $= 3{,}675$ m

9 Gegeven: ▱ABCD en ▱AQMP
$|AB| = 3 \cdot |AQ|$
$|AD| = 3 \cdot |AP|$



Gevraagd:

a Toon aan dat ▱ABCD ~ ▱AQMP

Voor de zijden geldt: $\frac{|AQ|}{|AB|} = \frac{|PM|}{|DC|} = \frac{|QM|}{|BC|} = \frac{|AP|}{|AD|} = \frac{1}{3}$

Voor de hoeken geldt: $\widehat{A} = \widehat{A}$, $\widehat{M} = \widehat{C}$, $\widehat{P} = \widehat{D}$, $\widehat{Q} = \widehat{B}$

b Bereken de omtrek van beide parallellogrammen.

$p_{ABCD} = 2(6+9)\text{ cm} = 30\text{ cm}$

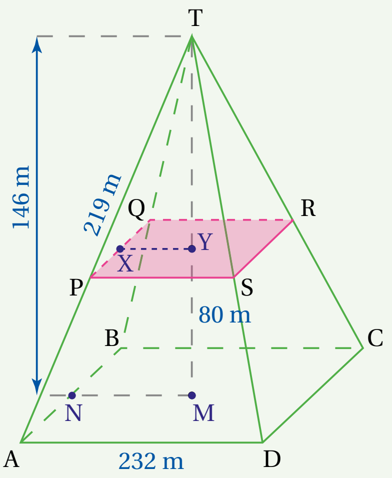
$p_{AQMP} = \frac{1}{3} \cdot 30\text{ cm} = 10\text{ cm}$

c Bereken beide hoogten als je weet dat $A_{ABCD} = 45\text{ cm}^2$.

$h_{ABCD} = \frac{45}{9}\text{ cm} = 5\text{ cm}$

$h_{AQMP} = \frac{1}{3} \cdot 5\text{ cm} = \frac{5}{3}\text{ cm}$

10 De piramide van Cheops (Egypte) heeft als grondvlak een vierkant met zijden van 232 m, een hoogte van 146 m en opstaande ribben van 219 m. Stel dat je op een hoogte van 80 m deze piramide zou doorsnijden, hoe groot zijn dan de zijde en de oppervlakte van die doorsnede?



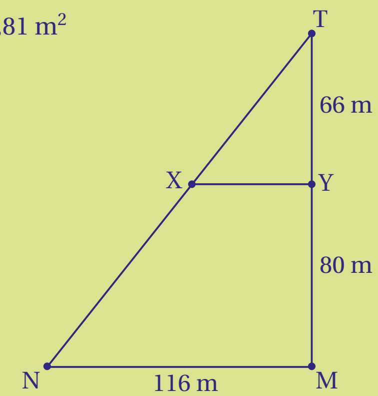
$\Delta TMN \sim \Delta TYX$ want: $\widehat{T} = \widehat{T}, \widehat{X} = \widehat{N}$ (overeenkomstige hoeken)

$\Rightarrow \frac{|TY|}{|TM|} = \frac{|XY|}{|NM|}$

$\Rightarrow \frac{66}{146} = \frac{|XY|}{116}$

$\Rightarrow |XY| = \frac{66 \cdot 116}{146} \approx 52{,}44$

$A_{PQRS} = (2 \cdot 52{,}44)^2 = 10\,999{,}81\text{ m}^2$



11 Waar of vals?

	BEWERING	WAAR	VALS
a	Twee gelijkbenige driehoeken zijn altijd gelijkvormig.		✗
b	Twee gelijkbenige driehoeken zijn gelijkvormig als ze even grote basishoeken hebben.	✗	
c	Twee gelijkbenige driehoeken zijn gelijkvormig als de tophoeken even groot zijn.	✗	
d	Twee gelijkzijdige driehoeken zijn altijd gelijkvormig.	✗	
e	Twee rechthoekige driehoeken zijn gelijkvormig als ze een scherpe hoek gelijk hebben.	✗	
f	Een hoogtelijn verdeelt een driehoek in twee gelijkvormige driehoeken.		✗
g	Twee rechthoeken zijn altijd gelijkvormig.		✗
h	Alle ruiten zijn gelijkvormig.		✗
i	Alle kubussen zijn gelijkvormig.	✗	
j	Alle cirkels zijn gelijkvormig.	✗	

12 Bepalen de punten A, B, C en P, Q, R gelijkvormige driehoeken?

	$\lvert AB \rvert$	$\lvert AC \rvert$	$\lvert BC \rvert$	$\lvert PQ \rvert$	$\lvert QR \rvert$	$\lvert PR \rvert$	$\hat{A}$	$\hat{B}$	$\hat{C}$	$\hat{P}$	$\hat{Q}$	$\hat{R}$	JA	NEEN
a	6 cm	8 cm	5 cm	3 cm	4 cm	10 cm	–	–	–	–	–	–		✗
b	–	–	–	–	–	–	50°	20°	–	100°	40°	–		✗
c	12 cm	18 cm	14 cm	6 cm	7 cm	9 cm	–	–	–	–	–	–	✗	
d	10 cm	–	8 cm	5 cm	–	4 cm	–	50°	–	50°	–	–	✗	
e	30 cm	20 cm	–	40 cm	60 cm	–	40°	–	–	–	–	40°		✗

13

Gegeven: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$
[AB] en [A′B′]; [BC] en [B′C′]; [AC] en [A′C′] zijn overeenkomstige zijden.

Gevraagd: vul de tabel aan.

	$\lvert AB \rvert$	$\lvert AC \rvert$	$\lvert BC \rvert$	$\lvert A'B' \rvert$	$\lvert A'C' \rvert$	$\lvert B'C' \rvert$	$\frac{\lvert A'B' \rvert}{\lvert AB \rvert} = k$
a	3	2	4	9	6	12	3
b	1,5	3	2	2	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{4}{3}$
c	8	4	$\frac{20}{3}$	6	3	5	$\frac{3}{4}$
d	$\frac{4\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{6}$	$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	3	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{6}}{2}$

13 a $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$\Rightarrow \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = k$$
$$\Rightarrow \frac{|A'B'|}{3} = \frac{|A'C'|}{2} = \frac{|B'C'|}{4} = 3$$
$$\Rightarrow |A'B'| = 9;\ |A'C'| = 6;\ |B'C'| = 12$$

b $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$\Rightarrow \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = k$$
$$\Rightarrow \frac{|A'B'|}{1{,}5} = \frac{4}{3} = \frac{|B'C'|}{2} = k$$
$$\Rightarrow |A'B'| = \frac{1{,}5 \cdot 4}{3} = 2;\ |B'C'| = \frac{8}{3}$$

c $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

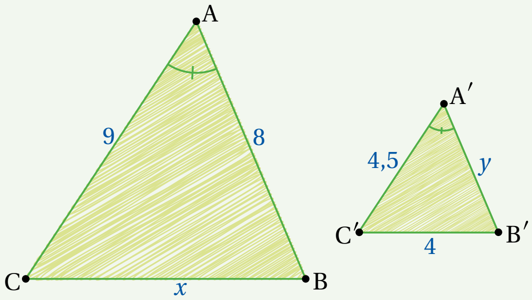
$$\Rightarrow \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = k$$
$$\Rightarrow \frac{6}{8} = \frac{3}{|AC|} = \frac{5}{|BC|} = k$$
$$\Rightarrow |AC| = \frac{8 \cdot 3}{6} = 4;\ |BC| = \frac{8 \cdot 5}{6} = \frac{20}{3}$$

d $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$

$$\Rightarrow \frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} = k$$
$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{|AB|} = \frac{3}{|AC|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = k$$
$$\Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{|AB|} = \frac{3}{|AC|} = \frac{\sqrt{6}}{2} = k$$
$$\Rightarrow |AB| = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3};\ |AC| = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

14 Bepaal telkens de grootte van x en y als $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

a



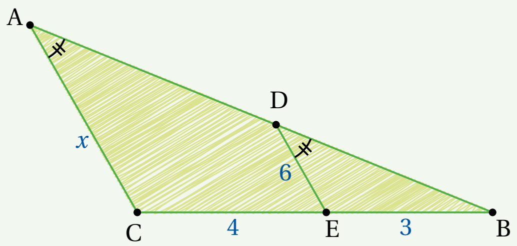
$$\frac{9}{4{,}5} = \frac{8}{y} = \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{4{,}5} = \frac{8}{y} \text{ en } \frac{9}{4{,}5} = \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow 9y = 36 \text{ en } 4{,}5x = 36$$

$$\Rightarrow y = 4 \text{ en } x = 8$$

*b

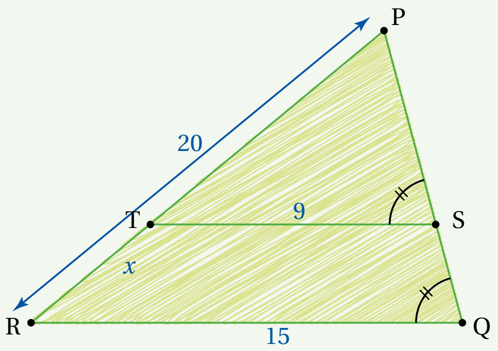


$$\frac{3}{7} = \frac{6}{x}$$

$$\Rightarrow 3x = 42$$

$$\Rightarrow x = 14$$

*c



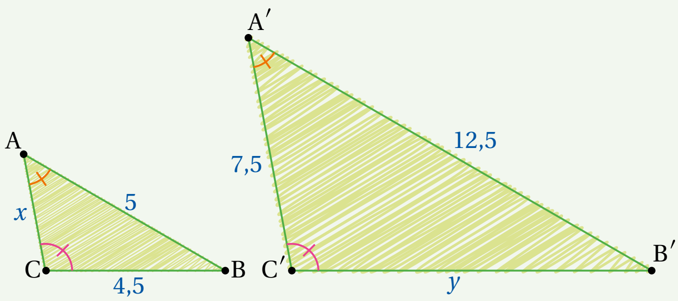
$$\frac{9}{15} = \frac{20-x}{20}$$

$$\Rightarrow 180 = 300 - 15x$$

$$\Rightarrow 15x = 120$$

$$\Rightarrow x = 8$$

d



$$\frac{x}{7{,}5} = \frac{5}{12{,}5} = \frac{4{,}5}{y}$$

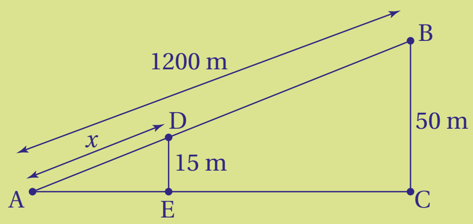
$$\Rightarrow \frac{x}{7{,}5} = \frac{5}{12{,}5} \text{ en } \frac{5}{12{,}5} = \frac{4{,}5}{y}$$

$$\Rightarrow 12{,}5x = 37{,}5 \text{ en } 5y = 56{,}25$$

$$\Rightarrow x = 3 \text{ en } y = 11{,}25$$

15 Een weg stijgt 50 m over een afstand van 1,2 km. In de veronderstelling dat de weg overal dezelfde helling heeft, bereken:

a de afstand die je moet afleggen om 15 m te stijgen;



- $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ want $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{C} = \hat{E} = 90° \end{cases}$

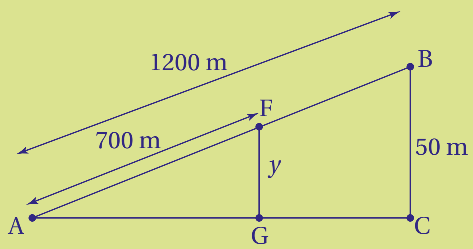
$\Longrightarrow \dfrac{|AD|}{|AB|} = \dfrac{|ED|}{|CB|}$

$\Longrightarrow \dfrac{x}{1200} = \dfrac{15}{50}$

$\Longrightarrow x = \dfrac{15 \cdot 1200}{50} = 360$

ANTWOORD: Om 15 m te stijgen moet je 360 m afleggen.

b de afstand die je gestegen bent als je 700 m hebt afgelegd.



- $\Delta AFG \sim \Delta ABC$ want $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{C} = \hat{G} = 90° \end{cases}$

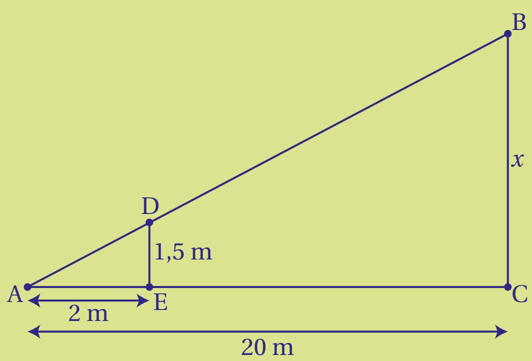
$\Longrightarrow \dfrac{|AF|}{|AB|} = \dfrac{|FG|}{|BC|}$

$\Longrightarrow \dfrac{700}{1200} = \dfrac{y}{50}$

$\Longrightarrow y = \dfrac{700 \cdot 50}{1200} \approx 29{,}17$

ANTWOORD: Als je 700 m hebt afgelegd, ben je 29,17 m gestegen.

16 De schaduw van een boom is op een bepaald ogenblik 20 m lang. Op hetzelfde ogenblik heeft een stok van 1,5 m een schaduw van 2 m. Hoe hoog is de boom? Werk op 1 cm nauwkeurig.



$\Delta ABC \sim \Delta ADE$ want $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{C} = \hat{E} = 90° \end{cases}$

$\Longrightarrow \dfrac{|AE|}{|AC|} = \dfrac{|DE|}{|BC|}$

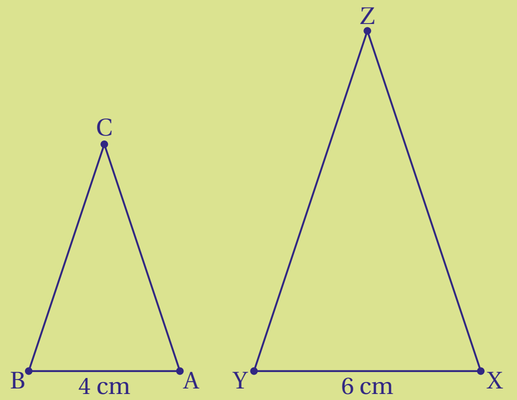
$\Longrightarrow \dfrac{2}{20} = \dfrac{1{,}5}{x}$

$\Longrightarrow x = \dfrac{1{,}5 \cdot 20}{2} = 15$

ANTWOORD: De boom is 15 meter hoog.

17 Oppervlakte en omtrek bij $\Delta ABC \sim \Delta XYZ$.

a $|AB| = 4$ cm en $|XY| = 6$ cm. Bereken de oppervlakte van ΔXYZ als de oppervlakte van ΔABC gelijk is aan 400 cm^2.



$$k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$A_{\Delta XYZ} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot A_{\Delta ABC}$$

$$= \frac{9}{4} \cdot 400 \text{ cm}^2$$

$$= 900 \text{ cm}^2$$

b $\dfrac{A_{\Delta XYZ}}{A_{\Delta ABC}} = \dfrac{25}{4}$

Als $|AB| = 6$ cm, bereken dan $|XY|$.

$$k = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$|AB| = 6$ cm

$$\Rightarrow |XY| = \frac{5}{2} \cdot 6 \text{ cm}$$

$$= 15 \text{ cm}$$

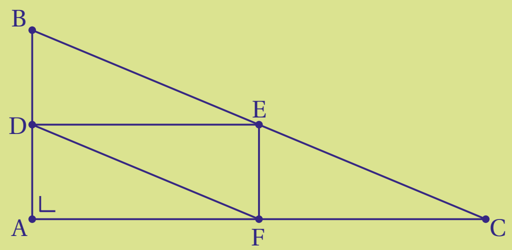
Als $p_{\Delta ABC} = 24$ cm, bereken dan $p_{\Delta XYZ}$.

$$p_{\Delta XYZ} = \frac{5}{2}\, p_{\Delta ABC}$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 24 \text{ cm}$$

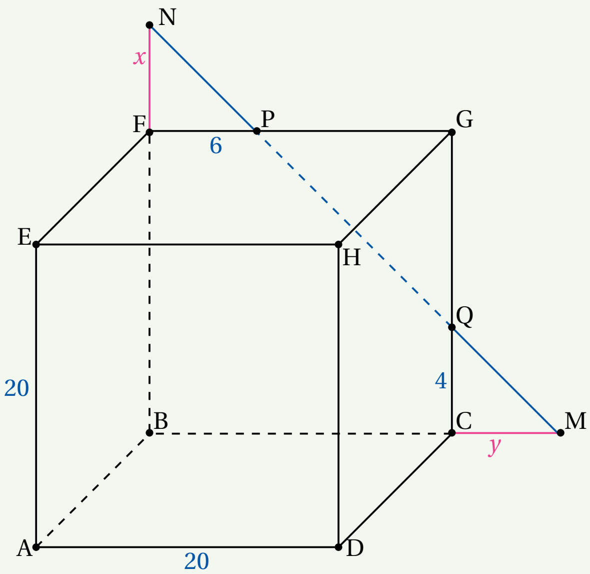
$$= 60 \text{ cm}$$

18 Bewijs dat de driehoek gevormd door de middenparallellen van een rechthoekige driehoek zelf rechthoekig is.
Wat is de verhouding van de oppervlaktes van die twee rechthoekige driehoeken?



- $\left.\begin{array}{l} DE \mathbin{/\!/} AC \quad \text{(eig. middenparallel)} \\ AC \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow DE \perp AB \quad (1)$
- $\left.\begin{array}{l} EF \mathbin{/\!/} AB \quad \text{(eig. middenparallel)} \\ AB \perp AC \end{array}\right\} \Rightarrow EF \perp AC \quad (2)$
- (1) en (2) $\Rightarrow DE \perp EF$, dus ΔDEF is rechthoekig
- $\dfrac{A_{\Delta ABC}}{A_{\Delta DEF}} = 2^2 = 4$

* **19** Gegeven is een kubus met ribben van 20 cm. Bepaal x en y.



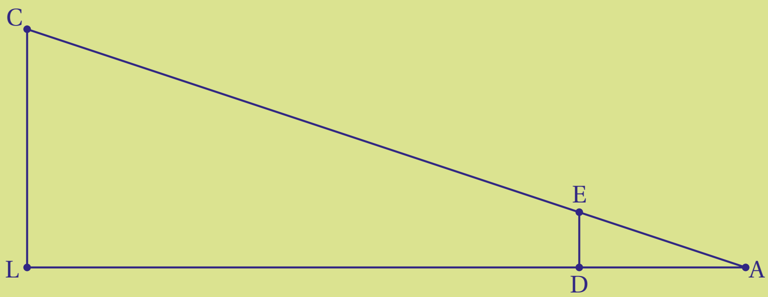
- $\Delta PGQ \sim \Delta MCQ$
  $\left(\begin{array}{l} \widehat{P} = \widehat{M} \text{ (verwisselende binnenhoeken)} \\ \widehat{C} = \widehat{G} = 90° \end{array}\right)$
  $\dfrac{|QC|}{|QG|} = \dfrac{|CM|}{|PG|}$
  $\Leftrightarrow \dfrac{4}{16} = \dfrac{y}{14}$
  $\Leftrightarrow y = \dfrac{4 \cdot 14}{16} = 3{,}5$

- $\Delta FNP \sim \Delta GQP$
  $\left(\begin{array}{l} \widehat{F} = \widehat{G} = 90° \\ \widehat{N} = \widehat{Q} \text{ (verwisselende binnenhoeken)} \end{array}\right)$
  $\dfrac{|FN|}{|GQ|} = \dfrac{|FP|}{|PG|}$
  $\Leftrightarrow \dfrac{x}{16} = \dfrac{6}{14}$
  $\Leftrightarrow x = \dfrac{6 \cdot 16}{14} \approx 6{,}86$

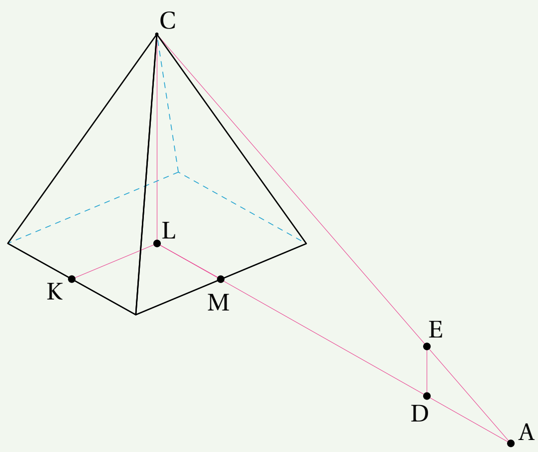
20 **WISKUNDE & GESCHIEDENIS**

Een legende vertelt dat de Griekse filosoof en wiskundige Thales uitgedaagd werd om de hoogte van een piramide te berekenen. Hij nam de uitdaging aan en werkte als volgt. Op de lijn die het midden van een van de zijden met de schaduw van de top (A) van de piramide verbindt, plaatste hij een paaltje [DE] zodat de schaduw van de top van dit paaltje precies samenviel met de schaduw van de top van de piramide. Hij mat de afstanden |KL|, |AM|, |AD|, |DE| en berekende de hoogte |LC|.

a Teken de twee gelijkvormige driehoeken waarmee Thales gewerkt heeft.



b Bereken de hoogte van de piramide als je weet dat
|KL| = 114 m,
|AM| = 96 m,
|AD| = 3 m
en |DE| = 2 m.



$\Delta ALC \sim \Delta ADE$ want $\begin{cases} \hat{A} = \hat{A} \\ \hat{D} = \hat{L} = 90° \end{cases}$

$|AL| = 96 + 114 = 210$

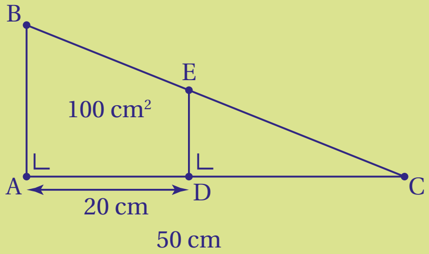
$\Longrightarrow \dfrac{|AL|}{|AD|} = \dfrac{|CL|}{|ED|}$

$\Longrightarrow \dfrac{210}{3} = \dfrac{|CL|}{2}$

$\Longrightarrow |CL| = \dfrac{2 \cdot 210}{3} = 140$

ANTWOORD: De piramide is 140 m hoog.

21 De Babyloniërs zaten met volgend probleem opgezadeld.
Een rechthoekszijde van een rechthoekige driehoek heeft als lengte 50 cm. Een rechte, evenwijdig met de andere rechthoekszijde en op een afstand van 20 cm hiervan, bepaalt een trapezium met een oppervlakte van 100 cm^2.
Bereken de lengte van de basissen van het trapezium.



- $A_{\text{ABED}} = 100 = \dfrac{(|\text{AB}| + |\text{DE}|) \cdot |\text{AD}|}{2}$

  $\Rightarrow \dfrac{(|\text{AB}| + |\text{DE}|) \cdot 20}{2} = 100 \Rightarrow |\text{AB}| + |\text{DE}| = 10$
- $\Delta\text{ABC} \sim \Delta\text{DEC}$ (HH)

  $\Rightarrow \dfrac{|\text{DE}|}{|\text{AB}|} = \dfrac{30}{50} = \dfrac{3}{5}$

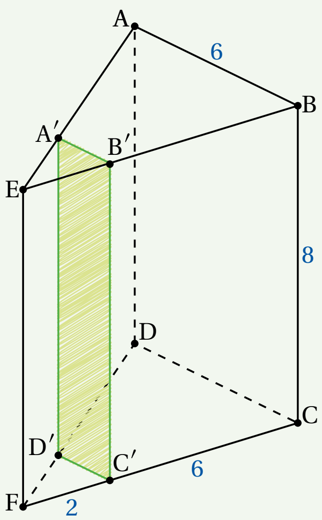
  $\Rightarrow |\text{DE}| = \dfrac{3}{5}|\text{AB}|$
- $|\text{AB}| + \dfrac{3}{5}|\text{AB}| = 10$

  $\Rightarrow \dfrac{8}{5}|\text{AB}| = 10 \Rightarrow |\text{AB}| = 6{,}25$

  $\Rightarrow |\text{DE}| = \dfrac{3}{5} \cdot 6{,}25 = 3{,}75$

22 Gegeven:
recht prisma
snijvlak A′B′C′D′ evenwijdig met ABCD
afmetingen: zie tekening

Gevraagd:
Bereken de oppervlakte van A′B′C′D′.



$\Delta\text{FD}'\text{C}' \sim \Delta\text{FDC}$ (HH)

$\Rightarrow \dfrac{|\text{FC}'|}{|\text{FC}|} = \dfrac{|\text{D}'\text{C}'|}{|\text{DC}|}$

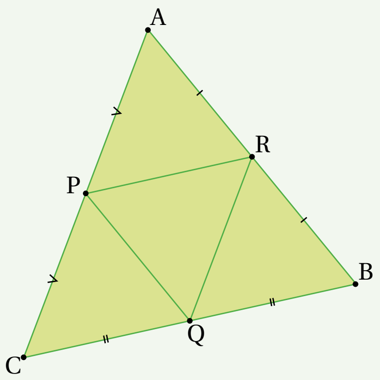
$\Rightarrow \dfrac{2}{8} = \dfrac{|\text{D}'\text{C}'|}{6}$

$\Rightarrow |\text{D}'\text{C}'| = \dfrac{12}{8} = \dfrac{3}{2}$

$A_{\text{A}'\text{B}'\text{C}'\text{D}'} = \dfrac{3}{2} \cdot 8 = 12$

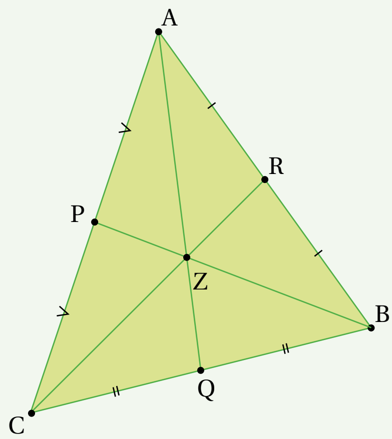
23 Gegeven: zie figuur.

Gevraagd: vul de volgende tabel aan.



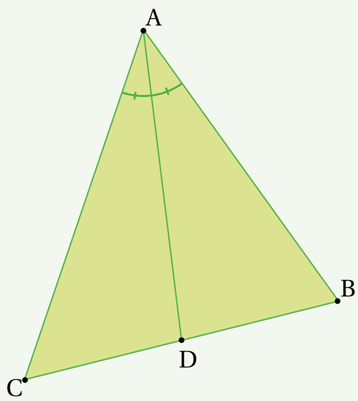
	|AB|	|BC|	|AC|	|PQ|	|QR|	|PR|
a	6	8	5	3	2,5	4
b	5	8,2	6	2,5	3	4,1
c	10	12	12,4	5	6,2	6

24 Vul de volgende tabel aan.



|AQ| = 3,6	|AZ| = 2,4	|ZQ| = 1,2
|BP| = 5,4	|BZ| = 3,6	|ZP| = 1,8
|CR| = 9,12	|CZ| = 6,08	|ZR| = 3,04

25 Vul de volgende tabel aan.



	|AB|	|BC|	|AC|	|BD|	|CD|
	5	7	3,75	4	3
	8	8,75	6	5	3,75
*	$\sqrt{6}$	$\sqrt{3}$	$6+2\sqrt{6}$	$\sqrt{3}-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

25

a • $\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{|CD|}{|BD|}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|AC|}{5} = \dfrac{3}{4}$

$\Leftrightarrow |AC| = \dfrac{15}{4} = 3{,}75$

• $|BC| = 4+3 = 7$

b • $\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{|CD|}{|BD|}$

$\Leftrightarrow \dfrac{6}{8} = \dfrac{|CD|}{5}$

$\Leftrightarrow |CD| = \dfrac{30}{8} = 3{,}75$

• $|BC| = 5+3{,}75 = 8{,}75$

c • $|BD| = |BC| - |CD| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$

$\dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{|CD|}{|BD|}$

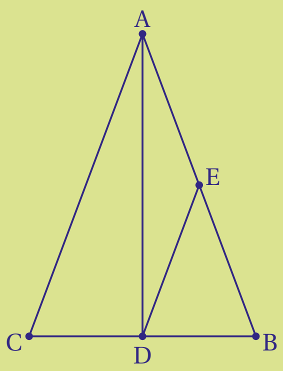
$\Leftrightarrow \dfrac{|AC|}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow |AC| = \dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow |AC| = \dfrac{2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} = 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = 6+2\sqrt{6}$

26 ΔABC is gelijkbenig. AD is de hoogtelijn uit A, E is het midden van [AB].

Toon aan dat $|DE| = \frac{1}{2}|AB|$



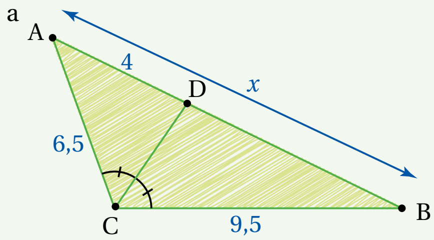
$\begin{cases} D = \text{mi}[BC] \\ E = \text{mi}[AB] \end{cases}$ (de hoogtelijn uit de top van een gelijkbenige driehoek is ook de middelloodlijn van de basis)

$\Rightarrow$ DE is een middenparallel

$\Rightarrow |DE| = \frac{|AC|}{2} = \frac{|AB|}{2}$

27 Bepaal telkens x.

a



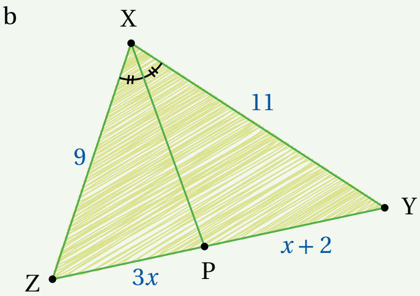
$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}$

$\Leftrightarrow \frac{6{,}5}{9{,}5} = \frac{4}{x-4}$

$\Leftrightarrow 6{,}5x - 26 = 38$

$\Leftrightarrow x = \frac{38+26}{6{,}5} \approx 9{,}85$

*b



$\frac{|XZ|}{|XY|} = \frac{|ZP|}{|PY|}$

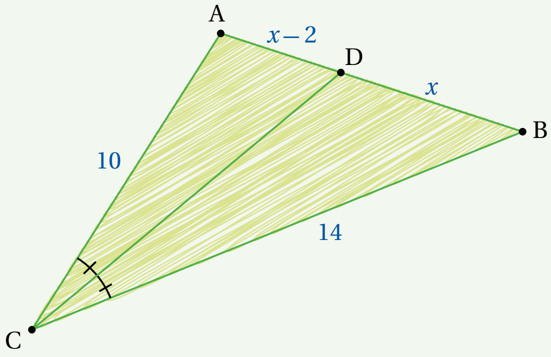
$\Leftrightarrow \frac{9}{11} = \frac{3x}{x+2}$

$\Leftrightarrow 9x + 18 = 33x$

$\Leftrightarrow 24x = 18$

$\Leftrightarrow x = \frac{18}{24} = 0{,}75$

* c



$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|AD|}{|BD|}$$

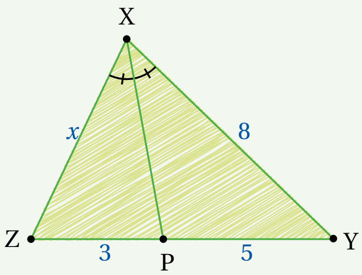
$$\Leftrightarrow \frac{10}{14} = \frac{x-2}{x}$$

$$\Leftrightarrow 10x = 14x - 28$$

$$\Leftrightarrow -4x = -28$$

$$\Leftrightarrow x = 7$$

d



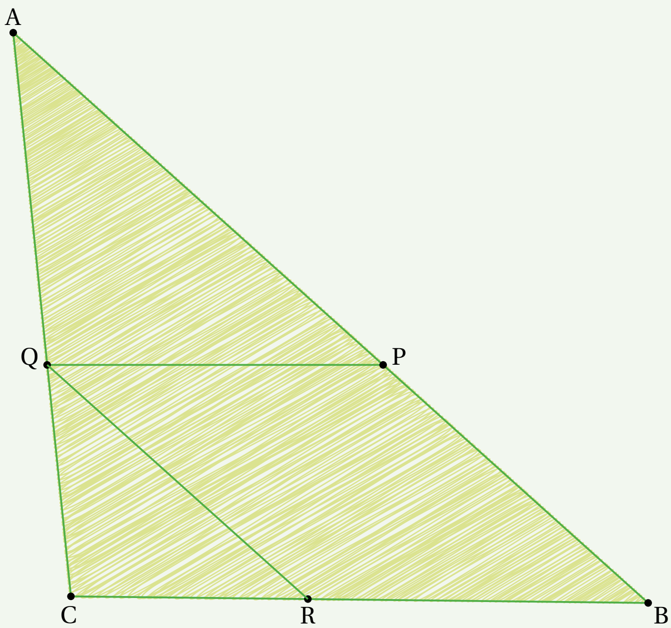
$$\frac{|XZ|}{|XY|} = \frac{|PZ|}{|PY|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{8} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5x = 24$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{24}{5} = 4{,}8$$

* **28** Bereken $|PQ|$ opdat PBRQ een ruit zou zijn. $|AB| = 15$ cm; $|BC| = 10$ cm.



$$\Delta APQ \sim \Delta ACB \text{ want } QP /\!/ BC$$

$$\Rightarrow \frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|QP|}{|CB|} = \frac{|AQ|}{|AC|}$$

$$\Rightarrow \frac{15-x}{15} = \frac{x}{10}$$

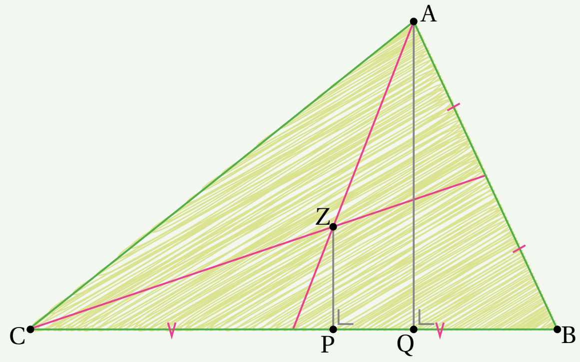
$$\Rightarrow 10(15-x) = 15x$$

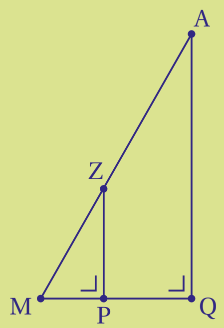
$$\Rightarrow 150 - 10x = 15x$$

$$\Rightarrow 25x = 150$$

$$\Rightarrow x = 6$$

29 Z is het zwaartepunt van ΔABC. Bepaal $\dfrac{|ZP|}{|AQ|}$.
Controleer dat ook met ICT.





AQ en ZP staan beide loodrecht

op BC en zijn dus evenwijdig.

Dus: $\Delta MAQ \sim \Delta MZP$

$$\frac{|ZM|}{|AM|} = \frac{1}{3} = \frac{|ZP|}{|AQ|}$$

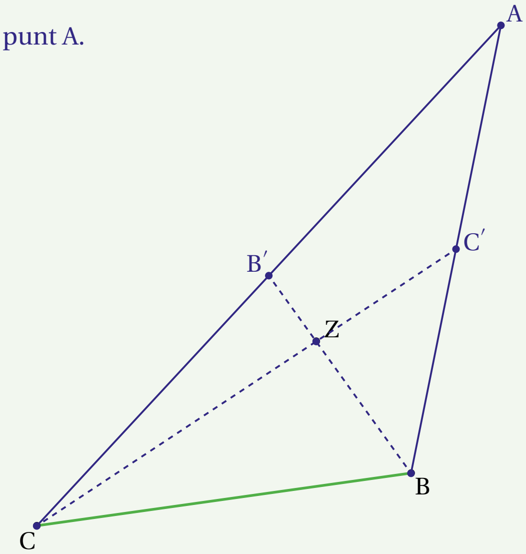
30 Z is het zwaartepunt van ΔABC. Construeer ΔABC.

Werkwijze:

Bepaal C' op $[CZ$ zodat $|CC'| = \frac{3}{2}|CZ|$.

Bepaal B' op $[BZ$ zodat $|BB'| = \frac{3}{2}|BZ|$.

Het snijpunt van $[CB'$ en $[BC'$ is het punt A.



31 Enkele bewijsopdrachten. Onderzoek deze eigenschappen met ICT en geef nadien het bewijs.

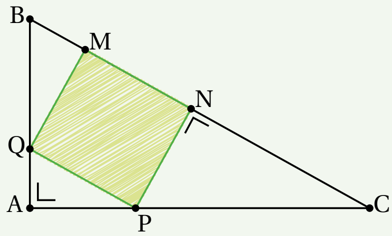
a Δ ABC is gelijkbenig met tophoek $\hat{A} = 36°$. De bissectrice van $\hat{B}$ snijdt [AC] in D. Bewijs dat $|BC|^2 = |AC| \cdot |DC|$.

b Als in een rechthoek ABCD de lengte van zijde [AB] het dubbele is van de lengte van [BC] en als je op [CD] het punt E bepaalt zodat $|CE| = \frac{1}{4} \cdot |CD|$, dan staan AC en BE loodrecht op elkaar.

c In een parallellogram ABCD trek je uit de hoekpunten A en C de hoogtelijnen AE en CH, respectievelijk op CD en AD. Toon aan: $|CD| \cdot |AE| = |AD| \cdot |CH|$.

*d In een trapezium ABCD zijn de hoeken $\hat{A}$ en $\hat{D}$ recht en staan de diagonalen loodrecht op elkaar. Bewijs dat |AD| middelevenredig is tussen |AB| en |CD|.

e [AD], [BE] en [CH] zijn de hoogtelijnen in een driehoek ABC.
Toon aan dat: $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AE|}{|AH|}$ en $\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BH|}{|BD|}$ en $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|CD|}{|CE|}$



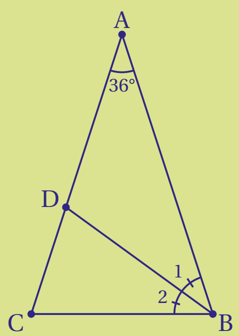
*f Gegeven: Δ ABC
$\hat{A} = 90°$
MNPQ is een vierkant
Te bewijzen: de oppervlakte van MNPQ is het product van |BM| met |NC|.

*g Trek je door het hoekpunt van een hoek een willekeurige rechte, dan is de verhouding van de afstanden tot de benen van de hoek voor alle punten van die rechte dezelfde. Toon dat aan.

*h Trek je in ▱ABCD door A een rechte die BC, BD en CD snijdt in E, F en G, dan geldt: $|AF|^2 = |FE| \cdot |FG|$. Toon dat aan.

i A, B en C zijn de middens van de zijden van een willekeurige driehoek PQR.
Toon aan dat $p_{\Delta PQR} = 2 \cdot p_{\Delta ABC}$ en dat A, B en C de driehoek PQR in vier congruente driehoeken verdelen.

j E, F, G en H zijn de middens van de zijden van een willekeurige vierhoek ABCD. Bewijs dat EFGH een parallellogram is.

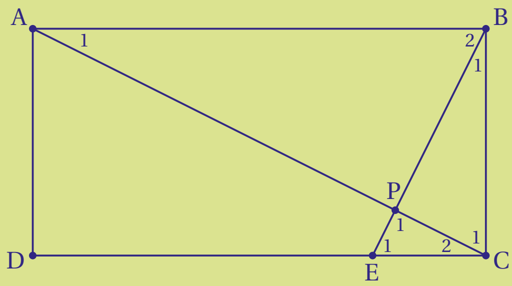


a • $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \frac{\frac{180° - 36°}{2}}{2} = 36°$

• $\Delta ABC \sim \Delta BCD$ want: $\hat{B}_2 = \hat{A} = 36°$ en $\hat{C} = \hat{C}$

$\Rightarrow \frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|BC|}{|DC|}$

$\Rightarrow |BC|^2 = |AC| \cdot |DC|$



b Gegeven: ABCD is een rechthoek, $|AB| = 2 \cdot |BC|$, $|CE| = \frac{1}{4} \cdot |CD|$

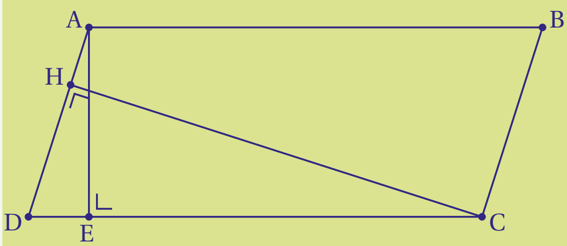
Te bewijzen: $AC \perp BE$

Bewijs:

- Omdat $|CE| = \frac{1}{4}|CD| = \frac{1}{4}|AB|$ en $|BC| = \frac{1}{2}|AB|$ is $|CE| = \frac{1}{2}|BC|$
- $\Delta BCE \sim \Delta ABC$ want: $\left(\frac{Z}{Z}H\frac{Z}{Z}\right)$ $\frac{|BC|}{|CE|} = 2 = \frac{|AB|}{|BC|}$ en $\widehat{B} = \widehat{C}$

  $\Rightarrow \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1$ en $\widehat{C}_1 = \widehat{E}_1$
- $\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 = 90°$

  $\Rightarrow \widehat{E}_1 + \widehat{C}_2 = 90° \Rightarrow \widehat{P}_1 = 90° \Rightarrow AC \perp BE$

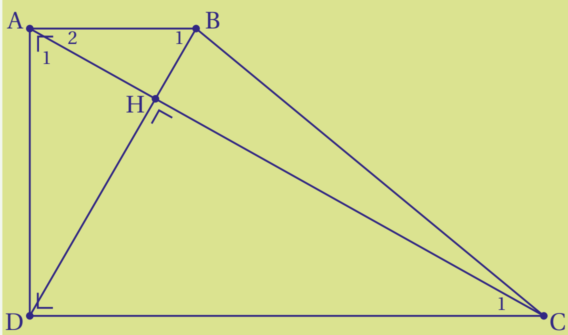


c Bewijs:

$\Delta ADE \sim \Delta CDH$ want: $\widehat{D} = \widehat{D}$ en $\widehat{E} = \widehat{H} = 90°$ (HH)

$\Rightarrow \frac{|DE|}{|DH|} = \frac{|AE|}{|HC|} = \frac{|AD|}{|DC|}$

$\Rightarrow |AE| \cdot |DC| = |HC| \cdot |AD|$



d Te bewijzen: $|AD|^2 = |DC| \cdot |AB|$

Bewijs:

$\widehat{A} = \widehat{D} = 90°$ en $\widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$ (*)

$\Downarrow$ (HH)

$\Delta ABD \sim \Delta DAC$

$\Downarrow$

$\frac{|DC|}{|AD|} = \frac{|AD|}{|AB|}$

$\Downarrow$

$|AD|^2 = |DC| \cdot |AB|$

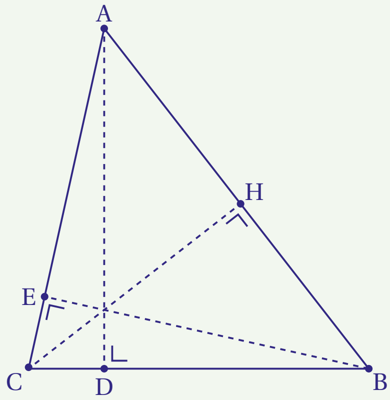
(*) $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 90°$ en $\widehat{B}_1 + \widehat{A}_2 = 90° \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{A}_1$

31

e Te bewijzen: $\dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AE|}{|AH|}$

$\Delta ACH \sim \Delta ABE$ want: $\widehat{A} = \widehat{A}$ en $\widehat{H} = \widehat{E} = 90°$

$\Rightarrow \dfrac{|AB|}{|AC|} = \dfrac{|AE|}{|AH|}$



Te bewijzen: $\dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{|BH|}{|BD|}$

$\Delta BDA \sim \Delta BHC$ want: $\widehat{B} = \widehat{B}$ en $\widehat{H} = \widehat{D} = 90°$

$\Rightarrow \dfrac{|BC|}{|AB|} = \dfrac{|BH|}{|BD|}$

Te bewijzen: $\dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|CD|}{|CE|}$

$\Delta BCE \sim \Delta ACD$ want: $\widehat{C} = \widehat{C}$ en $\widehat{E} = \widehat{D} = 90°$

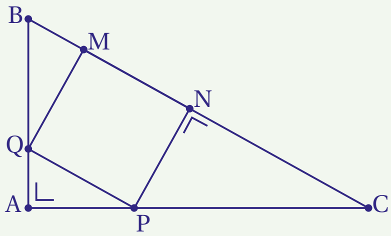
$\Rightarrow \dfrac{|AC|}{|BC|} = \dfrac{|CD|}{|CE|}$

f $\Delta PNC \sim \Delta BMQ$ want: $\widehat{C} = \widehat{Q}$ (*) en $\widehat{N} = \widehat{M} = 90°$

$\Rightarrow \dfrac{|BM|}{|NP|} = \dfrac{|MQ|}{|NC|}$

$\Rightarrow \dfrac{|BM|}{|MN|} = \dfrac{|MN|}{|NC|}$ (MNPQ is een vierkant)

$\Rightarrow |MN|^2 = |BM| \cdot |NC|$



(*) $\widehat{Q} = 90° - \widehat{B} = \widehat{C}$

g Te bewijzen: $\dfrac{|AQ|}{|A'Q|} = \dfrac{|BP|}{|B'P|}$

Bewijs: $\Delta ASQ \sim \Delta BSP$ want $\widehat{S}_1 = \widehat{S}_1$ en $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$

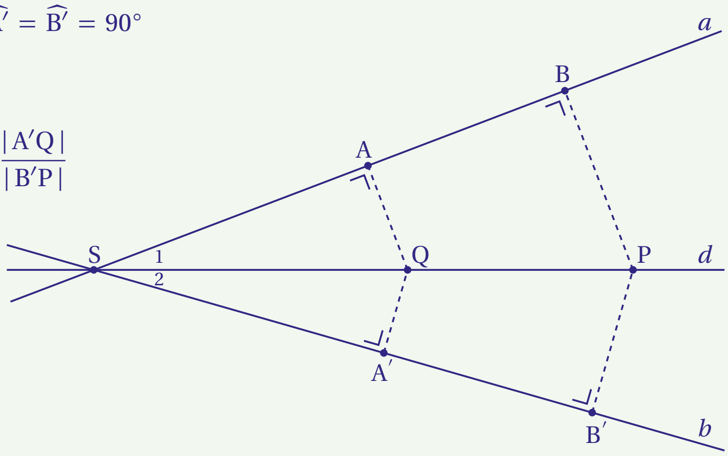
$\Rightarrow \dfrac{|SA|}{|SB|} = \dfrac{|SQ|}{|SP|} = \dfrac{|AQ|}{|BP|}$ (1)

$\Delta A'SQ \sim \Delta B'SP$ want $\widehat{S}_2 = \widehat{S}_2$ en $\widehat{A'} = \widehat{B'} = 90°$

$\Rightarrow \dfrac{|SA'|}{|SB'|} = \dfrac{|SQ|}{|SP|} = \dfrac{|A'Q|}{|B'P|}$ (2)

Uit (1) en (2) leiden we af: $\dfrac{|AQ|}{|BP|} = \dfrac{|A'Q|}{|B'P|}$

waaruit volgt: $\dfrac{|AQ|}{|A'Q|} = \dfrac{|BP|}{|B'P|}$

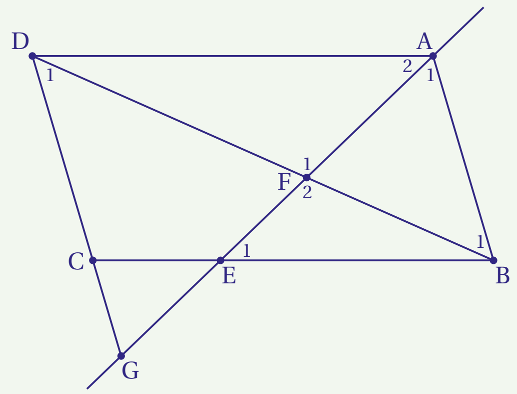


h $\Delta AFB \sim \Delta GFD$ want: $\widehat{A}_1 = \widehat{G}$ en $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$ (verwisselende binnenhoeken)

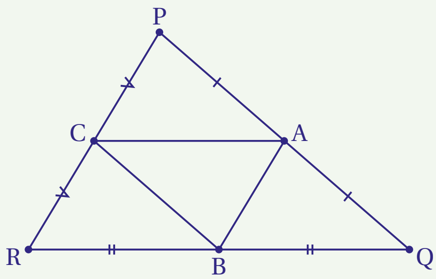
$$\Rightarrow \frac{|AF|}{|FG|} = \frac{|FB|}{|FD|} = \frac{|AB|}{|DG|} \quad (1)$$

$\Delta EFB \sim \Delta AFD$ $\left(\widehat{F}_1 = \widehat{F}_2 \text{ (overstaande hoeken) en } \widehat{A}_2 = \widehat{E}_1 \text{ (verwisselende binnenhoeken)}\right)$

$$\Rightarrow \frac{|BE|}{|AD|} = \frac{|BF|}{|DF|} = \frac{|EF|}{|AF|} \quad (2)$$



Uit (1) en (2) volgt: $\frac{|AF|}{|FG|} = \frac{|EF|}{|AF|} \Leftrightarrow |AF|^2 = |FG| \cdot |EF|$



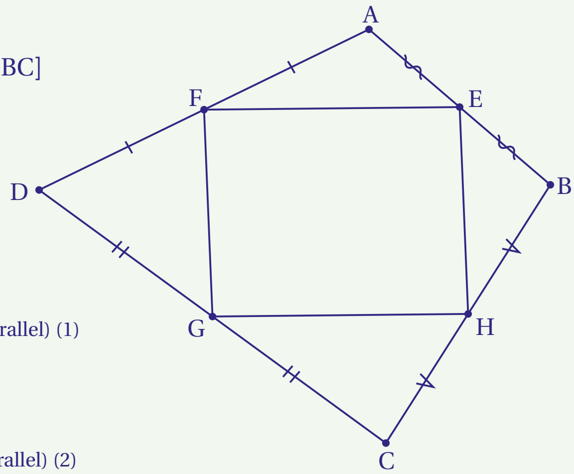
i • $\left.\begin{array}{l} |AC| = \dfrac{|QR|}{2} \text{ (middenparallel)} \\ |AB| = \dfrac{|PR|}{2} \\ |BC| = \dfrac{|QP|}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow p_{\Delta PQR} = 2p_{\Delta ABC}$

- Door het ZZZ-kenmerk kunnen we besluiten dat de vier driehoeken congruent zijn.

j Gegeven: vierhoek ABCD

E = mi[AB]; F = mi[AD]; G = mi[CD]; H = mi[BC]

Te bewijzen: EFGH is een parallellogram



Bewijs:

<u>ΔABC:</u>

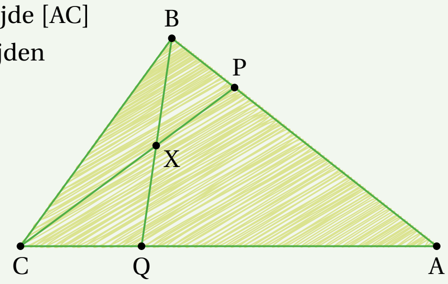
$\left.\begin{array}{l} E = mi[AB] \\ H = mi[BC] \end{array}\right\} \Rightarrow EH /\!/ AC$ en $|EH| = \frac{|AC|}{2}$ (eig. middenparallel) (1)

<u>ΔADC:</u>

$\left.\begin{array}{l} F = mi[AD] \\ G = mi[DC] \end{array}\right\} \Rightarrow FG /\!/ AC$ en $|FG| = \frac{|AC|}{2}$ (eig. middenparallel) (2)

Uit (1) en (2) volgt: $|EH| = |FG|$ en $EH /\!/ FG$, dus is EFGH een parallellogram.

32 In driehoek ΔABC is P een punt op de zijde [AB] en Q een punt op de zijde [AC] zodat $|AB| = 3 \cdot |PB|$ en $|AC| = 3 \cdot |QC|$. De lijnstukken [BQ] en [CP] snijden elkaar in X en $|BX| = 6$. Bepaal $|BQ|$.

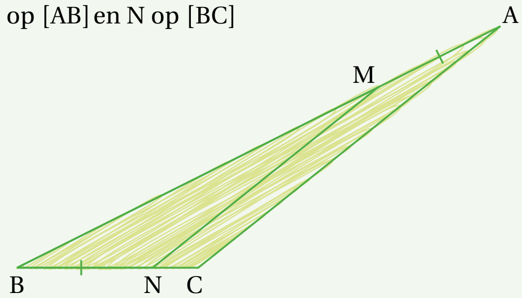


(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

JWO 2020 tweede ronde, vraag 27 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

De zijde [PQ] is evenwijdig met [BC], hierdoor ontstaan de twee gelijkvormige driehoeken ΔBXC en ΔQXP met gelijkvormigheidsfactor $\frac{2}{3}$. Hieruit volgt dat $|XQ| = \frac{2}{3} \cdot |XB| = \frac{2}{3} \cdot 6 = 4$. Bijgevolg is $|BQ| = 10$.

33 In driehoek ΔABC is $|AB| = 9$, $|BC| = 3$ en $|AC| = 7$. De punten M op [AB] en N op [BC] zijn zo gelegen dat $MN \parallel AC$ en $|AM| = |BN|$. Wat is $|MN|$?



(A) 3,5 (B) 4 (C) 5 (D) 5,25 (E) 6

VWO 2019 eerste ronde, vraag 20 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

De driehoeken ΔBMN en ΔBAC zijn gelijkvormig. Daaruit volgt dat $\frac{|BN|}{|BC|} = \frac{|BM|}{|BA|}$,

dus $|BN| \cdot |BA| = |BM| \cdot |BC|$.

Aangezien $|BM| = 9 - |AM| = 9 - |BN|$ kunnen we dit oplossen naar $|BN| = \frac{9}{4}$.

Door diezelfde gelijkvormigheid hebben we dan ook dat $\frac{|MN|}{|AC|} = \frac{|BN|}{|BC|}$ waarin we

kunnen oplossen naar $|MN|$ en we vinden dat $|MN| = \frac{21}{4} = 5{,}25$.

34 In de gelijkbenige driehoek ΔABC met top A snijdt de bissectrice van $\hat{B}$ de overstaande zijde in P. Driehoek ΔABC is gelijkvormig met ΔBPC. Hoe groot is $\hat{A}$?

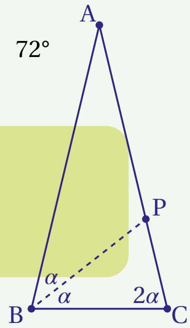
(A) 30° (B) 36° (C) 45° (D) 60° (E) 72°

JWO 2016 eerste ronde, vraag 18 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

We stellen de basishoeken van ΔABC gelijk aan 2α zodat $A\hat{B}P = C\hat{B}P = \alpha$, dus is $B\hat{P}C = 180° - 3\alpha$, $A\hat{P}B = 3\alpha$ en dus is $B\hat{A}C = 180° - 4\alpha$.

Nu is gegeven dat ΔABC gelijkvormig is met ΔBPC, dus moet $B\hat{A}C = \alpha$.

Dat wil zeggen dat $180° - 4\alpha = \alpha$, dus is $\alpha = B\hat{A}C = 36°$.



35 Twee gelijkvormige driehoeken hebben onderling twee paar even lange zijden. Welke van de volgende waarden kan de gelijkvormigheidsfactor zijn?

(A) 1,5 (B) 1,7 (C) 1,9 (D) 2 (E) 2,1

JWO 2018 tweede ronde, vraag 22 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

Stel de lengte van de kortste zijde van de twee gelijkvormige driehoeken gelijk aan 1. Noem de gelijkvormigheidsfactor $k > 1$ (want 1 was de kortste zijde). Dan heeft de tweede driehoek een lengte met zijde k, die ook de kortste zijde van de driehoek is. Omdat twee paar zijden in deze driehoeken gelijke lengte hebben, moet er in de eerste driehoek ook een zijde lengte k hebben. Dan heeft de tweede driehoek door de gelijkvormigheid een zijde met lengte k^2. En omdat er twee paar zijden even lang zijn, is de lengte van de derde zijde in de eerste driehoek hier ook aan gelijk. De eerste driehoek heeft dus zijden met lengtes 1, k en k^2.

Dat kan enkel als voldaan is aan de driehoeksongelijkheid $1 + k > k^2$ met oplossing $1 \leqslant k < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$.
Bijgevolg kan enkel $k = 1{,}5$ een gelijkvormigheidsfactor zijn.

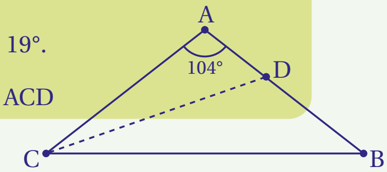
36 Een gelijkbenige driehoek ΔABC heeft een tophoek $\hat{A} = 104°$. Bepaal de hoek tussen de zijde [AB] en de bissectrice van $\hat{C}$.

(A) 52° (B) 55° (C) 56° (D) 57° (E) 58°

JWO 2019 eerste ronde, vraag 11 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

Noem D het punt waar de deellijn van $\hat{C}$ de zijde [AB] snijdt. In ΔABC is de grootte van de basishoeken $\dfrac{180° - 104°}{2} = 38°$. De deellijn verdeelt $\hat{C}$ in twee gelijke hoeken van 19°.

We vinden dus in ΔBCD de hoeken $\hat{B} = 38°$, $\hat{C} = 19°$ en dus $\hat{D} = 123°$ en in driehoek ACD de hoeken $\hat{A} = 104°$, $\hat{C} = 19°$ en dus $\hat{D} = 57°$.

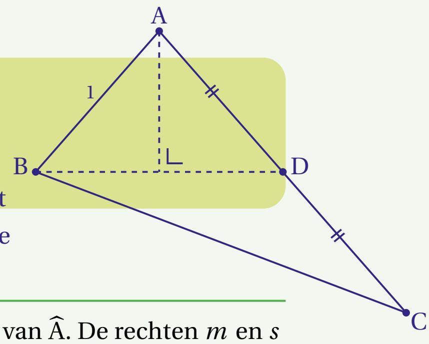


37 In driehoek ΔABC is $|AB| = 1$ en is $|BC|$ een geheel getal. De bissectrice van $\hat{A}$ staat loodrecht op de zwaartelijn uit B. Wat is de omtrek van ΔABC?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

JWO 2019 eerste ronde, vraag 23 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

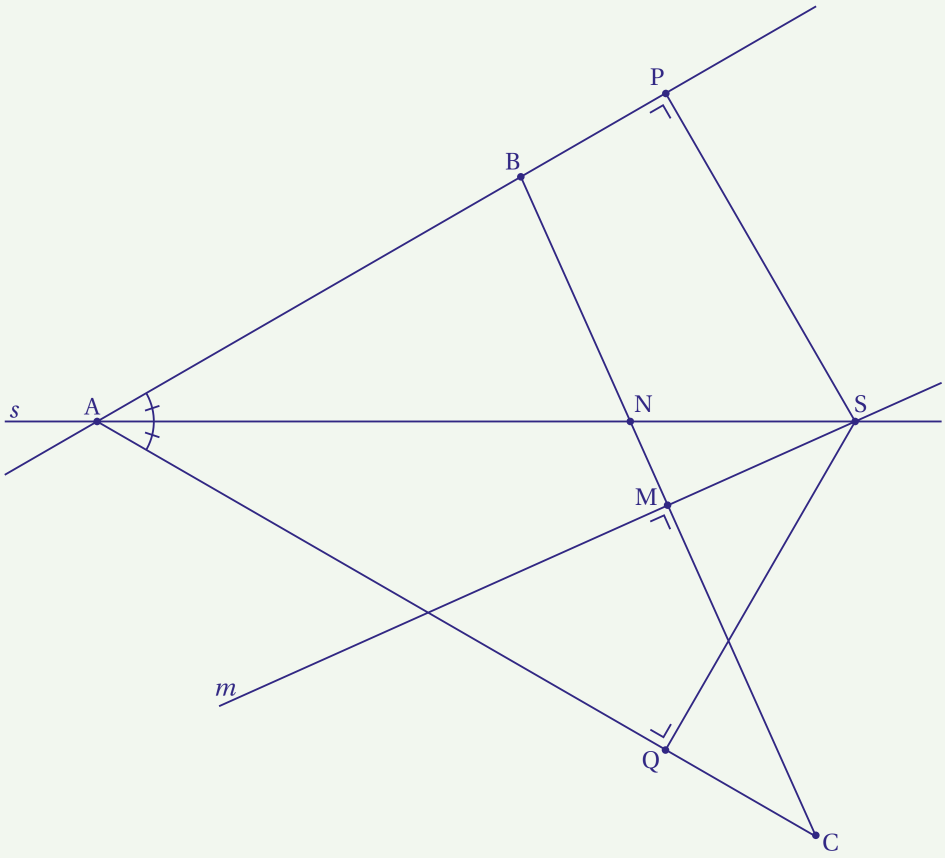
Laat D het snijpunt zijn van de zwaartelijk uit B met zijde AC. In driehoek ABD valt de bissectrice uit A dan samen met de hoogtelijn uit A, daaruit volgt dat deze driehoek gelijkbenig is, zodat |AD| = 1. Bijgevolg is ook |DC| = 1, zodat |AC| = 2.
Uit de driehoeksongelijkheid volgt dat de derde zijde in driehoek ABC een lengte heeft tussen 2 – 1 en 2 + 1. Aangezien gegeven is dat |BC| geheel is, moet |BC| = 2 en dus is de omtrek van driehoek ABC gelijk aan 5.



* **38** In driehoek ΔABC is $|AB| < |AC|$, is m de middelloodlijn van [BC] en is s de bissectrice van $\hat{A}$. De rechten m en s snijden elkaar in het punt S. Het punt P is het voetpunt van de loodlijn uit S op AB. Het punt Q is het voetpunt van de loodlijn uit S op AC. Bewijs dat $|AB| = |AQ| - |QC|$.

JWO 2020 finalevraag 2 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

38



De driehoeken ΔSPA en ΔSQA zijn congruent want:

$$\left.\begin{array}{ll} |AS| = |AS| & \text{(gemeenschappelijke zijde)} \\ P\widehat{A}S = Q\widehat{A}S & \text{(definitie bissectrice)} \\ S\widehat{P}A = S\widehat{Q}A & \text{(rechte hoek, definitie van de bissectrice)} \end{array}\right\} \text{ZHH}$$

Uit de congruentie $\Delta SPA \cong \Delta SQA$ volgt dat

$$|AP| = |AQ|. \quad (1)$$

Uit deze congruentie volgt ook dat $|SP| = |SQ|$ (maar dat is ook gekend als kenmerk van de bissectrice). Aangezien S op de middelloodlijn m ligt, geldt er ook dat $|SB| = |SC|$. Door toepassing van de stelling van Pythagoras in de rechthoekige driehoeken $\Delta SPB \cong \Delta SQC$ volgt dan dat

$$|PB| = \sqrt{|SB|^2 - |SP|^2} = \sqrt{|SC|^2 - |SQ|^2} = |QC|. \quad (2)$$

We bekijken nu de positie van het punt P op de halfrechte [AB. Als $|AP| \leqslant |AB|$. dan geldt wegens (1) en het gegeven dat $|AQ| < |AC|$. Met andere woorden, er geldt dat $P \in [AB]$ en dat $Q \in [AC]$.
Dan volgt uit (1) en (2) dat

$$|AB| = |AP| + |PB| = |AQ| + |QC| = |AC|.$$

Dit is tegenstrijdig met het gegeven. Dus moet $|AB| < |AP|$, met andere woorden $P \notin [AB]$.
Nu volgt er uit (1) en (2) dat

$$|AB| = |AP| - |PB| = |AQ| - |QC|.$$