13 Oefeningen

1 Noteer de eigenschap die je hier geïllustreerd ziet.

a $\sqrt{2}-1 \in \mathbb{R}$

De optelling in $\mathbb{R}$ is intern.

b $\sqrt{3}+\sqrt{2} = \sqrt{2}+\sqrt{3}$

De optelling in $\mathbb{R}$ is commutatief.

c $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$

De deling in $\mathbb{Z}$ is niet intern.

d $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} \in \mathbb{R}$

De vermenigvuldiging in $\mathbb{R}$ is intern.

e $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right) = 0 = -\sqrt{2}+\sqrt{2}$

In $\mathbb{R}$ heeft elk element een symmetrisch element voor de optelling, namelijk zijn tegengestelde.

f $\pi\cdot\pi^{-1} = 1 = \pi^{-1}\cdot\pi$

In $\mathbb{R}$ heeft elk van nul verschillend element een symmetrisch element voor de vermenigvuldiging, namelijk zijn omgekeerde.

g $3\cdot\left(\sqrt{2}-4\right) = 3\sqrt{2}-12$

De vermenigvuldiging is distributief t.o.v. de optelling in $\mathbb{R}$.

h $\sqrt{3}\cdot\sqrt{12} = 6$

Het product van twee vierkantswortels in $\mathbb{R}$ is gelijk aan de vierkantswortel van het product.

i $\left(\sqrt{2}+1\right)-\sqrt{3} = \sqrt{2}+\left(1-\sqrt{3}\right)$

In $\mathbb{R}$ is de optelling associatief.

2 Duid aan welke eigenschappen gelden in de gegeven verzameling.

a Eigenschappen van de optelling.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
INTERN	✗	✗	✗	✗
ASSOCIATIEF	✗	✗	✗	✗
NEUTRAAL ELEMENT	✗	✗	✗	✗
SYMMETRISCH ELEMENT VOOR ELK ELEMENT		✗	✗	✗
COMMUTATIEF	✗	✗	✗	✗

b Eigenschappen van de vermenigvuldiging.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
INTERN	✗	✗	✗	✗
ASSOCIATIEF	✗	✗	✗	✗
NEUTRAAL ELEMENT	✗	✗	✗	✗
SYMMETRISCH ELEMENT VOOR ELK ELEMENT				
COMMUTATIEF	✗	✗	✗	✗

c Eigenschappen van de aftrekking.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
INTERN		✗	✗	✗
ASSOCIATIEF				
NEUTRAAL ELEMENT				
SYMMETRISCH ELEMENT VOOR ELK ELEMENT				
COMMUTATIEF				

d Eigenschappen van de deling.

	$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{Z}_0$	$\mathbb{Q}_0$	$\mathbb{R}_0$
INTERN				
ASSOCIATIEF				
NEUTRAAL ELEMENT				
SYMMETRISCH ELEMENT VOOR ELK ELEMENT				
COMMUTATIEF				

De deling bezit geen enkele van deze eigenschappen.

3 Toon aan de hand van een voorbeeld aan dat volgende eigenschappen niet gelden.

a Het product van twee irrationale getallen is een irrationaal getal.

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{18} = \sqrt{36} = 6 \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

c De aftrekking is associatief in $\mathbb{Z}$.

$(2-3)-5 = -1-5 = -6$

$2-(3-5) = 2-(-2) = 4$

b 0 is het neutraal element voor de aftrekking in $\mathbb{R}$.

$\frac{1}{7}-0 = \frac{1}{7} \neq 0-\frac{1}{7}$

d Het delen is commutatief in $\mathbb{R}$.

$8:2 = 4 \neq 2:8$

4 Werk uit en schrijf met positieve exponenten. Alle letters stellen van nul verschillende reële getallen voor.

a $a^3\cdot a^3 = a^6$

b $a^3 : a^2 = a$

c $\left(a^3\right)^4 = a^{12}$

d $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

e $(-a)^4 = a^4$

f $(-a)^5 = -a^5$

g $(2a)^3 = 8a^3$

h $\left(a\cdot b^{-1}\right)^{-1} = a^{-1}\cdot b = \frac{b}{a}$

i $a^5\cdot\left(a^2\right)^3 : a^{-2} = a^5\cdot a^6 : a^{-2}$

$= a^{5+6+2}$

$= a^{13}$

j $\frac{4a^4\cdot a^2}{(2a^3)^2} = \frac{4a^6}{4a^6} = 1$

*5 Werk uit en schrijf met positieve exponenten. De letters a, b, c en d stellen van nul verschillende reële getallen voor.

a $a\cdot\left(a^{-1}+b\right)$

b $a\cdot\left(a^{-1}+b\right)\cdot b^{-1}$

c $a-(a+b)$

d $-2a+(3a-2b)-2(a-2b)$

e $a^2\cdot a^{-3}\cdot a^4\cdot b^2\cdot b^{-3}$

f $(-a)^5\cdot(-a)^3\cdot a^4$

g $\left(a^3\cdot b^{-2}\right)^2$

h $\left(a^3\right)^2\cdot a^3\cdot a^4$

i $(-c)^5\cdot d^3\cdot c^7\cdot d^{-2}$

j $\left(a^2\cdot b^3\right)^{-2}$

k $\left[(-a)^{-3}\right]^{-2}\cdot\left[(-a)^2\right]^{-3}$

l $\left(a^2\right)^3\cdot\left(a^5\right)^2$

m $3\cdot(a-2)-5\cdot(4-a)$

n $-\left(a^{2n}\right)\cdot(-a)^{2n}$

o $a^n\cdot a^{n-1}\cdot a^{1-2n}$

p $\dfrac{a^2b\cdot(ab)^2}{a^{-3}b}$

q $\dfrac{a^n\cdot a^{n-1}}{a^{2-n}}$

r $\dfrac{a^{2-n}\cdot a^{-n}}{a^n\cdot a^{n-2}}$

a $a\cdot\left(a^{-1}+b\right)=a\cdot a^{-1}+ab=1+ab$

b $a\cdot\left(a^{-1}+b\right)\cdot b^{-1}=\left(a\cdot a^{-1}+ab\right)\cdot b^{-1}=(1+ab)\cdot b^{-1}=b^{-1}+a=\dfrac{1}{b}+a$

c $a-(a+b)=a-a-b=-b$

d $-2a+(3a-2b)-2(a-2b)=-2a+3a-2b-2a+4b=-a+2b$

e $a^2\cdot a^{-3}\cdot a^4\cdot b^2\cdot b^{-3}=a^3\cdot b^{-1}=\dfrac{a^3}{b}$

f $(-a)^5\cdot(-a)^3\cdot a^4=a^{12}$

g $\left(a^3\cdot b^{-2}\right)^2=a^6\cdot b^{-4}=\dfrac{a^6}{b^4}$

h $\left(a^3\right)^2\cdot a^3\cdot a^4=a^6\cdot a^3\cdot a^4=a^{13}$

i $(-c)^5\cdot d^3\cdot c^7\cdot d^{-2}=-c^{12}\cdot d$

j $\left(a^2\cdot b^3\right)^{-2}=a^{-4}\cdot b^{-6}=\dfrac{1}{a^4b^6}$

k $\left[(-a)^{-3}\right]^{-2}\cdot\left[(-a)^2\right]^{-3}=a^6\cdot a^{-6}=1$

l $\left(a^2\right)^3\cdot\left(a^5\right)^2=a^6\cdot a^{10}=a^{16}$

m $3\cdot(a-2)-5\cdot(4-a)=3a-6-20+5a=8a-26$

n $-\left(a^{2n}\right)\cdot(-a)^{2n}=-a^{2n}\cdot a^{2n}=-a^{4n}$

o $a^n\cdot a^{n-1}\cdot a^{1-2n}=a^{n+n-1+1-2n}=a^0=1$

p $\dfrac{a^2b\,(ab)^2}{a^{-3}b}=\dfrac{a^2ba^2b^2}{a^{-3}b}=a^7b^2$

q $\dfrac{a^n\cdot a^{n-1}}{a^{2-n}}=\dfrac{a^{2n-1}}{a^{2-n}}=a^{3n-3}$

r $\dfrac{a^{2-n}\cdot a^{-n}}{a^n\cdot a^{n-2}}=\dfrac{a^{2-2n}}{a^{2n-2}}=a^{-4n+4}$

*6 Vereenvoudig volgende vierkantswortels.

a $\sqrt{12}$

$= \sqrt{4 \cdot 3}$

$= 2\sqrt{3}$

d $\sqrt{125}$

$= \sqrt{25 \cdot 5}$

$= 5\sqrt{5}$

g $\sqrt{\frac{15}{48}}$

$= \sqrt{\frac{5}{16}}$

$= \frac{\sqrt{5}}{4}$

b $\sqrt{56}$

$= \sqrt{4 \cdot 14}$

$= 2\sqrt{14}$

e $-\sqrt{200}$

$= -\sqrt{2 \cdot 100}$

$= -10\sqrt{2}$

h $\sqrt{432}$

$= \sqrt{144 \cdot 3}$

$= 12\sqrt{3}$

c $-\sqrt{18}$

$= -\sqrt{2 \cdot 9}$

$= -3\sqrt{2}$

f $\sqrt{867}$

$= \sqrt{289 \cdot 3}$

$= 17\sqrt{3}$

i $\sqrt{1440}$

$= \sqrt{144 \cdot 10}$

$= 12\sqrt{10}$

7 Vereenvoudig volgende vierkantswortels. Alle letters stellen positieve reële getallen voor.

a $\sqrt{16a^4}$

$= 4a^2$

d $\sqrt{24x^7}$

$= \sqrt{4 \cdot 6x^6 \cdot x}$

$= 2x^3\sqrt{6x}$

g $\sqrt{\frac{20x^8y^3}{z^3}}$

$= \sqrt{\frac{4 \cdot 5x^8 \cdot y^2 \cdot y}{z^2 \cdot z}}$

$= \frac{2x^4y}{z}\sqrt{\frac{5y}{z}}$

b $\sqrt{a^3}$

$= a\sqrt{a}$

e $\sqrt{a^3b^5}$

$= \sqrt{a^2 \cdot a \cdot b^4 \cdot b}$

$= ab^2\sqrt{ab}$

h $\sqrt{(2a^2)^2 + (3a^2)^2}$

$= \sqrt{4a^4 + 9a^4}$

$= \sqrt{13a^4}$

$= a^2\sqrt{13}$

c $\sqrt{12a^5}$

$= \sqrt{3 \cdot 4a^4 \cdot a}$

$= 2a^2\sqrt{3a}$

f $\sqrt{32a^4b^3}$

$= \sqrt{16 \cdot 2 \cdot a^4 \cdot b^2 \cdot b}$

$= 4a^2b\sqrt{2b}$

i $\sqrt{80p^3q^2r}$

$= \sqrt{16 \cdot 5p^2 \cdot p \cdot q^2 \cdot r}$

$= 4pq\sqrt{5pr}$

8 Werk uit.

a $4\sqrt{3}+2\sqrt{3}$

$= 6\sqrt{3}$

b $4\sqrt{6}-\sqrt{6}-3\sqrt{6}$

$= 0$

c $\sqrt{12}+4\sqrt{3}$

$= \sqrt{4\cdot 3}+4\sqrt{3}$
$= 2\sqrt{3}+4\sqrt{3}$
$= 6\sqrt{3}$

d $\sqrt{18}+\sqrt{72}$

$= \sqrt{9\cdot 2}+\sqrt{36\cdot 2}$
$= 3\sqrt{2}+6\sqrt{2}$
$= 9\sqrt{2}$

e $6\sqrt{3}-3\sqrt{12}+2\sqrt{75}$

$= 6\sqrt{3}-3\sqrt{4\cdot 3}+2\sqrt{25\cdot 3}$
$= 6\sqrt{3}-6\sqrt{3}+10\sqrt{3}$
$= 10\sqrt{3}$

f $\sqrt{12}+\sqrt{27}+\sqrt{48}$

$= \sqrt{4\cdot 3}+\sqrt{9\cdot 3}+\sqrt{16\cdot 3}$
$= 2\sqrt{3}+3\sqrt{3}+4\sqrt{3}$
$= 9\sqrt{3}$

g $3\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{125}$

$= 3\sqrt{5}+\sqrt{4\cdot 5}-\sqrt{5\cdot 25}$
$= 3\sqrt{5}+2\sqrt{5}-5\sqrt{5}$
$= 0$

h $2+\sqrt{50}-(\sqrt{72}-\sqrt{25})$

$= 2+\sqrt{25\cdot 2}-(\sqrt{36\cdot 2}-5)$
$= 2+5\sqrt{2}-(6\sqrt{2}-5)$
$= 2+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}+5$
$= 7-\sqrt{2}$

i $\sqrt{125}-2\sqrt{180}+\sqrt{80}-3\sqrt{20}$

$= \sqrt{5\cdot 25}-2\sqrt{36\cdot 5}+\sqrt{16\cdot 5}-3\sqrt{4\cdot 5}$
$= 5\sqrt{5}-12\sqrt{5}+4\sqrt{5}-6\sqrt{5}$
$= -9\sqrt{5}$

j $\dfrac{\sqrt{8}}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{18}}{2}$

$= \dfrac{\sqrt{2\cdot 4}}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{\sqrt{9\cdot 2}}{2}$

$= \dfrac{2\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

$= \dfrac{8\sqrt{2}}{12}-\dfrac{3\sqrt{2}}{12}+\dfrac{18\sqrt{2}}{12}$

$= \dfrac{23\sqrt{2}}{12}$

9 Noteer in elke bouwsteen de som van de twee onderliggende bouwstenen.

	$5\sqrt{3}+8\sqrt{2}$		
$2\sqrt{3}+3\sqrt{2}$	$3\sqrt{3}+5\sqrt{2}$		
$\sqrt{2}+\sqrt{3}$	$\sqrt{3}+2\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$	
$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{8}$	$\sqrt{2}+\sqrt{12}$

10 Werk uit.

a $\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}$

$= \sqrt{12}$
$= 2\sqrt{3}$

b $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$

$= \sqrt{144}$
$= 12$

c $2\sqrt{15}\cdot\sqrt{10}$

$= 2\sqrt{150}$
$= 2\sqrt{25\cdot 6}$
$= 10\sqrt{6}$

d $3\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$

$= 3\sqrt{36}$
$= 3\cdot 6$
$= 18$

e $\sqrt{0{,}6}\cdot\sqrt{0{,}02}\cdot\sqrt{0{,}06}\cdot\sqrt{0{,}8}$

$= \sqrt{6\cdot 10^{-1}}\cdot\sqrt{2\cdot 10^{-2}}\cdot\sqrt{6\cdot 10^{-2}}\cdot\sqrt{8\cdot 10^{-1}}$
$= \sqrt{576\cdot 10^{-6}}$
$= 24\cdot 10^{-3}$

f $2\sqrt{12}\cdot(3\sqrt{24})$

$= 6\sqrt{288}$
$= 6\sqrt{144\cdot 2}$
$= 72\sqrt{2}$

g $\sqrt{18}:\sqrt{2}$

$= \sqrt{9}$
$= 3$

h $\sqrt{96}:\sqrt{6}$

$= \sqrt{16}$
$= 4$

i $4\sqrt{8}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{12}$

$= 8\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}$
$= 96\sqrt{3}$

j $(2\sqrt{8}\cdot 2\sqrt{32}):2\sqrt{64}$

$= (4\sqrt{2}\cdot 8\sqrt{2}):16$
$= 64:16$
$= 4$

11 Werk uit. Controleer met ICT.

a $\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)$

b $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{6}$

c $\left(3\sqrt{5}-\sqrt{20}+\sqrt{80}\right)\cdot 3\sqrt{5}$

d $2\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{108}-\sqrt{12}+\sqrt{27}\right)$

e $\left(\sqrt{63}-\sqrt{14}\right):\sqrt{7}$

f $\left(2\sqrt{3}+1\right)\left(4\sqrt{3}-1\right)$

g $\left(5\sqrt{2}+\sqrt{27}\right)\left(2\sqrt{8}+\sqrt{3}\right)$

h $\dfrac{\sqrt{108}-\sqrt{12}+\sqrt{27}}{2\sqrt{3}}$

i $\dfrac{-3\sqrt{432}-2\sqrt{384}+6\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$

j $\left(\sqrt{7}\right)^3-3\sqrt{54}+4\sqrt{5^2-1}-3\sqrt{63}$

k $\sqrt{75}\cdot\left(\sqrt{24}+\sqrt{48}+\sqrt{\dfrac{14}{25}}\right)$

l $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{6}\right)$

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{18}+\sqrt{6}\\ &= 3\sqrt{2}+\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 2\sqrt{12}-3\sqrt{18}\\ &= 4\sqrt{3}-9\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= 9\sqrt{25}-3\sqrt{100}+3\sqrt{400}\\ &= 9\cdot 5-3\cdot 10+3\cdot 20\\ &= 45-30+60\\ &= 75\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d &= 2\sqrt{324}-2\sqrt{36}+2\sqrt{81}\\ &= 2\cdot 18-12+18\\ &= 42\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e &= \sqrt{9}-\sqrt{2}\\ &= 3-\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= 8\sqrt{9}-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-1\\ &= 8\cdot 3-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}-1\\ &= 23+2\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g &= 10\sqrt{16}+5\sqrt{6}+2\sqrt{216}+\sqrt{81}\\ &= 10\cdot 4+5\sqrt{6}+2\sqrt{36\cdot 6}+9\\ &= 40+5\sqrt{6}+12\sqrt{6}+9\\ &= 49+17\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{108}{3}}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{12}{3}}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{3}}\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{36}-\frac{1}{2}\sqrt{4}+\frac{1}{2}\sqrt{9}\\ &= \frac{1}{2}\cdot 6-\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 3\\ &= \frac{7}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i &= -3\sqrt{144}-2\sqrt{128}+6\sqrt{4}\\ &= -3\cdot 12-16\sqrt{2}+12\\ &= -24-16\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j &= 7\sqrt{7}-9\sqrt{6}+4\sqrt{24}-9\sqrt{7}\\ &= 7\sqrt{7}-9\sqrt{6}+8\sqrt{6}-9\sqrt{7}\\ &= -\sqrt{6}-2\sqrt{7}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k &= \sqrt{1800}+\sqrt{3600}+\sqrt{42}\\ &= 30\sqrt{2}+60+\sqrt{42}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l &= \frac{\sqrt{12}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{18}-\frac{\sqrt{18}}{6}+\frac{\sqrt{9}}{18}\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{6}}{18}-\frac{3\sqrt{2}}{6}+\frac{3}{18}\\ &= \frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{6}}{18}\end{aligned}$$

12 Werk uit ($a, b \in \mathbb{R}_0^+$).

a $\sqrt{a}+\sqrt{4a}-\sqrt{36a}$

b $\sqrt{4a^3}+a\sqrt{a^5}+a\sqrt{25a}-\sqrt{a^7}$

c $\sqrt{a^3}-\sqrt{4a^3}+a\sqrt{25a}-\sqrt{a^7}$

d $(4\sqrt{5a})\cdot(3\sqrt{2a})\cdot(2\sqrt{20a})$

e $\left(a^3\sqrt{a^3}\right)\cdot a\sqrt{a}$

f $(2\sqrt{8a})\cdot\left(a\sqrt{a^5}\right)\cdot(6\sqrt{6a})$

g $(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

h $\sqrt{a}\cdot(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{b}\cdot(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

i $\sqrt{a}:\sqrt{9a^5}$

j $\sqrt{\frac{1}{a}}:\sqrt{a}$

k $ab\sqrt{4a^8b^{10}}\cdot 2b\sqrt{9a^9b^{12}}$

l $\frac{3}{4}\sqrt{a}-\sqrt{\frac{64b}{100}}-\sqrt{\frac{a}{4}}+\sqrt{\frac{b}{25}}-\sqrt{\frac{a}{16}}$

m $\left(2\sqrt{a^3}+3\sqrt{ab}\right)\left(\sqrt{a^2b}-\sqrt{ab^2}\right)$

n $\sqrt{a}(\sqrt{ab}-\sqrt{b})-a(\sqrt{ab}+\sqrt{b})$

$$
\begin{aligned}
a &= \sqrt{a}+2\sqrt{a}-6\sqrt{a} = -3\sqrt{a}\\[1em]
b &= 2a\sqrt{a}+a^3\sqrt{a}+5a\sqrt{a}-a^3\sqrt{a}\\
&= 7a\sqrt{a}\\[1em]
c &= a\sqrt{a}-2a\sqrt{a}+5a\sqrt{a}-a^3\sqrt{a}\\
&= 4a\sqrt{a}-a^3\sqrt{a}\\[1em]
d &= 4\cdot 3\cdot 2\sqrt{5a\cdot 2a\cdot 20a}\\
&= 24\sqrt{200a^3}\\
&= 240a\sqrt{2a}\\[1em]
e &= a^4\sqrt{a^4} = a^4\cdot a^2 = a^6\\[1em]
f &= 2a\cdot 6\sqrt{8a\cdot a^5\cdot 6a}\\
&= 12a\sqrt{48a^7}\\
&= 48a^4\sqrt{3a}\\[1em]
g &= a\sqrt{a^2}-a\sqrt{ab}+b\sqrt{ba}-b\sqrt{b^2}\\
&= a^2-a\sqrt{ab}+b\sqrt{ba}-b^2\\
&= a^2-b^2+(-a+b)\sqrt{ab}\\[1em]
h &= a-\sqrt{ab}+\sqrt{ab}+b\\
&= a+b
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
i &= \sqrt{\frac{a}{9a^5}} = \sqrt{\frac{1}{9a^4}} = \frac{1}{3a^2}\\[1em]
j &= \sqrt{a^{-1}}:\sqrt{a} = \sqrt{a^{-2}} = a^{-1}\\[1em]
k &= ab\cdot 2a^4b^5\cdot 2b\cdot 3a^4b^6\sqrt{a}\\
&= 12a^9b^{13}\sqrt{a}\\[1em]
l &= \frac{3}{4}\sqrt{a}-\frac{8}{10}\sqrt{b}-\frac{1}{2}\sqrt{a}+\frac{1}{5}\sqrt{b}-\frac{1}{4}\sqrt{a}\\
&= \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{a}+\left(-\frac{8}{10}+\frac{1}{5}\right)\sqrt{b}\\
&= \left(\frac{3}{4}-\frac{2}{4}-\frac{1}{4}\right)\sqrt{a}+\left(-\frac{4}{5}+\frac{1}{5}\right)\sqrt{b}\\
&= -\frac{3}{5}\sqrt{b}\\[1em]
m &= 2\sqrt{a^5b}-2\sqrt{a^4b^2}+3\sqrt{a^3b^2}-3\sqrt{a^2b^3}\\
&= 2a^2\sqrt{ab}-2a^2b+3ab\sqrt{a}-3ab\sqrt{b}\\[1em]
n &= \sqrt{a^2b}-\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}-a\sqrt{b}\\
&= a\sqrt{b}-\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}-a\sqrt{b}\\
&= -\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}
\end{aligned}
$$

13 Bereken door merkwaardige producten toe te passen.

a $\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)$

$= 5 - 1 = 4$

b $\left(2-\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{7}\right)$

$= 4 - 7 = -3$

c $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$

$= 5 - 2 = 3$

d $\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(2\sqrt{3}+3\right)$

$= 12 - 9 = 3$

e $\left(6-4\sqrt{2}\right)\left(4\sqrt{2}+6\right)$

$= 6^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2$

$= 36-16\cdot 2$

$= 4$

f $\left(\sqrt{5}+1\right)^2$

$= \left(\sqrt{5}\right)^2+2\cdot\sqrt{5}+1$

$= 5+2\sqrt{5}+1$

$= 6+2\sqrt{5}$

g $\left(-3\sqrt{7}+4\sqrt{3}\right)^2$

$= \left(-3\sqrt{7}\right)^2-2\cdot 3\sqrt{7}\cdot 4\sqrt{3}+\left(4\sqrt{3}\right)^2$

$= 9\cdot 7-24\sqrt{21}+16\cdot 3$

$= 63-24\sqrt{21}+48$

$= 111-24\sqrt{21}$

h $\left(2\sqrt{6}-4\sqrt{2}\right)^2$

$= \left(2\sqrt{6}\right)^2-2\cdot 2\sqrt{6}\cdot 4\sqrt{2}+\left(4\sqrt{2}\right)^2$

$= 4\cdot 6-16\sqrt{12}+16\cdot 2$

$= 56-32\sqrt{3}$

*i $\sqrt{5-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{5+\sqrt{5}}$

$= \sqrt{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(5+\sqrt{5}\right)}$

$= \sqrt{25-5}$

$= \sqrt{20}$

$= 2\sqrt{5}$

*j $\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-5\right)\left(\sqrt{3}+5\right)-\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

$= \sqrt{2}(3-25)-\left(2-2\sqrt{2}+1\right)$

$= -22\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}$

$= -20\sqrt{2}-3$

14 Maak de noemers wortelvrij $(a, b \in \mathbb{R}_0^+)$.

a $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{1 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

b $\dfrac{2\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$

$= \dfrac{2\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{35}}{5}$

c $\dfrac{2}{\sqrt{18}}$

$= \dfrac{2}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

d $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$

$= \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a} \cdot \sqrt{a}} = \dfrac{a\sqrt{a}}{a} = \sqrt{a}$

e $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$= \dfrac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt{b} \cdot \sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{ab}}{b}$

f $\dfrac{2}{3\sqrt{6}}$

$= \dfrac{2\sqrt{6}}{3 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \dfrac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 6} = \dfrac{\sqrt{6}}{9}$

g $\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{(\sqrt{3}+1) \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

h $\dfrac{6-\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$= \dfrac{(6-\sqrt{6}) \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{3}-\sqrt{18}}{3}$

$= \dfrac{6\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{3}-\sqrt{2}$

i $\dfrac{\sqrt{12}-\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}$

$= \dfrac{(\sqrt{12}-\sqrt{8}) \cdot \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{24}-\sqrt{16}}{2 \cdot 2}$

$= \dfrac{2\sqrt{6}-4}{4} = \dfrac{\sqrt{6}-2}{2}$

j $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{7}}{\sqrt{14}}$

$= \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{7}) \cdot \sqrt{14}}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{14}} = \dfrac{\sqrt{28}-\sqrt{98}}{14}$

$= \dfrac{2\sqrt{7}-7\sqrt{2}}{14}$

k $\dfrac{3}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$= \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

l $\sqrt{\dfrac{2}{3}} + \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

$= \dfrac{2+3}{\sqrt{6}} = \dfrac{5}{\sqrt{6}} = \dfrac{5\sqrt{6}}{6}$

15 Vul in met <, > of =. Verantwoord je keuze.

a $\left(\sqrt{3}\right)^{-3}$ $>$ 3^{-2}

b $\left(2\sqrt{3}\right)^{-1}$ $<$ $\sqrt[3]{27}$

c $\frac{1}{64}$ $=$ 8^{-2}

d $(-2)^3$ $=$ $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$

e $\sqrt[3]{8}$ $<$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

f $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)^2$ $>$ 7

16 Werk uit.

a $\left(\sqrt{2}\right)^4$ $= 2^2 = 4$

b $\left(\sqrt{5}\right)^3$ $= \left(\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$

c $\left(3\sqrt{3}\right)^3$ $= 3^3 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^3 = 27 \cdot 3\sqrt{3} = 81\sqrt{3}$

d $\left(a^2\sqrt{a}\right)^3$ $= a^6\left(\sqrt{a}\right)^3 = a^6 \cdot a\sqrt{a} = a^7\sqrt{a}$

e $\left(\sqrt{a^3b^4c^2}\right)^3$ $= \sqrt{a^9b^{12}c^6} = a^4b^6c^3\sqrt{a}$

f $\left(\frac{\sqrt{a^3b^5}}{ab}\right)^4$ $= \frac{\sqrt{a^{12}b^{20}}}{a^4b^4} = \frac{a^6b^{10}}{a^4b^4} = a^2b^6$

g $\left(2\sqrt{3}\right)^4$ $= 2^4 \cdot 3^2 = 144$

h $\left(-3\sqrt{2}\right)^3$ $= -3^3 \cdot 2\sqrt{2} = -54\sqrt{2}$

17 * Breng de factoren die voor het wortelteken staan onder het wortelteken als je weet dat $a \in \mathbb{R}^+$ en $b \in \mathbb{R}_0^+$.

a $5\sqrt{3}$

$= \sqrt{25 \cdot 3}$

$= \sqrt{75}$

c $5\sqrt{5}$

$= \sqrt{25 \cdot 5}$

$= \sqrt{125}$

e $ab\sqrt{\frac{a}{b}}$

$= \sqrt{\frac{a^2 b^2 \cdot a}{b}}$

$= \sqrt{a^3 b}$

b $2\sqrt{\frac{1}{4}}$

$= \sqrt{\frac{4}{4}}$

$= \sqrt{1}$

$= 1$

d $3a\sqrt{b}$

$= \sqrt{9a^2 b}$

f $2(a+b)\sqrt{a}$

$= \sqrt{4(a+b)^2 \cdot a}$

18 Vereenvoudig als je weet dat $a \in \mathbb{R}^+$ en $b \in \mathbb{R}^-$.

a $\sqrt{a^2}$

$= a$

c $\sqrt{a^2 b^2}$

$= |\,ab\,|$

$= -ab$

e $-\sqrt{-3a^3 b^7}$

$= -|\,ab^3\,| \cdot \sqrt{-3ab}$

$= ab^3\sqrt{-3ab}$

b $\sqrt{b^2}$

$= -b$

d $\sqrt{27a^5 b^2}$

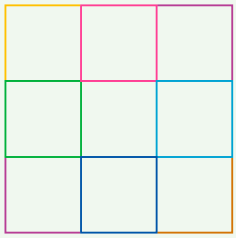
$= 3a^2 \cdot |\,b\,| \cdot \sqrt{3a}$

$= -3a^2 b\sqrt{3a}$

f $\sqrt{(a+b)^2}$

$= |\,a+b\,|$

19 Als je weet dat het grote vierkant een oppervlakte heeft van 20 cm^2, bereken dan de oppervlakte en de omtrek van de kleine vierkanten.



zijde van het grote vierkant: $\sqrt{20}\ \text{cm} = 2\sqrt{5}\ \text{cm}$

oppervlakte van een klein vierkant: $\frac{20}{9}\ \text{cm}^2$

zijde van een klein vierkant: $\frac{2\sqrt{5}}{3}\ \text{cm}$

omtrek van een klein vierkant: $4 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{3}\ \text{cm} = \frac{8\sqrt{5}}{3}\ \text{cm}$

20 Als $a = \sqrt{2}$, bereken dan zonder ICT: $\frac{a + a^{-1}}{a}$.

$$\frac{a + a^{-1}}{a} = \frac{\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^{-1}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{2+1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$$

21 In een doos liggen 20 sokken. Van die 20 zijn er 10 rode en 10 zwarte sokken.

a Hoeveel sokken moet Noa lukraak nemen om zeker te zijn dat ze één paar sokken heeft in dezelfde kleur?

3 sokken

b Hoeveel sokken moet Noa lukraak nemen om zeker te zijn dat ze één paar zwarte sokken heeft?

12 sokken

22 Als $x = \sqrt{10-\sqrt{10-\sqrt{10-\sqrt{10-\sqrt{10}}}}}$, dan is

(A) $0 < x < 1$ (B) $1 < x < 2$ (C) $2 < x < 3$ (D) $3 < x < 4$ (E) $4 < x < 5$

VWO 2018 tweede ronde, vraag 14 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

Zij $a = 10-\sqrt{10}$, dan is het eenvoudig in te zien dat $6 < a < 7$.
Bijgevolg geldt voor $b = \sqrt{a}$ dat $2,4 < b = \sqrt{10-\sqrt{10}} < 2,7$.
Hieruit volgt dan weer dat $7,3 < 10-b < 7,6$.
Als $c = \sqrt{10-b}$ dan hebben we dus $2,6 < c = \sqrt{10-\sqrt{10-\sqrt{10}}} < 2,8$ en bijgevolg dat $7,2 \leqslant 10-c \leqslant 7,4$,
en dus dat $2,7 \leqslant \sqrt{10-c} = \sqrt{10-\sqrt{10-\sqrt{10-\sqrt{10}}}} \leqslant 2,8$.
Dergelijke stap moeten we nu nog eens herhalen om over x iets te vernemen. Het wordt evenwel duidelijk dat we x steeds nauwkeuriger insluiten, en dat van de antwoordalternatieven C het juiste is.

23 In een vierkant land met oppervlakte 10 000 km^2 wil telecomoperator Telemus gsm-masten plaatsen met een bereik van 50 km. Hoeveel masten moeten ze minstens plaatsen om zeker het hele gebied te dekken?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

VWO 2019 eerste ronde, vraag 9 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

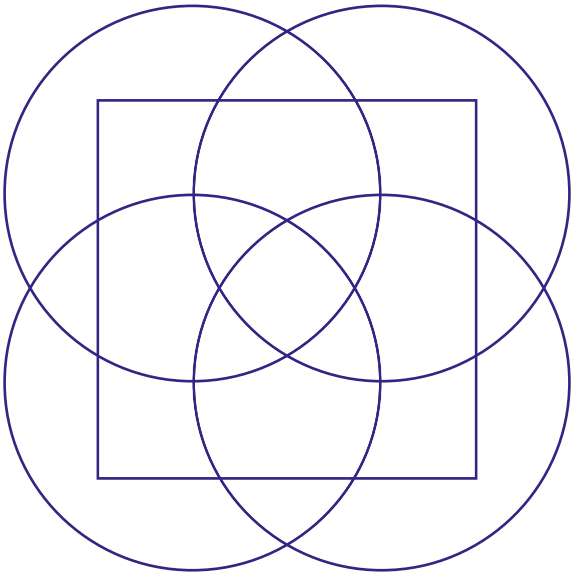
24 We noteren $n!$ voor het product van de natuurlijke getallen 1 tot en met n.

Zo is $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5 = 120$. Waaraan is $\dfrac{\sqrt{10!}}{6!}$ gelijk?

(A) $2\sqrt{3}$ (B) $2\sqrt{6}$ (C) $\sqrt{7}$ (D) 7 (E) 24

VWO 2020 eerste ronde, vraag 8 © Vlaamse Wiskunde Olympiade vzw

We rekenen dit na: $\dfrac{\sqrt{10!}}{6!} = \sqrt{\dfrac{10!}{6!\cdot6!}} = \sqrt{\dfrac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}} = \sqrt{7}$



23

Het vierkant land heeft een zijde van 100 km. De masten geven telkens een bereik in een cirkelvormig gebied met straal 50 km. De vraag die zich hier dus stelt, komt op hetzelfde neer als het bedekken van een vierkant met zijde 2 door zo weinig mogelijk cirkels met straal 1. Laat het vierkant de hoekpunten $(\pm 1, \pm 1)$ hebben. Dat het met 4 cirkels kan, is vrij eenvoudig om in te zien. Als de middelpunten van die vier cirkels de punten $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$ zijn, zoals in de figuur, bedekt elke cirkel volledig het kwadrant van het vierkant waarin zijn middelpunt ligt. Dat het vierkant niet met drie dergelijke cirkels kan bedekt worden is iets delicater. Mocht dit zo zijn, dan moeten er twee hoekpunten van het vierkant binnen of op eenzelfde cirkel liggen. Dit kan enkel indien het middelpunt van die cirkel op de rand van het vierkant ligt, halverweg een zijde. Ook de andere twee hoekpunten moeten door cirkels bedekt worden. Hoe je dit ook doet, met 1 of met 2 cirkels, steeds kun je punten van het vierkant aanduiden die niet bedekt worden door een van de 3 cirkels.