标题

副标题

姓名

华中科技大学

2024 年 2 月 3 日

目录

1 选题背景

Bernoulli 卷积是一类简单而有趣的自相似测度。令 ν_λ 为随机级数 $\sum_0^\infty \pm 1\lambda^n$ 分布，其中的符号以概率 $\frac{1}{2}$ 独立地取得。这正是测度 $\frac{1}{2}(\delta_{-\lambda^n} + \delta_{\lambda^n})$ 的无穷卷积，因此叫 “Bernoulli 卷积”。关于这类测度的研究可以追溯到 1930 年，Bernoulli 卷积与调和分析，代数数理论，动力系统，以及 Hausdorff 维数的估计等领域有紧密的联系。
根据不同的研究领域，Bernoulli 卷积有不同的表示形式。[SixtyYears]

Bernoulli 卷积基本问题

根据 [DJFeng1]，对 $\beta \in (1,2)$，Bernoulli 卷积 ν_β 可以定义为下面一族测度 ν_β^n 的 weak-star 极限

$$\nu_\beta^n := \frac{1}{2} \sum_{a_1 \cdots a_n \in \{0,1\}} \delta_{\sum_{i=1}^n a_i \beta^{-i}} 。$$

关于 Bernoulli 卷积基本问题是：对于哪些 β，这个测度是绝对连续的，哪些是奇异的 (singular)。如果密度 (关于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym 导数) 存在，那么它的光滑性如何 ($L^{p?}$)? 然后就是 Bernoulli 卷积的 Hausdorff 维数如何，是否等于 1，怎样去估计 Hausdorff 维数。

其中有一个非常重要的结果就是，Erdös 证明如果 β 为 Pisot 数，那么相应的 Bernoulli 卷积的维数一定小于 1。

一个 open 的问题

如果 ν_β 奇异，那么是否一定有 β 为 Pisot 数?

参考文献

Peres Y., Schlag W., Solomyak B. (2000) Sixty Years of Bernoulli Convolutions. In: Bandt C., Graf S., Zähle M. (eds) Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability, vol 46. Birkhäuser, Basel

Shigeki Akiyama, De-Jun Feng, Tom Kempton, Tomas Persson; On the Hausdorff Dimension of Bernoulli Convolutions, International Mathematics Research Notices, , rny209, https://doi.org/10.1093/imrn/rny209

FENG, DE-JUN. "SMOOTHNESS OF THE L^q-SPECTRUM OF SELF-SIMILAR MEASURES WITH OVERLAPS."Journal of the London Mathematical Society, vol. 68, no. 1, 2003, pp. 102–118., doi:10.1112/S002461070300437X.

De-Jun Feng, Yang Wang, 2004, 'Bernoulli convolutions associated with certain non-Pisot numbers', Advances in Mathematics, vol. 187, no. 1, pp. 173-194

参考文献

Kevin G. Hare & Nikita Sidorov (2018) A Lower Bound for the Dimension of Bernoulli Convolutions, Experimental Mathematics, 27:4, 414-418, DOI: 10.1080/10586458.2017.1301841

Falconer, K. J. Fractal Geometry. Wiley, 1990.

Mattila, Pertti. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability. Cambridge University Press, 1995.

谢谢！