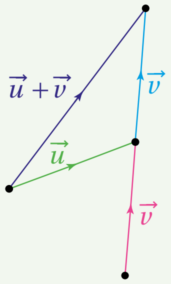
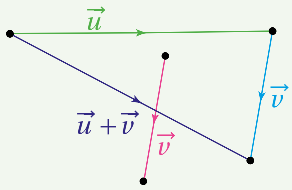
8 Oefeningen

1 Bepaal $\vec{u} + \vec{v}$ in elk van de volgende gevallen.

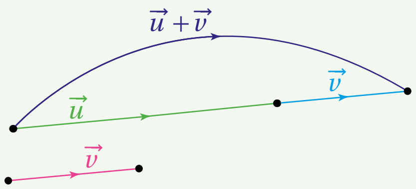
a



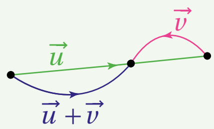
d



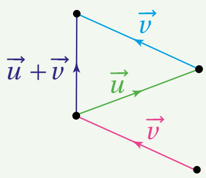
b



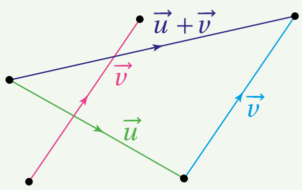
e



c



f

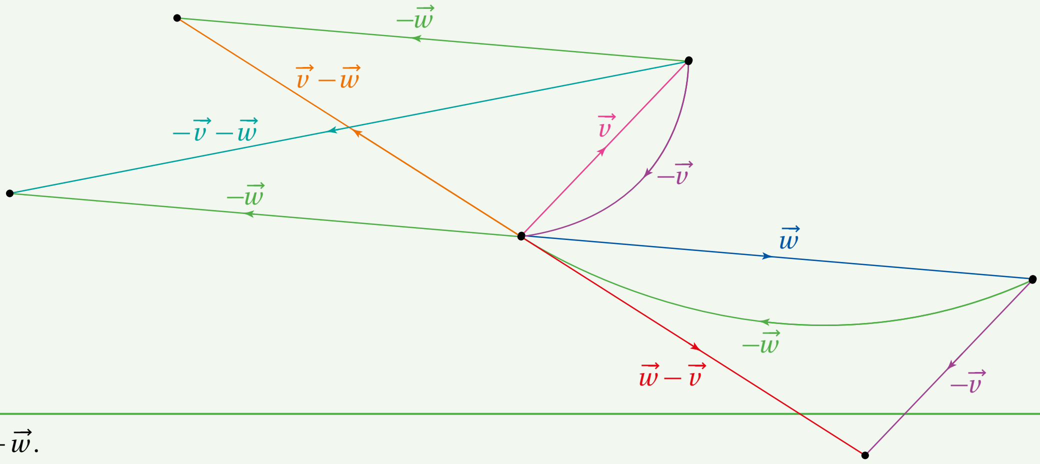


2 Bepaal:

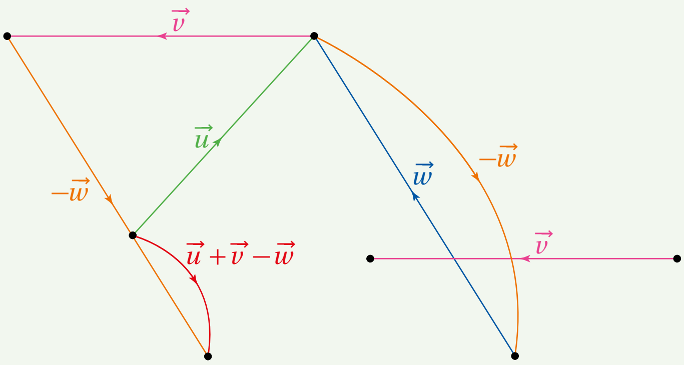
a $\vec{v} - \vec{w}$

b $-\vec{v} - \vec{w}$

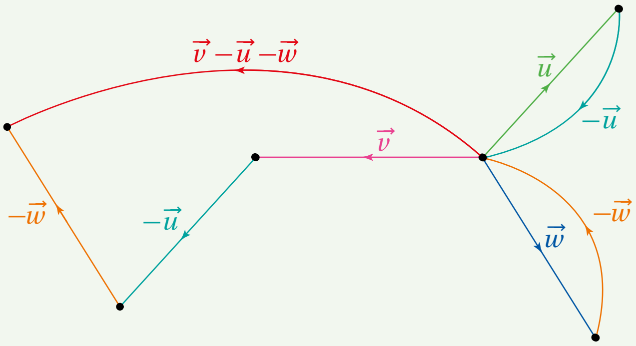
c $\vec{w} - \vec{v}$



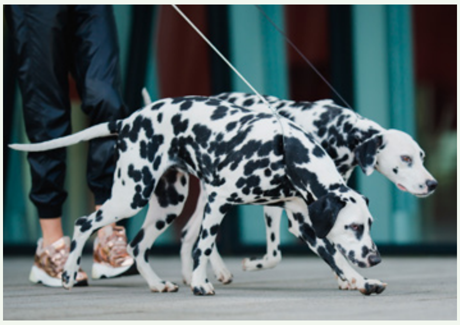
3 Teken $\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}$.



4 Teken $\vec{x}$ als $\vec{x} = \vec{v} - \vec{u} - \vec{w}$.



5 Maxime gaat met zijn twee honden Fee en Fifi wandelen. Fee trekt met een kracht van 15 N en Fifi trekt met een kracht van 10 N. Als er tussen de krachten een hoek van 90° is, bereken dan de grootte van de resulterende kracht die Maxime van de honden ondervindt.

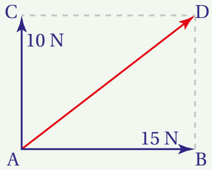


ΔABD: $|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2$

$\Leftrightarrow |AD|^2 = 15^2 + 10^2$

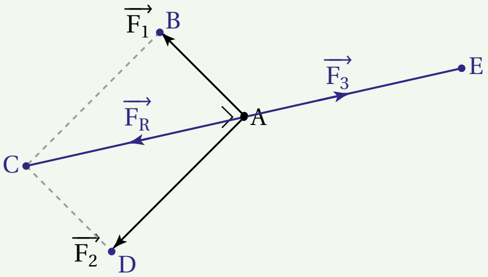
$\Leftrightarrow |AD|^2 = 325$

$\Leftrightarrow |AD| = \sqrt{325} = 5\sqrt{13} \approx 18{,}03$



ANTWOORD: De resulterende kracht bedraagt ongeveer 18,03 N.

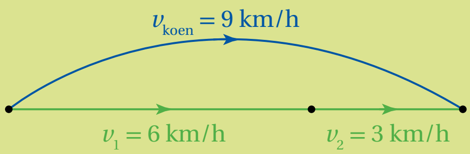
* **6** Op een beweegbaar punt A werken twee krachten $F_1 = 20$ N en $F_2 = 35$ N in. Welke grootte, welke richting en welke zin moet een derde kracht F_3 hebben opdat het punt A niet zou bewegen? Construeer F_3.



$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2$$
$$\Leftrightarrow |AD|^2 = 35^2 + 20^2$$
$$\Leftrightarrow |AD|^2 = 1625$$
$$\Leftrightarrow |AD| = \sqrt{1625} \approx 40{,}31$$

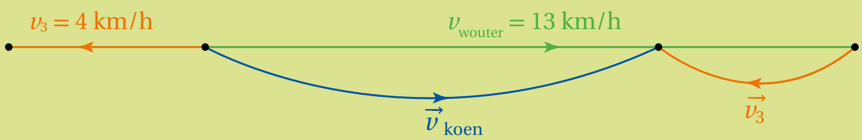
ANTWOORD: Opdat het punt niet zou bewegen, moet $F_3 \approx 40{,}31$ N.

7 In een treinstation zijn er twee roltrappen naast elkaar. De ene (stijgende) brengt de passagiers van de hal naar het perron, de andere (dalende) van het perron naar de hal. De stijgende trap beweegt met een snelheid van 6 km/h, de dalende heeft een snelheid van 4 km/h.
Koen en Wouter stappen tegelijkertijd op de trap. Koen neemt de trap naar het perron toe en stapt op die trap met een snelheid van 3 km/h naar boven. Wouter negeert de veiligheidsvoorschriften en neemt de dalende trap naar boven om naar het perron te gaan. Welke snelheid moet Wouter hebben om gelijktijdig met Koen op het perron aan te komen? Illustreer je bewering grafisch.



- Koen: $v = v_1 + v_2 = 6 + 3 = 9$

ANTWOORD: $v_{koen} = 9$ km/h.



- Wouter: $9 = x - 4$
  $\Leftrightarrow x = 13$

ANTWOORD: $v_{wouter} = 13$ km/h.

Stijgende trap: de trap beweegt met een snelheid van 6 km/h en Koen heeft in dezelfde richting en zin een snelheid van 3 km/h. Koen heeft dus een totale snelheid van 9 km/h.
De dalende trap heeft een snelheid van 4 km/h. Wouter moet met een snelheid van 13 km/h naar boven lopen om gelijktijdig boven te zijn.

8 Noteer korter.

a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{QT}$

$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QT}$

$= \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{PT}$

b $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{YZ}+\overrightarrow{XY}$

$= \overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YZ}$

$= \overrightarrow{AZ}$

c $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{CP}$

$= \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QB}$

$= \overrightarrow{BB}=\vec{o}$

d $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BQ}-\overrightarrow{DQ}$

$= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QD}$

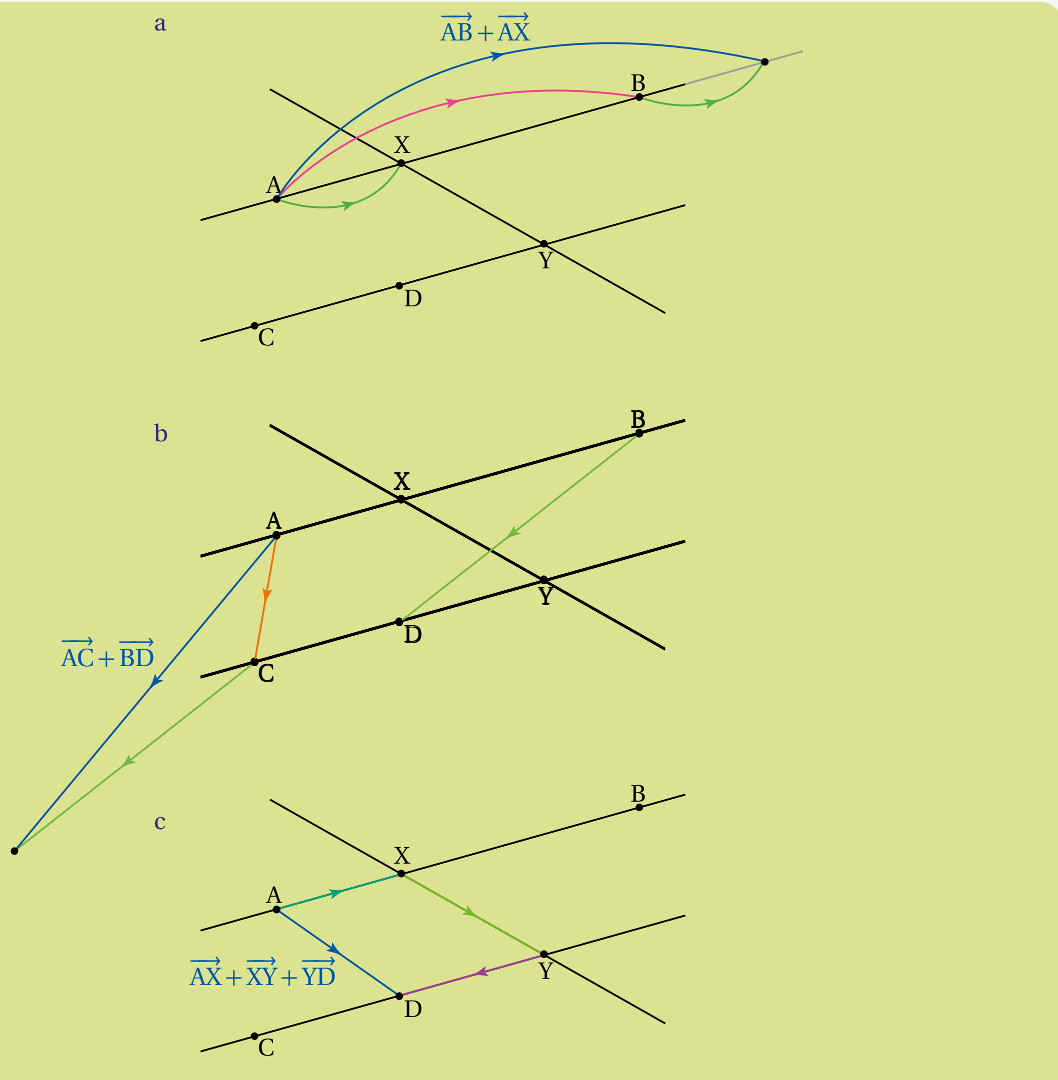
$= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}+\overrightarrow{QD}= \overrightarrow{CD}$

9 Als AB // CD, teken dan:

a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AX}$

b $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

c $\overrightarrow{AX}+\overrightarrow{XY}+\overrightarrow{YD}$



10 Vereenvoudig.

a $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} - \vec{u}$

$= \vec{v} + \vec{w}$

b $\vec{v} - (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{u}$

$= \vec{v} - \vec{u} + \vec{v} + \vec{u}$

$= 2\vec{v}$

c $2 \cdot (\vec{u} + \vec{v}) - 3\vec{u}$

$= 2\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{u}$

$= -\vec{u} + 2\vec{v}$

d $0{,}25\, \vec{u} + \frac{1}{8}\vec{v} + \frac{3}{4}\vec{u} - 0{,}375\, \vec{v}$

$= \vec{u} - 0{,}25\vec{v}$

e $5\left(\sqrt{2}\, \vec{u} - \sqrt{3}\, \vec{v}\right) - 2\left(\sqrt{2}\, \vec{u} - 3\sqrt{3}\, \vec{v}\right)$

$= 5\sqrt{2}\vec{u} - 5\sqrt{3}\vec{v} - 2\sqrt{2}\vec{u} + 6\sqrt{3}\vec{v}$

$= 3\sqrt{2}\vec{u} + \sqrt{3}\vec{v}$

f $r \cdot \left(s\vec{x} + t\vec{y}\right) - s \cdot \left(r\vec{x} - t\vec{y}\right)$

$= rs\vec{x} + rt\vec{y} - sr\vec{x} + st\vec{y}$

$= (rt + st)\vec{y}$

g $-4 \cdot \left(3\vec{x} + 2\vec{y}\right) + 2 \cdot \left(\vec{x} + \vec{y} + \vec{z}\right) - 3 \cdot \left(\vec{x} - \vec{y}\right)$

$= -12\vec{x} - 8\vec{y} + 2\vec{x} + 2\vec{y} + 2\vec{z} - 3\vec{x} + 3\vec{y}$

$= -13\vec{x} - 3\vec{y} + 2\vec{z}$

h $(r - s - t) \cdot \left(\vec{x} - \vec{y}\right) + (s - t + r) \cdot \left(\vec{x} + \vec{y}\right)$

$= r\vec{x} - \cancel{r\vec{y}} - \cancel{s\vec{x}} + s\vec{y} - t\vec{x} + \cancel{t\vec{y}} + \cancel{s\vec{x}} + s\vec{y} - t\vec{x}$

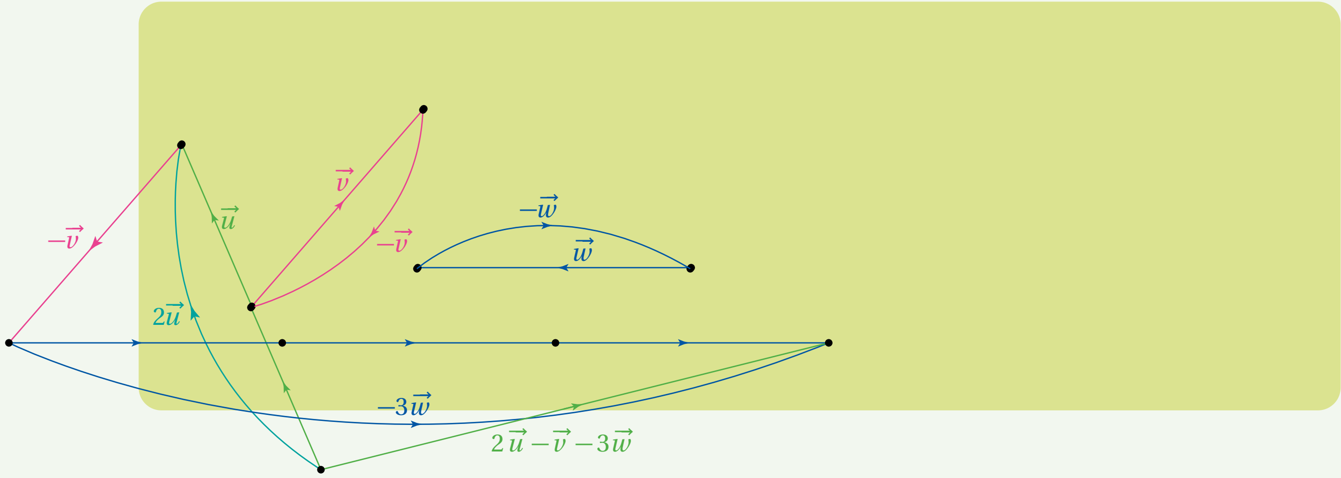
$\cancel{-t\vec{y}} + r\vec{x} + \cancel{r\vec{y}}$

$= 2r\vec{x} + 2s\vec{y} - 2t\vec{x}$

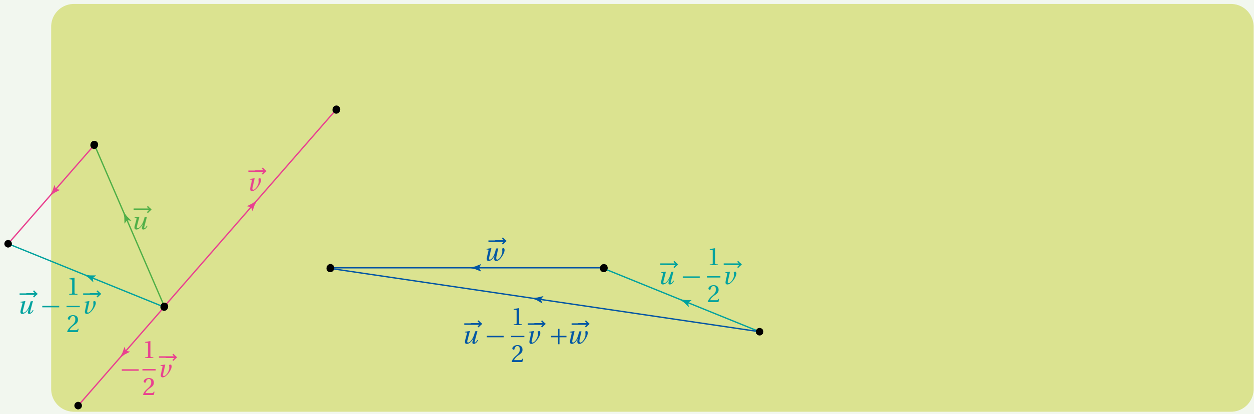
$= 2(r - t)\vec{x} + 2s\vec{y}$

11 Gegeven zijn de vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$. Teken:

a $2\vec{u} - \vec{v} - 3\vec{w}$

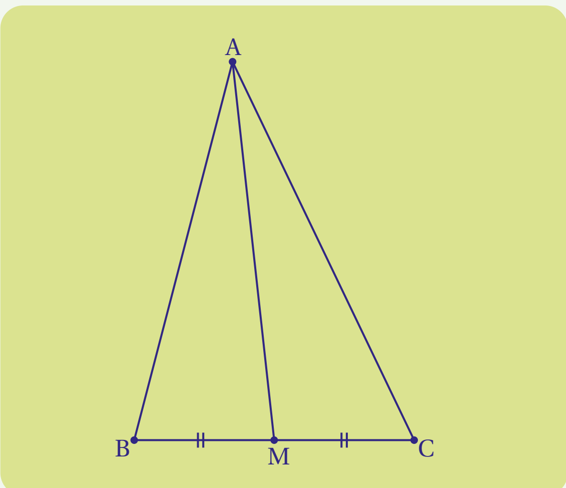


b $\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} + \vec{w}$



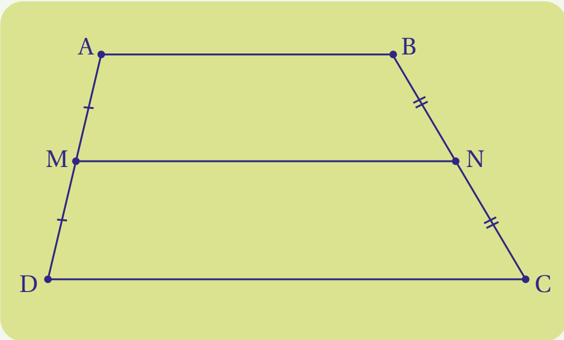
12 Teken drie vectoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ en $\vec{w}$ en zoek dan $-2\vec{u} + \vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w}$.

* **13** In Δ ABC is [AM] een zwaartelijn.
Toon aan: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2 \cdot \overrightarrow{AM}$.
Controleer met ICT.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MC}\right)\\ &= 2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\\ &= 2\overrightarrow{AM}+\vec{o}\\ &= 2\overrightarrow{AM}\end{aligned}$$

14 In het trapezium ABCD zijn M en N de middens van de opstaande zijden.
Toon aan: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{MN}$.



Gegeven: ABCD is een trapezium, M = mi[AD]; N = mi[BC]

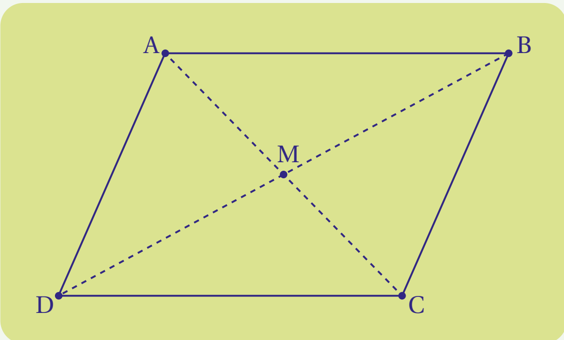
Te bewijzen: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$

Bewijs: $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC} \end{cases}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DM} + 2\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \vec{o} + 2\overrightarrow{MN} + \vec{o} = 2\overrightarrow{MN}$

15 ABCD is een parallellogram en M is het snijpunt van de diagonalen.
Toon aan: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{o}$



Gegeven: ABCD is een parallellogram
$AC \cap BD = \{M\}$

Te bewijzen: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{o}$

Bewijs:

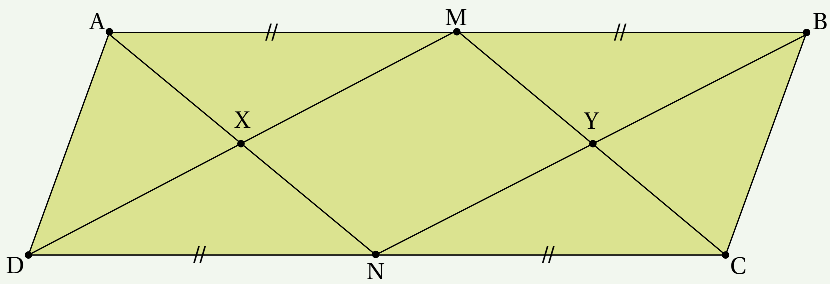
$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$
(in een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor)

$= \vec{o} + \vec{o}$

$= \vec{o}$

16 ABCD is een parallellogram.
M = mi[AB]
N = mi[CD]

Toon aan: $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{XY}$



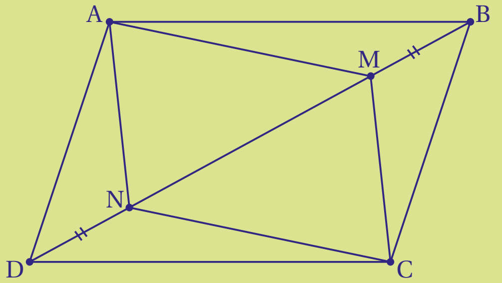
Gegeven: ABCD is een parallellogram
M = mi[AB]; N = mi[CD]
$AN \cap DM = \{X\}$
$BN \cap MC = \{Y\}$

Te bewijzen: $\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \overrightarrow{XY}$

Bewijs:
- ABCD is een parallellogram
  $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DN}$
  $\Rightarrow$ AMND is een parallellogram
- ABCD is een parallellogram
  $\Rightarrow \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{NC}$
  $\Rightarrow$ MBCN is een parallellogram
- In een parallellogram delen de diagonalen elkaar middendoor.
  $\Rightarrow \overrightarrow{AX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}$ en $\overrightarrow{YB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YB}$
  $= \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{XY} + \frac{1}{2}\overrightarrow{NB}$
  $= \overrightarrow{XY} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NB}\right)$
  $= \overrightarrow{XY} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{XY} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

17 Op een diagonaal [BD] van het parallellogram ABCD plaats je de punten M en N zodat |BM| = |DN|.
Bewijs dat AMCN een parallellogram is.



Gegeven: ABCD is een parallellogram

$|BM| = |DN|$

Te bewijzen: AMCN is een parallellogram

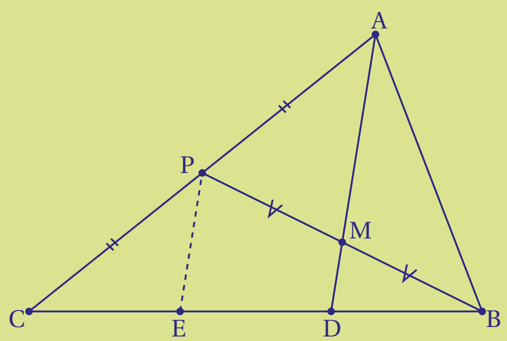
Bewijs: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ en $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{DN} + \overrightarrow{NC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$

$\Rightarrow$ AMCN is een parallellogram

18 Door het hoekpunt A van Δ ABC teken je een rechte die door het midden M van de zwaartelijn [BP] gaat en BC snijdt in D.
Toon aan: $|BD| = \frac{1}{2}|DC|$.



- Teken PE // AD.
- $M = \text{mi}[BP]$

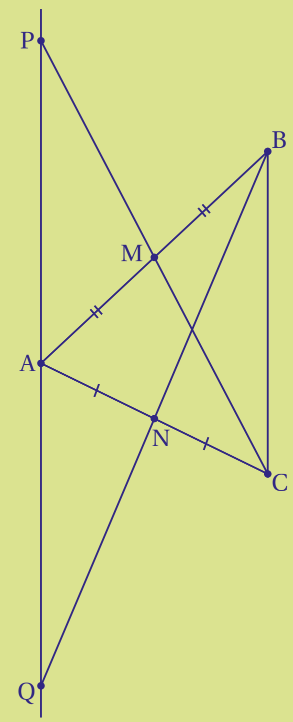
  $\Rightarrow D = \text{mi}[BE]$ (stelling van Thales)

  $\Rightarrow \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DE}$ (1)
- $P = \text{mi}[AC]$

  $\Rightarrow E = \text{mi}[DC]$ (stelling van Thales)

  $\Rightarrow \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC}$ (2)
- (1) en (2) : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EC} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$

19 In ΔABC is $M = mi[AB]$
$N = mi[AC]$
Teken P en Q zodat $M = mi[CP]$
$N = mi[BQ]$
Toon aan dat A, P en Q collineair zijn.



Gegeven: ΔABC; $M = mi[AB]$; $N = mi[AC]$;

$M = mi[CP]$; $N = mi[BQ]$

Te bewijzen: A, P en Q zijn collineair

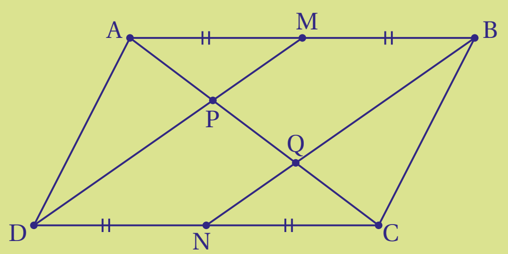
Bewijs: MN is een middenparallel van ΔCAP en ΔBAQ

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{PA}$ en $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AQ}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AQ}$

$\Rightarrow$ A, P en Q zijn collineair

20 In een parallellogram ABCD zijn M en N de middens van [AB] en [CD].
De diagonaal [AC] snijdt DM en BN in P en Q.
Toon aan: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$.



Gegeven: ABCD is een parallellogram

$M = mi[AB]$; $N = mi[DC]$

$AC \cap DM = \{P\}$; $AC \cap BN = \{Q\}$

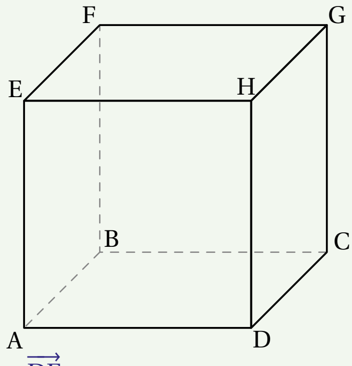
Te bewijzen: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$

Bewijs:

- MBND is een parallellogram want $MB /\!/ DN$ en $|MB| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}|DC| = |DN|$
  $\Rightarrow MD /\!/ BN$
- ΔABQ:
  $PM /\!/ BQ$ en $M = mi[AB]$
  $\Rightarrow P = mi[AQ]$ (omgekeerde stelling van de middenparallel)
  $\Rightarrow \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ}$ (1)
- ΔDPC:
  $QN /\!/ DP$ en $N = mi[CD]$
  $\Rightarrow Q = mi[PC]$ (omgekeerde stelling van de middenparallel)
  $\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$ (2)
- (1) en (2): $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QC}$

21 Ook in de ruimte kun je met vectoren werken.

$\begin{pmatrix} \text{EFGH} \\ \text{ABCD} \end{pmatrix}$ is een kubus.



Vul in met $=$ of $\neq$.

a $\overrightarrow{BC}$ $=$ $\overrightarrow{EH}$

b $\overrightarrow{DC}$ $\neq$ $\overrightarrow{BA}$

c $\overrightarrow{AH}$ $\neq$ $\overrightarrow{CF}$

d $\overrightarrow{DB}$ $=$ $-\overrightarrow{FH}$

e $\overrightarrow{ED}$ $\neq$ $\overrightarrow{BG}$

Bepaal.

f $\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GF}=\overrightarrow{DF}$

g $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AE}$

h $\overrightarrow{FB}-\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{FB}+\overrightarrow{AD}$

$= \overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{FC}$

i $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FG}$

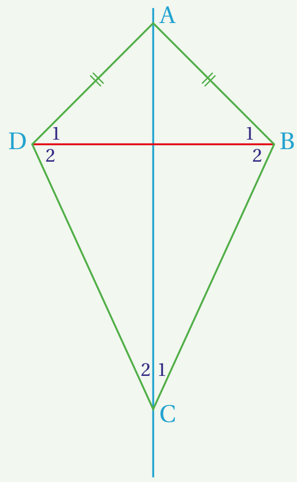
$= \overrightarrow{AG}$

j $\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{HD}-\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{GE}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{GC}$

22 In de vierhoek ABCD is $|AB| = |AD|$ en $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.
Bewijs dat AC de middelloodlijn op [BD] is.

- ΔABD is een gelijkbenige driehoek $\Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{D}_1$
- $\widehat{ABC}=\widehat{ADC}$
  $\Rightarrow \widehat{B}_2 = \widehat{D}_2 \quad (\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1)$
  $\Rightarrow$ ΔDBC is gelijkbenig
  $\Rightarrow$ C ligt op de middelloodlijn van [BD]
- Aangezien A en C punten zijn van de middelloodlijn van [BD] is AC de middelloodlijn van [BD].



* **23** Op hoeveel verschillende manieren verkrijg je een ware uitspraak als je op de drie stippen elk van de letters A, B en C precies één keer invult?
Voor elke drie verschillende punten A, B en C geldt $\overrightarrow{\bullet B} + \overrightarrow{\bullet C} = \overrightarrow{A\bullet}$.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 6

VWO 2021 eerste ronde, vraag 18 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw