大作业 1

在一个矩形区域$0 \le x \le 1$**，**$0 \le y \le 1$**内，数值求解下面问题。**

已知，

控制方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) \text{（扩散方程），}$$

其解析解为$u(x, y, t) = 20 + 80\left[y - e^{-0.5\sigma\pi^2 t}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\right]$，

式中，$\sigma = \sigma_x = \sigma_y = 1$。

初始条件：$u(x, y)\big|_{t=0} = 0 \quad (0 < x < 1, 0 < y < 1)$

边界条件：$u(0, y, t) = 20 + 80y \quad (x = 0)$

$$u(1, y, t) = 20 + 80\left(y - e^{-0.5\sigma\pi^2 t}\sin\left(\frac{\pi}{2}y\right)\right) \quad (x = 1)$$

$$u(x, 0, t) = 20 \quad (y = 0)$$

$$u(x, 1, t) = 20 + 80\left(1 - e^{-0.5\sigma\pi^2 t}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) \quad (y = 1)$$

求解，

（1） 采用 ADI 或 AF 格式离散上述偏微分方程；

（2） 分别在：

①时间步长$\Delta t = 0.02$，网格间距为$\Delta x = 0.1$，0.05，0.025的均匀网格（即 $\Delta x = \Delta y$）；

②网格间距$\Delta x = \Delta y = 0.05$，时间步长$\Delta t =$ 0.005，0.01，0.02，0.04；

的情况下数值求解问题（1）中所得到的差分方程；

（3） 定义数值误差$\varepsilon(t) = \left\| u_{exact}(t) - u_{num}(t) \right\|$，分别给出$\varepsilon(1)$与时间步长、网格间距之间的关系（使用对数坐标系，即$\log\varepsilon \sim \log h$），观察是否为线性，斜率如何？并试解释其原因，分析收敛性；

（4） 定义计算误差$E_h = \left\| u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n} \right\|$(即$E_h = \max_{i,j\in\Omega}\left|u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n}\right|$)，作出$\log E_h$随时间变化曲线。