《数值计算方法》

插值与拟合

讲授人：杨 程
时 间：2021-2022学年
秋季学期
Email: yang_cheng@nun.edu.cn

目录

插值与拟合

问题的提出

许多实际问题都用函数 y=f(x) 来表示某种内在规律的数量关系。

若已知 f(x) 在某个区间 [a,b] 上存在、连续，但只能给出 [a,b] 上一系列点的函数值表时，或者函数有解析表达式，但计算过于复杂、使用不方便，通常也造一个函数值表（如三角函数表、对数表等）时，为了研究函数的变化规律，往往需要求出不在表上的函数值。

因此我们希望根据给定的函数表构造一个既能反映函数 f(x) 的特性，又便于计算的简单函数 P(x)，用 P(x) 近似 f(x)。这就引出了插值问题。

设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，且已知在点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ ，若存在一简单函数 $P(x)$ ，使

$$P(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,\cdots,n),$$

成立，就称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**，点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为**插值节点**，包含节点的区间 $[a,b]$ 称为**插值区间**，求插值函数 $P(x)$ 的方法称为**插值法。**

常用的有代数多项式、三角多项式和有理函数等。

当选用代数多项式作为插值函数时，相应的插值问题就称为多项式插值。

在多项式插值中，最常见、最基本的问题是：求一次数不超过n的代数多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ （1）

使 $P_n(x_i)=y_i(i=0,1,,\cdots,n)$ （2）

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为实数。满足插值条件(1)的多项式(2)，称为函数f(x) 在节点处的n次插值多项式。

若 $P(x)$ 是次数不超过 n 的代数多项式，即

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

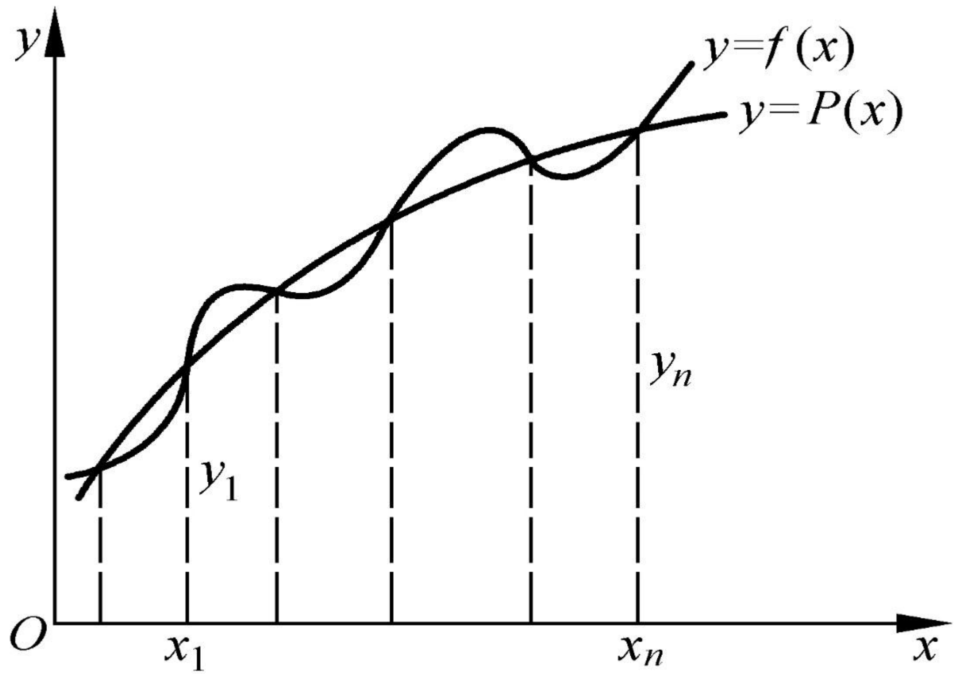
其中 a_i 为实数，就称 $P(x)$ 为**插值多项式**，相应的插值法称为**多项式插值**。

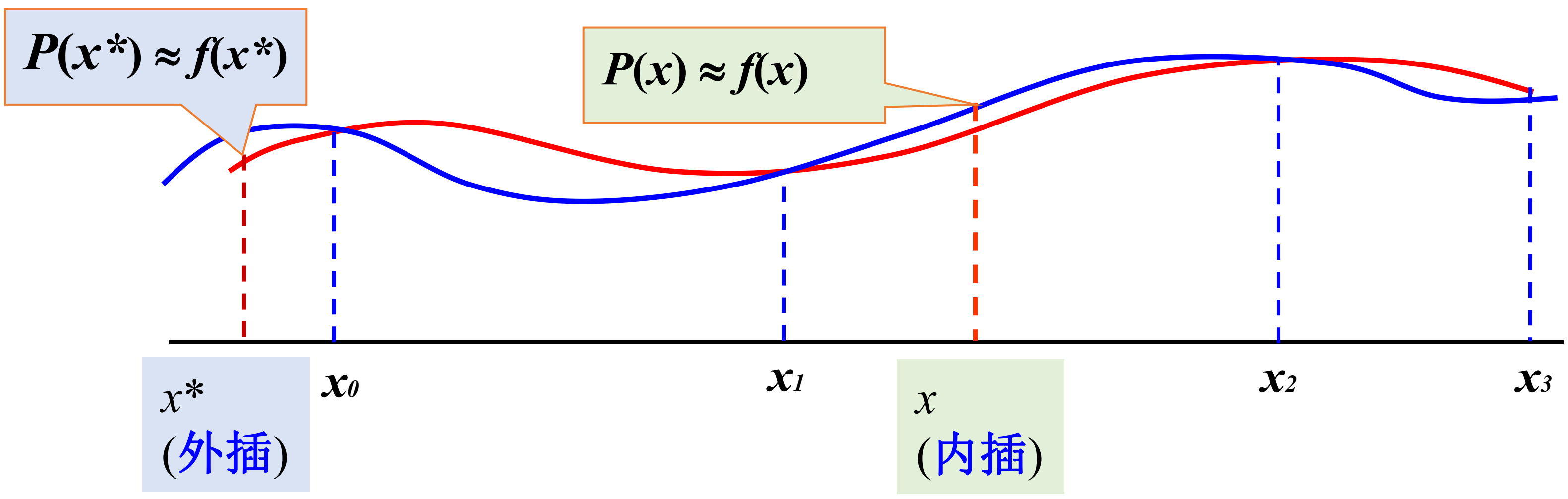
若 $P(x)$ 为分段的多项式，就称为**分段插值**.

若 $P(x)$ 为三角多项式 ，就称为**三角插值**.

本章只讨论**多项式插值**。

从几何上看，插值法就是确定曲线 $y = P(x)$，使其通过给定的 $n+1$ 个点 (x_i, y_i), $i = 0,1,\cdots,n$，并用它近似已知曲线 $y = f(x)$。





$P(x^*) \approx f(x^*)$
$P(x) \approx f(x)$
x_0
x_1
x_2
x_3
x^*
(外插)
x
(内插)

分析插值多项式的存在唯一性。

设在区间$[a,b]$上给定$n+1$个点

$$a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$$

上的函数值$y_i = f(x_i)(i = 0,1,\cdots,n)$，求**次数不超过$n$的**多项式$P(x)$，使

$$P(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,\cdots,n), \qquad （**）$$

由此可以得到关于系数$a_0, a_1, \cdots, a_n$的$n+1$元线性方程组

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = y_0, \\ a_0 + a_1 x_1 + \cdots + a_n x_1^n = y_1, \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \cdots + a_n x_n^n = y_n, \end{cases}$$

此方程组的系数矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix},$$

称为**范德蒙德（Vandermonde）矩阵**, 由于 $x_i (i = 0,1,\cdots,n)$ 互异，故

$$\det A = \prod_{\substack{i,j=o \\ i>j}}^{n-1} (x_i - x_j) \neq 0.$$

因此线性方程组的解 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 存在且唯一。

定理1 满足条件（**）的插值多项式 $P(x)$ 是存在唯一的。

例：计算函数 $f(x)=e^x$ 在区间[0,1]上的函数值。

解：将函数 $f(x)=e^x$ 在零点 $x_0=0$ 处作泰勒展开：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

$$\approx 1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n \;=p_n(x)$$

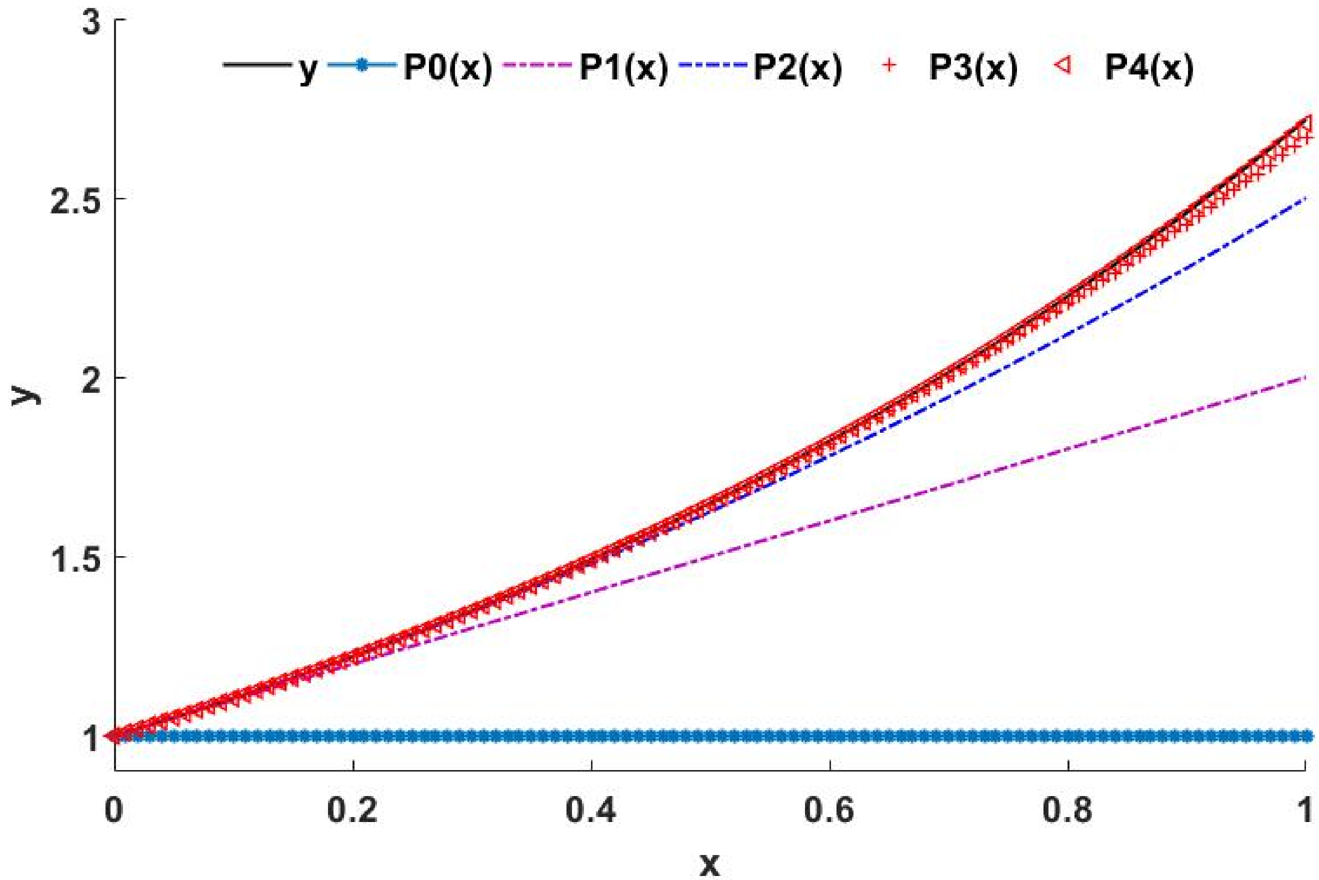
于是多项式 $p_n(x)$ 分别是：

$$p_0(x)=1 \qquad p_1(x)=1+x \qquad p_2(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2$$

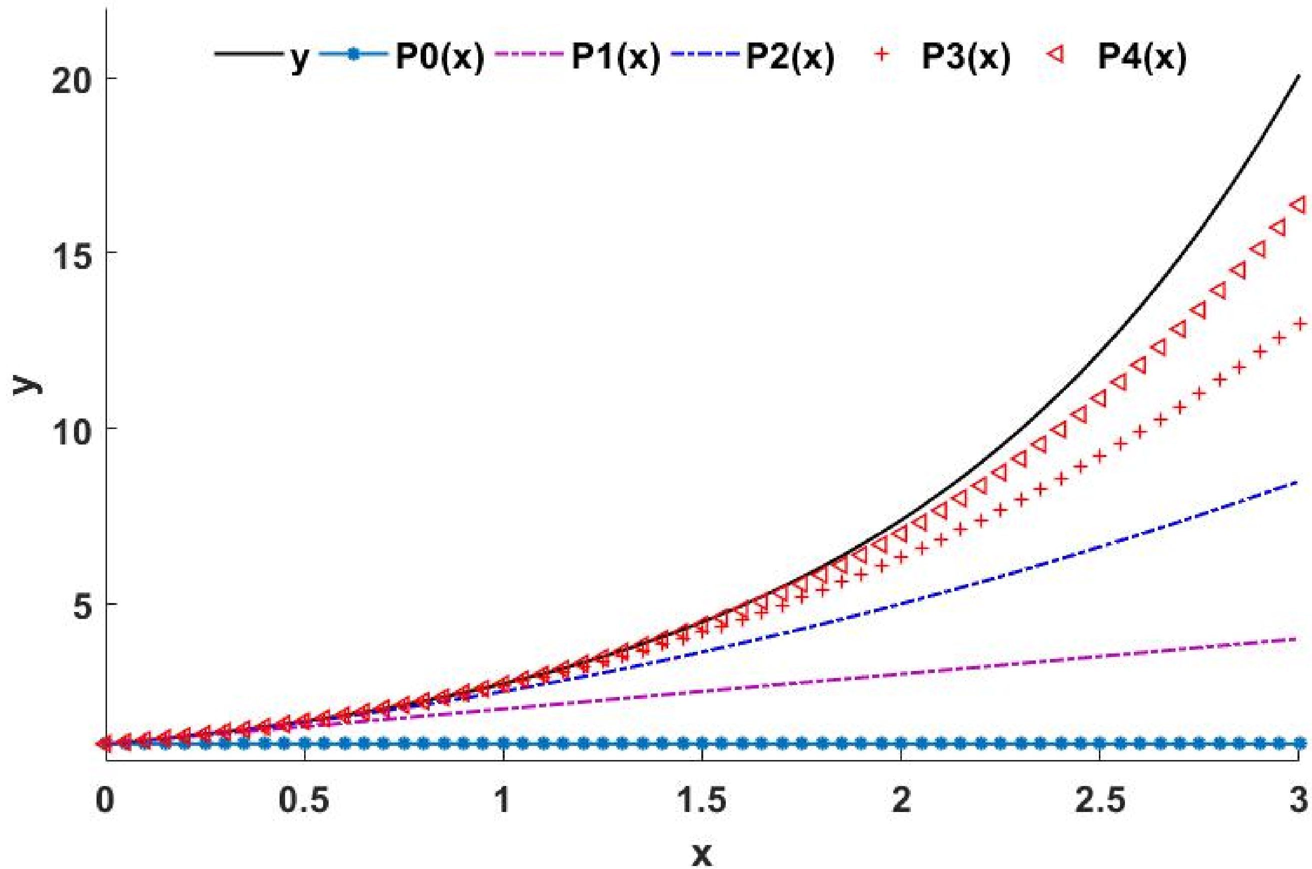
$$p_3(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3$$

$$p_4(x)=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{24}x^4,\cdots$$

```
x=[0:0.01:1];
n=length(x);
for i=1:n
    y(i)=exp(x(i)); %真值
    y0(i)=1;          %p0(x)
    y1(i)=1+x(i);     %p1(x)
    y2(i)=y1(i)+0.5*x(i)^2; %p2(x)
    y3(i)=y2(i)+(x(i)^3)/6; %p3(x)
    y4(i)=y3(i)+(x(i)^4)/24; %p4(x)
end
plot(x,y)
hold on
plot(x,y0,'*')
hold on
plot(x,y1,'-.')
hold on
plot(x,y2,'-.')
hold on
plot(x,y3,'+')
hold on
plot(x,y4,'<')
axis([0 1 0.9 3])
hold off
```



```
x=[0:0.05:3];
n=length(x);
for i=1:n
    y(i)=exp(x(i)); %真值
    y0(i)=1;          %p0(x)
    y1(i)=1+x(i);     %p1(x)
    y2(i)=y1(i)+0.5*x(i)^2; %p2(x)
    y3(i)=y2(i)+(x(i)^3)/6; %p3(x)
    y4(i)=y3(i)+(x(i)^4)/24; %p4(x)
end
plot(x,y)
hold on
plot(x,y0,'*')
hold on
plot(x,y1,'-.')
hold on
plot(x,y2,'-.')
hold on
plot(x,y3,'+')
hold on
plot(x,y4,'<')
axis([0 3 0.5 22])
hold off
```



PART 1

Lagrange插值

1. 线性插值与抛物插值

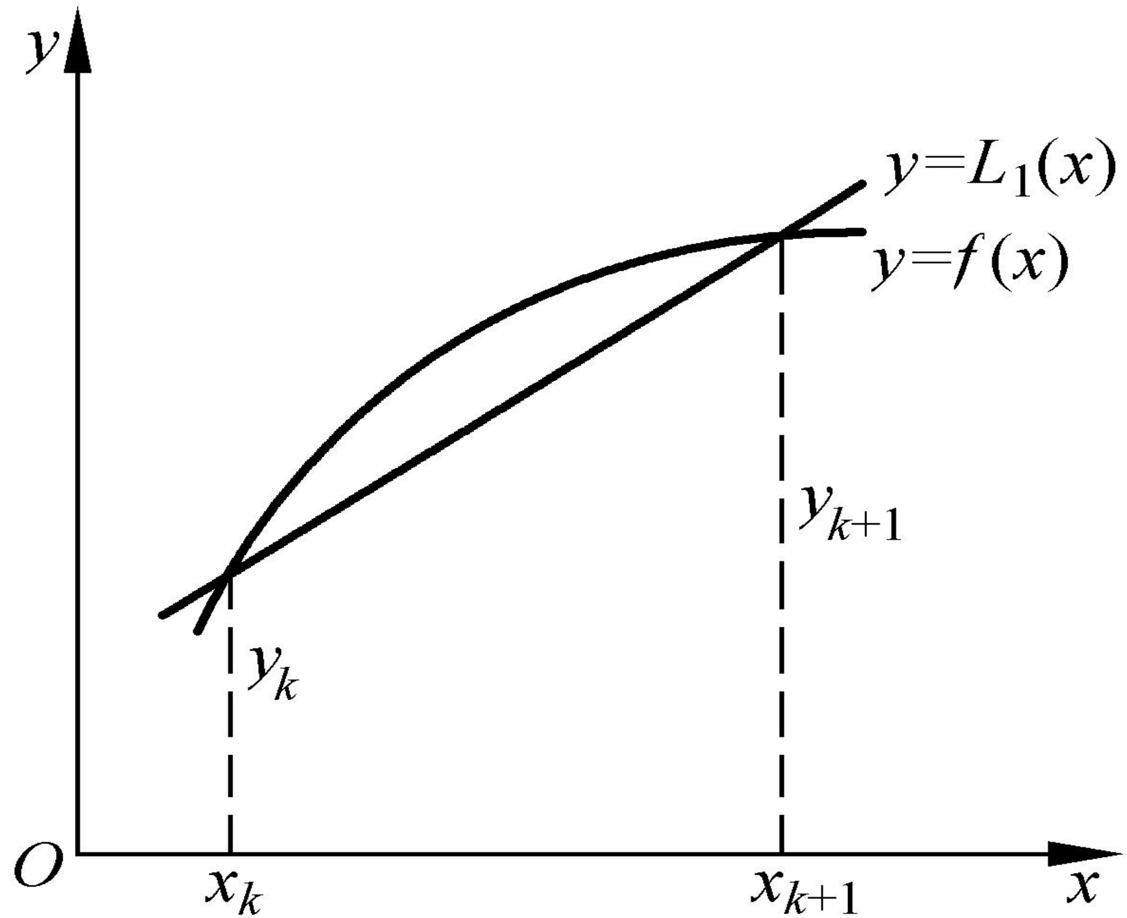
对给定的插值点，可以用多种不同的方法求得形如下式的插值多项式。 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$

先讨论 $n=1$ 的简单情形。

问题： 给定区间 $[x_k, x_{k+1}]$ 及端点函数值 $y_k=f(x_k), y_{k+1}=f(x_{k+1})$，要求线性插值多项式 $L_1(x)$，使它满足

$$L_1(x_k)=y_k,\quad L_1(x_{k+1})=y_{k+1}.$$

其几何意义就是通过两点(x_k, y_k)，(x_{k+1}, y_{k+1}) 的直线，如下图



由 $L_1(x)$ 的几何意义可得到表达式

$$L_1(x) = y_k + \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k)$$ （点斜式）

$$L_1(x) = \boxed{\frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}} y_k + \boxed{\frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}} y_{k+1}$$ （两点式）

由两点式看出，$L_1(x)$ 是由两个线性函数

$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}, \qquad l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k},$$

的线性组合得到，其系数分别为 y_k 及 y_{k+1}，即

$$L_1(x) = y_k l_k(x) + y_{k+1} l_{k+1}(x)$$

显然，$l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 也是线性插值多项式，在节点 x_k 及 x_{k+1} 上满足条件

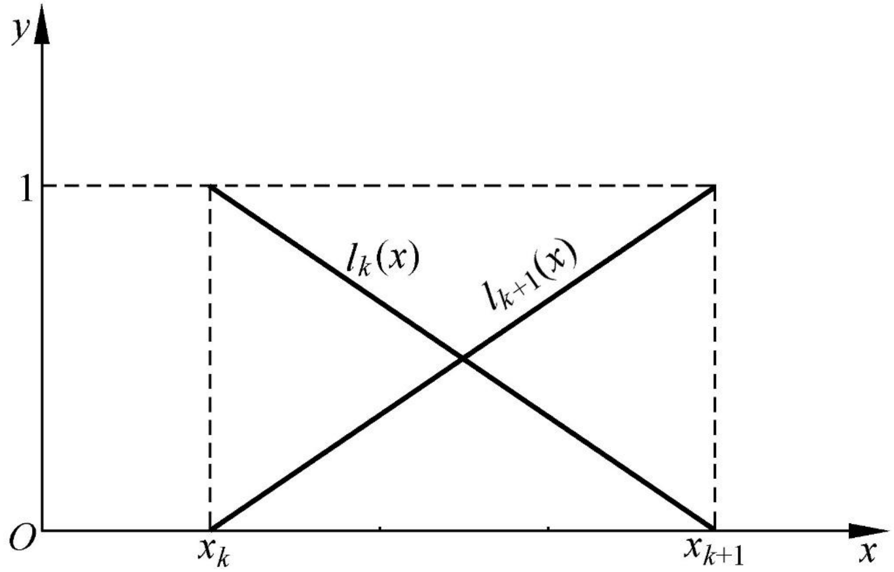
$$l_k(x) = \frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}},$$

$$l_{k+1}(x) = \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k},$$

$$l_k(x_k)=1, \qquad l_k(x_{k+1}) = 0;$$

$$l_{k+1}(x_k) = 0, \qquad l_{k+1}(x_{k+1}) = 1,$$

称 $l_k(x)$ 及 $l_{k+1}(x)$ 为**线性插值基函数**，图形见下图。



下面讨论 $n=2$ 的情形.

假定插值节点为 x_{k-1} , x_k , x_{k+1} ，要求二次插值多项式 $L_2(x)$, 使它满足

$$L_2(x_j)=y_j \qquad (j=k-1,k,k+1)$$

几何上 $L_2(x)$ 是通过三点 $(x_{k-1},y_{k-1}),(x_k,y_k),(x_{k+1},y_{k+1})$ 的抛物线.

可以用基函数的方法求 $L_2(x)$ 的表达式，此时**基函数** $l_{k-1}(x)$, $l_k(x)$, $l_{k+1}(x)$ 是二次函数，且在节点上满足条件

$$l_{k-1}(x_{k-1})=1, \quad l_{k-1}(x_j)=0, \quad (j=k,k+1);$$

$$l_k(x_k)=1, \quad l_k(x_j)=0, \qquad (j=k-1,k+1);$$

$$l_{k+1}(x_{k+1})=1, \quad l_{k+1}(x_j)=0, \quad (j=k-1,k).$$

接下来讨论满足上式的插值基函数的求法。

以求 $l_{k-1}(x)$ 为例，由插值条件，它应有两个零点 x_k 及 x_{k+1}，可表示为

$$l_{k-1}(x) = A(x - x_k)(x - x_{k+1}),$$

其中 A 为待定系数，可由插值条件 $l_{k-1}(x_{k-1}) = 1$ 定出

$$A = \frac{1}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}$$

于是 $$l_{k-1}(x) = \frac{(x - x_k)(x - x_{k+1})}{(x_{k-1} - x_k)(x_{k-1} - x_{k+1})}.$$

同理 $$l_k(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}.$$

$$l_{k+1}(x)=\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}.$$

利用 $l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$ ，立即得到二次插值多项式

$$L_2(x)=y_{k-1}l_{k-1}(x)+y_kl_k(x)+y_{k+1}l_{k+1}(x) \quad (***)$$

显然，它满足条件 $L_2(x_j)=y_j, (j=k-1,k,k+1)$.

将 $l_{k-1}(x), l_k(x), l_{k+1}(x)$ 代入（***），得

$$L_2(x)=y_{k-1}\frac{(x-x_k)(x-x_{k+1})}{(x_{k-1}-x_k)(x_{k-1}-x_{k+1})}+y_k\frac{(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})}{(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})}$$
$$+y_{k+1}\frac{(x-x_{k-1})(x-x_k)}{(x_{k+1}-x_{k-1})(x_{k+1}-x_k)}.$$

例：已知$\sqrt{100}=10$，$\sqrt{121}=11$，$\sqrt{144}=12$，分别利用线性和抛物插值求$\sqrt{115}$的近似值($\sqrt{115}=10.723805$)

解： 线性插值：$x_0=100, y_0=10, x_1=121, y_1=11, x=115$

$$y^*=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1=\frac{115-121}{100-121}\times 10+\frac{115-100}{121-100}\times 11=10.71428$$

$$|y-y^*|=|10.723805-10.71428|\le 0.01$$

有3位有效数字

抛物插值：$x_0=100, y_0=10, x_1=121, y_1=11, x_2=144, y_2=12$，$x=115$

$$y^*=L_2(115)=10.7228$$

$$|y-y^*|=|10.723805-10.7228|\le 0.001$$

有4位有效数字

2. 拉格朗日插值多项式

将前面的方法推广到一般情形，讨论如何构造通过 $n+1$ 个节点 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 的 n 次插值多项式 $L_n(x)$.

根据插值的定义 $L_n(x)$ 应满足

$$L_n(x_j) = y_j \quad (j = 0,1,\cdots,n).$$

为构造$L_n(x)$，先定义 n 次插值基函数.

定义 若n 次多项式 $l_j(x)\ (j=0,1,\cdots,n)$ 在 $n+1$ 个节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上满足条件：

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j;\\ 0, & k\neq j.\end{cases}\quad (j,k=0,1,\cdots,n)$$

表明n个点 $x_i\left(i=0,1,k-1,k+1,\cdots n\right)$ 都是n次多项式$l_k(x)$的零点，故可构造：

$$l_k(x)=A_k(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)$$

就称这 $n+1$ 个 n 次多项式 $l_0(x),l_1(x),\cdots,l_n(x)$ 为节点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 上的 n **次插值基函数**。

其中 A_k 为待定系数，由条件 $l_k(x)=1$ 可得：

$$A_k = \frac{1}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)}$$

故：

$$l_k(x) = \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\cdots(x - x_n)}{(x_k - x_0)\cdots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\cdots(x_k - x_n)} \qquad (k = 0,1,\cdots,n).$$

显然它满足条件：

$$l_j(x_k) = \begin{cases} 1, & k = j; \\ 0, & k \neq j. \end{cases} \qquad (j,k = 0,1,\cdots,n)$$

于是，插值多项式 $L_n(x)$ 可表示为

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x).$$

由 $l_k(x)$ 的定义，知

$$L_n(x_j)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x_j)=y_j \quad (j=0,1,\cdots,n).$$

形如下式的插值多项式 $L_n(x)$ 称为**拉格朗日插值多项式**，

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x).$$

前面讲的线性插值与抛物插值是 $n=1$ 和 $n=2$ 的特殊情形。

若引入记号

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

容易求得

$$\omega'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n),$$

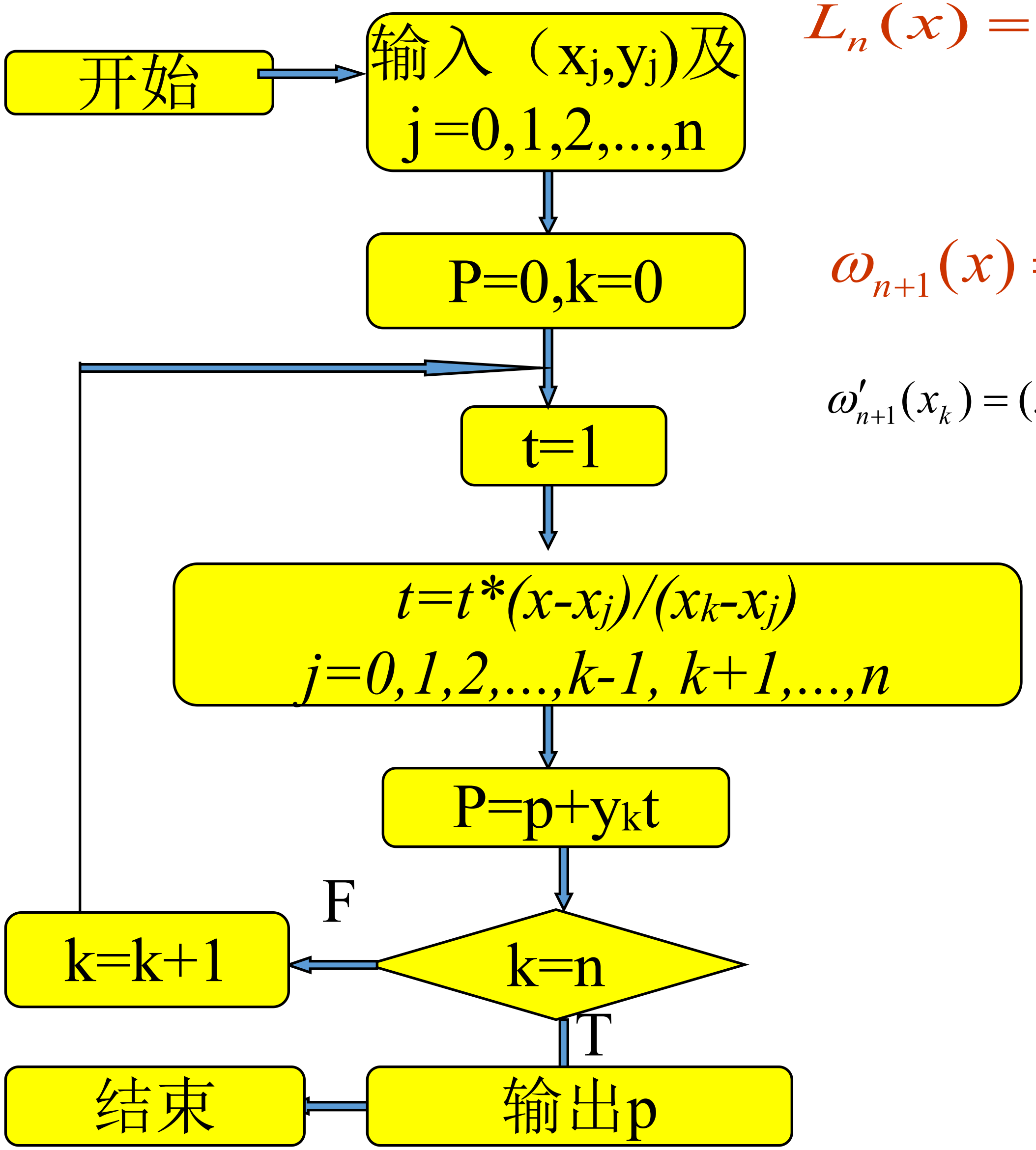
于是公式 $L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x).$ 可改写成

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}.$$

注意： n 次插值多项式 $L_n(x)$ 通常是次数为 n 的多项式，特殊情况下次数可能小于 n .

例如，通过三点 $(x_0,y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 的二次插值多项式 $L_2(x)$，**如果三点共线**，则 $y=L_2(x)$ 就是一条直线，而不是抛物线，这时 $L_2(x)$ 是一次多项式。

程序实现



$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x-x_k)\omega'_{n+1}(x_k)}.$$

$$\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n),$$

$$\omega'_{n+1}(x_k)=(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n),$$

3. 插值余项与误差估计

在插值区间[a,b]上用插值多项式 $P_n(x)$ 近似代替 $f(x)$，除了在插值节点 x_i 上没有误差外，在其它点上一般是存在有误差的。若记

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

则 $R_n(x)$ 就是用 $P_n(x)$ 近似代替 $f(x)$ 时所产生的截断误差，称 $P_n(x)$ 为插值多项式的余项。

关于误差有如下定理2中的估计式。

定理2 设$f(x)$在区间$[a,b]$上有直到**n+1**阶导数，$x_0, x_1, \cdots, x_n$为区间$[a,b]$上**n+1个互异的节点**，$P_n(x)$为满足条件：

$$P_n(x_i) = f(x_i)(i = 0,1,\cdots,n)$$

的**n**次插值多项式，则对于任何$x \in [a,b]$，有

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

其中 $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^{n}(x - x_i), \zeta \in (\mathrm{a}, \mathrm{b})$ 且依赖于x 。

注： （1）若不将多项式次数限制为 n ，则插值多项式不唯一。

例如 $P(x)=L_n(x)+q(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 也是一个插值多项式，其中 $q(x)$ 可以是任意多项式。

（2）Lagrange插值多项式结构对称，形式简单.

（3）误差估计

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

（4）当插值节点增加时，拉氏基函数需要重新计算，

n较大时，计算量非常大,故常用于理论分析。

定理2 表明：

(1) 插值误差与节点和点 x 之间的距离有关, 节点距离 x 越近,插值误差一般情况下越小。

(2) 若被插值函数 $f(x)$ 本身就是不超过 **n** 次的多项式, 则有 $f(x)\equiv P(x)$。即其插值函数为本身。

(3) 如果我们可以求出 $\max\limits_{a<x<b}\left|f^{(n+1)}(x)\right| = M_{n+1}$,那么多项式 $L(x)$ 逼近 $f(x)$ 的截断误差限是

$$\left|R_n(x)\right| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left|\omega_{n+1}(x)\right|$$

当 $n=1$ 时，线性插值余项为

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1), \qquad \xi\in[x_0,x_1]$$

当 $n=2$ 时，抛物插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \qquad \xi\in[x_0,x_2]$$

例　设$y=\ln x$，且有函数表

x	0. 40	0. 50	0. 70	0.80
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

用线性和抛物插值计算$f(0.6)=\ln 0.6$的近似值，并估计误差。

解:插值节点选择（内插，就近）

（1）取插值节点：$x_1=0.50$，$x_2=0.70$，做线性插值

$$f(0.6)\approx L_1(0.6)=\left[y_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right]_{x=0.6}=-0.524911$$

误差：$R_1(0.6)=f(0.6)-L_1(0.6)$

$$=\frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(0.6-0.5)(0.6-0.7)=\frac{0.01}{2}\cdot\frac{1}{\xi^2}\quad(0.5<\xi<0.7)$$

由于$\frac{100}{49}<\frac{1}{\xi^2}<\frac{100}{25}$，　　故$0.01<R_1(x)<0.02$

(2) 取插值节点：$x_1 = 0.50$， $x_2 = 0.70$， $x_3 = 0.80$ 做抛物线插值

$$\ln 0.6 \approx L_2(0.6) = [y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)]_{x=0.6} = -0.513343$$

误差：

$$R_2(0.6) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(0.6-0.5)(0.6-0.7)(0.6-0.8)$$

$$= \frac{2}{3}\frac{10^{-3}}{\xi^3}, \quad x_1 < \xi < x_3$$

$$1.3\times10^{-3} < R_2(0.6) = f(0.6) - L_2(0.6) < 5.34\times10^{-3}$$

$f(0.6) = \ln 0.6$ 的真值为：-0.510826

$$x_1 = 0.40, \; x_2 = 0.50, \quad x_3 = 0.70$$

说明：余项表达式含有$f^{(n+1)}(x)$,要求$f(x)$足够的光滑，阶数越高，误差越小，但当函数f(x)光滑性差，高阶插值效果不一定好

$$R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{k=0}^{n}(x-x_k)$$

如果只提供f(x)的一些离散数据，并没有具体的解析表达式，如何进行误差估计？

六、误差的事后估计

已知三节点x_0,x_1,x_2,对于给定的插值点x

(1)用x_0,x_1,做线性插值求出$y=f(x)$的一个近似值y_1

(2)用x_0,x_2,做线性插值求出$y=f(x)$的另一个近似值y_2

- 由Lagrange插值余项定理，有

$$y-y_1=\frac{f''(\xi_1)}{2}(x-x_0)(x-x_1)$$

$$y-y_2=\frac{f''(\xi_2)}{2}(x-x_0)(x-x_2)$$

ξ_1,ξ_2均属于考察区间$[a,b]$，

假设$f''(x)$在$[a,b]$内变化不大，则$f''(\xi_1)\approx f''(\xi_2)$，两式相除有：

$$\frac{y-y_1}{y-y_2}\approx\frac{x-x_1}{x-x_2}\xrightarrow{\text{分母-分子}}\frac{y-y_1}{y_1-y_2}\approx\frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

$$\therefore\ y-y_1\approx\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2-y_1)$$

插值结果y_1的误差通过两个插值结果的偏差y_1,y_2来估计

直接用计算结果估计误差的方法称作事后估计法

例：已知$\sqrt{100}=10$, $\sqrt{121}=11$, $\sqrt{144}=12$, 分别利用线性和抛物插值求$\sqrt{115}$的近似值($\sqrt{115}=10.723805$)

解： 线性插值：$x_0=100, y_0=10, x_1=121, y_1=11, x=115$

$$y^*=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1=\frac{115-121}{100-121}\times 10+\frac{115-100}{121-100}\times 11=10.71428$$

$$\left|y-y^*\right|=\left|10.723805-10.71428\right|\le 0.01$$

有3位有效数字

抛物插值：$x_0=100, y_0=10, x_1=121, y_1=11, x_2=144, y_2=12$，$x=115$

$$y^*=L_2(115)=10.7228$$

$$\left|y-y^*\right|=\left|10.723805-10.7228\right|\le 0.001$$

有4位有效数字

例：利用事后估计法估计之前例题线性插值的误差

解：取$x_0=100, x_1=121$,插值得$y_1=10.71428$

取$x_0=100, x_2=144$,插值得$y_2=10.68182$

$$\therefore y-y_1\approx\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(y_2-y_1)$$

$$=\frac{115\text{-}121}{144\text{-}121}\times(10.68182\text{-}10.71428)=0.00847$$

利用估计的误差修正近似值y_1,得到更好的近似

$$y=y_1+0.00847=10.7228$$

修正后的结果与抛物插值结果相同

例 已知 $y=\sqrt{x}, x_0=4, x_1=9$, 用线性插值(即一次插值多项式)求 $\sqrt{7}$ 的近似值。

解 $y_0=2, y_1=3$, 基函数分别为:

$$l_0(x)=\frac{x-9}{4-9}=-\frac{1}{5}(x-9), l_1(x)=\frac{x-4}{9-4}=\frac{1}{5}(x-4)$$

插值多项式为

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)=2\times\frac{-1}{5}(x-9)+3\times\frac{1}{5}(x-4)$$

$$=-\frac{2}{5}(x-9)+\frac{3}{5}(x-4)=\frac{1}{5}(x+6)$$

所以 $\sqrt{7}\approx L_1(7)=\frac{13}{5}=2.6$

例 求过点(−1,−2), (1,0), (3,−6), (4,3)的抛物线插值(即三次插值多项式).

解 以 $x_0=-1, x_1=1, x_2=3, x_3=4$ 以为节点的基函数分别为:

$$l_0(x)=\frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1-1)(-1-3)(-1-4)}=-\frac{1}{40}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$l_1(x)=\frac{(x+1)(x-3)(x-4)}{(1+1)(1-3)(1-4)}=\frac{1}{12}(x+1)(x-3)(x-4)$$

$$l_2(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(3+1)(3-1)(3-4)}=-\frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$l_3(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(4+1)(4-1)(4-3)}=\frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$$

则拉格朗日的三次插值多项式为

$$L_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

$$= (-2) \times \frac{-1}{40}(x-1)(x-3)(x-4) + 0 \times \frac{1}{12}(x+1)(x-3)(x-4)$$

$$+ (-6) \times \frac{-1}{8}(x+1)(x-1)(x-4) + 3 \times \frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$= \frac{1}{20}(x-1)(x-3)(x-4) + \frac{3}{4}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$+ \frac{1}{5}(x+1)(x-1)(x-3)$$

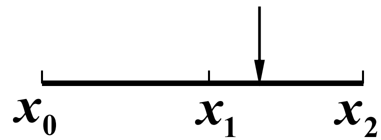
$$(= x^3 - 4x^2 + 3)$$

例： 已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

分别利用 sin *x* 的1次、2次 **Lagrange** 插值计算 sin 50° 并估计误差。

$50^0=\frac{5\pi}{18}$

解： **n = 1** 分别利用 x_0, x_1 以及 x_1, x_2 计算



⌖利用 $x_0=\frac{\pi}{6}, x_1=\frac{\pi}{4}$ ➡ $L_1(x)=\frac{x-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\times\frac{1}{2}+\frac{x-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

sin $50^0\approx L_1(\frac{5\pi}{18})\approx$ 0.77614 这里 $f(x)=\sin x,\ f^{(2)}(\xi)=-\sin\xi,\ \xi\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$

选择要计算的 *x* 在区间的内部，插值效果较好。

$(x-\frac{\pi}{4})$

➡ $-0.01319<$ … <-0.00762

sin 50° = 0.7660444…

⌖利用 $x_1=\frac{\pi}{4}, x_2=\frac{\pi}{3}$ ➡ $(x)=\frac{x-\pi/3}{\pi/4-\pi/3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{x-\pi/4}{\pi/3-\pi/4}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$

➡ sin 50° ≈ 0.76008, $0.00538<\tilde{R}_1\left(\frac{5\pi}{18}\right)<0.00660$

$n = 2$

$$L_2(x) = \frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{2} + \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

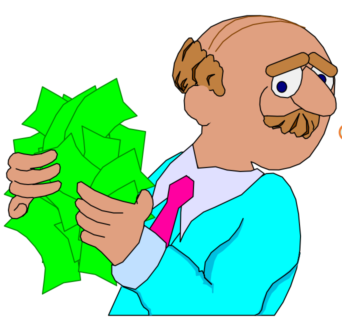
$$\sin 50^0 \approx L_2(\frac{5\pi}{18}) \approx 0.76543$$

$$R_2(x) = \frac{-\cos\xi}{3\,!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})\,; \qquad \frac{1}{2} < \cos\xi < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow\quad 0.00044 < R_2\left(\frac{5\pi}{18}\right) < 0.00077$$

$\sin 50° = 0.7660444...$

高次插值通常优于
低次插值



但绝对不是次数越
高就越好，嘿嘿……

➤反插值问题

已知定义于区间 $[a,b]$ 上的单调连续函数 $f(x)$ 在 $n+1$ 个互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n} \subset [a,b]$ 处的函数值 $\{f(x_i)\}_{i=0}^{n}$，若函数值 $\bar{y}=f(\bar{x})$ 已知，如何求 $\bar{x}$？

即求 $\bar{x}=f^{-1}(\bar{y})$

因此可以看作如下插值问题：

已知定义于区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $n+1$ 个互异节点 $\{y_i=f(x_i)\}_{i=0}^{n}$ 处的函数值 $\{x_i=f^{-1}(y_i)\}_{i=0}^{n}$，

求函数值 $\bar{x}=f^{-1}(\bar{y})$

例（反插值）：已知单调连续函数 $y = f(x)$ 在如下采样点的函数值：

x_i	1.0	1.4	1.8	2.0
$y_i=f(x_i)$	-2.0	-0.8	0.4	1.2

求方程 $f(x)=0$ 在[1，2]内根的近似值 x^*。

分析：求解如上问题等价于求解x关于y的反函数问题。

y_i	-2.0	-0.8	0.4	1.2	0
$f^{-1}(y_i)=x_i$	1.0	1.4	1.8	2.0	?

$$x^* = f^{-1}(0)$$

解：

需要对反函数 $x=f^{-1}(y)$ 进行三次插值，则插值多项式是：

$$f^{-1}(y)\approx L_3(y)=\frac{(y+0.8)(y-0.4)(y-1.2)}{(-2.0+0.8)(-2.0-0.4)(-2.0-1.2)}\times 1.0$$

$$+\frac{(y+2.0)(y-0.4)(y-1.2)}{(-0.8+2.0)(-0.8-0.4)(-0.8-1.2)}\times 1.4$$

$$+\frac{(y+2.0)(y+0.8)(y-1.2)}{(0.4+2.0)(0.4+0.8)(0.4-1.2)}\times 1.8$$

$$+\frac{(y+2.0)(y+0.8)(y-0.4)}{(1.2+2.0)(1.2+0.8)(1.2-0.4)}\times 2.0$$

$$x^*=f^{-1}(0)\approx L_3(0)\doteq 1.675$$

注意：

在实际问题中，由于误差余项往往难于估计，一般不能事先确定插值函数的次数，通常的做法是：**从低阶到高阶逐次进行插值，直至达到所需精度**。

PART 2

Newton插值

1、差商的定义

为建立牛顿插值多项式，定义各阶差商：

零阶差商： $f[x_i] = y_i = f(x_i)$

一阶差商： $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$

二阶差商：$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$

k阶差商：

$$f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \cdots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

n阶差商：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

差商计算可列差商表如下表

表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$\underline{f(x_0)}$				
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0,x_1]}$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

例 已知下列数据点，计算$f[1,3,4,7]$.

x_i	1	3	4	7
$f(x_i)$	0	2	15	12

解：列差商表如下

<table>
<tr><th>x_i</th><th>$f(x_i)$</th><th>一阶差商</th><th>二阶差商</th><th>三阶差商</th></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td rowspan="4">1
13
-1</td><td rowspan="4">4
-7/2</td><td rowspan="4">-5/4</td></tr>
<tr><td>3</td><td>2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>15</td></tr>
<tr><td>7</td><td>12</td></tr>
</table>

$$f[1,3]=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{2}{2}=1$$

即求得 $\boldsymbol{f[1,3,4,7]=-5/4}$

性质1　差商可以表示为函数值的线性组合，即

$$f[x_0,x_1,x_2,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^{k}\frac{f(x_i)}{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_k)}$$

这一性质可以用数学归纳法证明，**它表明差商与节点的排列次序无关**，即

$$f[x_0,x_1,x_2,\dots,x_n]=f[x_1,x_0,x_2,\dots,x_n]=\dots$$

$$=f[x_1,x_2,\dots,x_n,x_0]$$

称之为**差商的对称性（也称为对称性质）**。

性质2　由性质1立刻得到

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[x_1,x_2,\cdots,x_n,x_0]$$

$$=\frac{f[x_1,\cdots,x_{n-1},x_n]-f[x_2,\cdots,x_n,x_0]}{x_1-x_0}$$

或

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f[x_0,\cdots,x_{n-2},x_n]-f[x_0,\cdots,x_{n-2},x_{n-1}]}{x_n-x_{n-1}}$$

2、Newton插值多项式

问题的提出：

利用插值基函数很容易得到拉格朗日插值多项式，公式结构紧凑，在理论分析中甚为方便，但当插值节点增减时全部插值基函数 $l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 均要随之变化，整个公式也将发生变化，甚为不便。为了计算方便可重新设计一种逐次生成插值多项式的方法。

设x是[a，b]上一点，由一阶差商定义得

$$f[x,x_0]=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

得

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$$

同理，由二阶差商定义

$$f[x,x_0,x_1]=\frac{f[x,x_0]-f[x_0,x_1]}{x-x_1}$$

得

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)$$

如此继续下去，可得一系列等式

$$f(x)=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$$

$$f[x,x_0]=f[x_0,x_1]+f[x,x_0,x_1](x-x_1)$$

$$f[x,x_0,x_1]=f[x_0,x_1,x_2]+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_2)$$

$$\vdots$$

$$f[x,x_0,\cdots,x_{n-1}]=f[x_0,x_1,\cdots,x_n]+f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_n)$$

依次把后式代入前式，最后得

$$\underline{f(x)}=f(x_0)+f[x,x_0](x-x_0)$$

$$=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$

$$\underline{=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)}$$

$$\underline{+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$f(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x,x_0,x_1](x-x_0)(x-x_1)$$

$$+f[x,x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

$$=\cdots=N_n(x)+R_n(x)$$

其中

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

$$\cdots+f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$=f(x_0)+\sum_{k=1}^{n}f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\omega_k(x)$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$$=f[x,x_0,\cdots,x_n]\omega_{n+1}(x)$$

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x)$$

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

$R_n(x)$称为牛顿型插值余项。

可见, $N_n(x)$为次数不超过n 的多项式,且易知

$$R_n(x_i)=0 \quad 即 \quad N_n(x_i)=y_i,\ (i=0,1,\ldots,n)$$

满足插值条件, 故其为插值问题的解, $N_n(x)$称为牛顿插值多项式。

注： ☞ 由唯一性可知 $N_n(x) \equiv L_n(x)$， 只是算法不同，故其余项也相同，即

$$f[x, x_0, \ldots, x_n]\omega_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

$$\Rightarrow f[x_0, \ldots, x_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}, \quad \xi \in (x_{\min}, x_{\max})$$

☞ 实际计算过程为（建立差商表）

x_0	$f(x_0)$				
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0, x_1]$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1, x_2]$			
…	…	… …	$f[x_0, x_1, x_2]$		
x_{n-1}	$f(x_{n-1})$	… …	… …		
x_n	$f(x_n)$	$f[x_{n-1}, x_n]$	$f[x_{n-2}, x_{n-1}, x_n]$	$f[x_0, \ldots, x_n]$	
x_{n+1}	$f(x_{n+1})$	$f[x_n, x_{n+1}]$	$f[x_{n-1}, x_n, x_{n+1}]$	$f[x_1, \ldots, x_{n+1}]$	$f[x_0, \ldots, x_{n+1}]$

例：已知函数 $y=f(x)$ 的函数表：

x_i	1	2	3	4	5
$y_i=f(x_i)$	1	4	7	8	6

写出4次Newton插值多项式

解：构造差商表

$$
\begin{array}{cccccc}
x_i & f(x_i) & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
 & & 3 & & & \\
2 & 4 & & 0 & & \\
 & & 3 & & -\frac{1}{3} & \\
3 & 7 & & -1 & & \frac{1}{24} \\
 & & 1 & & -\frac{1}{6} & \\
4 & 8 & & -\frac{3}{2} & & \\
 & & -2 & & & \\
5 & 6 & & & &
\end{array}
$$

$$
N_4(x)=1+3(x-1)+0(x-1)(x-2)
$$

$$
-\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3)
$$

$$
+\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)
$$

$$
N_4(x)=\frac{1}{24}x^4-\frac{9}{12}x^3+\frac{83}{24}x^2-\frac{33}{24}x+1
$$

例　已知$f(x)=\mathrm{sh}x$的数表,求二次牛顿插值多项式,并由此计算$f(0.596)$的近似值。

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
0.40	0.41075				
		1.1160			
0.55	0.57815		0.2800		
		1.1860		0.1970	
0.65	0.69675		0.3588		0.0344
		1.2757		0.2137	
0.80	0.88811		0.4336		
		1.3841			
0.90	1.02652				

解　由上表可得过前三点的二次牛顿插值多项式为

$$N_2(x)=0.41075+1.1160(x-0.40)$$
$$+0.2800(x-0.40)(x-0.55)$$

$$N_2(x)=0.41075+1.1160(x-0.40)$$
$$+0.2800(x-0.40)(x-0.55)$$

故 $$f(0.596)\approx N_2(0.596)=0.632010$$

又 $$f[x_0,x_1,x_2,x_3]=0.1970$$

可得过前四点的三次牛顿插值多项式

$$N_3(x)=N_2(x)+0.1970(x-0.40)(x-0.55)(x-0.65)$$

故 $$f(0.596)\approx N_3(0.596)=0.6319145$$

$f[x_0,\cdots,x_4]=0.0344$ 可得$N_3(x)$的截断误差

$$|R_3(x)|\approx|0.0344(x-0.40)(x-0.55)(x-0.65)(x-0.80)|$$

$$|R_3(0.596)|\approx 0.34\times 10^{-6}$$

3、Newton插值的程序实现

- **算法步骤**

1°输入插值节点$\{x_i, y_i\}, i = 0,1,2,\cdots,n$,要计算的插值u

2°建立差商表$g[k], k = 0,1,2,\cdots,n$

3°置初始值$t = 1, newton = f(0) = y_0$

4° $for \quad i = 1 : n$

$t = t*(u - x_{i-1})$ $t_k = t_{k-1}(x - x_k)$形成基函数

$newton = newton + g[i]*t$

end

5°输出$f(u)$的近似值$N_n(u) = newton$

牛顿差值

```
function [N R]=ndcz(X,Y,x,M);
n=length(X);
A=csb(X,Y);
N=A(1,2);
a=zeros(n,1);
for i=1:n-1;
   a(i)=1;
    for j=1:i;
        a(i)=a(i)*(x-X(j));
    end
    N=N+a(i)*A(i+1,i+2);
end
k=1;
for i=1:n;
    k=k*(x-X(i))/i;
    k=abs(k);
end
R=M*k;
```

差商表如何建立，如何存储

x_i	$f(x_i)$	一阶均差	二阶均差	三阶均差
x_0	$f(x_0)$			
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$		
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]$	
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$f[x_0,x_1,x_2,x_3]$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

在*Newton*插值表达式中只用到了

$$f[x_0], f[x_0, x_1], f[x_0, x_1, x_2], \cdots f[x_0, x_1, \cdots x_n]$$

因此，可将用到的差商存储在一维数组*g*中

差商表

```
function A=csb(X,Y)
n=length(X);
A=zeros(n,n+1);
A(:,1)=X';
A(:,2)=Y';
for j=3:n+1
    for i=j-1:n
        A(i,j)=(A(i,j-1)-A(i-1,j-1))./(A(i,1)-A(i-j+2,1));
    end
end
```

4、小结

利用拉格朗日基函数$l_i(x)$, 构造次数不超过n的多项式

$$L_n(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + \cdots + y_n l_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

可知其满足

$$L_n(x_j) = y_j \quad j = 0,1,\cdots,n$$

称为拉格朗日插值多项式,再由插值多项式的唯一性，得

$$P_n(x) \equiv L_n(x)$$

特别地, 当 n =1时又叫线性插值,其几何意义为过两点的直线. 当 n =2时又叫抛物（线）插值, 其几何意义为过三点的抛物线.

称之为拉格朗日基函数, 都是n次多项式 。

$$l_i(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

$$(i=0,1,\cdots,n)$$

$$=\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}$$

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x)$$

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots\ (x-x_n)$$

$R_n(x)$称为**牛顿型插值余项**。

可见, $N_n(x)$为次数不超过n 的多项式,且易知

$$R_n(x_i)=0 \quad 即 \quad N_n(x_i)=y_i\ ,\ (i=0,1,\ \ldots,n)$$

满足插值条件, 故其为插值问题的解, $N_n(x)$称为**牛顿插值多项式**。

PART 3

埃尔米特插值

不少实际的插值问题不但要求在节点上函数值相等，而且还要求对应的导数值也相等，甚至要求高阶导数也相等，满足这种要求的插值多项式就是埃尔米特（Hermite）插值多项式。

Hermite插值问题

已知插值节点为 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ ，及

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	$\cdots$	f_n
$f'(x)$	m_0	m_1	$\cdots$	m_n

求$H_{2n+1}(x) \in H_{2n+1}$,使得

$$H_{2n+1}(x_i) = f_i, H'_{2n+1}(x_i) = m_i, i = 0,1,\cdots,n$$

思想

类似于Lagrange插值多项式的构造方法，即通过构造一组插值基函数来表示Hermite插值多项式。

设满足前述2n+2个条件的插值多项式 $H_{2n+1}(x)$ 为

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n} f'(x_i)\beta_i(x)$$

其中 $\alpha_i(x)$ ，$\beta_i(x)$ 满足

$$\begin{cases}\alpha_i(x_j)=\delta_{ij}\\ \alpha_i'(x_j)=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta_i(x_j)=0\\ \beta_i'(x_j)=\delta_{ij}\end{cases}\qquad \delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

$$i,j=0,1,2,\cdots,n$$

$\alpha_i(x)$和$\beta_i(x)$的计算方法：

$\alpha_i(x)$和$\beta_i(x)$均为2n+1次多项式，且有n个二重根

$$x_0,\cdots,x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n$$

令 $\alpha_i(x)=(A_ix+B_i)l_i^2(x)$

其中 $l_i(x)=\dfrac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

$$\alpha_i'(x)=A_il_i^2(x)+(A_ix+B_i)\left[l_i^2(x)\right]'$$

代入条件

$$\boxed{\left[l_i^2(x)\right]'=2l_i(x)l_i'(x)}$$

$$\begin{cases}\alpha_i(x_i)=A_ix_i+B_i=1\\ \alpha_i'(x_i)=A_i+2(A_ix_i+B_i)l_i'(x_i)=0\end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} A_i = -2\sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\dfrac{1}{x_i - x_k} \\ B_i = 1 - A_i x_i = 1 + 2x_i\sum\limits_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\dfrac{1}{x_i - x_k} \end{cases}$$

$$\boxed{l_i'(x_i) = \sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i - x_k}}$$

$$l_i'(x) = \left[\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}\right]'$$

$$= \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i - x_k}\left[(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)\right]'$$

从而得到插值基函数$\alpha_i(x)$

$$\alpha_i(x) = [1 + 2(x_i - x)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n} \frac{1}{x_i - x_k}] l_i^2(x)$$

$$i = 0,1,2,\cdots,n$$

下面求另一组插值基函数$\beta_i(x)$ 令$\beta_i(x) = C_i(x - x_i)l_i^2(x)$

$$\beta_i'(x_i) = C_i l_i^2(x_i) + C_i \left\{(x - x_i)\left[l_i^2(x)\right]'\right\}_{x=x_i} = 1$$

$$C_i = 1 \quad i = 0,1,2,\cdots,n$$

$$\begin{cases}\beta_i(x_j) = 0 \\ \beta_i'(x_j) = \delta_{ij}\end{cases} \quad i,j = 0,1,\cdots,n$$

$$\beta_i(x) = (x - x_i)l_i^2(x)$$

全导数的Hermite插值多项式

$$H_{2n+1}(x)=\sum_{i=0}^{n}f(x_i)\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{n}f'(x_i)\beta_i(x)$$

其中

$$\alpha_i(x)=[1+2(x_i-x)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{n}\frac{1}{x_i-x_k}]l_i^2(x)$$

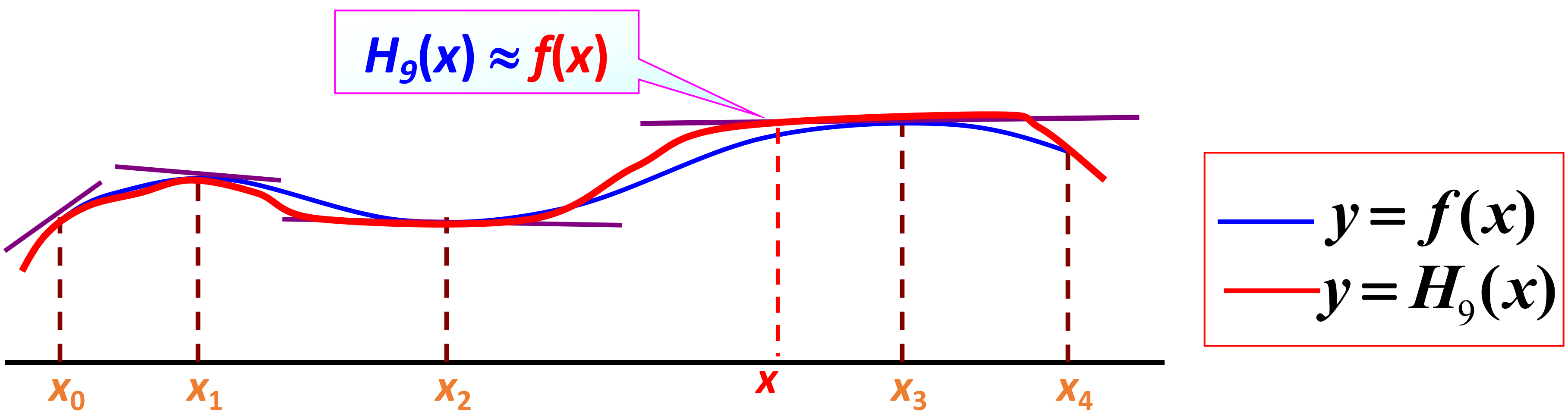
$$\beta_i(x)=(x-x_i)l_i^2(x)\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

如n=1时Hermite插值多项式 $H_3(x)$ 为

$$H_3(x)=f(x_0)\left(1+2\frac{x_0-x}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+f(x_1)\left(1+2\frac{x_1-x}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

$$+f'(x_0)(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2+f'(x_1)(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$$

全导数的Hermite插值多项式的几何意义



例：已知函数 $y = f(x)$ 在点 $x_i = i(i = 0,1,2)$ 数据表：

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	1	2	3
$f'(x_i)$	-1	0	1

应用**Hermite**插值计算 $f(1.5)$ 的近似值。

解：

$$H_5(x) = \sum_{i=0}^{2} f(x_i)\alpha_i(x) + \sum_{i=0}^{2} f'(x_i)\beta_i(x)$$

$$\alpha_i(x) = [1 - 2(x_i - x)\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{2} \frac{1}{x_i - x_k}] l_i^2(x)$$

$$\beta_i(x) = (x - x_i) l_i^2(x) \qquad i = 0,1,2$$

$$\alpha_0(x) = [1-2(x-0)(\frac{1}{0-1}+\frac{1}{0-2})][\frac{(x-1)(x-2)}{(0-1)(0-2)}]^2$$

$$= \frac{1}{4}(1+3x)(x-1)^2(x-2)^2$$

$$\alpha_1(x) = [1-2(x-1)(\frac{1}{1-0}+\frac{1}{1-2})][\frac{(x-0)(x-2)}{(1-0)(1-2)}]^2$$

$$= x^2(x-2)^2$$

$$\alpha_2(x) = [1-2(x-2)(\frac{1}{2-0}+\frac{1}{2-1})][\frac{(x-0)(x-1)}{(2-0)(2-1)}]^2$$

$$= \frac{1}{4}(7-3x)x^2(x-1)^2$$

$$\beta_0(x)=(x-0)l_0^2(x)=\frac{1}{4}x(x-1)^2(x-2)^2$$

$$\beta_1(x)=(x-1)l_1^2(x)=(x-1)x^2(x-2)^2$$

$$\beta_2(x)=(x-2)l_2^2(x)=\frac{1}{4}(x-2)x^2(x-1)^2$$

$$H_5(x)=\sum_{i=0}^{2}f(x_i)\alpha_i(x)+\sum_{i=0}^{2}f'(x_i)\beta_i(x)$$

$$\boxed{=1-x+\frac{25}{4}x^2-5x^3+\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^5}$$

$$f(1.5)\approx H_5(1.5)=1.75$$

PART 4

三次样条插值

一、分段低次插值　　Runge现象

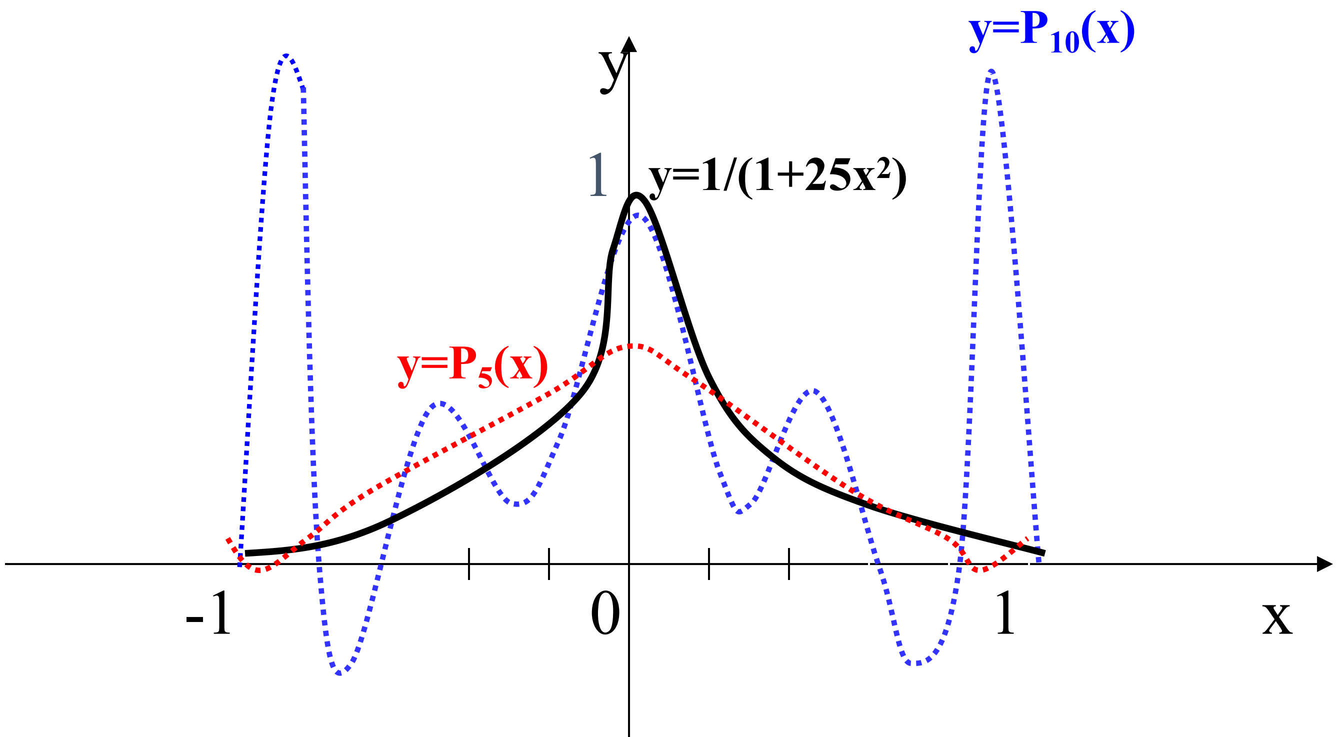
适当地提高插值多项式的次数，有可能提高计算结果的准确程度。但是决不可由此提出结论，认为插值多项式的次数越高越好。

例如，对函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}(-1\le x\le 1)$

先以 $x_i=-1+\frac{2}{5}i(i=0,1,\cdots 5)$ **为节点作五次插值多项式** $P_5(x)$ **，再以** $x_i=-1+\frac{1}{5}i(i=0,1,\cdots 10)$ **为节点作十次插值多项式** $P_{10}(x)$ **，并将曲**

线 $f(x)=\dfrac{1}{1+25x^2}, y=P_5(x), y=P_{10}(x)(x\in[-1,1])$ **描绘在**

同一坐标系中，如下图所示。



由上图可看出，虽然在局部范围中，例如在区间[-0.2，0.2]中，$P_{10}(x)$比$P_5(x)$较好地逼近$f(x)$,但从整体上看，$P_{10}(x)$并非处处都比$P_5(x)$较好地逼近$f(x)$，尤其是在区间[-1，1]的端点附近。进一步的分析表明，当n增大时，该函数在等距接点下的高次插值多项式$P_n(x)$，在[-1，1]两端会发生激烈的振荡。这种现象称为**龙格（Runge)现象**。这表明，**在大范围内使用高次插值，逼近的效果可能不理想的。**

另一方面，插值误差除来自截断误差外，还来自初始数据的误差和计算过程中的舍入误差。插值次数越高，计算工作越大，积累误差也可能越大。

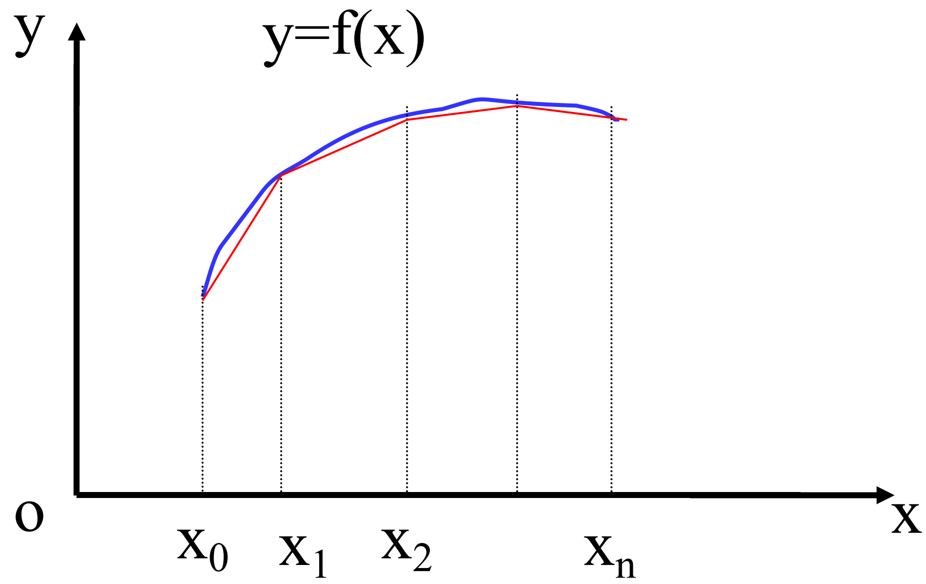
因此，在实际计算中，常用分段低次插值进行计算，即把整个插值区间分成若干小区间，在每个小区间上进行低次插值。

分段线性插值

当给定n+1个点$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$上的函数值$f_0 < f_1 < \cdots < f_n$后，若要计算点$x \neq x_i$处函数值$f(x)$的近似值，可先选取两个节点x_{i-1}, x_i然后在小区间$x \in [x_{i-1}, x_i]$上作线性插值，即得

$$f(x) \approx P_1(x) = f_{i-1}\frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f_i\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

这种分段低次插值叫**分段线性插值**。在几何上就是用折线代替曲线，如下图所示。故分段线性插值又称**折线插值**.


y
y=f(x)
o
x
x_0
x_1
x_2
x_n

二、三次样条插值

问题背景

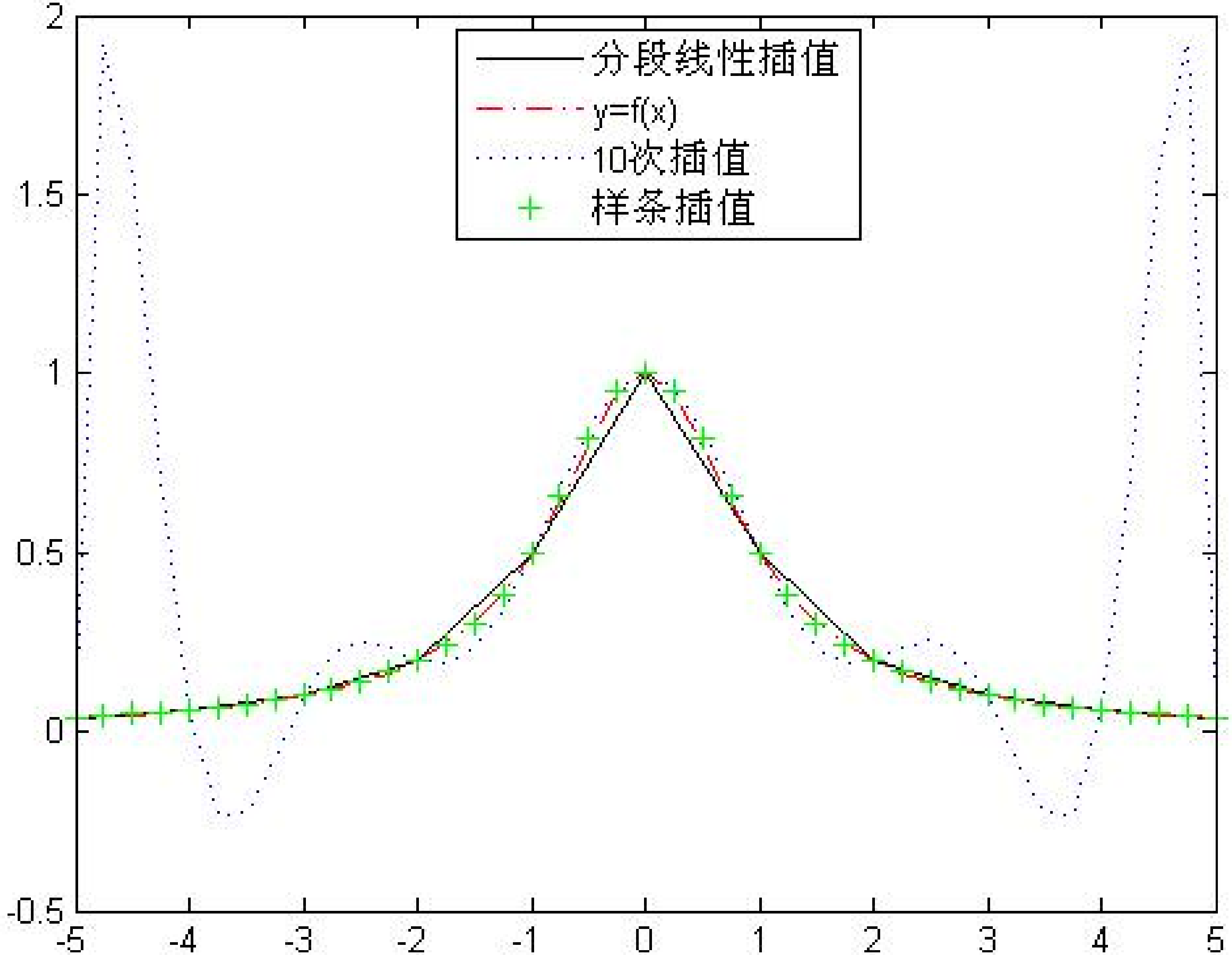
许多实际工程技术中一般对精度要求非常高，

（1）要求近似曲线在节点连续；

（2）要求近似曲线在节点处导数连续，即充分光滑

分段线性插值不能保证节点的光滑性，而Hermite插值需要知道节点处的导数值，实际中无法确定。

- **分段低次插值只能保证各小段曲线在连接点上的连续性，却不能保证整条曲线的光滑性**，不能满足某些工程技术上的要求。
- 从六十年代开始，由于航空、造船等工程设计的需要而发展起来的。
- 所谓**样条（Spline)的插值方法，既保留了分段低次插值多项式的各种优点，又提高了插值函数的光滑性**。
- 样条插值方法已成为数值逼近的一个极其重要的分支，在许多领域里得到越来越广泛的应用。
- 本节介绍应用最广泛且具有二阶连续导数的三次样条插值函数。



分段线性插值
y=f(x)
10次插值
样条插值
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

1、三次样条插值函数的定义

对于给定的函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ ，若函数 $S(x)$ 满足:

（1）$S(x)$在每个子区间 $[x_i,x_{i+1}](i=0,1,\cdots,n-1)$ 上是三次多项式；

（2）$S(x)\in C^2[a,b]$ （二阶连续可微）；

（3）满足插值条件 $S(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$

则称$S(x)$为函数$f(x)$关于节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的三次样条插值。

$S(x)$在每个小区间$[x_i , x_{i+1}]$上是一个次数不超过3的多项式，因此需确定**四个待定常数**，一共有n个小区间，故应**确定$4n$个系数**，$S(x)$在n-1个内节点上**具有二阶连续导数，应满足条件**

$$\begin{cases} S(x_i-0)=S(x_i+0) \\ S'(x_i-0)=S'(x_i+0) \\ S''(x_i-0)=S''(x_i+0) \end{cases} \qquad (i=1,2,\cdots,n-1)$$

即有3n-3个连续条件，再加上$S(x)$ 满足的插值条件$n+1$个，共计4n-2个，因此还需要2个条件才能确定$S(x)$，通常补充两个**边界条件**。

第一步：建立基本方程组

设在x_i处：$S''(x_i)=M_i(i=0,1,\ldots,n)$，这种通过确定$M_i$来求$S(x)$的方法称为三弯矩法。

$S''(x)$在$[x_{i-1}, x_i]$上是一次多项式，由拉格朗日线性插值公式得：

$$S''(x)=M_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i} \qquad h_i=x_i-x_{i-1}$$

对$S''(x)$积分两次并利用$S(x_i)=y_i$和$S(x_{i+1})=y_{i+1}$定出积分常数得

$$S(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+C_i\left(x_i-x\right)+D_i\left(x-x_{i-1}\right)$$

其中 C_i 和 D_i 是两个待定常数。将插值条件 $S(x_{i-1}) = y_{i-1}$，$S(x_i) = y_i$ 代入上式，可确定这两个待定常数，从而得到 $S(x)$的表达式：

$$S(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6}\right)\frac{x_i - x}{h_i}$$

$$+\left(y_i - \frac{M_i h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \qquad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, \cdots, n)$$

上式就是三次样条函数的“M表达式”。由构造过程知：该式不仅保证了所求函数在每个小区间上是一个三次多项式的插值函数，而且保证了函数本身在样条节点处的连续性，从而保证了再整个区间的连续性。

$$S(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+(y_{i-1}-\frac{M_{i-1}h_i^2}{6})\frac{x_i-x}{h_i}$$
$$+(y_i-\frac{M_ih_i^2}{6})\frac{x-x_{i-1}}{h_i} \qquad x\in[x_{i-1},x_i] \quad (i=1,\cdots,n)$$

但是，由于S(x)在节点处的二阶导数值实际上并不知道，因此，我们还需设法将这些待定参数求出来。下面利用S(x)的导数在节点处的连续性来确定这些参数所满足的关系式。

对$S(x)$求导得

$$S'(x)=-M_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}$$
$$+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{M_i-M_{i-1}}{6}h_i$$
$$x\in[x_{i-1},x_i] \quad (i=1,\cdots,n)$$

$$S'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6}h_i$$

所以 $$\boxed{S'(x_{i-1}+0) = -\frac{h_i}{3}M_{i-1} - \frac{h_i}{6}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}}$$

$$S'(x_i - 0) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

由上式可得:

$$\boxed{S'(x_i+0) = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}}$$

由 $\boldsymbol{S'(x_i+0) = S'(x_i-0)}$ (i=1,2,…,n-1)

$$-\frac{h_i}{6}M_i - \frac{h_i}{3}M_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

$$-\frac{h_i}{6}M_i-\frac{h_i}{3}M_{i-1}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}=-\frac{h_{i+1}}{3}M_i-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}$$

得

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=d_i \ (i=1,2,\cdots,n-1) \qquad （1）$$

其中

$$\lambda_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}} \qquad \mu_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}=1-\lambda_i$$

$$d_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right]=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$$

称式（1）是“M关系式”，也称为基本方程组。如上过程，通过利用S(x)在样条节点处的二阶导数值，我们建立了S(x)的M表达式，并建立了这些二阶到数值满足的基本方程组。

第二步：建立端点条件

1. 边界条件：给出两端点一阶导数值

$$S'(x_0)=m_0, S'(x_n)=m_n$$

由公式

$$S'(x_{i-1}+0)=-\frac{h_i}{3}M_{i-1}-\frac{h_i}{6}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$$

$$S'(x_i-0)=\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i}{3}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$$

得

$$m_0=S'(x_0)=-\frac{h_1}{3}M_0-\frac{h_1}{6}M_1+\frac{y_1-y_0}{h_1}$$

$$m_n=S'(x_n)=\frac{h_n}{6}M_{n-1}+\frac{h_n}{3}M_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}$$

$$m_0 = S'(x_0) = -\frac{h_1}{3}M_0 - \frac{h_1}{6}M_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_1}$$

$$m_n = S'(x_n) = \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{h_n}{3}M_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}$$

即 $$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{cases}$$

其中$d_0 = \frac{6}{h_1}(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - m_0) \quad d_n = \frac{6}{h_{n-1}}(m_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}})$

$$2M_0 + M_1 = d_0$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

从中解出M_i (i=0,1,…,n) 得三次样条$S(x)$.

2、边界条件：给出两端点二阶到数值：

$$S''(x_0)=M_0, S''(x_n)=M_n$$

这时M关系式中就减少了2个未知量M_0、M_n，则下方程组可求解

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=d_i\ (i=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-2} & 2 & \lambda_{n-2} \\ & & & \mu_{n-1} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1-\mu_1 M_0 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1}-\lambda_{n-1}M_n \end{bmatrix}$$

从中解出$M_i(i=1,2,\ldots,n-1)$得 三次样条$S(x)$。

3、周期函数　则：$M_0 = M_n$

$$S'(x_0+0) = S'(x_n-0)$$

$$S'(x_{i-1}+0) = -\frac{h_i}{3}M_{i-1} - \frac{h_i}{6}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$S'(x_i-0) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$-\frac{h_1}{3}M_0 - \frac{h_1}{6}M_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_0} = \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{h_n}{3}M_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}$$

$$-\frac{h_1}{3}M_0-\frac{h_1}{6}M_1+\frac{y_1-y_0}{h_0}=\frac{h_n}{6}M_{n-1}+\frac{h_n}{3}M_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}$$

整理得 $$\lambda_n M_1+\mu_n M_{n-1}+2M_n=d_n$$

其中 $$\begin{cases}\lambda_n=\dfrac{h_1}{h_1+h_n} \qquad \mu_n=\dfrac{h_n}{h_1+h_n}=1-\lambda_n \\ d_n=\dfrac{6}{h_1+h_n}\left[\dfrac{y_1-y_0}{h_1}-\dfrac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right]\end{cases}$$

$$\lambda_n M_1 + \mu_n M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & \lambda_1 & & & \mu_1 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ \lambda_n & & & \mu_n & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

从中解出M_i(i=1,2,...,n),得三次样条$S(x)$.

第三步：方程组求解

对于以上几个端点条件，除周期条件外，其他几个对应的方程组都是三对角方程组，如第一种边界条件，方程组为：

$$
\begin{bmatrix}
2 & 1 & & & \\
\mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\
 & \ddots & \ddots & \ddots & \\
 & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\
 & & & 1 & 2
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n
\end{bmatrix}
$$

以上方程组的系数矩阵是严格对角占优矩阵，后续会介绍求解的方法。

例 已知函数 $y=f(x)$ 的函数值如下

x	-1.5	0	1	2
y	0.125	-1	1	9

在区间 $[-1.5,2]$ 上求三次样条插值函数 $S(x)$，使它满足边界条件：

$$S'(-1.5)=0.75, S'(2)=14$$

解 先根据给定数据和边界条件算出 μ_i,λ_i 与 d_i ，写出确定 M_i 的线性方程组。

在本例中，给出的是第1种边界条件，确定 $M_i(i=0,1,2,3)$ 的线性方程组。由所给函数表知

$$h_1 = 1.5 \qquad h_2 = 1 \qquad h_3 = 1$$

$$f[x_0, x_1] = -0.75 \qquad f[x_1, x_2] = 2 \qquad f[x_2, x_3] = 8$$

于是由 μ_i, λ_i与 $d_i(i = 1,2,\ldots,n-1)$ 的算式，知

$$\boldsymbol{\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \qquad \mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} = 1 - \lambda_i}$$

$$\boldsymbol{d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}}\left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right] = 6f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]}$$

$$\mu_1 = 0.6 \qquad \mu_2 = 0.5$$

$$\lambda_1 = 0.4 \qquad \lambda_2 = 0.5$$

$$d_1 = 6.6 \qquad d_2 = 18$$

由第1边界条件下 d_0与 d_n 的计算公式知

由第1边界条件下 d_0 与 d_n 的计算公式知

$$d_0=\frac{6}{h_1}\left(f\left[x_0,x_1\right]-y_0'\right)=-6,d_3=\frac{6}{h_3}\left(y_3'-f\left[x_2,x_3\right]\right)=36$$

故确定 M_0,M_1,M_2与M_3 的方程组为

$$\begin{bmatrix}2&1&0&0\\0.6&2&0.4&0\\0&0.5&2&0.5\\0&0&1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_0\\M_1\\M_2\\M_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6\\6.6\\18\\36\end{bmatrix}$$

然后解所得方程组，得到$S''(x)$在各节点x_i 上的值M_i 。
在本例中，解得

$$M_0=-5,M_1=4,M_2=4,M_3=16$$

最后将所得 M_i 代入，即得 $S(x)$在各子区间上的表达式 $S_i(x)(i=1,2,\ldots,n)$ 。

$S(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上的表达式为：

$$S_1(x)=M_0\frac{(x_1-x)^3}{6h_1}+M_1\frac{(x-x_0)^3}{6h_1}+\left(y_0-\frac{M_0}{6}h_1^{\ 2}\right)\frac{x_1-x}{h_1}$$
$$+\left(y_1-\frac{M_1}{6}h_1^{\ 2}\right)\frac{x-x_0}{h_1}$$

在本例中，将 $x_0=-1.5, x_1=0, y_0=0.125, y_1=-1,$

$M_0=-5, M_1=4$

代入，整理后得： $S_1(x)=x^3+2x^2-1 \qquad x\in[-1.5,0]$

同理可得：

$S_2(x)=2x^2-1 \qquad x\in[0,1]$

$S_3(x)=2x^3-4x^2+6x-3 \qquad x\in[1,2]$

故所求三次样条插值函数为

$$S(x)=\begin{cases} x^3+2x^2-1 & (-1.5\le x<0) \\ 2x^2-1 & (0\le x<1) \\ 2x^3-4x^2+6x-3 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

第1边界条件下计算三次样条插值函数 *S*(x) 在 *x* 处函数值的程序框图如下图。

输入$x_i, y_i (i=0,1,\cdots n)$及$y_0', y_n', n, x$

↓

计算h_i与$f[x_{i-1}, x_i] (i=1,2,\cdots n)$

↓

按公式(5.13)计算d_0与d_n

↓

按公式(5.8)计算$\lambda_i, \mu_i, d_i (i=1,2,\cdots .n-1)$

↓

解方程组(5.12)得$M_i (i=0,1,\cdots n)$

↓

根据x确定(5.3)式中的i并按(5.3)式计算$S(x)$值

↓

输出$x, S(x)$

上述求三次样条插值函数的方法，其基本思路和特点是:

先利用一阶导数 $S'(x)$ 在内节点 $x_i(i=1,2,\cdots.n-1)$ 上的连续性以及边界条件，列出确定二阶导数 $M_i=S''(x_i)(i=0,1,\ldots,n)$ 的线性方程组（在力学上称为三弯矩方程组），并由此解出 M_i，然后用 M_i 来表达 $S(x)$。

通过别的途径也可求三次样条插值函数。

例如，**可以先利用二阶导数在内节点上的连续性以及边界条件，列出确定一阶导数**$m_i = S'(x_i)\,(i = 0,1,\ldots,n)$**的线性方程组（在力学上称为三转角方程组），并由此解出** m_i**，然后用** m_i **来表达** $S(x_i)$ **。在有些情况下，这种表达方法与前者相比较，使用起来更方便。**

PART 4

数据拟合

1、函数逼近

插值法就是函数逼近问题的一种.

本章讨论的函数逼近，是指“对函数类 A 中给定的函数 $f(x)$，记作 $f(x)\subset A$，要在另一类简单的便于计算的函数类 B 中求函数 $p(x)\in B$，使 $p(x)$ 与 $f(x)$ 的误差在某种度量意义下最小”.

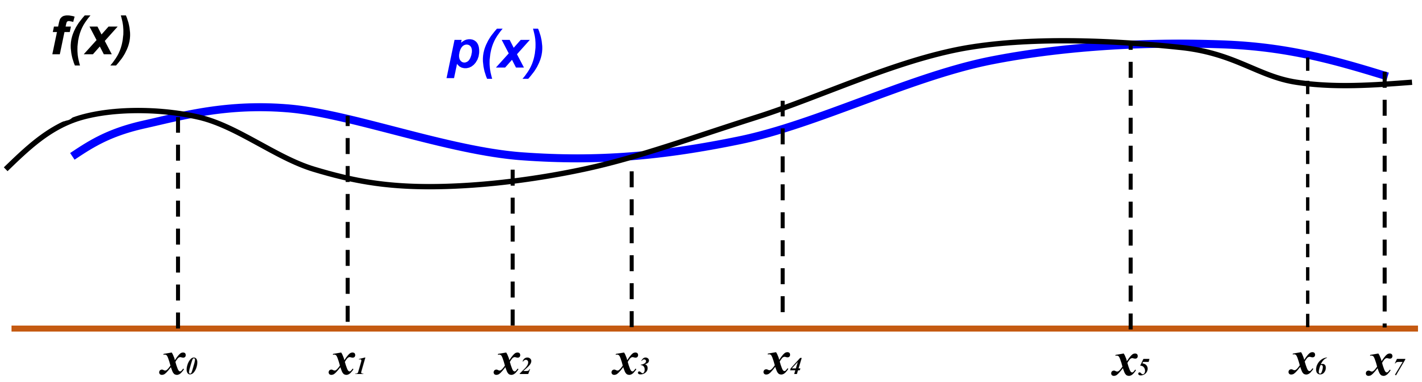
函数类 A 通常是区间 $[a,b]$ 上的连续函数，记作 $C[a,b]$，称为**连续函数空间**.

函数类 B 通常为 n 次多项式，有理函数或分段低次多项式等.

由于实验数据一般都有误差，有的数据误差很大，如果用插值法，插值多项式的次数越高，误差可能越大。

基于上述原因，现放弃使所求函数严格通过上述每一节点的要求，只要求在给定节点上的误差平方和最小。

假设 $f(x)$ 是定义在某区间 $[a,b]$ 上的函数，现寻求另一个构造简单、计算量小的函数 $p(x)$ 来近似地代替：



常用的函数系：

➢ 幂 函数系： $1, x, x^2, \cdots, x^n$

➢三角函数系：

$$1, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx$$

➢指数函数系：

$$e^{\lambda_0 x}, e^{\lambda_1 x}, \cdots, e^{\lambda_n x}$$

➢函数逼近构造思想：要求构造函数在整个区间上与已知函数的误差尽可能小。

➢误差度量标准：

（1） $\max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)-\varphi(x)\right|$

（2） $\int_a^b \left|f(x)-\varphi(x)\right|^2 W(x)dx$ 其中 $W(x)\ge 0$ 为权函数

对于给定的函数系 $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=0}^{n}$，寻求一组系数 $c_0,c_1,\cdots,c_n$

使得函数 $\varphi(x)=\sum\limits_{j=0}^{n}c_j\varphi_j(x)$ 满足

（1） $\lim\limits_{n\to\infty}\max\limits_{a\le x\le b}\left|f(x)-\varphi(x)\right|=0$ 一致逼近

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\left|f(x)-\varphi(x)\right|^2 W(x)dx=0$ L_2逼近

一、直线拟合

- 超定方程组 $\begin{cases} y_1 = a + bx_1, \\ \quad\cdots\cdots \quad (m > 2) \\ y_m = a + bx_m \end{cases}$
- 构造拟合曲线的三个准则

  设 $\hat{y}_i = a + bx_i, i = 1,2,\cdots,N$为按拟合直线求得的近似值，它与实测值之差

  $e_i = y_i - \hat{y}_i$ 称为残差。

✓准则1： $\max\limits_i |e_i| = \min$

✓准则2： $\sum\limits_i |e_i| = \min$

✓准则3： $\sum\limits_i e_i^2 = \min$

- 问题描述

  给定数据点$(x_i,y_i)(i=1,2,\ldots,m)$,求做一次函数y=a+bx,使总误差

$$Q = \sum_{i=1}^{N} [y_i - (a + bx_i)]^2$$

为最小.

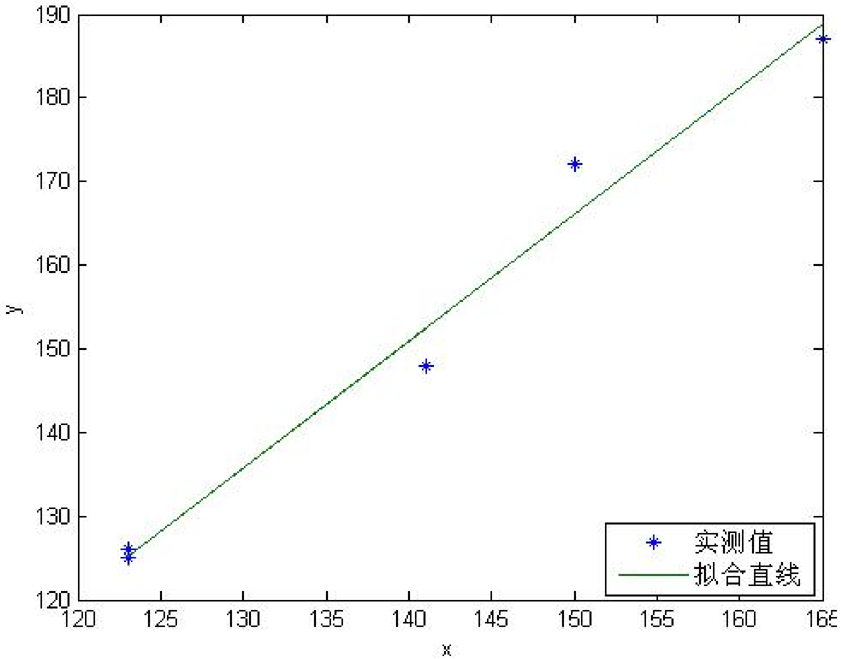
解：使Q达到极值的参数a, b满足

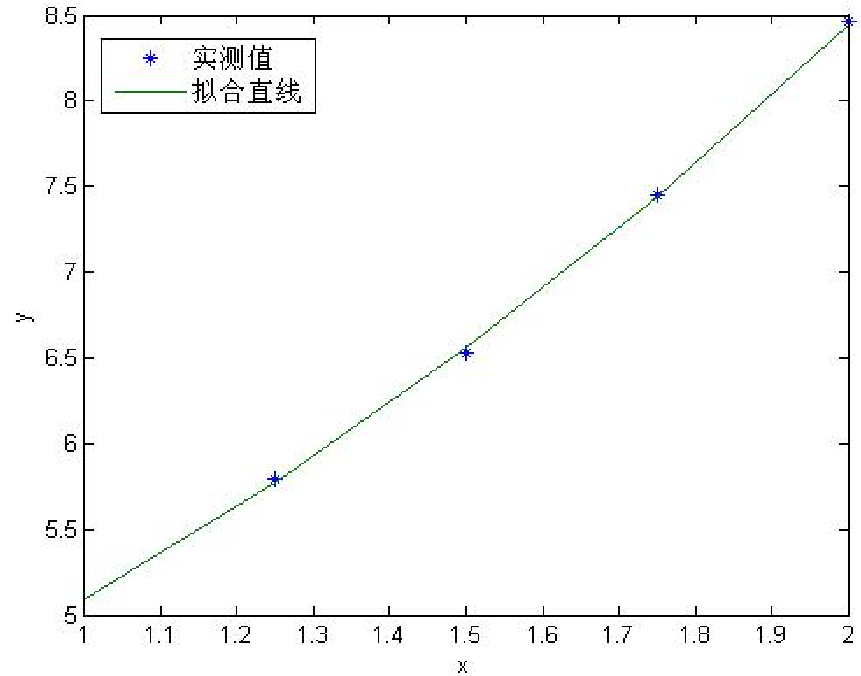
$$\frac{\partial Q}{\partial a}=0,\qquad \frac{\partial Q}{\partial b}=0,$$

有

$$\begin{cases} aN+b\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{i=1}^{N}y_i \\ a\sum_{i=1}^{N}x_i+b\sum_{i=1}^{N}x_i^2=\sum_{i=1}^{N}x_iy_i \end{cases}$$

求解二元一次方程组，得到取定拟合直线的参数a,b


190
180
170
160
150
140
130
120
y
120
125
130
135
140
145
150
155
160
165
x
实测值
拟合直线


8.5
8
7.5
7
6.5
6
5.5
5
y
1
1.1
1.2
1.3
1.4
1.5
1.6
1.7
1.8
1.9
2
x
实测值
拟合直线

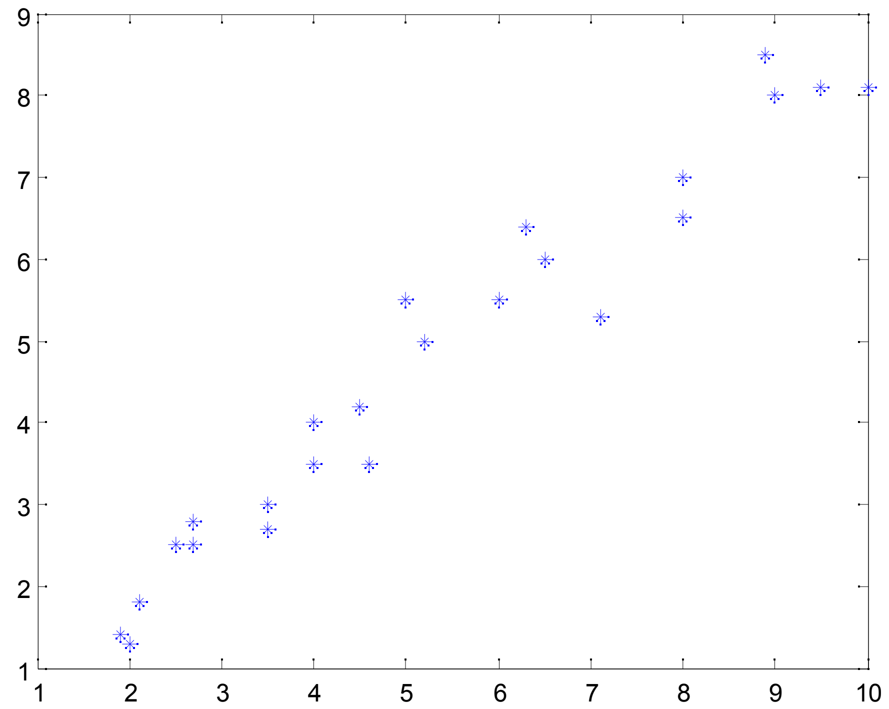
实例：考察某种纤维的强度与其拉伸倍数的关系,下表是实际测定的24个纤维样品的强度与相应的拉伸倍数是记录：

编　号	拉伸倍数 x_i	强　度 y_i	编　号	拉伸倍数 x_i	强　度 y_i
1	1.9	1.4	13	5	5.5
2	2	1.3	14	5.2	5
3	**2.1**	1.8	15	6	5.5
4	2.5	2.5	16	6.3	6.4
5	2.7	2.8	17	6.5	6
6	2.7	2.5	18	7.1	5.3
7	3.5	3	19	8	6.5
8	3.5	2.7	20	8	7
9	4	4	21	8.9	8.5
10	4	3.5	22	9	8
11	4.5	4.2	23	9.5	8.1
12	4.6	3.5	24	10	8.1

纤维强度随拉伸倍数增加而增加

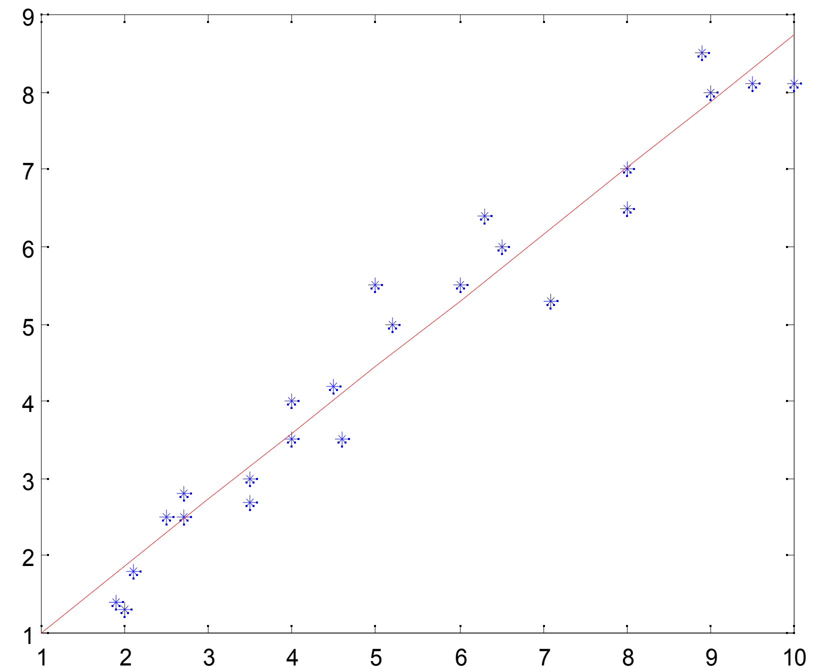
并且24个点大致分布在一条直线附近

因此可以认为强度y与拉伸倍数x的主要关系应是线性关系



$$y(x) = a + bx$$

$$\begin{cases} 24a + 127.5b = 131.1 \\ 127.5a + 829.61b = 731.6 \end{cases}$$

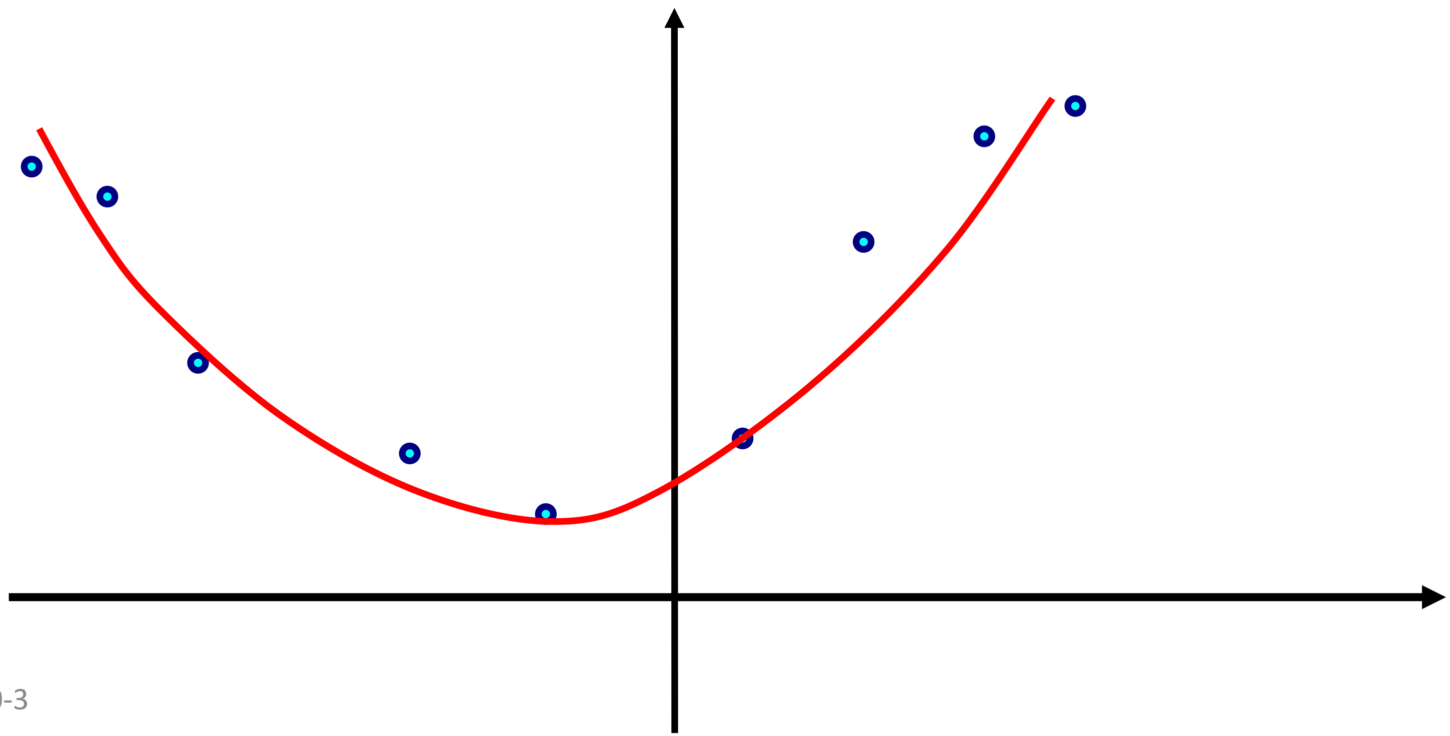


解得：a=0.1505, b=0.8587

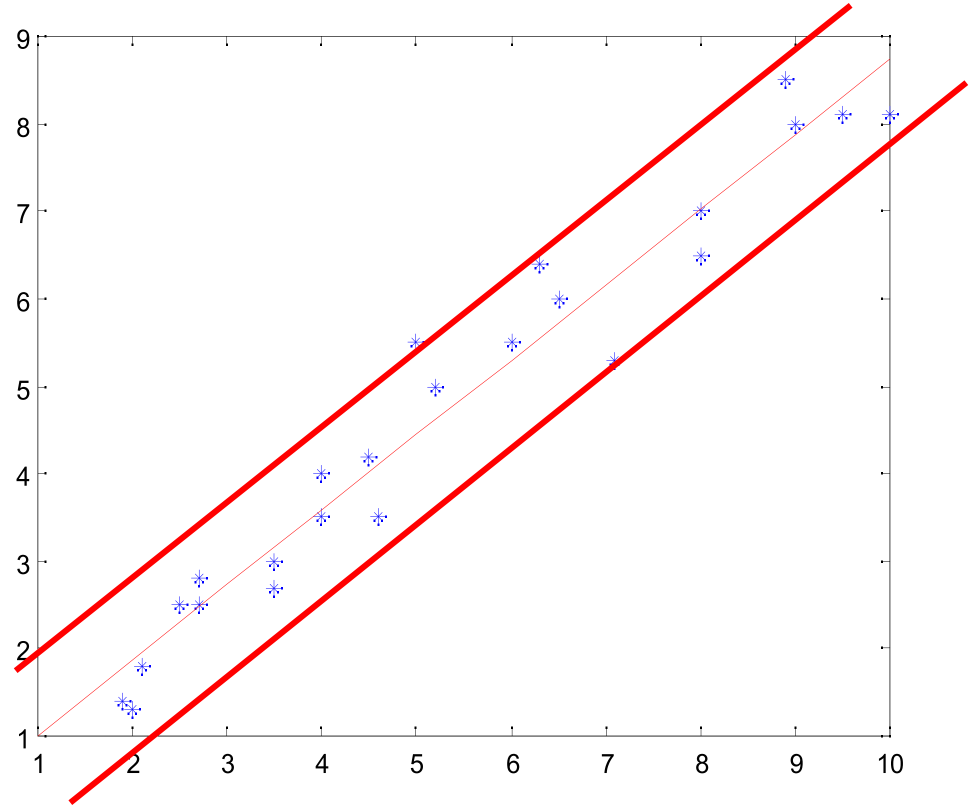
$$f(x) = 0.1505 + 0.8587x$$ 即为拟合直线

二、最小二乘多项式拟合

所谓"曲线拟合"，是指根据给定的数据表，寻找一个简单的表达式来"拟合"该组数据，此处的"拟合"的含义为：不要求该表达式对应的近似曲线完全通过所有的数据点，只要求该近似曲线能够反映数据的基本变化趋势。



若给定一组数据，如图：



并且点大致分布在一条直线附近。

因此可认为变量之间的主要关系是线性关系。

$$y \approx \varphi(x) = a + bx$$

该直线称为这一问题的数学模型。

怎样确定a, b, 使得直线能较好地反映所给数据的基本“变化趋势”？

采用最小二乘的思想

令 $S(a,b)=\sum_{i=1}^{m}(a+bx_i-y_i)^2$

问题转化为求参数 a,b 使 $S(a,b)$ 达到最小值。

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\frac{\partial S}{\partial b}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} m & \sum_{i=1}^{m} x_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i & \sum_{i=1}^{m} x_i^{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m} y_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 24 & 127.5 \\ 127.5 & 829.61 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 113.1 \\ 731.6 \end{pmatrix} \quad a\approx 0.1505 \quad b\approx 0.8587$$

$$\varphi(x)=0.1505+0.8587x$$

这种求线性函数y=a+bx的过程称为线性拟合。

一般地，对于给定的数据点 $(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,N)$，求作**m(m<<N)**次多项式 $p(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ 使得总误差最小：

$$Q = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^{\,j}\right]^2$$

Q可以看作是关于$a_j(j = 0,1,\cdots,m)$的多元函数，因此拟合多项式的构造转化为多元函数的极值问题，令

$$\frac{\partial Q}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0,1,\cdots,m$$

$$Q=\sum_{i=1}^{N}\left[y_i-\sum_{j=0}^{m}a_j x_i^{\,j}\right]^2 \xrightarrow{\qquad \frac{\partial Q}{\partial a_k}=0,\quad k=0,1,\cdots,m \qquad}$$

$$-2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i-\sum_{j=0}^{m}a_j x_i^{\,j}\right]x_i^k=0,\quad k=0,1,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{m}a_j x_i^{\,j+k}=\sum_{i=1}^{N}y_i x_i^k,\quad k=0,1,\cdots,m$$

因此有，

$$\begin{cases} a_0 N + a_1 \sum\limits_i x_i + \cdots + a_m \sum x_i^m = \sum y_i \\ a_0 \sum x_i + a_1 \sum x_i^2 + \cdots + a_m \sum x_i^{m+1} = \sum y_i x_i \\ \cdots \qquad\qquad\qquad \cdots \\ a_0 \sum x_i^m + a_1 \sum x_i^{m+1} + \cdots + a_m \sum x_i^{2m} = \sum y_i x_i^m \end{cases}$$

关于系数a_j的线性方程组 正则方程组

上方程组解是否存在唯一？

- 定理7 正则方程组有唯一解

证明：即对应的齐次方程组 $\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^{j+k} = 0$ **只有零解。**

❖ 定理8 设a_j(j=0, 1,···, m)是正则方程组的解，

则$y = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$必为问题的解

利用正则方程组求解曲线拟合问题是一个古老的方法，在实际计算中，当m较大时，正则方程组往往是病态的，其求解方法有待于进一步改进

三、观察数据的修匀

- 提高拟合多项式的次数不一定能改善逼近效果，实际计算时常用不同的低次多项式去拟合不同的分段----分段拟合。

设已给一批实测数据$(x_i, y_i)(i=1,2, \ldots ,N)$，由于测量方法和实验环境的影响，不可避免地会产生随机干扰和误差，希望根据数据的分布的总的趋势去剔除观察数据中的偶然误差----数据修匀(数据平滑)问题。

相邻的5个节点$x_{-2} < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2$，设节点之间是等距的，记节点间距为h，作变换t=$(x - x_0)$/h，即$x = x_0 + ht, t_i = (x_i - x_0)/h = i(i = -2, -1, 0, 1, 2)$，现考虑对变量$t$进行讨论

t_i	-2	-1	0	1	2
y_i	y_{-2}	y_{-1}	y_0	y_1	y_2

设用二项式作拟合

$$y = a + bt + ct^2$$

则正则方程组为

$$\begin{cases} 5a + 10c = \sum_{i=-2}^{2} y_i \\ 10b = \sum_{i=-2}^{2} iy_i \\ 10a + 34c = \sum_{i=-2}^{2} i^2 y_i \end{cases}$$

解得：$b=\frac{1}{10}(-2y_{-2}-y_{-1}+y_1+2y_2)$

$$c=\frac{1}{14}(2y_{-2}-y_{-1}-2y_0-y_1+2y_2)$$

$$a=\frac{1}{35}(-3y_{-2}+12y_{-1}+17y_0+12y_1-3y_2)$$

则在节点$x=0$处（t=0）的五点二次修匀公式为

$$\hat{y}_0=\frac{1}{35}(-3y_{-2}+12y_{-1}+17y_0+12y_1-3y_2)$$

$$\hat{y}_0\approx y(x=0)=a$$

内容小结

1、Lagrange插值

定义 若 n 次多项式 $l_j(x)\,(j=0,1,\cdots,n)$ 在 $n+1$ 个互异节点 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 上满足条件：

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j;\\ 0, & k\neq j.\end{cases}\quad (j,k=0,1,\cdots,n)$$

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}$$

于是，插值多项式 $L_n(x)$ 可表示为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x).$$

误差估计

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$$

当 $n=1$ 时，线性插值余项为

$$R_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1), \quad \xi \in [x_0, x_1]$$

当 $n=2$ 时，抛物插值余项为

$$R_2(x) = \frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \quad \xi \in [x_0, x_2]$$

➢反插值问题

已知定义于区间 $[a,b]$上的单调连续函数$f(x)$在 $n+1$ 个互异节点$\{x_i\}_{i=0}^{n}\subset[a,b]$ 处的函数值 $\{f(x_i)\}_{i=0}^{n}$，若函数值$\bar{y}=f(\bar{x})$ 已知，如何求$\bar{x}$？

$$\text{即求 } \bar{x}=f^{-1}(\bar{y})$$

因此可以看作如下插值问题：

已知定义于区间$[a,b]$上的连续函数$x=f^{-1}(y)$ 在$n+1$个互异节点$\{y_i=f(x_i)\}_{i=0}^{n}$处的函数值$\{x_i=f^{-1}(y_i)\}_{i=0}^{n}$，

求函数值 $\bar{x}=f^{-1}(\bar{y})$

2、Newton插值

差商的定义

零阶差商： $f[x_i] = y_i = f(x_i)$

一阶差商： $$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

二阶差商：$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

n阶差商：

$$f[x_0, x_1, \cdots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, \cdots, x_n] - f[x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

差商计算可列差商表如下表

表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$\underline{f(x_0)}$				
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0,x_1]}$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$f(x)=N_n(x)+R_n(x)$$

$$N_n(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

$$R_n(x)=f[x,x_0,\cdots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots\ (x-x_n)$$

$R_n(x)$称为牛顿型插值余项。

可见, $N_n(x)$为次数不超过n 的多项式,且易知

$$R_n(x_i)=0 \quad 即 \quad N_n(x_i)=y_i\ ,\ (i=0,1,\ldots,n)$$

满足插值条件, 故其为插值问题的解, $N_n(x)$称为牛顿插值多项式。

3、三次样条插值

对于给定的函数表

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ ，若函数 $S(x)$ 满足:

（1）$S(x)$在每个子区间 $[x_i,x_{i+1}](i=0,1,\cdots,n-1)$ 上是三次多项式;

（2）$S(x)\in C^2[a,b]$ （二阶连续可微）;

（3）满足插值条件 $S(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$

则称$S(x)$为函数$f(x)$关于节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的三次样条插值。

第1种边界条件：给出两端点一阶导数值

$$S'(x_0)=m_0, S'(x_n)=m_n$$

得到参数基本方程组：

$$2M_0+M_1=d_0, M_{n-1}+2M_n=d_n$$

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=d_i \ (i=1,2,\cdots,n-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

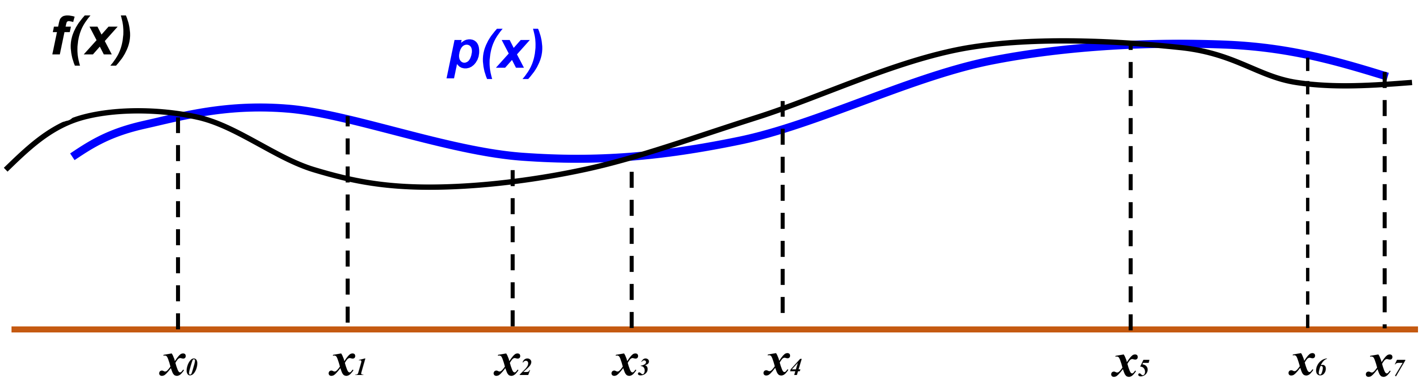
从中解出M_i $(i=0,1,\ldots,n)$ 得三次样条$S(x)$.

4、最小二乘拟合

由于实验数据一般都有误差，有的数据误差很大，如果用插值法，插值多项式的次数越高，误差可能越大。

基于上述原因，现放弃使所求函数严格通过上述每一节点的要求，只要求在给定节点上的误差平方和最小。

假设 $f(x)$ 是定义在某区间 $[a,b]$ 上的函数，现寻求另一个构造简单、计算量小的函数 $p(x)$ 来近似地代替：



- 构造拟合曲线的准则

(1)使残差的绝对值为最小 $\max_i |e_i| = \min$

(2)使残差的绝对值之和为最小 $\sum_i |e_i| = \min$

(3)使残差的平方和为最小 $\sum_i e_i^2 = \min$

基于准则3来选取拟合曲线的方法，称为曲线拟合的最小二乘法

一般地，对于给定的数据点 $(x_i, y_i)(i = 1,2,\cdots,N)$，求

作m(m<<N)次多项式 $\varphi(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ 使得总误差最小：

$$Q = \sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^{\,j}\right]^2 \qquad \frac{\partial Q}{\partial a_k} = 0, \quad k = 0,1,\cdots,m$$

$$-2\sum_{i=1}^{N}\left[y_i - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^{\,j}\right] x_i^k = 0, \quad k = 0,1,\cdots,m$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^{\,j+k} = \sum_{i=1}^{N} y_i x_i^k, \quad k = 0,1,\cdots,m$$

20XXPOWERPOINT

感谢观看 THANGKS!

单击此处添加您的副标题文字