

Homework6

@rosefantasie

2022 年 11 月 24 日

1 作业要求

1. 求多项式方程的模最大根.

(1) 用 C++ 编制利用幂法求多项式方程 $f(x) = x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \alpha_1x + \alpha_0 = 0$ 的模最大根的通用子程序。

(2) 利用你所编制的子程序求下列各高次方程的模最大根。

(i) $x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$;

(ii) $x^3 - 3x - 1 = 0$;

(iii) $x^8 + 101x^7 + 208.01x^6 + 10891.01x^5 + 9802.08x^4 + 79108.9x^3 - 99902x^2 + 790x - 1000 = 0$.

要求输出迭代次数, 用时和最大根的值 (注意正负)。(由于我自己写的程序迭代次数和用时的统计都在通用函数里, 故截图中没有体现)

```
void Exercise_1_1()
{
    cout << "Exercise_1_1" << endl << endl;
    vector<double> a = { 3, -5, 1 };
    int times = 1000;
    double x = find_largest_root(a, times);
    cout << "The largest root is " << x << endl << endl;
}
```

图 1: 第一题建议代码格式, 输入系数向量 a 和最大迭代次数 $times$

2. 求实矩阵的全部特征值.

(1) 用 C++ 编制利用隐式 QR 算法 (课本算法 6.4.3) 求一个实矩阵的全部特征值的通用子程序。

(2) 利用你所编制的子程序计算方程 $x^4 + x^3 + 1 = 0$ 的全部根.

(3) 设

$$A = \begin{pmatrix} 9.1 & 3.0 & 2.6 & 4.0 \\ 4.2 & 5.3 & 4.7 & 1.6 \\ 3.2 & 1.7 & 9.4 & x \\ 6.1 & 4.9 & 3.5 & 6.2 \end{pmatrix}$$

求当 $x = 0.9, 1.0, 1.1$ 时 A 的全部特征值，并观察并在报告中叙述分析特征值实部、虚部和模长的变化情况。

要求输出迭代次数和所有特征值，特征值可以直接用 `complex` 类型输出成 (x,y) 的形式也可以改成 $x+iy$ （可能要手动写一个）的输出。

```
void Exercise_2_3()
{
    cout << "Exercise_2_3" << endl << endl;
    int n = 4;
    double x = 0.9;
    while (x <= 1.1) {
        cout << "x=" << x << "时" << endl;
        vector<vector<double>>> A = { {9.1,3.0,2.6,4.0},{4.2,5.3,4.7,1.6},{3.2,1.7,9.4,x},{6.1,4.9,3.5,6.2} };
        complex<double> c = {0,0};
        vector<complex<double>>> z(n, c);
        implicit_qr(A, z);
        cout << "The eigenvalues are: " << endl;
        for (int i = 0; i < n; i++) cout << z[i] << " ";
        cout << endl << endl;
        x += 0.1;
    }
}
```

图 2: 第二题建议代码格式

2 本次作业涉及到的算法

本次作业涉及到的算法较多，希望大家不要偷工减料。作业需要写的函数如下图（可以多不能少）。

```
//第六题
double find_largest_root(const vector<double>& a, int times); //用幂法求多项式最大根
void hessenberg_decomp(vector<vector<double>>& A, vector<vector<double>>& R, vector<double>& b); //上 Hessenberg 分解, Hessenberg 阵存在 A 中, Householder 变换的  $\alpha$  和  $\beta$  存在 R 中
void two_step_displacement_qr(vector<vector<double>>& R); //双重步位移的 QR 迭代, R 存在 R 中, 并直接对 H12 和 H23 作变换
void implicit_qr(vector<vector<double>>& A, vector<complex<double>>& z); //隐式 QR 算法
```

图 3: 推荐完成的函数

幂法求模最大根参考课本 P165-166 的描述。

上 Hessenberg 分解参考课本 P181 算法 6.4.1.

双重步位移的 QR 迭代参考课本 P193 算法 6.4.2.

隐式 QR 算法参考课本 P194 算法 6.4.3.

特别提醒：请看懂文字描述再根据算法写代码!!!!!!!!!!

3 附加说明

1. 尽量使用 `c++` 和 `visual studio`.
2. 提交内容和说明见群文件。
3. 本次作业ddl 为 **2022.12.11(周日)23:59**，请大家尽早提交，不要卡点。超时作业没有特殊情况者拒收。若有特殊情况请提前私聊助教沟通。
4. 请确保你的程序能顺利跑出正确的结果再上交!!!
5. 没有报告的程序作业不予批改。