标题 副标题

姓名

华中科技大学

2024年2月3日

目录

① 选题背景

Bernoulli 卷积简介

Bernoulli 卷积是一类简单而有趣的自相似测度。令 ν_{λ} 为随机级数 $\sum_{0}^{\infty}\pm 1\lambda^{n}$ 分 布,其中的符号以概率 $\frac{1}{2}$ 独立地取得。这正是测度 $\frac{1}{2}(\delta_{-\lambda^{n}}+\delta_{\lambda^{n}})$ 的无穷卷积,因此叫 "Bernoulli 卷积"。关于这类测度的研究可以追溯到 1930 年,Bernoulli 卷积与调和分析,代数数理论,动力系统,以及 Hausdorff 维数的估计等领域有紧密的联系。

根据不同的研究领域, Bernoulli 卷积有不同的表示形式。[SixtyYears]

姓名 (HUST) 开题答辩 2024 年 2 月 3 日

Bernoulli 卷积基本问题

根据 [DJFeng1],对 $\beta \in (1,2)$,Bernoulli 卷积 ν_{β} 可以定义为下面一族测度 ν_{β}^{n} 的 weak-star 极限

$$u_{\beta}^{n} := \frac{1}{2} \sum_{a_{1} \cdots a_{n} \in \{0,1\}} \delta_{\sum_{i=1}^{n} a_{i} \beta^{-i}} \quad .$$

关于 Bernoulli 卷积基本问题是:对于哪些 β ,这个测度是绝对连续的,哪些是奇异的 (singular)。如果密度 (关于 Lebesgue 测度的 Radon-Nikodym 导数) 存在,那么它的光滑性如何 (L^{p^2})? 然后就是 Bernoulli 卷积的 Hausdorff 维数如何,是否等于 1,怎样去估计 Hausdorff 维数。

其中有一个非常重要的结果就是, Erdös 证明如果 β 为 Pisot 数,那么相应的 Bernoulli 卷积的维数一定小于 1。

一个 open 的问题

如果 ν_{β} 奇异,那么是否一定有 β 为 Pisot 数?

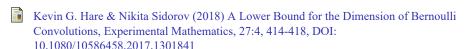
4□ > 4□ > 4 = > 4 = > 2□ = 9<

参考文献



- Shigeki Akiyama, De-Jun Feng, Tom Kempton, Tomas Persson; On the Hausdorff Dimension of Bernoulli Convolutions, International Mathematics Research Notices, , rny209, https://doi.org/10.1093/imrn/rny209
- FENG, DE-JUN. "SMOOTHNESS OF THE *L*^q-SPECTRUM OF SELF-SIMILAR MEASURES WITH OVERLAPS." Journal of the London Mathematical Society, vol. 68, no. 1, 2003, pp. 102–118., doi:10.1112/S002461070300437X.
- De-Jun Feng, Yang Wang, 2004, 'Bernoulli convolutions associated with certain non-Pisot numbers', Advances in Mathematics, vol. 187, no. 1, pp. 173-194

参考文献



- Falconer, K. J. Fractal Geometry. Wiley, 1990.
 - Mattila, Pertti. Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability. Cambridge University Press, 1995.

谢谢!