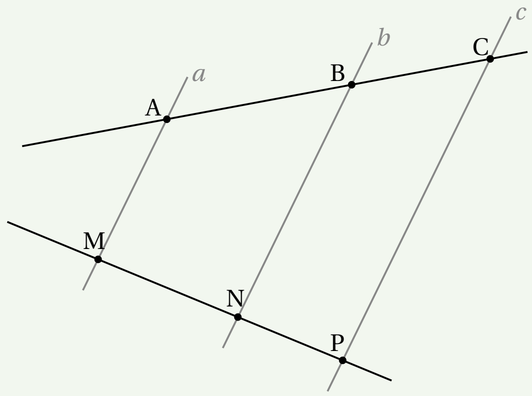
9 Oefeningen

1 Vul aan tot een ware uitspraak als je weet dat $a \,/\!/\, b \,/\!/\, c$.

a $\dfrac{|AB|}{|BC|} = \dfrac{|MN|}{|NP|}$

b $\dfrac{|BC|}{|AC|} = \dfrac{|NP|}{|MP|}$

c $\dfrac{|MP|}{|NP|} = \dfrac{|AC|}{|BC|}$

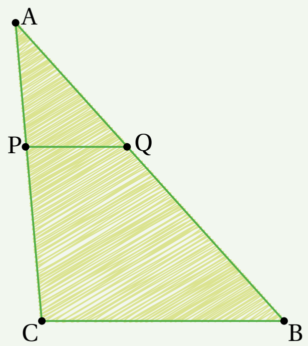


2 Vul aan tot een ware uitspraak als PQ // BC.

a $\dfrac{|AQ|}{|AB|} = \dfrac{|AP|}{|AC|} = \dfrac{|PQ|}{|CB|}$

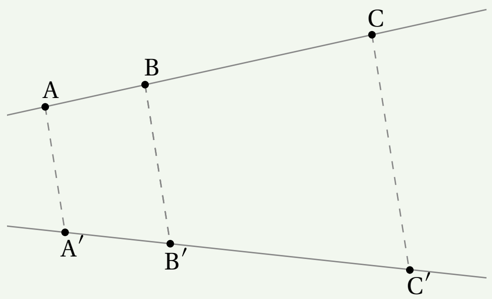
b $\dfrac{|AP|}{|PC|} = \dfrac{|AQ|}{|QB|}$

c $\dfrac{|BQ|}{|BA|} = \dfrac{|CP|}{|CA|}$

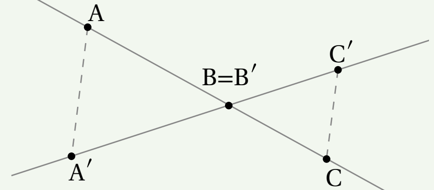


3 Vul volgende tabellen aan.

a $AA' \,/\!/\, BB' \,/\!/\, CC'$



*b $AA' \,/\!/\, CC'$



	$\|AB\|$	$\|BC\|$	$\|AC\|$	$\|A'B'\|$	$\|B'C'\|$	$\|A'C'\|$
1	3	4	7	2	$\frac{8}{3}$	$\frac{14}{3}$
2	$\frac{24}{5}$	6	$\frac{54}{5}$	4	5	9
3	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	$\frac{10-5\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\sqrt{3}}{2}$	5

	$\|AB\|$	$\|BC\|$	$\|AC\|$	$\|A'B'\|$	$\|B'C'\|$	$\|A'C'\|$
1	4	5	9	3	$\frac{15}{4}$	$\frac{27}{4}$
2	$\frac{40}{3}$	8	$\frac{64}{3}$	10	6	16
3	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{6}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	$\sqrt{6}$

3

a 1

- $$\frac{|A'B'|}{|AB|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} \iff \frac{2}{3} = \frac{|B'C'|}{4} \iff |B'C'| = \frac{2\cdot 4}{3} = \frac{8}{3}$$
- $$|AC| = |AB| + |BC| = 3+4 = 7$$
- $$|A'C'| = |A'B'| + |B'C'| = 2+\frac{8}{3} = \frac{14}{3}$$

2

- $$\frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} \iff \frac{5}{6} = \frac{4}{|AB|} \iff |AB| = \frac{24}{5}$$
- $$|AC| = |AB| + |BC| = \frac{24}{5}+6 = \frac{54}{5}$$
- $$|A'C'| = |A'B'| + |B'C'| = 4+5 = 9$$

3

- $$\frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|B'C'|}{|BC|} \iff \frac{5}{2} = \frac{|B'C'|}{\sqrt{3}} \iff |B'C'| = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$
- $$|AB| = |AC| - |BC| = 2-\sqrt{3}$$
- $$|A'B'| = |A'C'| - |B'C'| = 5-\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{10-5\sqrt{3}}{2}$$

b 1

- $$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} \iff \frac{4}{5} = \frac{3}{|B'C'|} \iff |B'C'| = \frac{15}{4}$$
- $$|A'C'| = |A'B'| + |B'C'| = 3+\frac{15}{4} = \frac{27}{4}$$
- $$|AC| = |AB| + |BC| = 4+5 = 9$$

2

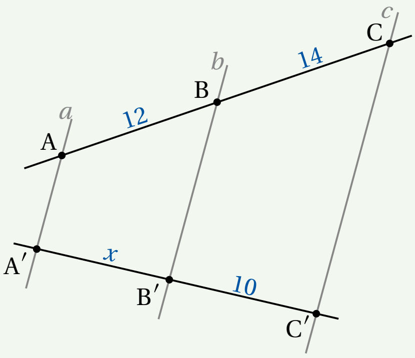
- $$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|A'B'|}{|B'C'|} \iff \frac{|AB|}{8} = \frac{10}{6} \iff |AB| = \frac{80}{6} = \frac{40}{3}$$
- $$|A'C'| = |A'B'| + |B'C'| = 10+6 = 16$$
- $$|AC| = |AB| + |BC| = \frac{40}{3}+8 = \frac{64}{3}$$

3

- $$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|B'C'|} \iff \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{|B'C'|} \iff |B'C'| = \frac{\sqrt{18}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$
- $$|A'B'| = |A'C'| - |B'C'| = \sqrt{6}-\frac{3\sqrt{2}}{2}$$
- $$|AB| = |AC| - |BC| = 2-\sqrt{3}$$

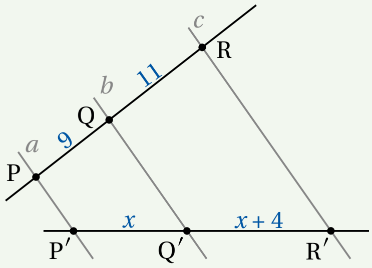
4 Bepaal x en y als $a \parallel b \parallel c$.

a



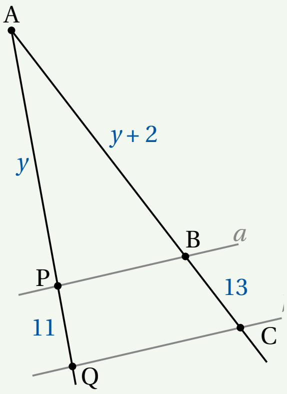
$$\frac{12}{14} = \frac{x}{10}$$
$$\Leftrightarrow 14x = 120$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{120}{14} = \frac{60}{7}$$

c



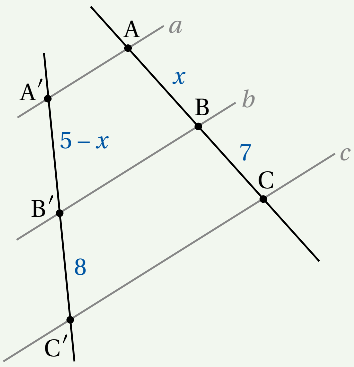
$$\frac{9}{11} = \frac{x}{x+4}$$
$$\Leftrightarrow 11x = 9x + 36$$
$$\Leftrightarrow 2x = 36$$
$$\Leftrightarrow x = 18$$

e



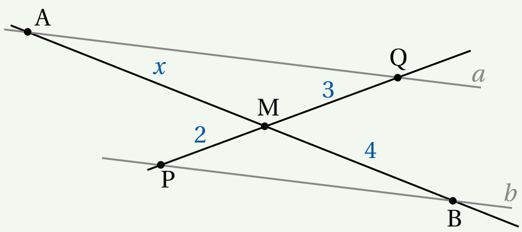
$$\frac{y+2}{13} = \frac{y}{11}$$
$$\Leftrightarrow 11y + 22 = 13y$$
$$\Leftrightarrow -2y = -22$$
$$\Leftrightarrow y = 11$$

b



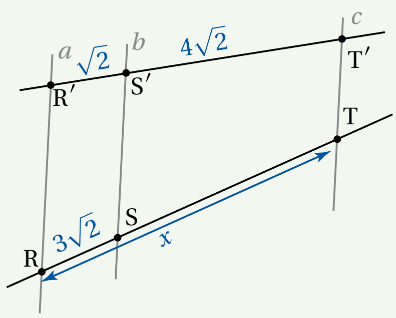
$$\frac{x}{7} = \frac{5-x}{8}$$
$$\Leftrightarrow 8x = 35 - 7x$$
$$\Leftrightarrow 15x = 35$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

d



$$\frac{x}{4} = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2x = 12$$
$$\Leftrightarrow x = 6$$

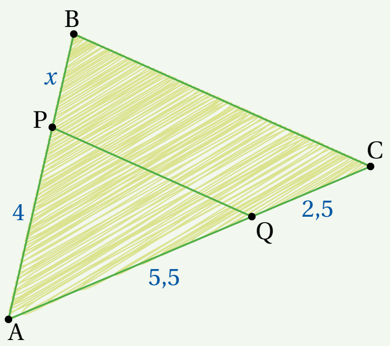
f



$$\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{2}x = 15 \cdot 2$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{30}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow x = 15\sqrt{2}$$

5 Bepaal x als PQ // BC en a // b // c.

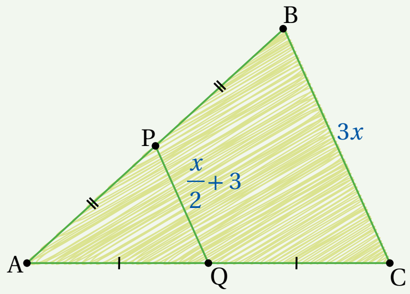
a



$$\frac{x}{4} = \frac{2,5}{5,5}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \cdot 2,5}{5,5} = 1,8181...$$

*c



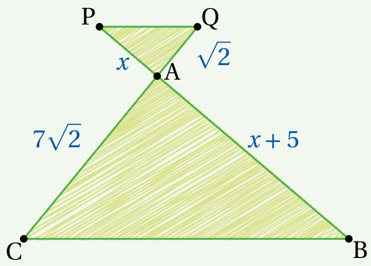
$$\frac{\frac{x}{2}+3}{3x} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x+6 = 3x$$

$$\Leftrightarrow -2x = -6$$

$$\Leftrightarrow x = 3$$

e



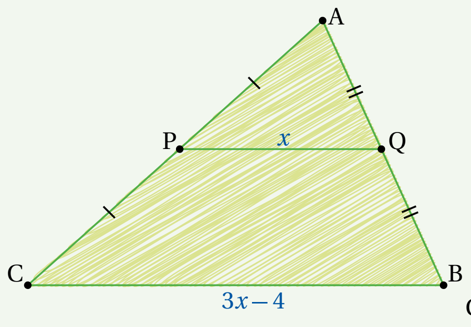
$$\frac{x}{x+5} = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 7x = x+5$$

$$\Leftrightarrow 6x = 5$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{6}$$

b



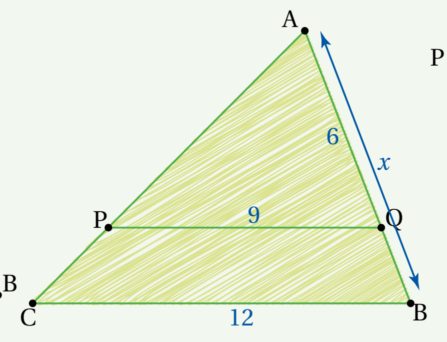
$$\frac{x}{3x-4} = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x = 3x-4$$

$$\Leftrightarrow -x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

*d

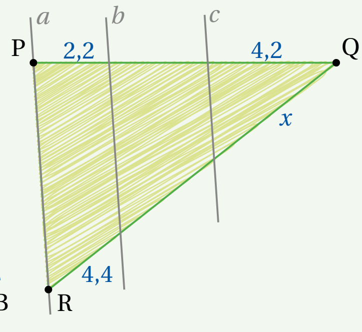


$$\frac{6}{x} = \frac{9}{12}$$

$$\Leftrightarrow 9x = 6 \cdot 12$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{72}{9} = 8$$

f



$$\frac{2,2}{4,2} = \frac{4,4}{x}$$

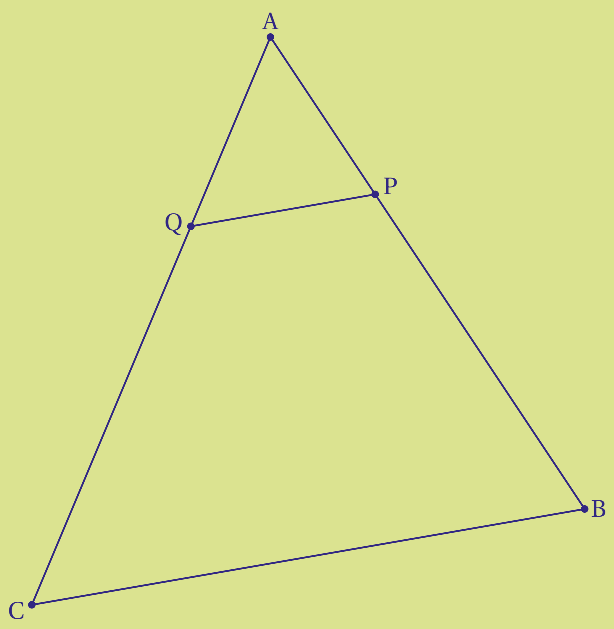
$$\Leftrightarrow x = \frac{4,4 \cdot 4,2}{2,2} = 8,4$$

6 Gegeven: $\Delta\, ABC$

$P \in [AB]$ en $Q \in [AC]$

$|AP| = \frac{1}{3}|AB|$ en $|AQ| = \frac{1}{3}|AC|$

Gevraagd: a Bewijs dat $PQ \,/\!/\, BC$.



$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{1}{3} = \frac{|AQ|}{|AC|}$

$\Rightarrow PQ /\!/ BC$ (de omgekeerde stelling van Thales)

b Bewijs dat $|PQ| = \frac{1}{3}|BC|$

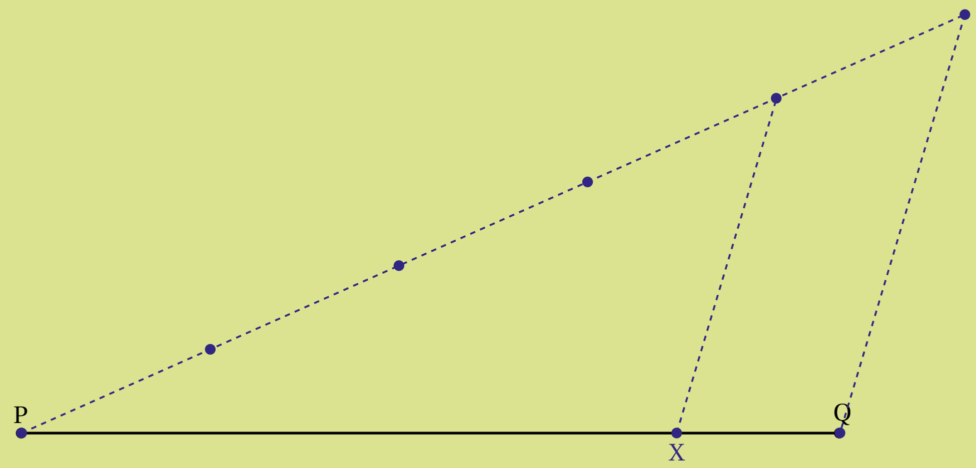
Uit het vorige leiden we af:

$\frac{|AP|}{|AB|} = \frac{|AQ|}{|AC|} = \frac{1}{3} = \frac{|PQ|}{|BC|}$

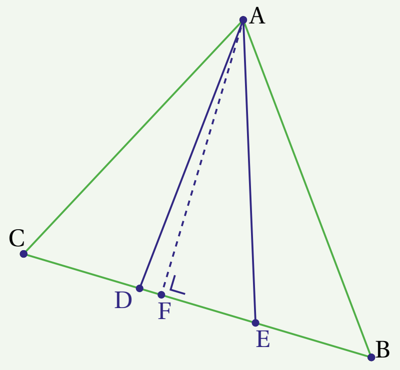
$\Rightarrow \frac{1}{3}|BC| = |PQ|$

7 Enkele constructieopdrachten.

a Construeer X op [PQ] zodat |PX| = 4 · |XQ|.



b Verdeel de basis [BC] van Δ ABC in drie gelijke delen.
Zo kun je drie driehoeken tekenen.
Verklaar dat die driehoeken dezelfde oppervlakte hebben.



De formule voor de oppervlakte van een driehoek wordt gegeven door $A = \frac{b \cdot h}{2}$.

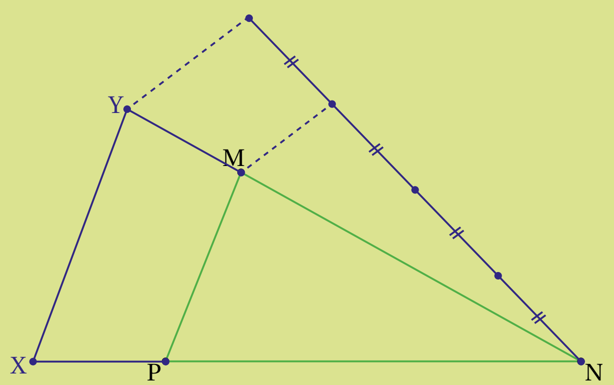
$A_{\Delta CAD} = \frac{|CD| \cdot |AF|}{2}$

$A_{\Delta EDA} = \frac{|ED| \cdot |AF|}{2}$

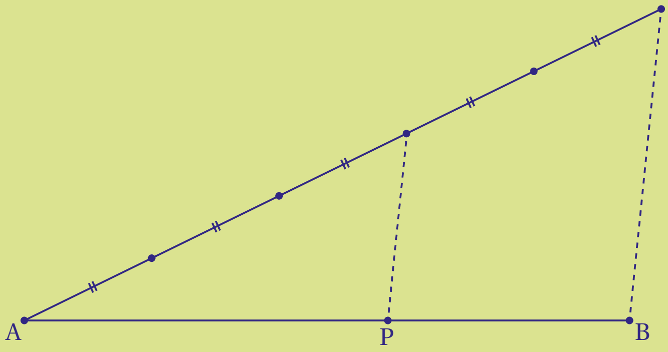
$A_{\Delta EAB} = \frac{|EB| \cdot |AF|}{2}$

Aangezien |CD| = |DE| = |EB|, is $A_{\Delta CAD} = A_{\Delta EDA} = A_{\Delta EAB}$

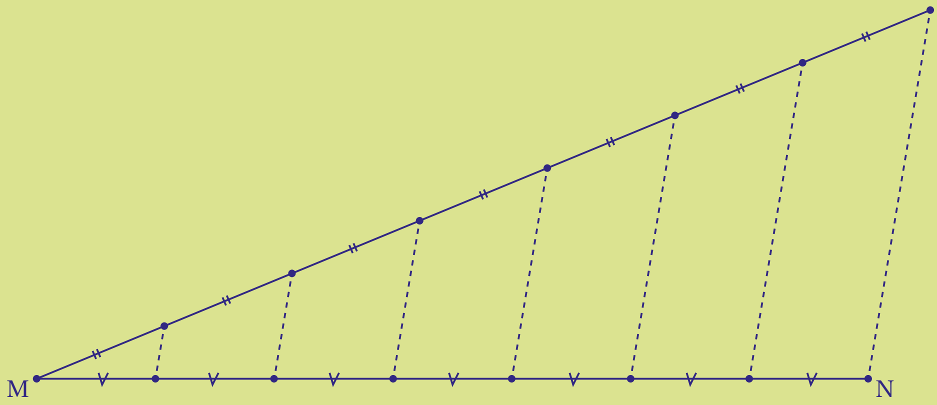
c Bepaal X op PN en Y op MN zodat $p_{\Delta\,NPM} = \frac{3}{4}\, p_{\Delta\,NYX}$



d Teken een lijnstuk [AB] met lengte 8 cm. Bepaal P op [AB] zodat $\frac{|AP|}{|PB|} = \frac{3}{2}$.



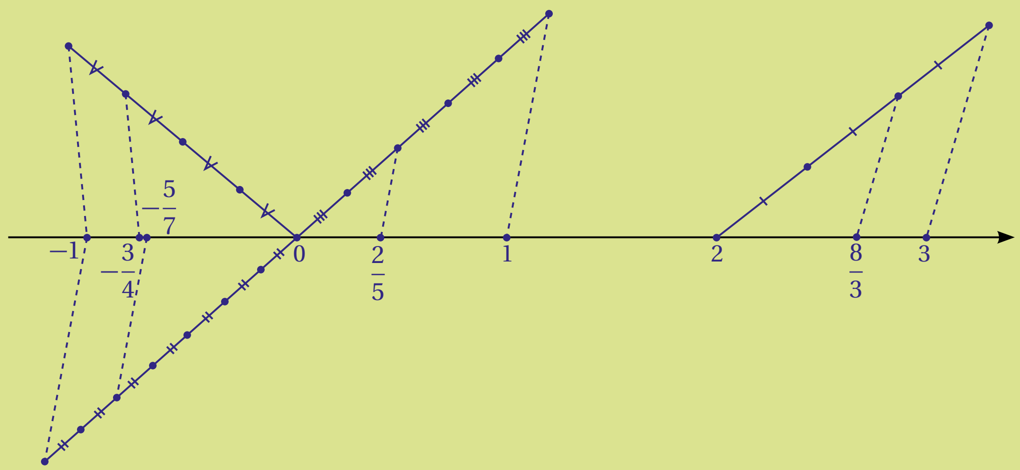
e Teken een lijnstuk [MN] met lengte 11 cm. Verdeel dit lijnstuk in 7 gelijke delen.



8 In een trapezium ABCD (met AB // CD) wordt een rechte getekend die [BC] snijdt in Q en [AD] snijdt in P.
In welke gevallen is PQ // AB?

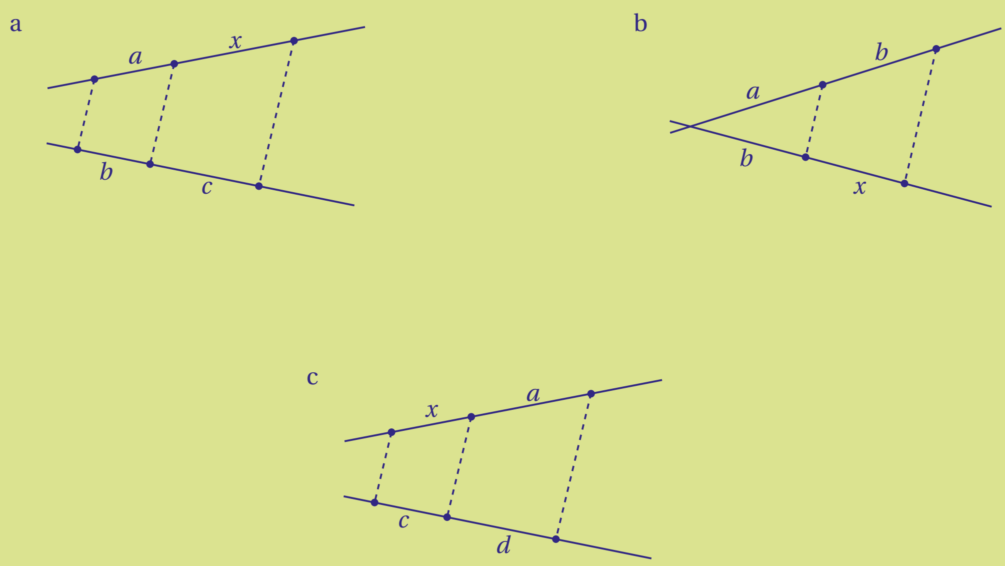
	|AP|	|PD|	|BQ|	|QC|	CONTROLE	PQ // AB?
1	3	4	4,5	6	$\frac{3}{4} = \frac{4{,}5}{6}$	ja
2	9	6	10	7	$\frac{9}{6} \neq \frac{10}{7}$	neen
3	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{5}$	2	$\frac{12}{5}$	$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} \overset{?}{=} \frac{2}{\frac{12}{5}} \Rightarrow \frac{10}{12} = \frac{10}{12}$	ja

9 Plaats op de getallenas de punten met abscis $\frac{2}{5}$, $-\frac{3}{4}$, $\frac{8}{3}$ en $-\frac{5}{7}$. Voer dit ook uit met ICT.



***10** Als a, b, c en d de maatgetallen van de lengtes zijn van vier lijnstukken, construeer dan het lijnstuk waarvan het maatgetal x voldoet aan onderstaande gelijkheid.
Voer al die constructies uit op je blad en nadien ook met ICT.

a $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$ b $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$ c $\frac{x}{a} = \frac{c}{d}$

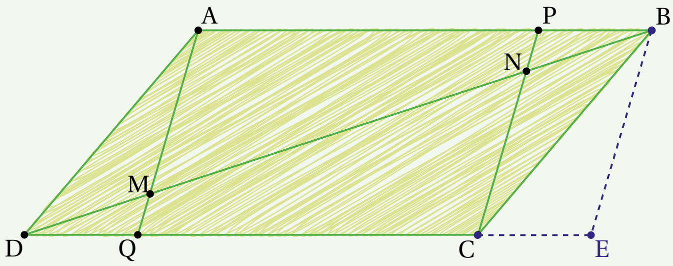


11 Gegeven: parallellogram ABCD

$|AP| = 3|PB|$

$|QC| = 3|DQ|$

Gevraagd: bereken $\dfrac{|MN|}{|BD|}$



- Construeer BE∥PC.
- $\dfrac{|MN|}{|BD|} = \dfrac{|QC|}{|DE|}$

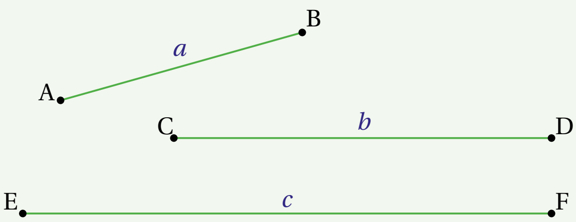
$\Rightarrow \dfrac{|MN|}{|BD|} = \dfrac{|QC|}{|DC| + \dfrac{|DC|}{4}}$

$\Rightarrow \dfrac{|MN|}{|BD|} = \dfrac{|QC|}{\dfrac{5}{4} \cdot |DC|}$

$\Rightarrow \dfrac{|MN|}{|BD|} = \dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{4}}$

$\Rightarrow \dfrac{|MN|}{|BD|} = \dfrac{3}{5}$

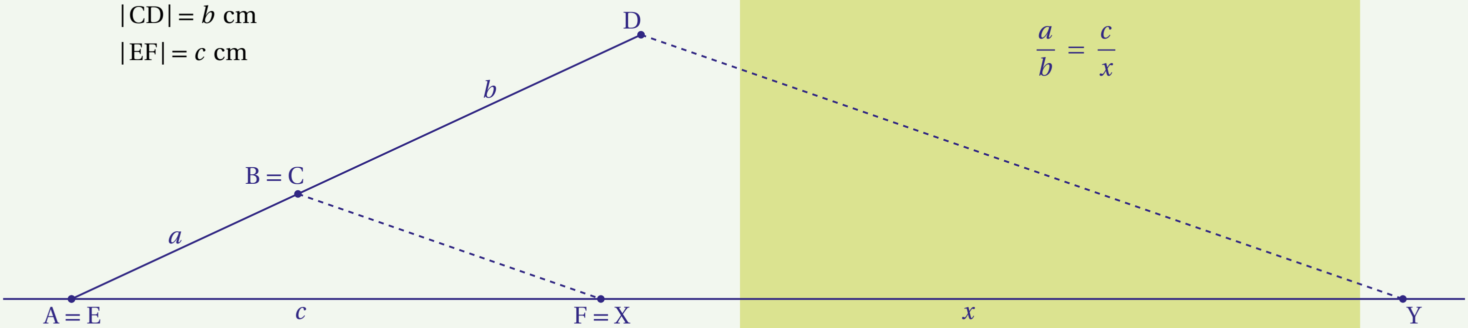
12 Construeer een lijnstuk [XY] met $|XY| = x$ cm zodat x de vierde evenredige is tot a, b en c.



$|AB| = a$ cm

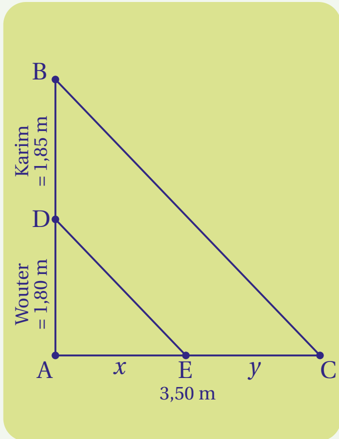
$|CD| = b$ cm

$|EF| = c$ cm



$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{x}$

13 Karim en Wouter willen een acrobatische stunt uitvoeren. Hierbij probeert Karim in evenwicht te blijven door mooi recht te staan op het hoofd van Wouter. Wanneer beiden volledig uitgestrekt zijn, werpt de zon een schaduw van 3,5 m af. Als je weet dat Karim 1,85 m en Wouter 1,80 m meet, bereken dan de lengte van de schaduw van Karim en Wouter apart.



$$\frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|CE|}{|AE|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1{,}85}{1{,}8} = \frac{3{,}5-x}{x}$$

$$\Leftrightarrow 1{,}85x = 1{,}8\cdot(3{,}5-x)$$

$$\Leftrightarrow 1{,}85x = 6{,}3-1{,}8x$$

$$\Leftrightarrow 3{,}65x = 6{,}3$$

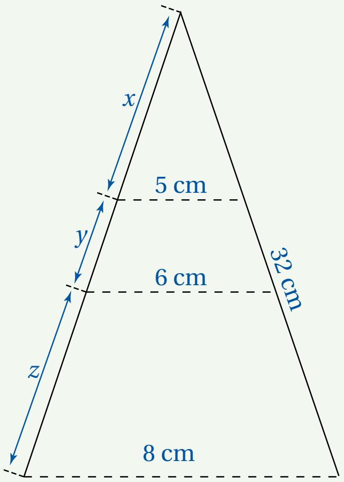
$$\Leftrightarrow x = \frac{6{,}3}{3{,}65} \approx 1{,}73$$

ANTWOORD: De schaduw van Wouter is ongeveer 1,73 m, die van Karim 1,77 m.

*

14 **WISKUNDE & NATUUR**

De gelijkbenige driehoek van deze oefening vind je vaak ook terug in het web van een wielwebspin (je kunt wellicht al raden waarom ze die naam kreeg …). Onze kruisspin is zo'n type, maar er leven nog veel andere en grotere soorten, zoals in Madagaskar. Daar leeft een spin die graag zijn web spant boven riviertjes of meren. Het rag van zo'n web is zelfs het krachtigste biomateriaal dat tot nu gekend is.
Bepaal in onderstaande gelijkbenige driehoek de gevraagde lengten.



$$\frac{x}{32} = \frac{5}{8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{32\cdot 5}{8} = 20$$

$$\frac{20+y}{32} = \frac{6}{8}$$

$$\Leftrightarrow (20+y)\cdot 8 = 6\cdot 32$$

$$\Leftrightarrow 160+8y = 192$$

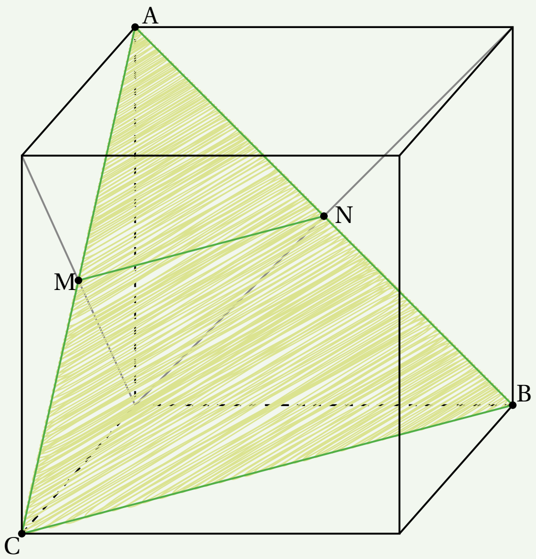
$$\Leftrightarrow y = \frac{192-160}{8}$$

$$= 4$$

$$z = 32-(20+4) = 8$$

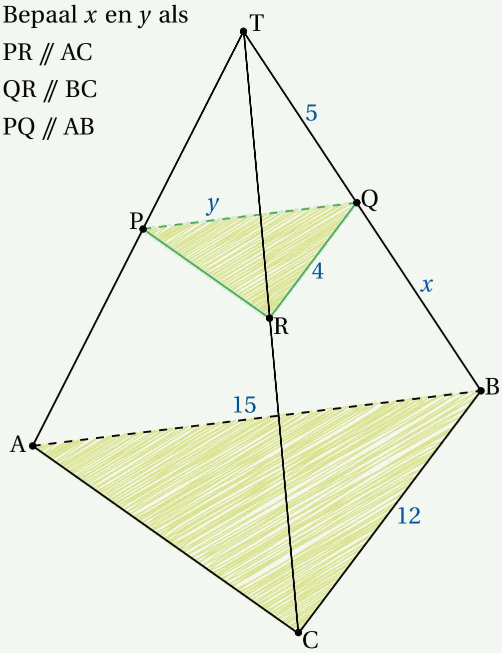
15 De stelling van Thales in de ruimte.

a Verklaar waarom MN // BC in de getekende kubus. Illustreer dit ook met ICT.



- M = mi[AC] (diagonalen van een vierkant snijden elkaar middendoor)
  N = mi[AB]
- $\dfrac{|AN|}{|NB|} = \dfrac{|AM|}{|MC|} = 1 \Rightarrow MN \,/\!/\, BC$ (omgekeerde stelling van Thales)

c Bepaal x en y als
PR // AC
QR // BC
PQ // AB

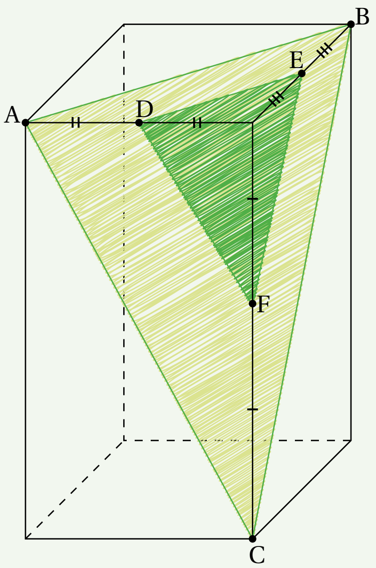


$\dfrac{5}{5+x} = \dfrac{4}{12} \Leftrightarrow 20+4x = 60 \Leftrightarrow x = 10$

$\dfrac{y}{15} = \dfrac{5}{15} \Leftrightarrow y = 5$

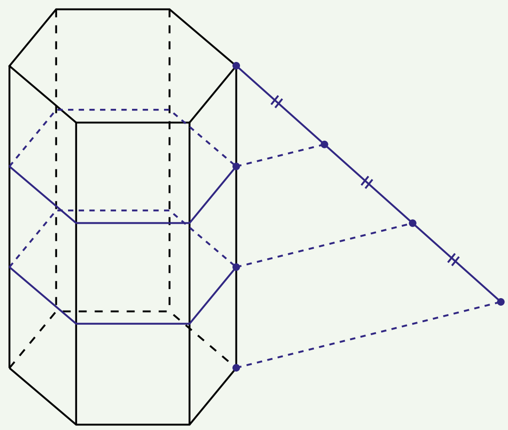
b In de balk zijn twee driehoeken getekend.
Vul in, verklaar en illustreer met ICT.

$p_{\Delta ABC} =$ 2 · $p_{\Delta DEF}$



d Verdeel het prisma in drie prisma's die even hoog zijn.

PQ // AB



Verklaring:

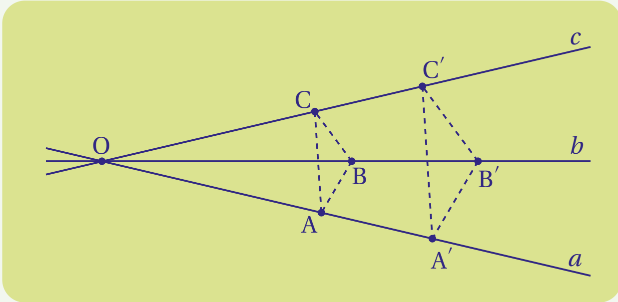
$|DE| = \dfrac{|AB|}{2}; |FE| = \dfrac{|BC|}{2}; |DF| = \dfrac{|AC|}{2}$

$\Rightarrow |DE| + |FE| + |DF| = \dfrac{|AB|}{2} + \dfrac{|BC|}{2} + \dfrac{|AC|}{2}$

$\Rightarrow p_{\Delta ABC} = 2 \cdot p_{\Delta DEF}$

16 Hieronder moet je de **stelling van Desargues** (1636) bewijzen. Die is genoemd naar Girard Desargues (1591–1661). Deze Franse wiskundige en ingenieur uit Lyon woonde enkele jaren in Parijs om de projectieve meetkunde te bestuderen: eigenschappen die niet veranderen als je figuren projecteert.

Gegeven: a, b en c zijn rechten die door O gaan.
$A, A' \in a$
$B, B' \in b$
$C, C' \in c$
$AB \,/\!/\, A'B'$ en $BC \,/\!/\, B'C'$



a Te bewijzen: $AC \,/\!/\, A'C'$

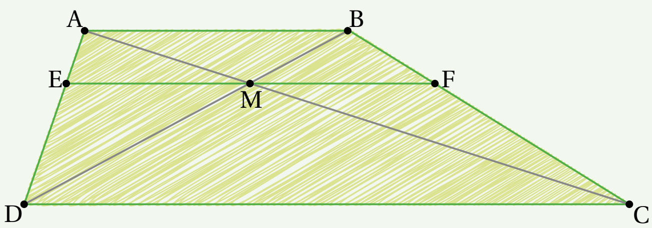
a $AB \,/\!/\, A'B' \Rightarrow \dfrac{|OA|}{|OA'|} = \dfrac{|OB|}{|OB'|}$ (1)

$BC \,/\!/\, B'C' \Rightarrow \dfrac{|OB|}{|OB'|} = \dfrac{|OC|}{|OC'|}$ (2)

Uit (1) en (2) volgt: $\dfrac{|OA|}{|OA'|} = \dfrac{|OC|}{|OC'|} \Rightarrow AC \,/\!/\, A'C'$ (omgekeerde stelling van Thales)

b Illustreer dit met ICT.

17 Gegeven is het trapezium ABCD.
De diagonalen snijden elkaar in M,
EF // DC en EF gaat door M.
Bewijs dat |EM| = |MF|
Onderzoek dit ook met ICT.



$\Delta ABC: \dfrac{|CF|}{|CB|} = \dfrac{|MF|}{|AB|}$ (1)

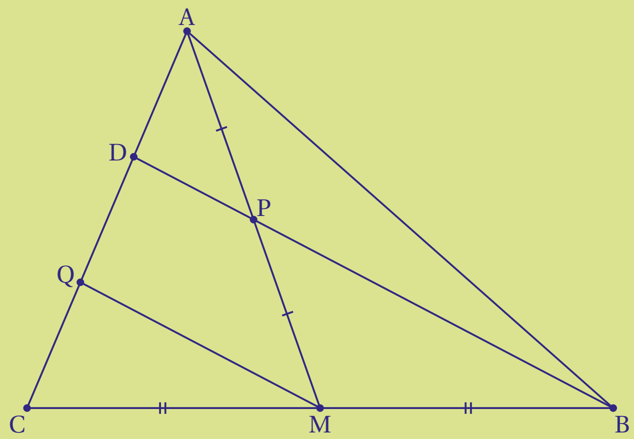
$\Delta ABD: \dfrac{|DE|}{|DA|} = \dfrac{|EM|}{|AB|}$ (2)

$AB \,/\!/\, EF \,/\!/\, DC \Rightarrow \dfrac{|CF|}{|CB|} = \dfrac{|DE|}{|DA|}$ (3)

Uit (1), (2) en (3) volgt: $\dfrac{|EM|}{|AB|} = \dfrac{|MF|}{|AB|} \Rightarrow |EM| = |MF|$.

18 Gegeven: ΔABC met $M = mi[BC]$ en $P = mi[AM]$

Gevraagd: a Bepaal D zodat $\{D\} = BP \cap AC$.
Construeer MQ met $Q \in AC$ en $MQ \parallel BD$.



b Toon aan: $|AD| = |DQ| = |QC|$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta AMQ\text{: } P = mi[AM] \\ MQ \parallel PD\end{array}\right\} \Rightarrow D = mi[AQ] \quad \text{(eigenschap van de middenparallel)}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta BCD\text{: } M = mi[BC] \\ MQ \parallel BD\end{array}\right\} \Rightarrow Q = mi[DC] \quad \text{(eigenschap van de middenparallel)}$$

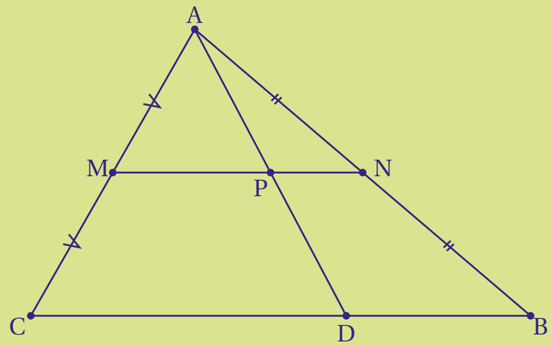
Uit het vorige volgt: $|AD| = |DQ| = |QC|$.

19 Gegeven: ΔABC met $M = mi[AC]$ en $N = mi[AB]$
$D \in [BC]$
$AD \cap MN = \{P\}$

Te bewijzen: $P = mi[AD]$

ΔABC: $MN \parallel BC$ (middenparallel) $\Rightarrow MP \parallel DC$

$$\left.\begin{array}{l}\Delta ADC\text{: } M = mi[AC] \\ MP \parallel DC\end{array}\right\} \Rightarrow P = mi[AD] \quad \text{(eigenschap middenparallel)}$$

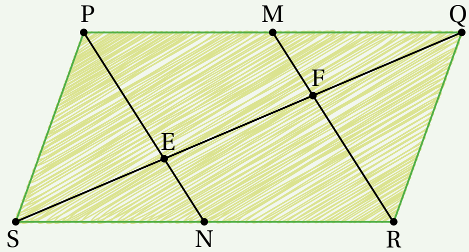


20 Gegeven: parallellogram PQRS

$M = \text{mi}[PQ]$, $N = \text{mi}[RS]$

$PN \cap QS = \{E\}$, $MR \cap QS = \{F\}$

Te bewijzen: $|SE| = |EF| = |FQ|$



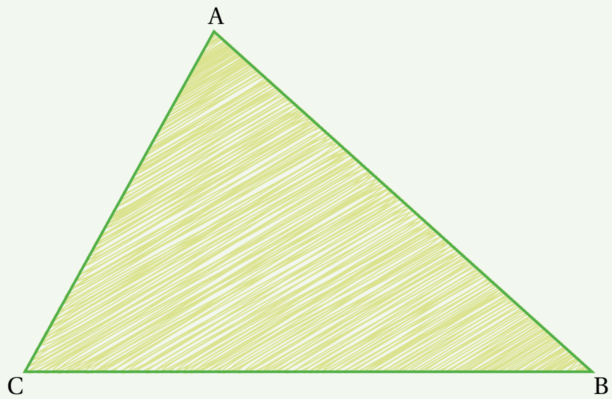
- PMRN is een parallellogram want: $\begin{cases} PM /\!/ NR \\ |PM| = |NR| \end{cases}$
- Δ PQE:

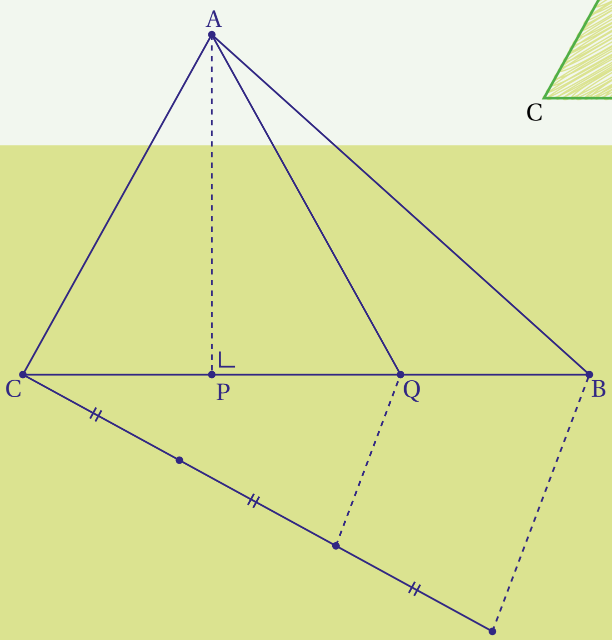
$$\left.\begin{array}{l} M = \text{mi}[PQ] \\ MF /\!/ PE \end{array}\right\} \Rightarrow F = \text{mi}[EQ] \quad (1)$$

- In Δ SFR kunnen we op dezelfde manier bewijzen dat $E = \text{mi}[SF]$.
- Uit (1) en (2) volgt: $|SE| = |EF| = |FQ|$.

21 Gegeven: driehoek ABC

Gevraagd: bepaal op [BC] het punt Q zodat $A_{\Delta ABQ} = 2 \cdot A_{\Delta AQC}$ en verklaar je werkwijze.





$$\begin{aligned} A_{\Delta AQC} &= \frac{|CQ| \cdot |AP|}{2} \\ &= \frac{2 \cdot |QB| \cdot |AP|}{2} \\ &= 2A_{\Delta ABQ} \end{aligned}$$