

ACM板子合集

字符串

hash(字符串前缀哈希)

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0' && ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch-'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

struct hash_t{
    typedef long long LL;
    int nn=0;
    const LL base1=29,mod1=1e9+7;
    const LL base2=131,mod2=1e9+9;

    // 字符串前缀哈希值与后缀逆哈希值
    vector<LL> p1,p2,h1,h2,rh1,rh2;

    hash_t(){}

    hash_t(char* s,int len):nn(len),p1(len+1),p2(len+1),
        h1(len+1),h2(len+1),rh1(len+1),rh2(len+1){
        p1[0]=p2[0]=1;
        for(int i=1;i<=nn;++i){
            p1[i]=p1[i-1]*base1%mod1;
            p2[i]=p2[i-1]*base2%mod2;
        }
        for(int i=1;i<=nn;++i){
            h1[i]=(h1[i-1]*base1+s[i])%mod1;
            h2[i]=(h2[i-1]*base2+s[i])%mod2;
            rh1[i]=(rh1[i-1]*base1+s[nn-i+1])%mod1;
            rh2[i]=(rh2[i-1]*base2+s[nn-i+1])%mod2;
        }
    }

    // 全局变量的构造
    void init(char* s,int len){
        nn=len;
        p1.resize(len+1),p2.resize(len+1);
        h1.resize(len+1),h2.resize(len+1);
        rh1.resize(len+1),rh2.resize(len+1);
    }
};
```

```

    p1[0]=p2[0]=1;
    for(int i=1;i<=nn;++i){
        p1[i]=p1[i-1]*base1%mod1;
        p2[i]=p2[i-1]*base2%mod2;
    }
    for(int i=1;i<=nn;++i){
        h1[i]=(h1[i-1]*base1+s[i])%mod1;
        h2[i]=(h2[i-1]*base2+s[i])%mod2;
        rh1[i]=(rh1[i-1]*base1+s[nn-i+1])%mod1;
        rh2[i]=(rh2[i-1]*base2+s[nn-i+1])%mod2;
    }
}

// 不用后缀逆哈希值的构造
void init_simple(char* s,int len){
    nn=len;
    p1.resize(len+1),p2.resize(len+1);
    h1.resize(len+1),h2.resize(len+1);
    p1[0]=p2[0]=1;
    for(int i=1;i<=nn;++i){
        p1[i]=p1[i-1]*base1%mod1;
        p2[i]=p2[i-1]*base2%mod2;
    }
    for(int i=1;i<=nn;++i){
        h1[i]=(h1[i-1]*base1+s[i])%mod1;
        h2[i]=(h2[i-1]*base2+s[i])%mod2;
    }
}

// 哈希值
pair<LL,LL> get_hash(int l,int r)const{
    LL res1=((h1[r]-h1[l-1]*p1[r-l+1])%mod1+mod1)%mod1;
    LL res2=((h2[r]-h2[l-1]*p2[r-l+1])%mod2+mod2)%mod2;
    return {res1,res2};
}

// 逆哈希值
pair<LL,LL> get_rhash(int l,int r)const{
    LL res1=((rh1[nn-l+1]-rh1[nn-r]*p1[r-l+1])%mod1+mod1)%mod1;
    LL res2=((rh2[nn-l+1]-rh2[nn-r]*p2[r-l+1])%mod2+mod2)%mod2;
    return {res1,res2};
}

bool is_palindrome(int l,int r)const{
    return get_hash(l,r)==get_rhash(l,r);
}

// hash +
pair<LL,LL> add(const pair<LL,LL>& a,const pair<LL,LL>& b)const{
    LL res1=(a.first+b.first)%mod1;
    LL res2=(a.second+b.second)%mod2;
    return {res1,res2};
}

// *= base ^ k
pair<LL,LL> mul(const pair<LL,LL>& a,LL k)const{
    LL res1=a.first*p1[k]%mod1;
    LL res2=a.second*p2[k]%mod2;
}

```

```

        return {res1,res2};
    }

    // concat
    pair<LL,LL> cat(int l1,int r1,int l2,int r2) const{
        return add(mul(get_hash(l1,r1),r2-l2+1),get_hash(l2,r2));
    }
};

const int N=2e6+10;

int n;

char s[N];

hash_t H;

vector<pair<long long,pair<long long,long long>>> ans;

int main(){
    // https://loj.ac/p/2823
    n=read();
    scanf("%s",s+1);

    if(n%2==0){
        puts("NOT POSSIBLE");
        return 0;
    }

    H.init_simple(s,n);
    rep(i,1,n/2){
        auto hs1=H.cat(1,i-1,i+1,n/2+1);
        auto hs2=H.get_hash(n/2+2,n);
        if(hs1==hs2){
            ans.push_back({i,hs1});
        }
    }
    if(H.get_hash(1,n/2)==H.get_hash(n/2+2,n)){
        ans.push_back({n/2+1,H.get_hash(1,n/2)});
    }
    rep(i,n/2+2,n){
        auto hs1=H.get_hash(1,n/2);
        auto hs2=H.cat(n/2+1,i-1,i+1,n);
        if(hs1==hs2){
            ans.push_back({i,hs1});
        }
    }

    int isok=1;
    pair<long long,long long> lst;
    for(auto&& [id,hs]:ans){
        // cout<<id<<' '<<hs.first<<' '<<hs.second<<'\n';
        if(!(lst==make_pair(0ll,0ll))&&!(hs==lst)){
            isok=0;
            break;
        }
    }
}

```

```

        lst=hs;
    }

    if(ans.size()==0)puts("NOT POSSIBLE");
    else if(isok){
        string res;
        rep(i,1,n)if(i!=ans[0].first){
            res+=s[i];
            if(res.size()==n/2)break;
        }
        cout<<res<<'\n';
    }else puts("NOT UNIQUE");
    return 0;
}

```

KMP

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int N=1e6+10;
const int INF=0x3f3f3f3f;

int a[N],b[N];
int n,m;

inline int read(){
    int res=0,sign=1;char ch=getchar();
    for(;ch>'9' || ch<'0';ch=getchar()){
        if(ch=='-')sign=-sign;
    }
    for('0'<=ch&&ch<='9';ch=getchar()){
        res=(res<<1)+(res<<3)+(ch^'0');
    }
    return res*sign;
}

int nxt[N];

void getnxt(){
    for(int i=2,j;i<=m;++i){
        for(j=nxt[i-1];j&&b[i]!=b[j+1];)j=nxt[j];
        if(b[i]==b[j+1])++j;
        nxt[i]=j;
    }
}

void kmp(){
    int flag=0;
    for(int i=1,j=0;i<=n;++i){
        while(j&&a[i]!=b[j+1])j=nxt[j];
        if(a[i]==b[j+1])++j;
        if(j==m){
            cout<<i-m+1<<'\n';

```

```

        flag=1;
        break;
    }
}
if(!flag)cout<<-1<<'\n';
}

void solve(){
    n=read(),m=read();
    for(int i=1;i<=n;++i)a[i]=read();
    for(int i=1;i<=m;++i)b[i]=read();
    getnxt();
    kmp();
}

int main(){
    int t;cin>>t;
    while(t-->0)solve();
    return 0;
}

```

Manacher

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int N=1.1e7+10;

char s[N<<1],dat[N<<1];

int len,cnt;

int p[N<<1],ans;

int main(){
    scanf("%s",s+1);len=strlen(s+1);
    dat[0]='~',dat[cnt=1]='#';
    for(int i=1;i<=len;++i){
        dat[++cnt]=s[i],dat[++cnt]='#';
    }
    for(int i=1,mid=0,r=0;i<=cnt;++i){
        if(i<=r)p[i]=min(p[(mid<<1)-i],r-i+1);
        else p[i]=1;
        while(dat[i-p[i]]==dat[i+p[i]])++p[i];
        if(i+p[i]>r)r=i+p[i]-1,mid=i;
        ans=max(ans,p[i]);
    }
    printf("%d\n",ans-1);
    return 0;
}

```

Trie

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int MAXN=1e4+2;

struct trie{
    int nxt[MAXN<<5][30],cnt;
    bool exist[MAXN<<5],vis[MAXN<<5];
    void insert(char s[],int len){
        int p=0;
        for(int i=0;i<len;++i){
            int c=s[i]-'a';
            if(!nxt[p][c])nxt[p][c]=++cnt;
            p=nxt[p][c];
        }
        exist[p]=1;
    }

    int find(char s[],int len){
        int p=0;
        for(int i=0;i<len;++i){
            int c=s[i]-'a';
            if(!nxt[p][c])return 0;
            p=nxt[p][c];
        }
        if(exist[p]){
            if(!vis[p])return vis[p]=true,1;
            else return 2;
        }else return 0;
    }
};

int n,m;
trie t;
string tmp;
char _tmp[60];

int main(){
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        cin>>tmp;
        for(int i=0;i<tmp.size();++i)_tmp[i]=tmp[i];
        t.insert(_tmp,tmp.size());
    }
    cin>>m;
    for(int i=1;i<=m;++i){
        cin>>tmp;
        for(int i=0;i<tmp.size();++i)_tmp[i]=tmp[i];
        int op=t.find(_tmp,tmp.size());
        if(op==0)cout<<"WRONG"<<'\\n';
        else if(op==1)cout<<"OK"<<'\\n';
        else if(op==2)cout<<"REPEAT"<<'\\n';
    }
}
```

```

    }
    return 0;
}

```

ACAM

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int MAXN=1e6+2;

struct trie{
    int nxt[MAXN][30],cnt,end[MAXN],fail[MAXN];
    void insert(string s){
        int len=s.size();
        int p=0;
        for(int i=0;i<len;++i){
            int c=s[i]-'a';
            if(!nxt[p][c])nxt[p][c]=++cnt;
            p=nxt[p][c];
        }
        end[p]+=1;
    }

    void build(){
        queue<int> q;
        for(int i=0;i<26;++i){
            if(nxt[0][i])q.push(nxt[0][i]);
        }
        while(!q.empty()){
            int x=q.front();
            q.pop();
            for(int i=0;i<26;++i)if(nxt[x][i]){
                fail[nxt[x][i]]=nxt[fail[x]][i];
                q.push(nxt[x][i]);
            }else nxt[x][i]=nxt[fail[x]][i];
        }
    }

    int query(string s){
        int p=0,ret=0,len=s.size();
        for(int i=0,c;i<len;++i){
            c=s[i]-'a';
            p=nxt[p][c];
            for(int j=p;j&&end[j]!=-1;j=fail[j]){
                ret+=end[j],end[j]=-1;
            }
        }
        return ret;
    }
};

trie t;
int n;

```

```

string tmp;

int main(){
    cin>>n;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        cin>>tmp;
        t.insert(tmp);
    }
    t.build();
    cin>>tmp;
    cout<<t.query(tmp)<<'\\n';
    return 0;
}

```

ACAM + TOPO

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int N=2e5+10;
const int PN=2e5+10;
const int TN=2e6+10;

struct aca_t{
    int n;
    char mods[N],txt[TN];
    int tot,vis[N],rev[N],deg[PN],ans;

    struct node_t{
        int son[27],fail,flag,ans;

        void init(){
            memset(son,0,sizeof son);
            fail=flag=0;
        }
    }trie[PN];

    void init(){
        for(int i=0;i<=tot;++i)trie[i].init();
        for(int i=1;i<=n;++i)vis[i]=0;
        tot=1;
        ans=0;
    }

    void insert(char* s,int len,int idx){
        int p=1;
        for(int i=1;i<=len;++i){
            int c=s[i]-'a';
            if(!trie[p].son[c])trie[p].son[c]=++tot;
            p=trie[p].son[c];
        }
        if(!trie[p].flag)trie[p].flag=idx;
        rev[idx]=trie[p].flag;
    }
}

```



```

void getfail(){
    queue<int> q;
    for(int i=0;i<26;++i)trie[0].son[i]=1;
    q.push(1);
    trie[1].fail=0;
    while(!q.empty()){
        int u=q.front();q.pop();
        int Fail=trie[u].fail;
        for(int i=0;i<26;++i){
            int v=trie[u].son[i];
            if(v){
                trie[v].fail=trie[Fail].son[i];
                ++deg[trie[Fail].son[i]];
                q.push(v);
            }else trie[u].son[i]=trie[Fail].son[i];
        }
    }
}

void query(char* s,int len){
    int p=1;
    for(int i=1;i<=len;++i){
        int c=s[i]-'a';
        p=trie[p].son[c];
        ++trie[p].ans;
    }
}

void topo(){
    queue<int> q;
    for(int i=1;i<=tot;++i){
        if(!deg[i])q.push(i);
    }
    while(!q.empty()){
        int u=q.front();q.pop();
        vis[trie[u].flag]=trie[u].ans;
        int v=trie[u].fail;
        trie[v].ans+=trie[u].ans;
        if(--deg[v])q.push(v);
    }
}

void solve(){
    scanf("%d",&n);
    init();
    for(int i=1;i<=n;++i){
        scanf("%s",mods+1);
        int len=strlen(mods+1);
        insert(mods,len,i);
    }
    getfail();
    scanf("%s",txt+1);
    int len=strlen(txt+1);
    query(txt,len);
    topo();
}

```

```

        for(int i=1;i<=n;++i)printf("%d\n",vis[rev[i]]);
    }
}aca;

int main(){
    aca.solve();
    return 0;
}

```

本质不同子序列个数

通过 dp 可以求到，转移方程很好想，下面代码给出子串 $[l, r]$ 之间的本质不同子序列个数计算

```

int _dp(int l,int r){
    int len=r-l+1;
    vector<int> dp(N),lst(30);
    rep(i,1,len){
        int c=s[i+l-1]-'a';
        if(!lst[c]){
            dp[i]=(1ll*dp[i-1]*2%mod+1)%mod;
        }else{
            dp[i]=((1ll*dp[i-1]*2%mod-dp[lst[c]-1])%mod+mod)%mod;
        }
        lst[c]=i;
    }
    return dp[len];
}

```

两字符串的 lcp

可以通过 hash + 二分求，下面给出 A 的每一个后缀和 B 的 lcp 的代码（询问满足 $\text{lcp} = x$ 的有多少）

```

const int N=2e6+10;

int n,m,q;

char s1[N];
char s2[N];

hash_t H1,H2;

int cnt[N];

int main(){
    n=read(),m=read(),q=read();
    scanf("%s",s1+1);
    scanf("%s",s2+1);
    H1.init_simple(s1,n);
    H2.init_simple(s2,m);
    rep(i,1,n){
        int l=0,r=min(n-i+1,m);
        while(l<=r){
            int mid=l+r>>1;
            if(H1.get_hash(i,i+mid-1)==H2.get_hash(1,mid))l=mid+1;
        }
        cnt[l]++;
    }
}

```

```

        else r=mid-1;
    }
    ++cnt[r];
}
rep(_,1,q){
    int x=read();
    printf("%d\n",cnt[x]);
}
return 0;
}

```

两字符串的大小

先求 lcp

如果 $\text{lcp}(A, B) \geq \min(\text{len}A, \text{len}B)$, 则 $\text{len}A < \text{len}B$ 等价于 $A < B$, 否则 $A[\text{lcp}(A, B) + 1] < B[\text{lcp}(A, B) + 1]$ 等价于 $A < B$

所以 sa 数组通过该方式来比较字符串来得到的时间复杂度是 $O(n \log n \log n)$, 不过被 $O(n)$ 的方法薄纱

```

const int N=1e6+10;

char s[N];

int n;
hash_t H;
int sa[N],rk[N];

bool cmp(int i,int j){
    int l=1,r=min(n-i+1,n-j+1)+1;
    while(l<=r){
        int mid=l+r>>1;
        if(H.get_hash(i,i+mid-1)!=H.get_hash(j,j+mid-1))r=mid-1;
        else l=mid+1;
    }
    if(l>min(n-i+1,n-j+1))return i>j;
    else return s[i+l-1]<s[j+l-1];
}

int main(){
    scanf("%s",s+1);
    n=strlen(s+1);
    H.init_simple(s,n);
    for(int i=1;i<=n;++i)sa[i]=i;
    stable_sort(sa+1,sa+n+1,cmp);
    for(int i=1;i<=n;++i)printf("%d ",sa[i]);puts("");
    // for(int i=1;i<=n;++i)rk[sa[i]]=i;
    // for(int i=1;i<=n;++i)printf("%d ",rk[i]);puts("");
    return 0;
}

```

SA

记后缀位置 i 代表的是后缀串 $s[i \sim n]$ ，用后缀 i 简记该串

后缀数组 $sa[i]$ 代表第 i 名次的后缀位置

$rk[i]$ 即后缀串 $s[i \sim n]$ 在所有后缀中的排名

记 $lcp(i, j)$ 为后缀 i 和后缀 j 的最长公共前缀的长度

height 数组代表 $height[i] = lcp(sa[i], sa[i - 1])$

有引理 $height[rk[i]] \geq height[rk[i - 1]] - 1$ ，用该引理可以在已知 sa 和 rk 的情况下 $O(n)$ 计算 height

height 数组的运用：

1. 两子串的 lcp：可以转化成后缀串的 lcp 和俩子串长度求 min，而后缀串的 lcp 满足公式：

$$lcp(sa[i], sa[j]) = \min_{k=i+1}^j height[k]$$

2. 比较两子串大小： $A=s[a \sim b]$ ， $B=s[c \sim d]$ ，如果 $lcp(a, c) \geq \min(lenA, lenB)$ ，则 $lenA < lenB$ 等价于 $A < B$ ，否则 $rk[a] < rk[c]$ 等价于 $A < B$

3. 不同子串的数量： $n(n + 1)/2 - \sum_{i=2}^n height[i]$

sa 的求法有 $O(n \cdot \log n)$ 的倍增+基数排序的求法，或者 $O(n \cdot \log n \cdot \log n)$ 的 hash 法，下面给一个最快的 sais 方法，优点是常数小且时间复杂度 $O(n)$ 线性

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch-'0');}
    return res*sign;
}

const int N=1e6+10;

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

#define pus(x) (sa[cur[a[x]]--]=x)
#define pul(x) (sa[cur[a[x]]++]=x)
#define inds(lms) \
    for(int i=1;i<=n;++i)sa[i]=-1; \
    for(int i=1;i<=n;++i)sum[i]=0; \
    for(int i=1;i<=n;++i)++sum[a[i]]; \
    for(int i=1;i<=n;++i)sum[i]+=sum[i-1]; \
    for(int i=1;i<=n;++i)cur[i]=sum[i]; \
    for(int i=m;i>=1;--i)pul(lms[i]); \
    for(int i=1;i<=n;++i)cur[i]=sum[i-1]+1; \
    for(int i=1;i<=n;++i) \
        if(sa[i]>1&&!tp[sa[i]-1]) \
            pul(sa[i]-1); \
```

```

        for(int i=1;i<=n;++i)cur[i]=sum[i];
        for(int i=n;i>=1;--i)
            if(sa[i]>1&&tp[sa[i]-1])
                pus(sa[i]-1);

int sa[N],sum[N],cur[N],rak[N];

void sais(int* a,int n){
    vector<int> tp(n+5),p(n+5);
    tp[n]=1;
    for(int i=n-1;i>=1;--i)tp[i]=(a[i]==a[i+1])?tp[i+1):(a[i]<a[i+1]);
    int m=0;
    for(int i=1;i<=n;++i)rak[i]=(tp[i]&&!tp[i-1])?(p[++m]=i,m):-1;
    inds(p);
    int tot=0;
    int *a1=new int[m+5];
    p[m+1]=n;
    for(int i=1,x,y;i<=n;++i)if((x=rak[sa[i]])!=-1){
        if(tot==0||p[x+1]-p[x]!=p[y+1]-p[y])
            ++tot;
        else for(int p1=p[x],p2=p[y];p2<=p[y+1];++p1,++p2)
            if((a[p1]<<1|tp[p1])!=(a[p2]<<1|tp[p2])){++tot;break;}
        a1[y=x]=tot;
    }
    if(tot==m)
        for(int i=1;i<=m;++i)sa[a1[i]]=i;
    else
        sais(a1,m);
    for (int i=1;i<=m;++i)a1[i]=p[sa[i]];
    inds(a1);
    delete a1;
}

char str[N];

int n;

int a[N],cnt[300];

void get_sa(char* str,int len){
    // 用桶离散化字符串，字符串最后一位拼接一个绝对最小字符
    for(int i=1;i<300;++i)cnt[i]=0;
    for(int i=1;i<=len;++i)cnt[str[i]]=1;
    for(int i=1;i<300;++i)cnt[i]+=cnt[i-1];
    for(int i=1;i<=len;++i)a[i]=cnt[str[i]]+1;
    a[++len]=1;
    sais(a,len);
    for(int i=1;i<=len-1;++i)sa[i]=sa[i+1];
}

int rk[N],height[N];

void get_rk(){
    for(int i=1;i<=n;++i)rk[sa[i]]=i;
}

```

```

void get_height(){
    for(int i=1,k=0;i<=n;++i){
        if(rk[i]==0)continue;
        if(k)--k;
        while(str[i+k]==str[sa[rk[i]-1]+k])++k;
        height[rk[i]]=k;
    }
}

int main(){
    scanf("%s",str+1);
    n=strlen(str+1);
    get_sa(str,n);
    for(int i=1;i<=n;++i)printf("%d ",sa[i]);puts("");
    get_rk();
    get_height();
    for(int i=1;i<=n;++i)printf("%d ",rk[i]);puts("");
    for(int i=1;i<=n;++i)printf("%d ",height[i]);puts("");
    return 0;
}

```

数学

预处理 1~n 的因子 + 欧拉函数 ($O(n \log n)$)

```

int phi[N];
vector<int> dv[N];

void init(){
    for(int i=1;i<N;++i)phi[i]=i;
    for(int i=1;i<N;++i){
        for(int j=i;j<N;j+=i){
            dv[j].push_back(i);
            if(j>i)phi[j]-=phi[i];
        }
    }
}

```

EXGCD

```

LL __exgcd(LL a,LL b,LL& x,LL& y){
    //矩阵法
    int x1=1,x2=0,x3=0,x4=1;
    while(b){
        LL c=a/b;
        tie(x1,x2,x3,x4,a,b)=make_tuple(x3,x4,x1-c*x3,x2-c*x4,b,a-c*b);
    }
    x=x1,y=x2;
    return a;
}

```

线性同余方程

$$ax \equiv b \pmod{m}$$

x 的解分为无解，有有限个解的情况

$$\text{记 } \gcd(a, m) = d$$

当 $d \nmid b$ 时，无解（因为 d 整除左边而不整除右边）

当 $d \mid b$ 时，有解。此时考虑 $ax_0 + mk_0 = \gcd(a, m)$ 的解，左右同除以 d 乘以 b ，得

$$\frac{abx_0}{d} + \frac{mbk_0}{d} = b$$

$$\text{故最后 } x = \frac{bx_0}{d}$$

我们要得到所有满足的 x ，可以考虑先找到最小的，然后算出所有的。

$$x_i = x_{\min} + i * \frac{m}{d}$$

$$\text{故 } x_{\min} = (x \bmod \frac{m}{d} + \frac{m}{d}) \bmod \frac{m}{d}$$

代码如下

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

#define int long long

int exgcd(int a, int b, int& x, int& y) {
    int x1=1, x2=0, x3=0, x4=1;
    while(b) {
        int c=a/b;
        tie(a, b, x1, x2, x3, x4) = make_tuple(b, a-c*b, x3, x4, x1-c*x3, x2-c*x4);
    }
    x=x1, y=x2;
    return a;
}

bool liEu(int a, int b, int c, int& x, int& y) {
    int d=exgcd(a, b, x, y);
    if(c%d!=0) return 0;
    int k=c/d;
    x*=k;
    y*=k;
    return 1;
}

signed main() {
    int a, b, x, y, c;
    int _x[100];
    // cin>>a>>b>>c;
    cin>>a>>b; c=1; //c=1等价求逆元
    int d=exgcd(a, b, x, y);
    if(liEu(a, b, c, x, y)) {
        _x[0]=(x%(b/d)+b/d)%(b/d);
        // for(int i=1; i<d; ++i) {
```

```

        //      _x[i]=_x[i-1]+b/d;
        // }
    }
    // for(int i=0;i<d;++i){
    //      cout<<_x[i]<<endl;
    // }
    cout<<_x[0]<<endl;
}

```

CRT

CRT可描述如下, 其中模数 $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ 互质

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \pmod{n_1} \\ x \equiv a_2 \pmod{n_2} \\ \vdots \\ x \equiv a_k \pmod{n_k} \end{cases}$$

定义 $n = \prod_{i=1}^k n_i$, 则在模 n 意义下 x 有唯一解

记 $m_i = \frac{n}{n_i}, m_i^{-1}$ 为 m_i 在模 n_i 意义下的逆元

$$x = \sum_{i=1}^k a_i \times m_i \times m_i^{-1} \pmod{n}$$

证明:

把解带回去易得到是正确的

代码:

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

vector<int> a,n;

int exgcd(int a,int b,int& x,int& y){
    int x1=1,x2=0,x3=0,x4=1;
    while(b){
        int q=a/b;
        tie(a,b,x1,x2,x3,x4)=make_tuple(b,a-q*b,x3,x4,x1-x3*q,x2-x4*q);
    }
    x=x1,y=x2;
    return a;
}

int CRT(vector<int> a,vector<int> n){
    int n_pro=1,ret=0;
    for(int i=0;i<a.size();++i){n_pro*=n[i];}
    for(int i=0;i<a.size();++i){
        int m=n_pro/n[i];
        int m_inv,y;
        exgcd(m,n[i],m_inv,y);
        ret=(ret+a[i]*m*m_inv%n_pro)%n_pro;
    }
    return (ret%n_pro+n_pro)%n_pro;
}

```



```

int main(){
    a={2,3,2};
    n={3,5,7};
    cout<<CRT(a,n)<<endl;
    return 0;
}

```

拓展：Garner算法，模数不互质（考虑两个方程的时候，写出显式，求exgcd，多个方程就是两两合并）

线性筛 + 求积性函数（例子为 μ ，约数个数，约数和）

```

int prime[N],idx;
int vis[N];
int mu[N],smu[N];

void init(){
    mu[1]=1;
    for(int i=2;i<N;++i){
        if(!vis[i])prime[++idx]=i,mu[i]=-1;
        for(int j=1;j<=idx;++j){
            int p=prime[j];
            if(1ll*i*p>=N)break;
            vis[i*p]=1;
            if(i%p==0){
                // p一定为i的最小质因子
                mu[i*p]=0;
                break;
            }
            mu[i*p]=-mu[i];
        }
    }
    for(int i=1;i<N;++i){
        smu[i]=smu[i-1]+mu[i];
    }
}

```

```

int prime[N],idx,vis[N],g[N],f[N];
// g约数个数，f约数和

void init(){
    g[1]=1,f[1]=1;
    for(int i=2;i<N;++i){
        if(!vis[i])prime[++idx]=i,g[i]=2,f[i]=i+1;
        for(int j=1;j<=idx;++j){
            int p=prime[j];
            if(1ll*i*p>=N)break;
            vis[i*p]=1;
            if(i%p==0){
                g[i*p]=2*g[i]-g[i/p];
                f[i*p]=(p+1)*f[i]-p*f[i/p];
                break;
            }
        }
    }
}

```

```

        g[i*p]=g[i]*g[p];
        f[i*p]=f[i]*f[p];
    }
}
}

```

推导(对于约数个数的部分):

当 $i \bmod p = 0, i = a * p^c$, 其中 $\gcd(a, p) = 1$ (互质), $g(i * p) = g(a) * g(p^{c+1})$,
 $g(i) = g(a) * g(p^c), g(i/p) = g(a) * g(p^{c-1})$, 解得 $g(i * p) = 2 * g(i) - g(i/p)$

当 $i \bmod p \neq 0, g(i * p) = g(i) * g(p)$

总体思路就是按照积性函数的性质去求解递推式

值域内预处理后的快速gcd

如果在值域内频繁使用 gcd 可以先预处理一下, 预处理时间复杂度 $O(\text{值域})$, 最后查询 $O(1)$

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0' && ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch-'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

const int N=5e3+10;
const int M=1e6+10;
const int SM=1e3+10;
const int dom=1e6;
const int len=1e3;
const int mod=998244353;

int fac[M][3],pre[SM][SM];
int prime[M],tot,vis[M];

// inline int swap(int& a,int& b){
//     return a^=b^=a^=b;
// }

#define swp(a,b) (a)^=(b)^=(a)^=(b)

void init(){
    fac[1][0]=fac[1][1]=fac[1][2]=1;
    for(int i=2;i<=dom;++i){
        if(!vis[i])prime[++tot]=i,fac[i][0]=fac[i][1]=1,fac[i][2]=i;
        for(int j=1;j<=tot;++j){
            int p=prime[j];

```

```

        if(1ll*i*p>dom)break;
        vis[i*p]=1;
        fac[i*p][0]=fac[i][0]*p;
        fac[i*p][1]=fac[i][1];
        fac[i*p][2]=fac[i][2];
        if(fac[i*p][0]>fac[i*p][1])swp(fac[i*p][0],fac[i*p][1]);
        if(fac[i*p][1]>fac[i*p][2])swp(fac[i*p][1],fac[i*p][2]);
        if(i%p==0)break;
    }
}
rep(i,0,len)pre[i][0]=pre[0][i]=i;
rep(i,1,len){
    rep(j,1,i){
        pre[i][j]=pre[j][i]=pre[j][i%j];
    }
}
}

int gcd(int a,int b){
    int res=1;
    rep(i,0,2){
        int _gcd=1;
        if(fac[a][i]>len){
            if(b%fac[a][i]==0){
                _gcd=fac[a][i];
            }
        }else{
            _gcd=pre[fac[a][i]][b%fac[a][i]];
        }
        b/=_gcd;
        res*=_gcd;
    }
    return res;
}

int a[N],b[N],n;

int main(){
    init();
    n=read();
    rep(i,1,n)a[i]=read();
    rep(i,1,n)b[i]=read();
    rep(i,1,n){
        int tmp=0;
        for(int j=1,base=i;j<=n;++j,base=1ll*base*i%mod){
            tmp=(1ll*tmp+1ll*base*gcd(a[i],b[j])%mod)%mod;
        }
        printf("%d\n",tmp);
    }
    return 0;
}

```

数论分块

举个例子

$$ans = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a[i] \times \lfloor n/i \rfloor \times \lfloor m/i \rfloor$$

sum 数组是 a 的前缀和

j 代表的是 n/i 和 m/i 的值不发生改变区间右界, i 则是左界

```
long long getans(int n,int m){
    long long res=0;
    for(int i=1,j;i<=min(n,m);i=j+1){
        j=min((n/(n/i)),(m/(m/i)));
        res+=1ll*(smu[j]-smu[i-1])*(n/i)*(m/i);
    }
    return res;
}
```

莫比乌斯

积性函数之积是积性函数, 卷积也是积性函数

常见积性函数 $1, \varphi, \mu, id$

$$\epsilon = \mu * 1$$

$$id = \varphi * 1$$

$$\varphi = \mu * id$$

$$if f = g * 1, then g = f * \mu$$

gcd为k的数对个数

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [gcd(i, j) = k]$$

i, j 同时除以 k 化简后为

$$\sum_{d=1}^{\min(\lfloor n/k \rfloor, \lfloor m/k \rfloor)} \mu(d) \lfloor n/kd \rfloor \lfloor m/kd \rfloor$$

然后可以数论分块算

```
long long getans(int n,int m){
    n/=k,m/=k;
    long long res=0;
    for(int i=1,j;i<=min(n,m);i=j+1){
        j=min((n/(n/i)),(m/(m/i)));
        res+=1ll*(smu[j]-smu[i-1])*(n/i)*(m/i);
    }
    return res;
}
```

sum of lcm

$$\sum_{j=1}^n lcm(j, n) = \sum_{j=1}^n \frac{j \cdot n}{gcd(j, n)} = \sum_{d|n \& d|j \& (n/d, j/d)=1 \& j \leq n} \frac{n \cdot j}{d}$$

$$= \sum_{d|n} \sum_{k \in Z_{n/d}^*} n \cdot k$$

而模 m 缩系中的数之和由于缩系中任意一个数 x 有 $m - x$ 也在缩系中，所以有数论函数 f 表示缩系和如下

$$f(m) = \sum_{k \in Z_m^*} k = \frac{\varphi(m) \cdot m + [m=1]}{2}$$

故有原式子

$$= n \cdot \sum_{d|n} f(n/d) = n \cdot \sum_{d|n} f(d) = n \cdot \frac{\sum_{d|n} d \cdot \varphi(d) + 1}{2} = n \cdot (id \cdot \varphi \circ 1(n) + 1)/2$$

$id \cdot \varphi \circ 1$ 这个数论函数是积性函数，所以可以直接筛出来

类似地，sum of gcd $\sum_{j=1}^n gcd(j, n) = \sum_{d|n} d \cdot \varphi(n/d) = id \circ \varphi(n)$

```
int n;
int prime[N], idx, vis[N];
long long g[N];

void init(){
    g[1]=1;
    for(int i=2; i<N; ++i){
        if(!vis[i]) prime[++idx]=i, g[i]=1ll*i*(i-1)+1;
        for(int j=1; j<=idx; ++j){
            int p=prime[j];
            if(1ll*i*p>=N) break;
            vis[i*p]=1;
            if(i%p==0){
                g[i*p]=g[i]+(g[i]-g[i/p])*p*p;
                break;
            }
            g[i*p]=g[i]*g[p];
        }
    }
}
```

sum of lcm 两层循环

内外循环次数不等

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m lcm(i, j) \quad (n, m \leq 10^7)$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{i \cdot j}{gcd(i, j)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{d|i, d|j, \\ gcd(\frac{i}{d}, \frac{j}{d})=1}} \frac{i \cdot j}{d}$$

$$= \sum_{d=1}^n d \cdot \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} [gcd(i, j) = 1] \cdot i \cdot j$$

$$\text{记sum}(n, m) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m [gcd(i, j) = 1] \cdot i \cdot j = \sum_{d=1}^n \mu(d) \cdot d^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{d} \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{m}{d} \rfloor} i \cdot j \right)$$

$$\text{原式} = \sum_{d=1}^n d \cdot \text{sum}(\lfloor \frac{n}{d} \rfloor, \lfloor \frac{m}{d} \rfloor)$$

```
int prime[N], vis[N], idx, mu[N], g[N];
```

```

int n,m;

void init(){
    mu[1]=1;
    for(int i=2;i<N;++i){
        if(!vis[i])prime[++idx]=i,mu[i]=-1;
        for(int j=1;j<=idx;++j){
            int p=prime[j];
            if(1ll*i*p>=N)break;
            vis[i*p]=1;
            if(i%p==0){
                mu[i*p]=0;
                break;
            }
            mu[i*p]=-mu[i];
        }
    }
    for(int i=1;i<N;++i){
        int x=1ll*(mu[i]+MOD)*i%MOD*i%MOD;
        g[i]=((1ll*g[i-1]+x)%MOD+MOD)%MOD;
    }
}

int sum(int a,int b){
    int res=0;
    for(int i=1,j;i<=min(a,b);i=j+1){
        j=min(a/(a/i),b/(b/i));
        int tmp1=1ll*(1+a/i)*(a/i)/2%MOD;
        int tmp2=1ll*(1+b/i)*(b/i)/2%MOD;
        res=(1ll*res+1ll*((g[j]-g[i-1])%MOD+MOD)%MOD*tmp1%MOD*tmp2%MOD)%MOD;
    }
    return res;
}

int getans(){
    int res=0;
    for(int i=1,j;i<=min(n,m);i=j+1){
        j=min(n/(n/i),m/(m/i));
        res=(1ll*res+1ll*(j-i+1)*(i+j)/2%MOD*sum(n/i,m/i)%MOD)%MOD;
    }
    return res;
}

```

内外循环次数相等

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \text{lcm}(i, j) \quad (N \leq 10^{10})$$

(两层循环 gcd 之和类似化简，也是筛积性函数前缀和)

相似化简得到 $\sum_{i=1}^N i \cdot \sum_{d|i} d \cdot \varphi(d)$

也就是求积性函数 $id \cdot ((id \cdot \varphi) \circ 1)$ 的前缀和，记录这个积性函数为 f

有：

$$f(p) = p^3 - p^2 + p$$

$$f(p^k) = \frac{p^{(3k+1)} + p^k}{p+1}$$

那么直接 min_25 筛出 f 的前缀和即可 (min_25 板子具体见对应部分)

```
// https://www.51nod.com/Html/Challenge/Problem.html#problemId=1238
int f_p(int _p, int p_k){
    // f(p^k)=(p^(3k+1)+p^k)/(p+1)
    int a=111*qpow(p_k,3,mod)*_p%mod;
    int b=111*p_k%mod;
    int c=qpow(_p+1,mod-2,mod);
    return ((111*a+b)%mod+mod)%mod*c%mod;
}

void init(){
    prime[0]=1; // 特殊处理 p_0=1
    for(int i=2; i<N; ++i){
        if(!vis[i]){
            prime[++idx]=i;
            sp0[idx]=(111*sp0[idx-1]+1)%mod;
            sp1[idx]=(111*sp1[idx-1]+i)%mod;
            sp2[idx]=(111*sp2[idx-1]+111*i*i%mod)%mod;
            sp3[idx]=(111*sp3[idx-1]+111*i*i%mod*i%mod)%mod;
        }
        for(int j=1; j<=idx; ++j){
            int p=prime[j];
            if(111*i*p>=N) break;
            vis[i*p]=1;
            if(i%p==0) break;
        }
    }
}

void get_g(){
    for(long long l=1, r; l<=n; l=r+1){
        r=(n/(n/l));
        w[++tot]=n/l;
        int x=w[tot]%mod;

        g0[tot]=111*x%mod;
        g1[tot]=111*x*(x+1)/2%mod;
        g2[tot]=111*x*(x+1)%mod*(2*x+1)%mod*qpow(6,mod-2,mod)%mod;
        g3[tot]=111*x*x%mod*(x+1)%mod*(x+1)%mod*qpow(4,mod-2,mod)%mod;

        g0[tot]=((g0[tot]-1)%mod+mod)%mod;
        g1[tot]=((g1[tot]-1)%mod+mod)%mod;
        g2[tot]=((g2[tot]-1)%mod+mod)%mod;
        g3[tot]=((g3[tot]-1)%mod+mod)%mod;

        if(w[tot]<=sn) id1[w[tot]]=tot;
        else id2[n/w[tot]]=tot;
    }

    for(int i=1; i<=idx; ++i){
        int p=prime[i];
        for(int j=1; j<=tot; ++j){
```

```

        int x=w[j];
        if(1ll*p*p>x)break;

        int dp_from=x/p;
        int dp_id=dp_from<=sn?id1[dp_from]:id2[n/dp_from];

        g0[j]=((1ll*g0[j]-((1ll*g0[dp_id]-sp0[i-1])%mod+mod)%mod*1)%mod+mod)%mod;
        g1[j]=((1ll*g1[j]-((1ll*g1[dp_id]-sp1[i-1])%mod+mod)%mod*p%mod)%mod+mod)%mod;
        g2[j]=((1ll*g2[j]-((1ll*g2[dp_id]-sp2[i-1])%mod+mod)%mod*p%mod*p%mod)%mod+mod)%mod;
        g3[j]=((1ll*g3[j]-((1ll*g3[dp_id]-sp3[i-1])%mod+mod)%mod*p%mod*p%mod*p%mod)%mod+mod)%mod;
        // ...
    }
}

int S(long long x,int y){
    int p=prime[y];
    if(p>=x)return 0;
    int id=x<=sn?id1[x]:id2[n/x];
    int ans0=((1ll*g0[id]-sp0[y])%mod+mod)%mod;
    int ans1=((1ll*g1[id]-sp1[y])%mod+mod)%mod;
    int ans2=((1ll*g2[id]-sp2[y])%mod+mod)%mod;
    int ans3=((1ll*g3[id]-sp3[y])%mod+mod)%mod;

    int ans((((1ll*ans3-ans2)%mod+mod)%mod+ans1)%mod+mod)%mod; // f(p)=p^3-p^2+p
    for(int i=y+1;i<=idx;++i){
        int _p=prime[i];
        if(1ll*_p*_p>x)break;
        long long p_k=_p;
        for(int e=1;p_k<=x;++e,p_k*=_p){
            ans=(1ll*ans+1ll*f_p(_p%mod,p_k%mod)*(S(x/p_k,i)+(e!=1))%mod)%mod;
        }
    }
    return ans;
}

signed main(){
    init();
    n=read();
    sn=sqrt(n);
    get_g();
    printf("%d\n", (S(n,0)+1)%mod);
}

```


逆元

预处理

```
inv[1]=1;
for(int i=2;i<=n;++i){
    inv[i]=((-inv[p%i]*(p/i))%p+p)%p;
}
```

原理

$$p = i \times a + b$$

$$i^{-1} = p - a \times b^{-1} (\text{mod } p)$$

直接算

p是质数才能按下面这种方法算，费马小定理

```
inv[n]=qpow(n,p-2,p);
```

一般数模意义下的组合数($O(n^2)$)

```
void init(){
    c[0][0]=1;
    for(int i=1;i<N;++i){
        c[i][0]=1;
        for(int j=1;j<=i;++j){
            c[i][j]=(c[i-1][j-1]+c[i-1][j])%mod;
        }
    }
}
```

素数模意义下的组合数

```
const int MAXN=1e6+2;
const int mod=1e9+7;

int n,m,fac[MAXN],inv[MAXN];

int qpow(int a,int b){
    int ret=1;
    for(;b>=1;a=1ll*a*a%mod;if(b&1){
        ret=1ll*ret*a%mod;
    }
    return ret%mod;
}

void pre(){
    fac[0]=1;
    for(int i=1;i<=MAXN-1;++i)fac[i]=1ll*fac[i-1]*i%mod;
    inv[MAXN-1]=qpow(fac[MAXN-1],mod-2);
    for(int i=MAXN-2;i>=0;--i)inv[i]=1ll*inv[i+1]*(i+1)%mod;
}
```

```

}

int binom(int n,int k){
    if(k<0||k>n)return 0;
    return 1ll*fac[n]*inv[n-k]%mod*inv[k]%mod;
}

```

二次剩余

$\left(\frac{a}{p}\right) \equiv a^{(p-1)/2} \pmod{p}$, 为1则是a是p的二次剩余, -1则不是

勒让德符号是完全积性函数, 其中分子在同剩余类中的勒让德符号值相等

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{(p-1)/2}$$

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{(p^2-1)/8}$$

模素数的最简二次同余式解的解个数必定为 0 或 2, 手算方法见教材, 模素数幂的 (或模合数) 二次同余式解的分析见教材

Cipolla 算法

用来处理模素数的最简二次同余式的解

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

int n,p,w2;

struct com_t{
    int x,y;
    friend com_t operator*(const com_t& a,const com_t& b){
        int resx=(1ll*a.x*b.x%p+1ll*a.y*b.y%p*w2%p)%p;
        int resy=(1ll*a.x*b.y%p+1ll*b.x*a.y%p)%p;
        return {resx,resy};
    }

    friend com_t operator%(const com_t& a,int b){
        int resx=a.x%p;
        int resy=a.y%p;
        return {resx,resy};
    }
};

```

```

int qpow(int a,int b){
    int res=1,base=a%p;
    for(;b>=>=1,base=1ll*base*base%p)if(b&1){
        res=(1ll*res*base)%p;
    }
    return res%p;
}

int iqpow(com_t a,int b){
    com_t res={1,0},base=a%p;
    for(;b>=>=1,base=base*base)if(b&1){
        res=res*base;
    }
    return res.x;
}

int cipolla(){
    n%=p;
    if(n==0)return 0;
    if(qpow(n,(p-1)/2)==p-1)return -1;
    int a;
    do{
        a=rand()%p;
        w2=((1ll*a*a-n)%p+p)%p;
    }while(qpow(w2,(p-1)/2)!=p-1);
    return iqpow({a,1},(p+1)/2);
}

void solve(){
    n=read(),p=read();
    int ans=cipolla();
    if(ans===-1){
        puts("Hola!");
    }else{
        int _ans=p-ans;
        if(ans>_ans)swap(ans,_ans);
        if(ans)printf("%d %d\n",ans,_ans);
        else puts("0");
    }
}

int main(){
    srand((unsigned)time(nullptr));
    int t=read();
    while(t-->0)solve();
    return 0;
}

```

原根

若模数为 m ，且原根只讨论 m 缩系下的数，有以下定义，定理或性质：

阶为 $\varphi(m)$ 的数为 m 的原根

$a, a^2, a^3, \dots, a^{\delta(a)}$ 两两互不同余

若 $a^n \equiv 1 \pmod{m}$ 成立, 则 $\delta(a)|n$

若 $(a, m) = 1, (b, m) = 1$, 则 $\delta(ab) = \delta(a)\delta(b) \Leftrightarrow (\delta(a), \delta(b)) = 1$

$\delta(a^k) = \frac{\delta(a)}{(\delta(a), k)}$, 由该式子很容易得到原根个数的判定, 见后

原根判定定理: 若 $m \geq 3, (g, m) = 1$, 则 g 为 m 的原根等价于 $\forall p|m, g^{\frac{\varphi(m)}{p}} \not\equiv 1 \pmod{m}$, 2 的原根就是 1

原根个数定理: 一个数 m 有原根则原根个数为 $\varphi(\varphi(m))$

原根存在定理: m 有原根当且仅当 $m=2, 4, p^\alpha, 2p^\alpha$, p 为奇素数

求原根代码如下:

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0' && ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch-'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

const int N=1e6+10;
const int sN=1e3+10;
const int dom=1e6;
const int sdom=1e3;

int n,d;

int prime[N],vis[N],idx,phi[N],is_have_root[N];

// 快速gcd
int fc[N][3],pre[sN][sN];

void init(){
    fc[1][0]=fc[1][1]=fc[1][2]=1;
    for(int i=2;i<=dom;++i){
        if(!vis[i])prime[++idx]=i,phi[i]=i-1,fc[i][0]=fc[i][1]=1,fc[i][2]=i;
        for(int j=1;j<=idx;++j){
            int p=prime[j];
            if(1ll*p*i>dom)break;
            vis[i*p]=1;

            fc[i*p][0]=fc[i][0]*p;
            fc[i*p][1]=fc[i][1];
            fc[i*p][2]=fc[i][2];
            if(fc[i*p][0]>fc[i*p][1])swap(fc[i*p][0],fc[i*p][1]);
            if(fc[i*p][1]>fc[i*p][2])swap(fc[i*p][1],fc[i*p][2]);
        }
    }
}
```

```

        if(i%p==0){
            phi[i*p]=phi[i]*p;
            break;
        }
        phi[i*p]=phi[i]*phi[p];
    }
}

for(int i=0;i<=sdom;++i)pre[i][0]=pre[0][i]=i;
for(int i=1;i<=sdom;++i){
    for(int j=1;j<=i;++j){
        pre[i][j]=pre[j][i]=pre[j][i%j];
    }
}

// 2,4,p^k,2*p^k有原根(p为奇素数)
is_have_root[2]=is_have_root[4]=1;
for(int i=2;i<=idx;++i){
    int p=prime[i];
    for(long long j=p;j<N;j*=p)is_have_root[j]=1;
    for(long long j=2*p;j<N;j*=p)is_have_root[j]=1;
}

}

// int gcd(int a,int b){
//     if(!b)return a;
//     return gcd(b,a%b);
// }

// 值域内频繁使用 gcd，快速 gcd 更快
int gcd(int a,int b){
    int res=1;
    for(int i=0;i<=2;++i){
        int _gcd=1;
        if(fc[a][i]>sdom){
            if(b%fc[a][i]==0){
                _gcd=fc[a][i];
            }
        }else{
            _gcd=pre[fc[a][i]][b%fc[a][i]];
        }
        b/=_gcd;
        res*=_gcd;
    }
    return res;
}

vector<pair<int,int>> bk(int x){
    vector<pair<int,int>> res;
    for(int i=1;i<=idx;++i){
        int p=prime[i];
        if(1ll*p*p>x)break;
        if(x%p==0){
            int cnt=0;
            while(x%p==0)x/=p,++cnt;
            res.push_back({p,cnt});
        }
    }
}

```

```

    }
}
if(x>1)res.push_back({x,1});
return res;
}

int qpow(int a,int b,int mod){
    int res=1,base=a%mod;
    for(;b>=1;base=1ll*base*base%mod)if(b&1){
        res=1ll*res*base%mod;
    }
    return res;
}

bool is_root(int g,int x,const vector<pair<int,int>>& fac){
    // 保证 g 是 x 缩系中的数再用
    // if(gcd(g,x)!=1)return false;
    for(auto&& [p,cnt]:fac){
        if(qpow(g,phi[x]/p,x)==1)return false;
    }
    return true;
}

int get_min_root(int x,const vector<pair<int,int>>& fac){
    for(int i=1;i<x;++i)if(gcd(i,x)==1){
        if(is_root(i,x,fac))return i;
    }
    // 正常判定是否有原根后使用不会走下面return
    return 0;
}

vector<int> get_root(int x,const vector<pair<int,int>>& fac){
    vector<int> res,tag(x+1);
    int min_g=get_min_root(x,fac);
    for(int i=1,g=min_g;i<=phi[x];++i,g=1ll*g*min_g%x)if(gcd(i,phi[x])==1){
        // res.push_back(g);
        tag[g]=1;
    }
    // 用桶排序快点
    // sort(res.begin(),res.end());
    for(int i=1;i<x;++i)if(tag[i]){
        res.push_back(i);
    }
    return res;
}

void solve(){
    n=read(),d=read();
    if(is_have_root[n]){
        auto fac=bk(phi[n]);
        auto root=get_root(n,fac);
        printf("%d\n",root.size());
        for(int i=d;i<=root.size();i+=d){
            printf("%d ",root[i-1]);
        }puts("");
    }else{

```

```

        puts("0");
        puts("");
    }
}

int main(){
    init();
    int t=read();
    while(t--)solve();
    return 0;
}

```

质因子分解

Pollard Rho

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

#define LL long long

const int MAXN=100;

LL gcd(LL a,LL b){
    if(!b)return a;
    return gcd(b,a%b);
}

LL qpow(LL a,LL b,LL mod){
    LL res=1,base=a%mod;
    for(;b;b>>=1,base=(__int128_t)base*base%mod)if(b&1){
        res=(__int128_t)res*base%mod;
    }
    return res;
}

LL MR(LL p){
    if(p<2)return 0;
    if(p==2)return 1;
    if(p==3)return 1;
    LL d=p-1,r=0;
    while(!(d&1))d>>=1,++r;
    for(LL k=1;k<=10;++k){
        LL a=rand()%(p-2)+2;
        LL x=qpow(a,d,p);
        if(x==1||x==p-1)continue;
        for(int i=1;i<=r-1;++i){
            x=(__int128_t)x*x%p;
            if(x==p-1)break;
        }
        if(x!=p-1)return 0;
    }
    return 1;
}

```

```

LL PR(LL x){
    LL s=0,t=0;
    LL c=111*rand()%(x-1)+1;
    int step=0,goal=1;
    LL val=1;
    for(goal=1;;goal<=1,s=t,val=1){
        for(step=1;step<=goal;++step){
            t=((__int128_t)t*t+c)%x;
            val=(__int128_t)val*abs(t-s)%x;
            if((step%127)==0){
                LL d=gcd(val,x);
                if(d>1)return d;
            }
        }
        LL d=gcd(val,x);
        if(d>1)return d;
    }
}

// P4718

// int t;
// LL maxfac,n;

// void fac(LL x){
//     if(x<=maxfac||x<2)return;
//     if(MR(x)){
//         maxfac=max(maxfac,x);
//         return;
//     }
//     LL p=x;
//     while(p>=x)p=PR(x);
//     while((x%p)==0)x/=p;
//     fac(x),fac(p);
// }

// int main(){
//     cin>>t;
//     for(int e=1;e<=t;++e){
//         srand((unsigned)time(nullptr));
//         maxfac=0;
//         cin>>n;
//         fac(n);
//         if(maxfac==n)cout<<"Prime"<<'\\n';
//         else cout<<maxfac<<'\\n';
//     }
//     return 0;
// }

LL fac[MAXN],cnt[MAXN],tot,len,ufac[MAXN];

void divide(LL n){
    if(n<2)return;
    if(MR(n)){
        fac[++tot]=n;

```



```

        return;
    }
    LL d=n;
    while(d>=n)d=PR(n);
    divide(d);
    divide(n/d);
}

void brk(int n){
    memset(cnt,0,sizeof cnt);
    tot=0;
    len=0;
    divide(n);
    sort(fac+1,fac+tot+1);
    for(int i=1;i<=tot;++i){
        if(fac[i]!=fac[i-1])ufac[++len]=fac[i];
        ++cnt[len];
    }
}

int main(){
    srand((unsigned)time(nullptr));
    brk(100000000);
    for(int i=1;i<=len;++i){
        cout<<ufac[i]<<' '<<cnt[i]<<'\n';
    }
    return 0;
}

```

min_25 筛

如果要求积性函数的前缀和 $\sum_{i=1}^n f(i)$, n 为 $1e10$ 范围 (min_25 筛时间复杂度 $O(n^{3/4}/\log(n))$)

其中给出 $f(p^k)$ 为某多项式, 比如说欧拉函数 $f(p^k) = p^k - p^{k-1}$

那么对应的 $f(p)$ 也是一个 p 的多项式, 我们需要这个来修改我们的板子, 具体细节如下:

(如果 $f(p)$ 不能很好表示成 p 的多项式, 且 $f(p^k)$, 请不要使用 min_25, 则去考虑杜教筛, 但是大多数情况都是满足的)

```

#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;

// https://www.51nod.com/Html/Challenge/Problem.html#problemId=1239

long long read(){
    long long res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0' && ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch-'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

```

```

// 比如求欧拉函数的前缀和
// f(p)=p-1, 我们需要阶为1和0的g数组做dp
// f(p^k)=p^k-p^(k-1)

const int mod=1e9+7;
const int N=1e5+10;

int qpow(int a,int b,int mod){
    int res=1,base=a%mod;
    for(;b;b>>=1,base=1ll*base*base%mod) if(b&1){
        res=1ll*res*base%mod;
    }
    return res;
}

// g 是 min_25 的 dp 数组
// sp 是 前 i 的素数幂前缀和
// g 和 sp 根据数论函数取素数的式子 f_p 的多项式的度数取
// 对不同阶素数幂分别求贡献最后累计在一起
// 比如欧拉函数的 f_p 就是 p-1 就是最高阶为1的多项式
long long n;
int sn,g0[N*3],g1[N*3],sp0[N],sp1[N];
// int g2[N*3],sp2[N];
// .....

// 数论分块
// dp 的过程需要数论分块来知道转移, 我需要知道 n/p 所在块的索引
// dp 数组 g 都是存在数论分块完成后的索引 id 的位置上的
// 每个索引对应的块的值都是 w[id]
long long w[N*3];
int tot;

int prime[N],vis[N],idx,id1[N*3],id2[N*3];

// int f_p(int p,int k){
//     return ((1ll*qpow(p,k,mod)-qpow(p,k-1,mod))%mod+mod)%mod;
// }

int f_p(int p_k_1,int p_k){
    return ((1ll*p_k-1ll*p_k_1)%mod+mod)%mod;
}

void init(){
    prime[0]=1;// 特殊处理 p_0=1
    for(int i=2;i<N;++i){
        if(!vis[i]){
            prime[++idx]=i;
            sp0[idx]=(1ll*sp0[idx-1]+1)%mod;
            sp1[idx]=(1ll*sp1[idx-1]+i)%mod;
            // sp2[idx]=(1ll*sp2[idx-1]+1ll*i*i%mod)%mod;
            // ...
        }
        for(int j=1;j<=idx;++j){
            int p=prime[j];
            if(1ll*i*p>=N)break;

```

```

        vis[i*p]=1;
        if(i%p==0)break;
    }
}

void get_g(){
    for(long long l=1,r;l<=n;l=r+1){
        r=(n/(n/l));
        w[++tot]=n/l;
        int x=w[tot]%mod;
        //初始化为1~x中所有>p_0即>1的数之幂和
        g0[tot]=1ll*x%mod;
        g1[tot]=1ll*x*(x+1)/2%mod;
        // g2[tot]=1ll*x*(x+1)%mod*(2*x+1)%mod*qpow(6,mod-2,mod)%mod;
        // ...

        g0[tot]=(g0[tot]-1)%mod+mod)%mod;
        g1[tot]=(g1[tot]-1)%mod+mod)%mod;
        // g2[tot]=(g2[tot]-1)%mod+mod)%mod;
        // ...

        // 存放数论分块的索引
        // 值为x<=sn的在第id1[x]块
        // 值为x>sn的在第id2[n/x]块
        if(w[tot]<=sn)id1[w[tot]]=tot;
        else id2[n/w[tot]]=tot;
    }

    for(int i=1;i<=idx;++i){
        int p=prime[i];
        for(int j=1;j<=tot;++j){
            int x=w[j];
            if(1ll*p*p>x)break;

            int dp_from=x/p;
            int dp_id=dp_from<=sn?id1[dp_from]:id2[n/dp_from];

            g0[j]=((1ll*g0[j]-((1ll*g0[dp_id]-sp0[i-1])%mod+mod)%mod*1)%mod+mod)%mod;
            g1[j]=((1ll*g1[j]-((1ll*g1[dp_id]-sp1[i-1])%mod+mod)%mod*p%mod)%mod+mod)%mod;
            // g2[j]=((1ll*g2[j]-((1ll*g2[dp_id]-sp2[i-1])%mod+mod)%mod*p%mod*p%mod)%mod+mod)%mod;
            // ...
        }
    }
}

int S(long long x,int y){
    int p=prime[y];
    if(p>=x)return 0;
    int id=x<=sn?id1[x]:id2[n/x];
    int ans0=((1ll*g0[id]-sp0[y])%mod+mod)%mod;
    int ans1=((1ll*g1[id]-sp1[y])%mod+mod)%mod;
    // int ans2=((1ll*g2[id]-sp2[y])%mod+mod)%mod;
}

```

```

// ...

// 最后按照 f_p 的多项式系数把贡献拼起来
// 这里 f_p=p-1
int ans=((1ll*ans1-ans0)%mod+mod)%mod;
for(int i=y+1;i<=idx;++i){
    int _p=prime[i];
    if(1ll*_p*_p>x)break;
    long long p_k=_p;
    long long p_k_1=1;
    for(int e=1;p_k<=x;++e,p_k*=_p,p_k_1*=_p){
        ans=(1ll*ans+1ll*f_p(p_k_1%mod,p_k%mod)*(S(x/p_k,i)+(e!=1))%mod)%mod;
    }
}
return ans;
}

signed main(){
    init();
    n=read();
    sn=sqrt(n);
    get_g();
    // 假设 phi[1]=1 的话, 得多记录1的答案
    printf("%d\n", (S(n,0)+1)%mod);
}

```

多项式乘法

FFT

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

const int N=(1e6+4)*4;
const double PI=acos(-1);
typedef complex<double> COMP;

COMP a[N],b[N],ans[N];

int rev[N];

void init(int lim){
    rep(i,0,lim-1)rev[i]=(i&1)*(lim)+rev[i>>1]>>1;
}

```

```

}

// void change(COMP x[],int len){
//     for(int i=0;i<len;++i){
//         rev[i]=rev[i>>1]>>1;
//         if(i&1){
//             rev[i]|=len>>1;
//         }
//     }
//     for(int i=0;i<len;++i){
//         if(i<rev[i]){
//             swap(x[i],x[rev[i]]);
//         }
//     }
// }

void fft(COMP x[],int len,int on){
    // change(x,len);
    rep(i,0,len-1)if(i<rev[i])swap(x[i],x[rev[i]]);
    for(int h=2;h<=len;h<=1){
        COMP wn(cos(2*PI/h),sin(2*PI*on/h));
        for(int i=0;i<len;i+=h){
            COMP w(1,0);
            for(int k=i;k<i+h/2;++k){
                COMP u=x[k];
                COMP t=w*x[k+h/2];
                x[k]=u+t;
                x[k+h/2]=u-t;
                w=w*wn;
            }
        }
    }
    if(on==1){
        for(int i=0;i<len;++i){
            x[i]/=len;
        }
    }
}

int n,m,len;

int _ans[N];

int main(){
    n=read(),m=read();
    rep(i,0,n){
        a[i]={read(),0};
    }
    rep(i,0,m){
        b[i]={read(),0};
    }
    int mx=max(n,m);
    len=1;
    while(len<(mx+1)*2)len<=1;
    init(len);
}

```

```

fft(a,len,1);
fft(b,len,1);
rep(i,0,len-1)ans[i]=a[i]*b[i];
fft(ans,len,-1);
rep(i,0,len)_ans[i]=(int)(ans[i].real()+0.5);
rep(i,0,n+m){
    printf("%d ",_ans[i]);
}
return 0;
}

```

NTT

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0' && ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

const int N=(1e6+10)*4;

const int P=998244353;

int inv3;

int qpow(int a,int b,int mod){
    int res=1,base=a%mod;
    for(;b;b>>=1,base=1ll*base*base%mod)if(b&1){
        res=1ll*res*base%mod;
    }
    return res;
}

int rev[N];

void init(int lim){
    rep(i,0,lim-1)rev[i]=(i&1)*(lim>>1)+(rev[i>>1]>>1);
}

void ntt(int x[],int len,int on){
    rep(i,0,len-1)if(rev[i]<i)swap(x[i],x[rev[i]]);
    for(int h=2;h<=len;h<=<1){
        int gn=qpow(on==1?3:inv3,(P-1)/h,P);
        for(int i=0;i<len;i+=h){
            int g=1;
            for(int k=i;k<i+h/2;++k){

```

```

        int u=x[k]%P;
        int t=1ll*g*x[k+h/2]%P;
        x[k]=(1ll*u+t)%P;
        x[k+h/2]=((1ll*u-t)%P+P)%P;
        g=1ll*g*gn%P;
    }
}
}
if(on==1){
    int inv=qpow(len,P-2,P);
    rep(i,0,len-1)x[i]=1ll*x[i]*inv%P;
}
}

int n,m,len;

int a[N],b[N],ans[N];

int main(){
    inv3=qpow(3,P-2,P);
    n=read(),m=read();
    rep(i,0,n)a[i]=read();
    rep(i,0,m)b[i]=read();
    int mx=max(n,m);
    len=1;
    while(len<2*(mx+1))len<=1;
    init(len);

    ntt(a,len,1);
    ntt(b,len,1);
    rep(i,0,len-1)ans[i]=1ll*a[i]*b[i]%P;
    ntt(ans,len,-1);
    rep(i,0,n+m){
        printf("%d ",ans[i]);
    }
    return 0;
}

```

快速求模(Barrett Reduction)

仅限于模数固定的情况，全局只有一个模数的情况，才会优化很多时间

```

struct Mod{
    typedef long long LL;
    LL m,p;
    void init(int pp){m=((__int128)1<<64)/pp;p=pp;}
    LL operator ()(LL x){
        return x-((__int128(x)*m)>>64)*p;
    }
};

Mod mod;

```

数据结构

Splay

1. 插入 x 数
2. 删除 x 数(若有多个相同的数, 应只删除一个)
3. 查询 x 数的排名(排名定义为比当前数小的数的个数 $+1$)
4. 查询排名为 x 的数
5. 求 x 的前驱(前驱定义为小于 x , 且最大的数)
6. 求 x 的后继(后继定义为大于 x , 且最小的数)

```
#include <iostream>

using namespace std;
const int MAXN=1e5+10;

int read(){
    int res=0,sign=1;char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-')sign=-sign;
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar())res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');
    return res*sign;
}

int rt,tot,fa[MAXN],ch[MAXN][2],val[MAXN],cnt[MAXN],sz[MAXN];

void maintain(int x){sz[x]=sz[ch[x][0]]+sz[ch[x][1]]+cnt[x];}

bool get(int x){return x==ch[fa[x]][1];}

void clear(int x){fa[x]=ch[x][0]=ch[x][1]=val[x]=cnt[x]=sz[x]=0;}

void rotate(int x){
    int y=fa[x],z=fa[y],chk=get(x);

    ch[y][chk]=ch[x][chk^1];
    if(ch[x][chk^1])fa[ch[x][chk^1]]=y;

    ch[x][chk^1]=y;
    fa[y]=x;

    if(z)ch[z][y==ch[z][1]]=x;
    fa[x]=z;

    maintain(y);
    maintain(x);
}

void splay(int x){
    for(int f=fa[x];f=fa[x],f;rotate(x)){
        if(fa[f])rotate(get(x)==get(f)?f:x);
    }
    rt=x;
}
```



```

}

void ins(int k){
    if(!rt){
        val[++tot]=k;
        cnt[tot]++;
        rt=tot;
        maintain(rt);
        return;
    }
    int cur=rt,f=0;
    while(1){
        if(val[cur]==k){
            cnt[cur]++;
            maintain(cur);
            maintain(f);
            splay(cur);
            break;
        }
        f=cur;
        cur=ch[cur][val[cur]<k];
        if(!cur){
            val[++tot]=k;
            cnt[tot]++;
            fa[tot]=f;
            ch[f][val[f]<k]=tot;
            maintain(tot);
            maintain(f);
            splay(tot);
            break;
        }
    }
}

int rk(int k){
    int res=0,cur=rt;
    while(1){
        if(val[cur]>k){
            cur=ch[cur][0];
        }else{
            res+=sz[ch[cur][0]];
            if(!cur) return res+1;
            if(val[cur]==k){
                splay(cur);
                return res+1;
            }
            res+=cnt[cur];
            cur=ch[cur][1];
        }
    }
}

int kth(int k){
    int cur=rt;
    while(1){
        if(ch[cur][0]&& k<=sz[ch[cur][0]]){

```

```

        cur=ch[cur][0];
    }else{
        k-=sz[ch[cur][0]]+cnt[cur];
        if(k<=0){
            splay(cur);
            return val[cur];
        }
        cur=ch[cur][1];
    }
}

}

int pre(){
    int cur=ch[rt][0];
    if(!cur)return cur;
    while(ch[cur][1])cur=ch[cur][1];
    splay(cur);
    return cur;
}

int nxt(){
    int cur=ch[rt][1];
    if(!cur)return cur;
    while(ch[cur][0])cur=ch[cur][0];
    splay(cur);
    return cur;
}

void del(int k){
    rk(k);
    if(cnt[rt]>1){
        cnt[rt]--;
        maintain(rt);
        return;
    }
    if(!ch[rt][0]&&!ch[rt][1]){
        clear(rt);
        rt=0;
        return;
    }
    if(!ch[rt][0]){
        int cur=rt;
        rt=ch[rt][1];
        fa[rt]=0;
        clear(cur);
        return;
    }
    if(!ch[rt][1]){
        int cur=rt;
        rt=ch[rt][0];
        fa[rt]=0;
        clear(cur);
        return;
    }
    int cur=rt,x=pre();
    fa[ch[cur][1]]=x;

```

```

        ch[x][1]=ch[cur][1];
        clear(cur);
        maintain(rt);
    }

    int getpre(int x){
        ins(x);
        int res=pre();
        del(x);
        return val[res];
    }

    int getnxt(int x){
        ins(x);
        int res=nxt();
        del(x);
        return val[res];
    }

    int n;

    int main(){
        n=read();
        for(int i=1;i<=n;++i){
            int op=read();
            if(op==1){
                int x=read();
                ins(x);
            }else if(op==2){
                int x=read();
                del(x);
            }else if(op==3){
                int x=read();
                printf("%d\n",rk(x));
            }else if(op==4){
                int x=read();
                printf("%d\n",kth(x));
            }else if(op==5){
                int x=read();
                printf("%d\n",getpre(x));
            }else if(op==6){
                int x=read();
                printf("%d\n",getnxt(x));
            }
        }
        return 0;
    }
}

```

再给出一个 splay 大小为变长的模板

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;
const int MAXN=1e5+10;

```

```

int read(){
    int res=0,sign=1;char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-')sign=-sign;
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar())res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');
    return res*sign;
}

struct splay_t{
    int rt,tot;
    vector<int> fa,val,cnt,sz,ch[2];

    splay_t(){
        fa.push_back(0);
        val.push_back(0);
        cnt.push_back(0);
        sz.push_back(0);
        ch[0].push_back(0);
        ch[1].push_back(0);
    }

    void maintain(int x){sz[x]=sz[ch[0][x]]+sz[ch[1][x]]+cnt[x];}

    bool get(int x){return x==ch[1][fa[x]];}

    void clear(int x){fa[x]=ch[0][x]=ch[1][x]=val[x]=cnt[x]=sz[x]=0;}

    void rotate(int x){
        int y=fa[x],z=fa[y],chk=get(x);

        ch[chk][y]=ch[chk^1][x];
        if(ch[chk^1][x])fa[ch[chk^1][x]]=y;

        ch[chk^1][x]=y;
        fa[y]=x;

        if(z)ch[y==ch[1][z]][z]=x;
        fa[x]=z;

        maintain(y);
        maintain(x);
    }

    void splay(int x){
        for(int f=fa[x];f=fa[x],f;rotate(x)){
            if(fa[f])rotate(get(x)==get(f)?f:x);
        }
        rt=x;
    }

    void ins(int k){
        if(!rt){
            ++tot;
            fa.push_back(0);
            val.push_back(k);
            cnt.push_back(1);
            sz.push_back(0);
        }
    }
}

```

```

        ch[0].push_back(0);
        ch[1].push_back(0);
        rt=tot;
        maintain(rt);
        return;
    }
    int cur=rt,f=0;
    while(1){
        if(val[cur]==k){
            cnt[cur]++;
            maintain(cur);
            maintain(f);
            splay(cur);
            break;
        }
        f=cur;
        cur=ch[val[cur]<k][cur];
        if(!cur){
            ++tot;
            fa.push_back(f);
            val.push_back(k);
            cnt.push_back(1);
            sz.push_back(0);
            ch[0].push_back(0);
            ch[1].push_back(0);
            ch[val[f]<k][f]=tot;
            maintain(tot);
            maintain(f);
            splay(tot);
            break;
        }
    }
}

int rk(int k){
    int res=0,cur=rt;
    while(1){
        if(val[cur]>k){
            cur=ch[0][cur];
        }else{
            res+=sz[ch[0][cur]];
            if(!cur) return res+1;
            if(val[cur]==k){
                splay(cur);
                return res+1;
            }
            res+=cnt[cur];
            cur=ch[1][cur];
        }
    }
}

int kth(int k){
    int cur=rt;
    while(1){
        if(ch[0][cur]&&k<=sz[ch[0][cur]]){

```

```

        cur=ch[0][cur];
    }else{
        k-=sz[ch[0][cur]]+cnt[cur];
        if(k<=0){
            splay(cur);
            return val[cur];
        }
        cur=ch[1][cur];
    }
}
}

```

```

int pre(){
    int cur=ch[0][rt];
    if(!cur)return cur;
    while(ch[1][cur])cur=ch[1][cur];
    splay(cur);
    return cur;
}

```

```

int nxt(){
    int cur=ch[1][rt];
    if(!cur)return cur;
    while(ch[0][cur])cur=ch[0][cur];
    splay(cur);
    return cur;
}

```

```

void del(int k){
    rk(k);
    if(cnt[rt]>1){
        cnt[rt]--;
        maintain(rt);
        return;
    }
    if(!ch[0][rt]&&!ch[1][rt]){
        clear(rt);
        rt=0;
        return;
    }
    if(!ch[0][rt]){
        int cur=rt;
        rt=ch[1][rt];
        fa[rt]=0;
        clear(cur);
        return;
    }
    if(!ch[1][rt]){
        int cur=rt;
        rt=ch[0][rt];
        fa[rt]=0;
        clear(cur);
        return;
    }
    int cur=rt,x=pre();
    fa[ch[1][cur]]=x;
}

```

```

        ch[1][x]=ch[1][cur];
        clear(cur);
        maintain(rt);
    }

    int getpre(int x){
        ins(x);
        int res=pre();
        del(x);
        return val[res];
    }

    int getnxt(int x){
        ins(x);
        int res=nxt();
        del(x);
        return val[res];
    }
}tree;

int n;

int main(){
    n=read();
    for(int i=1;i<=n;++i){
        int op=read();
        if(op==1){
            int x=read();
            tree.ins(x);
        }else if(op==2){
            int x=read();
            tree.del(x);
        }else if(op==3){
            int x=read();
            printf("%d\n",tree.rk(x));
        }else if(op==4){
            int x=read();
            printf("%d\n",tree.kth(x));
        }else if(op==5){
            int x=read();
            printf("%d\n",tree.getpre(x));
        }else if(op==6){
            int x=read();
            printf("%d\n",tree.getnxt(x));
        }
    }
    return 0;
}

```

ST表

```

void pre(){
    //对数取整
    _log_2[1]=0;
    _log_2[2]=1;

```

```

        for(int i=3;i<MAXN;++i){
            _log_2[i]=_log_2[i/2]+1;
        }
    }

    void _pre(){
        for(int k=1;k<=LOGN;++k){
            for(int i=1;i+(1<<k)-1<=n;++i){
                f[i][k]=max(f[i][k-1],f[i+(1<<(k-1))][k-1]);
            }
        }
    }

    int getmax(int l,int r){
        int ret;
        int s=_log_2[r-l+1];
        ret=max(f[l][s],f[r-(1<<s)+1][s]);
        return ret;
    }

    int main(){
        n=read(),m=read();
        for(int i=1;i<=n;++i)f[i][0]=read();
        pre();
        _pre();
        for(int i=1;i<=m;++i){
            int l,r,l=read(),r=read();
            printf("%d\n",getmax(l,r));
        }
        return 0;
    }

```

线段树染色

贴报纸问题

```

#include <iostream>
#include <cstring>

using namespace std;

const int MAXN=1e5+2;
const int INF=0x7fffffff;

struct node_t{
    int ls,rs;
    int tag;
}d[MAXN<<5];

int rt,cnt,vis[MAXN];

#define MID int m=s+((t-s)>>1)
#define lson d[p].ls
#define rson d[p].rs

```



```

inline void pushdown(int p,int s,int t){
    MID;
    if(s!=t&&d[p].tag){
        if(!lson)lson=++cnt;
        if(!rson)rson=++cnt;
        d[lson].tag=d[p].tag,d[rson].tag=d[p].tag;
        d[p].tag=0;
    }
}

```

```

void modify(int& p,int s,int t,int l,int r,int c){
    if(!p)p=++cnt;
    if(l<=s&&t<=r){
        d[p].tag=c;
        return;
    }
    MID;
    pushdown(p,s,t);
    if(l<=m)modify(lson,s,m,l,r,c);
    if(r>m)modify(rson,m+1,t,l,r,c);
}

```

```

int query(int p,int s,int t,int l,int r){
    if(!p)return 0;
    if(d[p].tag){
        if(vis[d[p].tag])return 0;
        else return vis[d[p].tag]=1;
    }
    MID;
    pushdown(p,s,t);
    int sum=0;
    if(l<=m)sum+=query(lson,s,m,l,r);
    if(r>m)sum+=query(rson,m+1,t,l,r);
    return sum;
}

```

```

int n;

```

```

void solve(){
    rt=cnt=0;
    memset(d,0,sizeof d);
    memset(vis,0,sizeof vis);
    cin>>n;
    for(int i=1,l,r;i<=n;++i){
        cin>>l>>r;
        modify(rt,1,INF,l,r,i);
    }
    cout<<query(rt,1,INF,1,INF)<<'\n';
}

```

```

int main(){
    int t;cin>>t;
    while(t--){
        solve();
    }
    return 0;
}

```

扫描线

面积

线段树中闭区间 $[l, r]$ 表示的实际数轴上 $[l, r + 1]$ 的线段，数轴上每一个小区间 $[x, x + 1]$ 表示线段树的数组中下标为 x 的叶子节点

```
#include <bits/stdc++.h>
#define LL long long
using namespace std;

const int MAXN=1e5+2;
const int INF=0x7fffffff;

struct line_t{
    int l,r,h,mark;

    line_t(int _l,int _r,int _h,int _mark):l(_l),r(_r),h(_h),mark(_mark){}

    bool operator<(const line_t& o)const{
        return h<o.h;
    }
};

vector<line_t> lines;

int n,cnt,rt;

#define ls d[p].lson
#define rs d[p].rson
#define MID int m=s+((t-s)>>1)

struct node_t{
    int lson,rson,tag;
    int len;
}d[MAXN<<7];

void pushup(int p,int s,int t){
    if(d[p].tag){
        d[p].len=t-s+1;
    }else d[p].len=d[ls].len+d[rs].len;
}

void modify(int& p,int s,int t,int l,int r,int c){
    if(!p)p=++cnt;
    if(l<=s&&t<=r){
        d[p].tag+=c;
        pushup(p,s,t);
        return;
    }
    MID;
    if(l<=m)modify(ls,s,m,l,r,c);
    if(r>m)modify(rs,m+1,t,l,r,c);
    pushup(p,s,t);
}
```

```

}

int main(){
    cin>>n;
    for(int i=1,x,y,_x,_y;i<=n;++i){
        cin>>x>>y>>_x>>_y;
        lines.emplace_back(x,_x,y,1);
        lines.emplace_back(x,_x,_y,-1);
    }
    sort(lines.begin(),lines.end());

    LL ans=0;

    for(int i=0;i<lines.size()-1;++i){
        modify(rt,0,INF,lines[i].l,lines[i].r-1,lines[i].mark);
        ans+=1ll*d[1].len*(lines[i+1].h-lines[i].h);
    }cout<<ans<<'\n';
    return 0;
}

```

周长

```

#include <iostream>
#include <cstdio>
#include <vector>
#include <algorithm>

#define LL long long
using namespace std;

const int MAXN=5e3+2;
const int INF=0x7fffffff;

struct line_t{
    int l,r,h,mark;

    line_t(int _l,int _r,int _h,int _mark):l(_l),r(_r),h(_h),mark(_mark){}

    bool operator<(const line_t& o)const{
        if(h==o.h)return mark>o.mark;
        return h<o.h;
    }
};

vector<line_t> lines;

int n,cnt,rt;

#define ls d[p].lson
#define rs d[p].rson
#define MID int m=1ll*s+((1ll*t-s)>>1)

struct node_t{
    int lson,rson,tag;//左儿子，右儿子，区间是否被线段完全覆盖
    int c;// 区间线段个数

```

```

    bool lc,rc;//区间左右端点是否被覆盖
    int len;//区间内的线段总长度
}d[MAXN<<7];

void pushup(int p,int s,int t){
    if(d[p].tag){
        d[p].len=t-s+1;
        d[p].lc=d[p].rc=true;
        d[p].c=1;
    }else{
        d[p].len=d[ls].len+d[rs].len;
        d[p].lc=d[ls].lc,d[p].rc=d[rs].rc;
        d[p].c=d[ls].c+d[rs].c;
        if(d[ls].rc&&d[rs].lc){
            d[p].c-=1;
        }
    }
}

void modify(int& p,int s,int t,int l,int r,int c){
    if(!p)p=++cnt;
    if(l<=s&&t<=r){
        d[p].tag+=c;
        pushup(p,s,t);
        return;
    }
    MID;
    if(l<=m)modify(ls,s,m,l,r,c);
    if(r>m)modify(rs,m+1,t,l,r,c);
    pushup(p,s,t);
}

int main(){
    cin>>n;
    for(int i=1,x,y,_x,_y;i<=n;++i){
        cin>>x>>y>>_x>>_y;
        // lines.emplace_back(x,_x,y,1);
        // lines.emplace_back(x,_x,_y,-1);
        lines.push_back({x,_x,y,1});
        lines.push_back({x,_x,_y,-1});
    }
    sort(lines.begin(),lines.end());

    LL ans=0;
    int pre=0;

    for(int i=0;i<lines.size()-1;++i){
        modify(rt,-INF,INF,lines[i].l,lines[i].r-1,lines[i].mark);
        ans+=abs(d[1].len-pre);
        ans+=2*d[1].c*(lines[i+1].h-lines[i].h);
        pre=d[1].len;
    }

    ans+=lines.back().r-lines.back().l;

    cout<<ans<<'\n';
}

```

```
    return 0;
}
```

主席树

主席树，全名可持久化线段树，又名hjt tree，是一种保留了多个历史版本的权值线段树。插入节点的时候去和上一个版本的权值线段树做连接，计算前缀。询问的时候带着两个版本一起跳儿子，统计前缀的差来得到区间信息。

区间第k大

值域到了 `int`，先做离散化。

这里先算出左儿子区间上的点的个数 x ，如果排名 k 小于 x ，那么就往做左儿子跳，否则往右儿子跳找排名为 $k-x$ 的节点，和平衡树的查找很像。

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-')sign=-sign;
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar())res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');
    return res*sign;
}

const int N=2e5+10;

int n,m;
int tot,sum[N<<5],rt[N],ls[N<<5],rs[N<<5];

int a[N],idx[N],len;

#define MID int m=s+((t-s)>>1)

int build(int s,int t){
    int p=++tot;
    if(s==t)return p;
    MID;
    ls[p]=build(s,m);
    rs[p]=build(m+1,t);
    return p;
}

int ins(int s,int t,int x,int _p){
    int p=++tot;
    ls[p]=ls[_p],rs[p]=rs[_p],sum[p]=sum[_p]+1;
    if(s==t)return p;
    MID;
    if(x<=m)ls[p]=ins(s,m,x,ls[p]);
    else rs[p]=ins(m+1,t,x,rs[p]);
    return p;
}
```

```

int query(int s,int t,int u,int v,int k){
    int x=sum[ls[v]]-sum[ls[u]];
    if(s==t)return s;
    MID;
    if(k<=x)return query(s,m,ls[u],ls[v],k);
    else return query(m+1,t,rs[u],rs[v],k-x);
}

int getid(int x){
    return lower_bound(idx+1,idx+1+len,x)-idx;
}

void init(){
    for(int i=1;i<=n;++i)idx[i]=a[i];
    sort(idx+1,idx+1+n);
    len=unique(idx+1,idx+1+n)-idx-1;
    rt[0]=build(1,len);
    for(int i=1;i<=n;++i){
        rt[i]=ins(1,len,getid(a[i]),rt[i-1]);
    }
}

void solve(){
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int l=read(),r=read(),k=read();
        int ans=idx[query(1,len,rt[l-1],rt[r],k)];
        printf("%d\n",ans);
    }
}

int main(){
    n=read(),m=read();
    for(int i=1;i<=n;++i){
        a[i]=read();
    }
    init();
    solve();
    return 0;
}

```

区间[l, r]中属于某一个值域[L, R]中的点的个数

一个序列 a_i ($i = 1, 2, \dots, n$), 在 a_l, a_{l+1}, \dots, a_r 中有多少个 a_i 满足 $L \leq a_i \leq R$?

带着两个版本的树跳, 然后统计区间中满足的点的个数就好了。

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int N=1e5+10;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();

```

```

        for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
        for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');}
        return res*sign;
    }

    int n,q;

    vector<int> G[N];
    int ver[N];
    int tin[N],tout[N],timer;

    void dfs(int u,int fno){
        tin[u]=++timer;
        for(auto&& v:G[u])if(v!=fno){
            dfs(v,u);
        }
        tout[u]=timer;
    }

    int ls[N<<5],rs[N<<5],rt[N<<5],sum[N<<5],tot;

    #define MID int m=s+((t-s)>>1)

    int ins(int s,int t,int x,int _p){
        int p=++tot;
        ls[p]=ls[_p],rs[p]=rs[_p],sum[p]=sum[_p]+1;
        if(s==t)return p;
        MID;
        if(x<=m)ls[p]=ins(s,m,x,ls[p]);
        else rs[p]=ins(m+1,t,x,rs[p]);
        return p;
    }

    int query(int s,int t,int u,int v,int l,int r){
        if(l<=s&&t<=r)return sum[v]-sum[u];
        MID;
        int res=0;
        if(l<=m)res+=query(s,m,ls[u],ls[v],l,r);
        if(r>m)res+=query(m+1,t,rs[u],rs[v],l,r);
        return res;
    }

    void solve(){
        n=read(),q=read();
        for(int i=1;i<=n;++i)G[i].clear();
        tot=0,timer=0;
        for(int i=1,u,v;i<=n-1;++i){
            u=read(),v=read();
            G[u].push_back(v);
            G[v].push_back(u);
        }
        dfs(1,0);
        for(int i=1;i<=n;++i)ver[i]=read(),rt[i]=ins(1,n,tin[ver[i]],rt[i-1]);
        for(int _=1;_<=q;++){
            int l=read(),r=read(),x=read();
            int L=tin[x],R=tout[x];

```

```

        int res=query(1,n,rt[l-1],rt[r],L,R);
        if(res>=1)puts("YES");
        else puts("NO");
    }
    puts("");
}

int main(){
    int t=read();
    while(t-->0)solve();
    return 0;
}

```

带历史版本的区间加区间查询

也就是做一个可持久化线段树但是是支持区修的，这类题型目前不常见，也不会主动用这个方法，是自己摸索的一个方法，慎用

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch-'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

const int N=2e5+10;

struct node_t{
    int v,lson,rson,tag;
};

int rt[N],tot;

node_t d[N<<7];

#define ls d[p].lson
#define rs d[p].rson
#define _ls d[_p].lson
#define _rs d[_p].rson
#define MID int m=(l+r)>>1

void pushup(int p,int s,int t){
    d[p].v=d[ls].v+d[rs].v+d[p].tag*(t-s+1);
}

void build(int& p,int s,int t){
    p=++tot;
}

```



```

        if(s==t)return;
        MID;
        build(ls,s,m);
        build(rs,m+1,t);
        pushup(p,s,t);
    }

    void modify(int& p,int _p,int s,int t,int l,int r,int c){
        p=++tot;
        d[p]=d[_p];
        if(l<=s&&t<=r){
            d[p].v+=c*(t-s+1),d[p].tag+=c;
            return;
        }
        MID;
        if(l<=m)modify(ls,_ls,s,m,l,r,c);
        if(r>m)modify(rs,_rs,m+1,t,l,r,c);
        pushup(p,s,t);
    }

    int query(int p,int s,int t,int l,int r,int tag){
        if(!p)return 0;
        if(l<=s&&t<=r){
            return d[p].v+tag*(t-s+1);
        }
        MID;
        int ans=0;
        if(l<=m)ans+=query(ls,s,m,l,r,tag+d[p].tag);
        if(r>m)ans+=query(rs,m+1,t,l,r,tag+d[p].tag);
        return ans;
    }

    int n,m;

    int main(){
        n=read(),m=read();
        build(rt[0],1,n);
        rep(i,1,m){
            int op=read(),l=read(),r=read();
            if(op==1){
                int x=read();
                modify(rt[i],rt[i-1],1,n,l,r,x);
            }else{
                rt[i]=rt[i-1];
                int lst=read(),now=read();
                printf("%d\n",query(rt[now],1,n,l,r,0)-query(rt[lst-1],1,n,l,r,0));
            }
        }
        return 0;
    }
}

```

树套树

线段树套平衡树

二逼平衡树（树套树）板子，代码如下：

splay in segment tree

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

const int N=5e4+10;
const int INF=2147483647;

struct splay_t{
    int rt,tot;
    vector<int> fa,val,cnt,sz,ch[2];

    splay_t(){
        fa.push_back(0);
        val.push_back(0);
        cnt.push_back(0);
        sz.push_back(0);
        ch[0].push_back(0);
        ch[1].push_back(0);
    }

    void maintain(int x){sz[x]=sz[ch[0][x]]+sz[ch[1][x]]+cnt[x];}

    bool get(int x){return x==ch[1][fa[x]];}

    void clear(int x){fa[x]=ch[0][x]=ch[1][x]=val[x]=cnt[x]=sz[x]=0;}

    void rotate(int x){
        int y=fa[x],z=fa[y],chk=get(x);

        ch[chk][y]=ch[chk^1][x];
        if(ch[chk^1][x])fa[ch[chk^1][x]]=y;

        ch[chk^1][x]=y;
        fa[y]=x;

        if(z)ch[y==ch[1][z]][z]=x;
    }
}
```

```

    fa[x]=z;

    maintain(y);
    maintain(x);
}

void splay(int x){
    for(int f=fa[x];f=fa[x],f;rotate(x)){
        if(fa[f])rotate(get(x)==get(f)?f:x);
    }
    rt=x;
}

void ins(int k){
    if(!rt){
        ++tot;
        fa.push_back(0);
        val.push_back(k);
        cnt.push_back(1);
        sz.push_back(0);
        ch[0].push_back(0);
        ch[1].push_back(0);
        rt=tot;
        maintain(rt);
        return;
    }
    int cur=rt,f=0;
    while(1){
        if(val[cur]==k){
            cnt[cur]++;
            maintain(cur);
            maintain(f);
            splay(cur);
            break;
        }
        f=cur;
        cur=ch[val[cur]<k][cur];
        if(!cur){
            ++tot;
            fa.push_back(f);
            val.push_back(k);
            cnt.push_back(1);
            sz.push_back(0);
            ch[0].push_back(0);
            ch[1].push_back(0);
            ch[val[f]<k][f]=tot;
            maintain(tot);
            maintain(f);
            splay(tot);
            break;
        }
    }
}

int rk(int k){
    int res=0,cur=rt;

```

```

while(1){
    if(val[cur]>k){
        cur=ch[0][cur];
    }else{
        res+=sz[ch[0][cur]];
        if(!cur)return res+1;
        if(val[cur]==k){
            splay(cur);
            return res+1;
        }
        res+=cnt[cur];
        cur=ch[1][cur];
    }
}

int kth(int k){
    int cur=rt;
    while(1){
        if(ch[0][cur]&& k<=sz[ch[0][cur]]){
            cur=ch[0][cur];
        }else{
            k-=sz[ch[0][cur]]+cnt[cur];
            if(k<=0){
                splay(cur);
                return val[cur];
            }
            cur=ch[1][cur];
        }
    }
}

int pre(){
    int cur=ch[0][rt];
    if(!cur)return cur;
    while(ch[1][cur])cur=ch[1][cur];
    splay(cur);
    return cur;
}

int nxt(){
    int cur=ch[1][rt];
    if(!cur)return cur;
    while(ch[0][cur])cur=ch[0][cur];
    splay(cur);
    return cur;
}

void del(int k){
    rk(k);
    if(cnt[rt]>1){
        cnt[rt]--;
        maintain(rt);
        return;
    }
    if(!ch[0][rt]&&!ch[1][rt]){

```

```

        clear(rt);
        rt=0;
        return;
    }
    if(!ch[0][rt]){
        int cur=rt;
        rt=ch[1][rt];
        fa[rt]=0;
        clear(cur);
        return;
    }
    if(!ch[1][rt]){
        int cur=rt;
        rt=ch[0][rt];
        fa[rt]=0;
        clear(cur);
        return;
    }
    int cur=rt,x=pre();
    fa[ch[1][cur]]=x;
    ch[1][x]=ch[1][cur];
    clear(cur);
    maintain(rt);
}

int getpre(int x){
    ins(x);
    int res=pre();
    del(x);
    return val[res];
}

int getnxt(int x){
    ins(x);
    int res=nxt();
    del(x);
    return val[res];
}
};

int n,m;

int a[N];

splay_t splay[N<<2];

#define ls (p<<1)
#define rs (p<<1|1)
#define MID int m=s+((t-s)>>1)

void build(int p,int s,int t){
    splay[p].ins(-INF);
    splay[p].ins(INF);
    if(s==t){
        return;
    }
}

```

```

MID;
build(ls,s,m);
build(rs,m+1,t);
}

void ins(int p,int s,int t,int x,int c){
    splay[p].ins(c);
    if(s==t){
        return;
    }
    MID;
    if(x<=m)ins(ls,s,m,x,c);
    else ins(rs,m+1,t,x,c);
}

int qry_rank(int p,int s,int t,int l,int r,int x){
    if(l<=s&&t<=r){
        // -1 是为了排除-INF
        return splay[p].rk(x)-1;
    }
    MID;
    int res=0;
    if(l<=m)res+=qry_rank(ls,s,m,l,r,x);
    if(r>m)res+=qry_rank(rs,m+1,t,l,r,x);
    if(l<=m&&r>m)--res;
    return res;
}

int qry_kth(int l,int r,int k){
    int ql=0,qr=1e8;
    while(ql<=qr){
        int qmid=ql+qr>>1;
        if(k>=qry_rank(l,l,n,l,r,qmid))ql=qmid+1;
        else qr=qmid-1;
    }
    return qr;
}

void modify(int p,int s,int t,int x,int c){
    splay[p].del(a[x]);
    splay[p].ins(c);
    if(s==t){
        return;
    }
    MID;
    if(x<=m)modify(ls,s,m,x,c);
    else modify(rs,m+1,t,x,c);
}

int getpre(int p,int s,int t,int l,int r,int x){
    if(l<=s&&t<=r){
        return splay[p].getpre(x);
    }
    MID;
    int res=-INF;
    if(l<=m)res=max(res,getpre(ls,s,m,l,r,x));

```

```

        if(r>m)res=max(res,getpre(rs,m+1,t,l,r,x));
        return res;
    }

    int getnxt(int p,int s,int t,int l,int r,int x){
        if(l<=s&&t<=r){
            return splay[p].getnxt(x);
        }
        MID;
        int res=INF;
        if(l<=m)res=min(res,getnxt(ls,s,m,l,r,x));
        if(r>m)res=min(res,getnxt(rs,m+1,t,l,r,x));
        return res;
    }

    int main(){
        n=read(),m=read();
        build(1,1,n);
        rep(i,1,n)a[i]=read(),ins(1,1,n,i,a[i]);
        rep(i,1,m){
            int op=read();
            if(op==1){
                int l=read(),r=read(),x=read();
                printf("%d\n",qry_rank(1,1,n,l,r,x));
            }else if(op==2){
                int l=read(),r=read(),k=read();
                printf("%d\n",qry_kth(l,r,k));
            }else if(op==3){
                int x=read(),c=read();
                modify(1,1,n,x,c);
                a[x]=c;
            }else if(op==4){
                int l=read(),r=read(),x=read();
                printf("%d\n",getpre(1,1,n,l,r,x));
            }else if(op==5){
                int l=read(),r=read(),x=read();
                printf("%d\n",getnxt(1,1,n,l,r,x));
            }
        }
        return 0;
    }
}

```

rbtree in segment tree

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

#include<ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
using namespace __gnu_pbds;
typedef
tree<double,null_type,less<double>,rb_tree_tag,tree_order_statistics_node_update>
rbt_t;
/*
insert(), erase(), lower_bound(), order_of_key(), find_by_order(), prev(), next()

```

```

*/

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch-'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

const int N=5e4+10;
const int INF=2147483647;

int n,m;

int a[N];

struct tree_t{
    rbt_t rbt;

    void ins(int x,int tim){
        rbt.insert(x+tim*1e-6);
    }

    void del(int x){
        rbt.erase(rbt.lower_bound(x));
    }

    int rk(int x){
        return (int)rbt.order_of_key(x)+1;
    }

    int kth(int k){
        return (int)*rbt.find_by_order(k-1);
    }

    int pre(int x){
        return (int)round(*(--rbt.lower_bound(x)));
    }

    int nxt(int x){
        return (int)round(*rbt.lower_bound(x + 1));
    }
};

tree_t T[N<<2];

#define ls (p<<1)
#define rs (p<<1|1)
#define MID int m=s+((t-s)>>1)

void build(int p,int s,int t){
    T[p].ins(-INF,0);

```



```

        T[p].ins(INF,0);
        if(s==t){
            return;
        }
        MID;
        build(ls,s,m);
        build(rs,m+1,t);
    }

    void ins(int p,int s,int t,int x,int c,int tim){
        T[p].ins(c,tim);
        if(s==t){
            return;
        }
        MID;
        if(x<=m)ins(ls,s,m,x,c,tim);
        else ins(rs,m+1,t,x,c,tim);
    }

    int qry_rank(int p,int s,int t,int l,int r,int x){
        if(l<=s&&t<=r){
            // -1 是为了排除-INF
            return T[p].rk(x)-1;
        }
        MID;
        int res=0;
        if(l<=m)res+=qry_rank(ls,s,m,l,r,x);
        if(r>m)res+=qry_rank(rs,m+1,t,l,r,x);
        if(l<=m&&r>m)--res;
        return res;
    }

    int qry_kth(int l,int r,int k){
        int ql=0,qr=1e8;
        while(ql<=qr){
            int qmid=ql+qr>>1;
            if(k>=qry_rank(l,1,n,l,r,qmid))ql=qmid+1;
            else qr=qmid-1;
        }
        return qr;
    }

    void modify(int p,int s,int t,int x,int c,int tim){
        T[p].del(a[x]);
        T[p].ins(c,tim);
        if(s==t){
            return;
        }
        MID;
        if(x<=m)modify(ls,s,m,x,c,tim);
        else modify(rs,m+1,t,x,c,tim);
    }

    int getpre(int p,int s,int t,int l,int r,int x){
        if(l<=s&&t<=r){
            return T[p].pre(x);
        }
    }

```

```

    }
    MID;
    int res=-INF;
    if(l<=m)res=max(res,getpre(ls,s,m,l,r,x));
    if(r>m)res=max(res,getpre(rs,m+1,t,l,r,x));
    return res;
}

int getnxt(int p,int s,int t,int l,int r,int x){
    if(l<=s&&t<=r){
        return T[p].nxt(x);
    }
    MID;
    int res=INF;
    if(l<=m)res=min(res,getnxt(ls,s,m,l,r,x));
    if(r>m)res=min(res,getnxt(rs,m+1,t,l,r,x));
    return res;
}

int main(){
    n=read(),m=read();
    build(1,1,n);
    rep(i,1,n)a[i]=read(),ins(1,1,n,i,a[i],i);
    rep(i,1,m){
        int op=read();
        if(op==1){
            int l=read(),r=read(),x=read();
            printf("%d\n",qry_rank(1,1,n,l,r,x));
        }else if(op==2){
            int l=read(),r=read(),k=read();
            printf("%d\n",qry_kth(l,r,k));
        }else if(op==3){
            int x=read(),c=read();
            modify(1,1,n,x,c,i+n);
            a[x]=c;
        }else if(op==4){
            int l=read(),r=read(),x=read();
            printf("%d\n",getpre(1,1,n,l,r,x));
        }else if(op==5){
            int l=read(),r=read(),x=read();
            printf("%d\n",getnxt(1,1,n,l,r,x));
        }
    }
    return 0;
}

```

分块

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

#define LL long long

int read(){

```

```

int res=0,sign=1;char ch=getchar();
for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-')sign=-sign;
for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar())res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');
return res*sign;
}

const int N=5e4+10;

int n;

int id[N],len;
LL a[N],b[N],s[N];

void add(int l,int r,int c){
    int op=id[l],ed=id[r];
    if(op==ed){
        for(int i=l;i<=r;++i)a[i]+=c,s[op]+=c;
        return;
    }
    for(int i=l;id[i]==op;++i)a[i]+=c,s[op]+=c;
    for(int i=op+1;i<ed;++i)b[i]+=c,s[i]+=1ll*c*len;
    for(int i=r;id[i]==ed;--i)a[i]+=c,s[ed]+=c;
}

int query(int l,int r,int mod){
    int op=id[l],ed=id[r],res=0;
    if(op==ed){
        for(int i=l;i<=r;++i)res=(1ll*res+a[i]+b[op]+mod)%mod;
        return res;
    }
    for(int i=l;id[i]==op;++i)res=(1ll*res+a[i]+b[op]+mod)%mod;
    for(int i=op+1;i<ed;++i)res=(1ll*res+s[i]+mod)%mod;
    for(int i=r;id[i]==ed;--i)res=(1ll*res+a[i]+b[ed]+mod)%mod;
    return res;
}

int main(){
    n=read();len=sqrt(n);
    for(int i=1;i<=n;++i){
        a[i]=read();
        id[i]=(i-1)/len+1;
        s[id[i]]+=a[i];
    }
    for(int i=1,op,l,r,c;i<=n;++i){
        op=read(),l=read(),r=read(),c=read();
        if(op==0){
            add(l,r,c);
        }else{
            printf("%d\n",query(l,r,c+1));
        }
    }
    return 0;
}

```

图论

判断是否是一个点树

通过 $tin[v] \geq tin[u] \ \&\& \ tin[v] \leq tout[u]$ 判断

LCA

倍增版本

```
void dfs(int x,int fno){
    fa[x][0]=fno;
    dep[x]=dep[fno]+1;
    for(int i=1;i<=30;++i){
        fa[x][i]=fa[fa[x][i-1]][i-1];
    }
    for(auto&& v:p[x])if(v!=fno){
        dfs(v,x);
    }
}

int lca(int x,int y){
    if(dep[x]>dep[y])swap(x,y);
    for(int i=30;i>=0;--i)if(dep[fa[y][i]]>=dep[x]){
        y=fa[y][i];
    }
    if(x==y)return x;
    for(int i=30;i>=0;--i)if(fa[x][i]!=fa[y][i]){
        x=fa[x][i],y=fa[y][i];
    }
    return fa[x][0];
}
```

树剖版本

```
void dfs(int u,int fno){
    fa[u]=fno;
    siz[u]=1;
    dep[u]=dep[fno]+1;
    son[u]=-1;
    for(auto&& v:G[u])if(v!=fno){
        dfs(v,u);
        siz[u]+=siz[v];
        if(son[u]==-1||siz[son[u]]<siz[v])son[u]=v;
    }
}

void _dfs(int u,int ufno){
    top[u]=ufno;
    if(son[u]==-1)return;
    _dfs(son[u],ufno);
    for(auto&& v:G[u])if(v!=fa[u]&&v!=son[u]){
        _dfs(v,v);
    }
}
```

```

}

int lca(int u,int v){
    while(top[u]!=top[v]){
        if(dep[top[u]]<dep[top[v]])v=fa[top[v]];
        else u=fa[top[u]];
    }
    if(dep[u]<dep[v])return u;
    else return v;
}

```

最短路

SPFA

```

bool spfa(int n,int s){
    fill_n(dis+1,n,INF);
    dis[s]=0, isv[s]=1;
    q.push(s);
    while(!q.empty()){
        int u=q.front();q.pop();
        isv[u]=0;
        for(auto& [v,w]:p[u]){
            if(dis[v]>dis[u]+w){
                dis[v]=dis[u]+w;
                cnt[v]=cnt[u]+1;
                if(cnt[v]>=n)return false;
                if(!isv[v])q.push(v), isv[v]=1;
            }
        }
    }
    return true;
}

```

Dijkstra

```

void dijkstra(int n,int s){
    fill_n(dis+1,n,INF);
    dis[s]=0;
    q.push({s,0});
    while(!q.empty()){
        int u=q.top().u;
        q.pop();
        if(vis[u])continue;
        vis[u]=1;
        for(auto& [v,w]:p[u]){
            if(dis[v]>dis[u]+w){
                dis[v]=dis[u]+w;
                q.push({v,dis[v]});
            }
        }
    }
}

```

差分约束

给出一组包含 m 个不等式，有 n 个未知数的形如：

$$\begin{cases} x_{c_1} - x_{c'_1} \leq y_1 \\ x_{c_2} - x_{c'_2} \leq y_2 \\ \dots \\ x_{c_m} - x_{c'_m} \leq y_m \end{cases}$$

的不等式组，求任意一组满足这个不等式组的解。

这个题的意思就是将 c' 向 c 建边，权值为 y ，看这个图有没有负环。用 spfa 算法处理即可。

MST

Kruskal 贪心加边即可

次小生成树

方法是先找出最小生成树，建立最小生成树。然后倍增维护最小生成树的祖先，路径上的最大权值，次大权值。

最后在看所有的非最小生成树的边的两点在最小生成树中的路径上的最大值是多少，并且与未使用的该边替换，更新答案。如果最大值等于未使用的该边的权值，那么直接找次大值替换。

最后的答案等于所有替换方案的最小值。

```
#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;
const int MAXN=1e5+2;
const int MAXM=3e5+2;
const int INF=0x7fffffffffffffff;

struct Tr{
private:
    struct edge{
        int v,w;
    };
    vector<edge> p[MAXN];
    int fa[MAXN][31],dep[MAXN],m[MAXN][31],mm[MAXN][31];

public:
    void add(int u,int v,int w){
        p[u].push_back({v,w});
        p[v].push_back({u,w});
    }

    void dfs(int x,int fno){
        if(fno)dep[x]=dep[fno]+1,fa[x][0]=fno,mm[x][0]=-INF;

        for(int i=1;i<=30;++i){
            fa[x][i]=fa[fa[x][i-1]][i-1];
            int tmp[4]={m[x][i-1],m[fa[x][i-1]][i-1],
                mm[x][i-1],mm[fa[x][i-1]][i-1]};
            sort(tmp,tmp+4);
        }
    }
};
```

```

        m[x][i]=tmp[3];
        int ptr=2;
        for(;ptr>=0&&tmp[ptr]==tmp[3];)--ptr;}
        mm[x][i]=ptr==-1?-INF:tmp[ptr];
    }

    for(auto& edge:p[x]){
        int v=edge.v,w=edge.w;
        if(v==fno)continue;
        m[v][0]=w;
        dfs(v,x);
    }
}

int lca(int x,int y){
    if(dep[x]>dep[y])swap(x,y);
    for(int i=30;i>=0;--i){
        if(dep[fa[y][i]]>=dep[x])y=fa[y][i];
    }
    if(x==y)return x;
    for(int i=30;i>=0;--i){
        if(fa[x][i]!=fa[y][i]){
            x=fa[x][i],y=fa[y][i];
        }
    }
    return fa[x][0];
}

int query(int x,int y,int w){
    int ret=-INF;
    for(int i=30;i>=0;--i){
        if(dep[fa[x][i]]>=dep[y]){
            if(w!=m[x][i])
                ret=max(ret,m[x][i]);
            else
                ret=max(ret,mm[x][i]);
            x=fa[x][i];
        }
    }
    return ret;
}

};

Tr tr;

struct _edge_{
    int u,v,w;
    bool operator<(const _edge_& other)const{return w<other.w;}
};

vector<_edge_> edges;
int fa[MAXN],n,m,used[MAXM];

int find(int x){return fa[x]==x?x:fa[x]=find(fa[x]);}
void unite(int u,int v){int fu=find(u),fv=find(v);if(fu!=fv)fa[fu]=fv;}

```

```

int kruskal(){
    int ans=0,cnt=0;
    for(int i=1;i<=n;++i)fa[i]=i;
    sort(edges.begin(),edges.end());
    for(int i=0;i<edges.size();++i){
        _edge_ e=edges[i];
        int u=e.u,v=e.v,w=e.w;
        if(find(u)!=find(v)){
            unite(u,v);
            ans+=w,++cnt;
            used[i]=1;
            tr.add(u,v,w);
        }
        if(cnt==n-1)break;
    }
    return ans;
}

signed main(){
    cin>>n>>m;
    for(int i=1;i<=m;++i){
        int u,v,w;cin>>u>>v>>w;
        edges.push_back({u,v,w});
    }
    int ans_1=kruskal(),ans_2=INF;
    tr.dfs(1,0);
    for(int i=0;i<edges.size();++i){
        if(!used[i]){
            int u=edges[i].u,v=edges[i].v,w=edges[i].w;
            int _lca=tr.lca(u,v);
            int tmp1=tr.query(u,_lca,w);
            int tmp2=tr.query(v,_lca,w);
            int _m=max(tmp1,tmp2);
            if(_m>-INF)
                ans_2=min(ans_2,ans_1-_m+w);
        }
    }
    if(ans_2!=INF)cout<<ans_2<<endl;
    else cout<<-1<<endl;
}

```

Tarjan

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int MAXN=1e4+2;

int n,m;
int dfn[MAXN],low[MAXN],cnt;
int bel[MAXN],ins[MAXN],siz[MAXN],idx;
int st[MAXN],top;

vector<int> p[MAXN];

```



```

void add(int u,int v){
    p[u].push_back(v);
}

void tarjan(int x){
    dfn[x]=low[x]=++cnt;
    ins[st[++top]=x]=1;
    for(auto v:p[x]){
        if(!dfn[v]){
            tarjan(v);
            low[x]=min(low[x],low[v]);
        }else if(ins[v]){
            low[x]=min(low[x],dfn[v]);
        }
    }
    if(low[x]==dfn[x]){
        int v; ++idx;
        do{
            ins[v=st[top--]]=0;
            bel[v]=idx;
            ++siz[idx];
        }while(v!=x);
    }
}

int main(){
    cin>>n>>m;
    for(int i=1,u,v;i<=m;++i){
        cin>>u>>v;
        add(u,v);
    }
    for(int i=1;i<=n;++i){
        if(!dfn[i])tarjan(i);
    }
    int ans=0;
    for(int i=1;i<=idx;++i){
        //siz>1的强连通分量个数
        ans+=siz[i]>1;
    }cout<<ans<<'\n';
    return 0;
}

```

若是无向图，则上面的 `else if` 就直接 `else`，并且注意 `dfs` 添加一个参数 `f` 表示上一个点（类似父亲），遍历 `v` 时添加 `if(v!=f)`

无向图的割边：

```

//求割边 加在!dfn[v]分支最后
if(low[v]>dfn[x])e.push_back({min(x,v),max(x,v)});

```

2-SAT问题

若某个条件是 a 或 b

这个题的关键是将非 a 与 b 连接，非 b 与 a 连接。我们在这个题先分配状态， $1 \sim n$ 为 $x_i = 0$ ， $n+1 \sim 2*n$ 为 $x_i = 1$ 。这样子我们只需要跑一遍缩点（缩点后的图是有向无环图），然后看每一个 $x_i = 0$ 的状态和 $x_i = 1$ 的状态的拓扑序，我们创造解只要看拓扑序大的，也就是记录连通分量顺序小的。如果一样，说明强连通分量中出现了矛盾。

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

const int MAXN=2e6+2;

int n,m;
int dfn[MAXN],low[MAXN],cnt;
int bel[MAXN],idx;
int st[MAXN],ins[MAXN],top;

vector<int> p[MAXN];

inline void add(int u,int v){
    p[u].push_back(v);
}

void tarjan(int x){
    dfn[x]=low[x]=++cnt;
    ins[st[++top]=x]=1;
    for(auto v:p[x]){
        if(!dfn[v]){
            tarjan(v);
            low[x]=min(low[x],low[v]);
        }else if(ins[v]){
            low[x]=min(low[x],dfn[v]);
        }
    }
    if(low[x]==dfn[x]){
        int v; ++idx;
        do{
            ins[v=st[top--]]=0;
            bel[v]=idx;
        }while(v!=x);
    }
}

vector<int> ans;

int main(){
    cin>>n>>m;
    for(int i=1,u,a,v,b;i<=m;++i){
        // ksat问题计算理论中讲过，能否使得所有k元的析取表达式之合取为真
        // 2sat: u==a | v==b
        cin>>u>>a>>v>>b;
        add(u+(1-a)*n,v+b*n);
    }
}
```

```

        add(v+(1-b)*n,u+a*n);
    }
    for(int i=1;i<=2*n;++i){
        if(!dfn[i])tarjan(i);
    }
    bool flag=true;
    for(int i=1;i<=n;++i){
        if(bel[i]<bel[i+n]){
            ans.push_back(0);
        }else if(bel[i]>bel[i+n]){
            ans.push_back(1);
        }else{
            flag=false;
            break;
        }
    }
    if(flag){
        cout<<"POSSIBLE"<<'\n';
        for(auto i:ans){
            cout<<i<<" ";
        }cout<<'\n';
    }else{
        cout<<"IMPOSSIBLE"<<'\n';
    }
    return 0;
}

```

网络流

最大流

EK算法

通过 `bfs()` 查找增广路来更新最大流

关键思想

`lst`：在 `bfs` 过程中找到的增广路的某个点，它上个点的索引

`pre`：在 `bfs` 过程中找到的增广路的某个点，它上个点与自己连成的边在上个点的邻接表中的索引

`flow`：某个点的通过的流量

```

#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;

const int MAXN=2e2+2;
const int INF=0x3f3f3f3f3f3f3f3f;

struct edge_t{
    int v,w,rid;
};

int n,m,s,t;
vector<edge_t> G[MAXN];

```

```

bool vis[MAXN];
int lst[MAXN],pre[MAXN],flow[MAXN];

inline void add(int u,int v,int w){
    int id=G[u].size();
    int rid=G[v].size();
    G[u].push_back({v,w,rid});
    G[v].push_back({u,0,id});
}

bool bfs(){
    memset(vis,0,sizeof vis);
    queue<int> q;
    q.push(s);
    vis[s]=true;
    flow[s]=INF;
    while(!q.empty()){
        int u=q.front();q.pop();
        for(int i=0;i<G[u].size();++i){
            int v=G[u][i].v,w=G[u][i].w;
            if(!vis[v]&&w>0){
                vis[v]=true;
                flow[v]=min(flow[u],w);
                lst[v]=u;
                pre[v]=i;
                if(v==t)return true;
                q.push(v);
            }
        }
    }
    return false;
}

int ek(){
    int res=0;
    while(bfs()){
        res+=flow[t];
        for(int i=t;i!=s;i=lst[i]){
            int u=lst[i],v=i,rid=G[u][pre[v]].rid;
            G[u][pre[v]].w-=flow[t];
            G[v][rid].w+=flow[t];
        }
    }
    return res;
}

signed main(){
    cin>>n>>m>>s>>t;
    for(int i=1,u,v,w;i<=m;++i){
        cin>>u>>v>>w;
        add(u,v,w);
    }
    cout<<ek()<<'\n';
}

```

Dinic算法

通过 bfs() 分层后，考虑当前弧优化和剪枝的情况下做 dfs() 去更新最大流，下面 dfs() 有两种写法，推荐未注释写法。

关键思想

dep：bfs 分层结果

cur：当前弧优化，就是将不需要搜的边排除掉所用到的

```
#include <bits/stdc++.h>
#define int long long
using namespace std;

const int MAXN=2e2+2;
const long long INF=0x3f3f3f3f3f3f3f3f;

int n,m,s,t;
int dep[MAXN],cur[MAXN];

struct edge_t{
    int v,w,rid;
};

vector<edge_t> G[MAXN];

inline void add(int u,int v,int w){
    int id=G[u].size();
    int rid=G[v].size();
    G[u].push_back({v,w,rid});
    G[v].push_back({u,0,id});
}

bool bfs(){
    memset(dep,-1,sizeof dep);
    queue<int> q;
    q.push(s);dep[s]=0;
    while(!q.empty()){
        int u=q.front();q.pop();
        for(auto&& [v,w,rid]:G[u])if(dep[v]==-1&&w>0){
            dep[v]=dep[u]+1;
            q.push(v);
        }
    }
    return dep[t]!=-1;
}

// int dfs(int u,int flow){
//     if(u==t)return flow;
//     for(int i=cur[u];i<G[u].size();++i){
//         cur[u]=i;
//         int v=G[u][i].v,w=G[u][i].w,rid=G[u][i].rid,res;
//         if(dep[v]==dep[u]+1&&w>0){
//             if(res=dfs(v,min(w,flow))){
//                 G[u][i].w-=res;
//             }
//         }
//     }
//     return 0;
// }
```

```

//          G[v][rid].w+=res;
//          return res;
//          }else dep[v]=-1;
//      }
//  }
//  return 0;
// }

int dfs(int u,int flow){
    if(u==t)return flow;
    int ans=0,res;
    for(int i=cur[u];i<G[u].size()&&flow>0;++i){
        cur[u]=i;
        int v=G[u][i].v,w=G[u][i].w,rid=G[u][i].rid;
        if(dep[v]==dep[u]+1&&w>0){
            res=dfs(v,min(flow,w));
            if(res==0)dep[v]=-1;
            G[u][i].w-=res;
            G[v][rid].w+=res;
            ans+=res;
            flow-=res;
        }
    }
    return ans;
}

int dinic(){
    int ans=0,res;
    while(bfs()){
        memset(cur,0,sizeof cur);
        while(res=dfs(s,INF))ans+=res;
    }
    return ans;
}

signed main(){
    cin>>n>>m>>s>>t;
    for(int i=1,u,v,w;i<=m;++i){
        cin>>u>>v>>w;
        add(u,v,w);
    }
    cout<<dinic()<<'\n';
}

```

最小割

最小割等于最大流

最小费用最大流

最大流情况下的最小费用（因为最大流的分配情况不唯一），实现就是用 EK 算法的基础将 bfs 改成最短路 spfa

关键思想（EK 之外的）

dis：当前增广路的单位费用和

vis: spfa 算法中的入队判断

反向建边的单位费用为相反数

```
#include <bits/stdc++.h>
//ek中bfs改成spfa
using namespace std;

const int MAXN=5e3+10;
const int INF=0x3f3f3f3f;

int n,m,s,t,minc,maxf;
int flow[MAXN],lst[MAXN],pre[MAXN];
int dis[MAXN],vis[MAXN];

struct edge_t{
    int v,w,c,rid;
};

vector<edge_t> G[MAXN];

inline void add(int u,int v,int w,int c){
    int id=G[u].size();
    int rid=G[v].size();
    G[u].push_back({v,w,c,rid});
    G[v].push_back({u,0,-c,id});
}

bool spfa(){
    queue<int> q;
    memset(dis,0x3f,sizeof dis);
    memset(vis,0,sizeof vis);
    q.push(s);dis[s]=0;vis[s]=1;flow[s]=INF;
    while(!q.empty()){
        int u=q.front();q.pop();vis[u]=0;
        for(int i=0;i<G[u].size();++i){
            int v=G[u][i].v,w=G[u][i].w,c=G[u][i].c,rid=G[u][i].rid;
            if(dis[v]>dis[u]+c&&w>0){
                dis[v]=dis[u]+c;
                flow[v]=min(flow[u],w);
                lst[v]=u;
                pre[v]=i;
                if(!vis[v])q.push(v),vis[v]=1;
            }
        }
    }
    if(dis[t]==INF)return false;
    return true;
}

void mcmf(){
    while(spfa()){
        maxf+=flow[t];
        minc+=dis[t]*flow[t];
        for(int i=t;i!=s;i=lst[i]){

```

```

        int u=lst[i],v=i,rid=G[u][pre[v]].rid;
        G[u][pre[v]].w-=flow[t];
        G[v][rid].w+=flow[t];
    }
}

int main(){
    cin>>n>>m>>s>>t;
    for(int i=1,u,v,w,c;i<=m;++i){
        cin>>u>>v>>w>>c;
        add(u,v,w,c);
    }
    mcmf();
    cout<<maxf<<' '<<minc<<'\n';
    return 0;
}

```

杂项

珂朵莉树

- $1\ l\ r\ x$: 将 $[l, r]$ 区间所有数加上 x
- $2\ l\ r\ x$: 将 $[l, r]$ 区间所有数改成 x
- $3\ l\ r\ x$: 输出将 $[l, r]$ 区间从小到大排序后的第 x 个数是的多少(即区间第 x 小, 数字大小相同算多次, 保证 $1 \leq x \leq r - l + 1$)
- $4\ l\ r\ x\ y$: 输出 $[l, r]$ 区间每个数字的 x 次方的和模 y 的值(即 $(\sum_{i=l}^r a_i^x) \mod y$)

```

#include <bits/stdc++.h>
#define LL long long
#define int long long
using namespace std;

const int MAXN=1e5+2;
const int mod7=1e9+7;

int n,m,seed,vmax,a[MAXN];

int rnd(){
    int ret=seed;
    seed=(111*seed*7+13)%mod7;
    return ret;
}

int qpow(LL a,int b,int mod){
    int base=111*a%mod,res=1;
    for(;b;b>>=1,base=111*base*base%mod)if(b&1){
        res=111*res*base%mod;
    }
    return res%mod;
}

namespace odt{

```



```

struct node_t{
    int l,r;
    mutable LL v;
    node_t(int _l,int _r,LL _v):l(_l),r(_r),v(_v){}
    bool operator<(const node_t& o)const{return l<o.l;}
};

set<node_t> tree;

auto split(int x){
    auto it=tree.lower_bound(node_t{x,0,0});
    if(it!=tree.end()&&it->l==x)return it;
    --it;
    int l=it->l,r=it->r;
    LL v=it->v;
    tree.erase(it);
    tree.insert(node_t(l,x-1,v));
    return tree.insert(node_t(x,r,v)).first;
}

void assign(int l,int r,LL v){
    auto ed=split(r+1),op=split(l);
    tree.erase(op,ed);
    tree.insert(node_t(l,r,v));
}

void add(int l,int r,LL v){
    auto ed=split(r+1),op=split(l);
    for(auto it=op;it!=ed;++it){
        it->v+=v;
    }
}

int kth(int l,int r,int k){
    auto ed=split(r+1),op=split(l);
    vector<pair<int,int>> vec;
    for(auto it=op;it!=ed;++it){
        vec.push_back(make_pair(it->v,it->r-it->l+1));
    }
    sort(vec.begin(),vec.end());
    for(auto&& i:vec){
        k-=i.second;
        if(k<=0)return i.first;
    }
    return -1;
}

int sum_of_pow(int l,int r,int x,int y){
    auto ed=split(r+1),op=split(l);
    int res=0;
    for(auto it=op;it!=ed;++it){
        res=1ll*(1ll*res+1ll*qpow(it->v,x,y)*(it->r-it->l+1))%y;
    }
    return res;
}

```

```

void start(){
    for(int i=1;i<=n;++i){
        a[i]=(rnd()%vmax)+1;
        odt::tree.insert(odt::node_t(i,i,a[i]));
    }
    odt::tree.insert(odt::node_t(n+1,n+1,0));
}

signed main(){
    cin>>n>>m>>seed>>vmax;
    start();
    for(int i=1,op,l,r,x,y;i<=m;++i){
        op=(rnd()%4)+1;
        l=(rnd()%n)+1;
        r=(rnd()%n)+1;
        if(l>r)swap(l,r);

        if(op==3){
            x=(rnd()%(r-l+1))+1;
        }else{
            x=(rnd()%vmax)+1;
        }

        if(op==4){
            y=(rnd()%vmax)+1;
        }

        if(op==1){
            odt::add(l,r,x);
        }else if(op==2){
            odt::assign(l,r,x);
        }else if(op==3){
            cout<<odt::kth(l,r,x)<<'\n';
        }else if(op==4){
            cout<<odt::sum_of_pow(l,r,x,y)<<'\n';
        }
    }
}

```

普通莫队

1到N之间的格子，每个都有一个颜色c，区间[l, r]之间取两个格子颜色相同的概率

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

#define int long long

int read(){
    int res=0,sign=1;char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-')sign=-sign;
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar())res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');
    return res*sign;
}

```

```

}

const int N=5e4+10;

int n,m,len;
int c[N],id[N];

struct query_t{
    int l,r,idx;
    bool operator<(const query_t& o)const{
        if(id[l]!=id[o.l])return l<o.l;
        return (id[l]&1)?r<o.r:r>o.r;
    }
};

int gcd(int a,int b){
    if(!b)return a;
    return gcd(b,a%b);
}

struct ans_t{
    int p,q;

    void setans(int _p,int _q){
        int _gcd=gcd(_p,_q);
        p=_p/_gcd,q=_q/_gcd;
    }
};

query_t q[N];
ans_t ans[N];

int sum,cnt[N];

void add(int i){
    sum+=cnt[i];
    ++cnt[i];
}

void del(int i){
    --cnt[i];
    sum-=cnt[i];
}

signed main(){
    // freopen("C:\\Users\\ASUS\\Downloads\\P1494_7.in","r",stdin);
    n=read(),m=read();
    len=sqrt(n);
    for(int i=1;i<=n;++i){
        c[i]=read();
        id[i]=(i-1)/len+1;
    }
    for(int i=1;i<=m;++i){
        q[i].l=read(),q[i].r=read(),q[i].idx=i;
    }
    sort(q+1,q+1+m);
}

```

```

for(int i=1,l=1,r=0;i<=m;++i){
    int idx=q[i].idx;
    if(q[i].l==q[i].r){
        ans[idx].setans(0,1);
        continue;
    }
    while(l>q[i].l)add(c[--l]);
    while(r<q[i].r)add(c[++r]);
    while(l<q[i].l)del(c[l++]);
    while(r>q[i].r)del(c[r--]);
    ans[idx].setans(sum,(r-l+1)*(r-l)/2);
}
for(int i=1;i<=m;++i){
    printf("%lld/%lld\n",ans[i].p,ans[i].q);
}
}

```

整体二分（仅静态区间第k小问题模板）

对于求静态区间第k小问题，我们有一种离线做法，叫做整体二分，代码如下：

（实际上树套树解决的问题如果是离线算法可做的，可以用到CDQ分治或者整体二分）

```

#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch-'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

const int N=2e5+10;

int n,m;

int a[N],rk[N],len;

void init(){
    rep(i,1,n)rk[i]=a[i];
    sort(rk+1,rk+1+n);
    len=unique(rk+1,rk+1+n)-rk-1;
}

int getidx(int x){
    return lower_bound(rk+1,rk+1+len,x)-rk;
}

```

```

int d[N];

void ins(int x,int c){
    for(;x<N;x+=x&-x){
        d[x]+=c;
    }
}

int query(int x){
    int res=0;
    for(;x;x-=x&-x){
        res+=d[x];
    }
    return res;
}

struct query_t{
    int l,r,k,id;
};

query_t q[N<<1],q1[N<<1],q2[N<<1];

int tot;

int ans[N];

void solve(int s,int t,int q1,int qr){
    if(q1>qr)return;
    if(s==t){
        rep(i,q1,qr)if(q[i].id)ans[q[i].id]=s;
        return;
    }
    int mid=s+t>>1,tot1=0,tot2=0;
    rep(i,q1,qr)if(!q[i].id){
        if(q[i].k<=mid){
            ins(q[i].l,1);
            q1[++tot1]=q[i];
        }else{
            q2[++tot2]=q[i];
        }
    }else{
        int x=query(q[i].r)-query(q[i].l-1);
        if(q[i].k<=x){
            q1[++tot1]=q[i];
        }else{
            q[i].k-=x;
            q2[++tot2]=q[i];
        }
    }

    rep(i,1,tot1)if(!q1[i].id)ins(q1[i].l,-1);
    rep(i,1,tot1)q[q1+i-1]=q1[i];
    rep(i,1,tot2)q[q1+tot1+i-1]=q2[i];
    solve(s,mid,q1,q1+tot1-1);
    solve(mid+1,t,q1+tot1,qr);
}

```

```

int main(){
    n=read(),m=read();
    rep(i,1,n){
        a[i]=read();
    }
    init();
    rep(i,1,n){
        q[++tot]={i,0,getidx(a[i]),0};
    }
    rep(i,1,m){
        int l=read(),r=read(),k=read();
        q[++tot]={l,r,k,i};
    }
    solve(1,len,1,tot);
    rep(i,1,m)printf("%d\n",rk[ans[i]]);
    return 0;
}

```

pbds中的平衡树

由于 pbds 中平衡树中元素不能重复，为了使得达到重复的效果，用 double 的模板然后包装一下，最后只要记得插入的时候投一个询问时间戳就好了

```

#include <cstdio>

using namespace std;

#include<ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
using namespace __gnu_pbds;
typedef
tree<double,null_type,less<double>,rb_tree_tag,tree_order_statistics_node_update>
rbt_t;
/*
insert(), erase(), lower_bound(), order_of_key(), find_by_order(), prev(), next()
*/

int read(){
    int res=0,sign=1;
    char ch=getchar();
    for(;ch<'0' || ch>'9';ch=getchar())if(ch=='-'){sign=-sign;}
    for(;ch>='0'&&ch<='9';ch=getchar()){res=(res<<3)+(res<<1)+(ch^'0');}
    return res*sign;
}

#define rep(i,l,r) for(int i=l;i<=r;++i)
#define dep(i,r,l) for(int i=r;i>=l;--i)

struct tree_t{
    rbt_t rbt;

    void ins(int x,int tim){
        rbt.insert(x+tim*1e-6);
    }
}

```

```

void del(int x){
    rbt.erase(rbt.lower_bound(x));
}

int rk(int x){
    return (int)rbt.order_of_key(x)+1;
}

int kth(int k){
    return (int)*rbt.find_by_order(k-1);
}

int pre(int x){
    return (int)round(*(--rbt.lower_bound(x)));
}

int nxt(int x){
    return (int)round(*rbt.lower_bound(x + 1));
}
};

tree_t T;

int q;

int main(){
    q=read();
    rep(i,1,q){
        int opt=read(),x=read();
        if(opt == 1)
            T.ins(x,i);
        if(opt == 2)
            T.del(x);
        if(opt == 3)
            printf("%d\n",T.rk(x));
        if(opt == 4)
            printf("%d\n",T.kth(x));
        if(opt == 5)
            printf("%d\n",T.pre(x));
        if(opt == 6)
            printf("%d\n",T.nxt(x));
    }
    return 0;
}

```

