《数值计算方法》

解线性方程组的迭代法

讲授人：杨 程
时　间：2021-2022学年
秋季学期
Email: yang_cheng@nun.edu.cn

目录

解线性方程组的迭代法

PART 0

高斯列主元消去法

高斯消去法

高斯消去法是一个古老的求解线性方程组的方法，但由它改进得到的选主元的高斯消去法则是目前计算机上常用的解低阶稠密矩阵方程组的有效方法。

例 用高斯消去法解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 & (0.1) \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1/2 & (0.2) \\ x_1 + 3x_2 + 9x_3 = 5/2 & (0.3) \end{cases}$$

解 第1步：将方程（**0.1**）乘上（-3/2）加到方程（**0.2**）

将方程（**0.1**）乘上（-1/2）加到方程（**0.3**）

则得到与原方程等价的方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = -1 & \text{(0.4)} \\ 2x_2 + 8x_3 = 2 & \text{(0.5)} \end{cases}$$

其中方程（**0.4**），（**0.5**）已消去了未知数x_1。

第2 步：方程（**0.4**）乘上2加到方程（**0.5**），消去（**0.5**）式中未知数x_2，得到等价的三角形方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ -x_2 + x_3 = -1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

由上述方程组，用回代的方法，即可求得原方程组的解。

$$x_3 = 0, x_2 = 1, x_1 = -1/2$$

若用矩阵来描述消去法的约化过程，即为

$$[A,b]=\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 3 & 2 & 4 & \vdots & 1/2\\ 1 & 3 & 9 & \vdots & 5/2\end{bmatrix}\xrightarrow{1}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -1\\ 0 & 2 & 8 & \vdots & 2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{2}\begin{bmatrix}2 & 2 & 2 & \vdots & 1\\ 0 & -1 & 1 & \vdots & -1\\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0\end{bmatrix}$$

这种求解过程，称为具有回代的高斯消去法。

从上例看出，用高斯法解方程组的基本思想是**用矩阵的初等变换将系数矩阵约化为具有简单形式的矩阵（上三角矩阵，单位矩阵等），从而容易求解。**

下面讨论求解一般线形方程组的高斯消去法，设有n个未知数的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{0.7}$$

引进记号

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \vdots & a_{nn} \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

(0.7) 可用矩阵形式表示

$$Ax = b \tag{0.8}$$

为了讨论方便，记

$$A = A^{(1)} = (a_{ij}^{(1)})_{n\times n}, \quad b = b^{(1)} = (b_1^{(1)},\cdots b_n^{(1)})^T.$$

假设 A 为非奇异矩阵（即设 $\det(A) \neq 0$ ）。

第1步（k=1）： 设 $a_{11}^{(1)} \neq 0$ 计算乘数

$$\boxed{l_{i1} = \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} (i = 2,\cdots n)}$$

用 $(-l_{i1})$ 乘上（0.7）第一个方程，加到第i个中方程上去，即施行行初等变换：

$$\boxed{R_i \leftarrow R_i - l_{i1} \cdot R_1, (i = 2,\cdots,n)}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{记} L_1 = I + l_1 e_1^T, L_1^{-1} = I - l_1 e_1^T \\ A^{(2)} = L_1^{-1} A^{(1)}, b^{(2)} = L_1^{-1} b^{(1)}\end{array}}$$

消去第2到第n个方程的未知数x_1，得到（0.7）的等价方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & \boxed{\begin{matrix} a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} \end{matrix}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \boxed{\begin{matrix} b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{matrix}} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0.9)}$$

记为

$$A^{(2)}x = b^{(2)}$$

其中（0.9）式中方框内元素为这一步需要计算的元素，计算公式为：

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - l_{i1}a_{1j}^{(1)}, (i, j = 2, \cdots, n)$$
$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - l_{i1}b_1^{(1)}, (i = 2, \cdots, n)$$

第k步： 继续上述消去过程，设第1步至第k-1步计算已经完成，得到与原方程组等价的方程组。

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & \vdots & & \\ & & & a_{nk}^{(k)} & \cdots & a_{nn}^{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \\ b_k^{(k)} \\ \\ b_n^{(k)} \end{bmatrix} \qquad \text{（0.10）}$$

记为

$$A^{(k)}x = b^{(k)}$$

现进行第k步消元计算，设 $a_{kk}^{(k)} \neq 0$，计算乘数

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, (i = k+1, \cdots, n)$$

用 $(-l_{ik})$ 乘（0.10）的第 k个方程加到第i个方程消去（0.10）中第i 个方程 $(i = k+1, \cdots, n)$ 的未知数 x_k，得到原方程组的等价方程组。

$$\text{记} L_k = I + l_k e_k^T, L_k^{-1} = I - l_k e_k^T$$

$$A^{(k+1)} = L_k^{-1} A^{(k)}, b^{(k+1)} = L_k^{-1} b^{(k)}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & & & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & & & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_{kk}^{(k)} & \cdots & \cdots & a_{kn}^{(k)} \\ & & & & a_{k+1k+1}^{(k+1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k+1)} \\ & & & & \vdots & & \\ & & & & a_{n,k+1}^{(k+1)} & \vdots & a_{nn}^{(k+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_k^{(k)} \\ b_{k+1}^{(k+1)} \\ \vdots \\ b_n^{(k+1)} \end{bmatrix} \qquad \textbf{(0.11)}$$

简记为

$$\boxed{A^{(k+1)}x = b^{(k+1)}}$$

其中$A^{(k+1)}, b^{(k+1)}$元素计算公式为:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - l_{ik} a_{kj}^{(k)}, (i, j = k+1, \cdots, n) \\ b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - l_{ik} b_k^{(k)}, (i = k+1, \cdots, n) \\ A^{(k+1)} \text{与} A^{(k)} \text{前} k \text{行元素相同，} \\ b^{(k+1)} \text{与} b^{(k)} \text{前} k \text{个元素相同。} \end{cases} \quad (0.12)$$

重复上述约化过程，即$k = 1, 2, \cdots, n-1$，且设

$$a_{kk}^{(k)} \neq 0 (k = 1, 2, \cdots, n-1)$$

，共完成n-1步消元计算，得到与原方程组（0.7）等价的三角形方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} \\ & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (0.13)$$

用回代法，即可求得（0.13）的解，计算公式为：

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \dfrac{b_i^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}}, (i = n-1, \cdots, 1) \end{cases} \quad (0.14)$$

元素 $a_{kk}^{(k)}$ 称为**约化的主元素**。将（0.7）约化为（0.13）的过程称为**消元过程**；（0.13）求解过程（0.14）称为**回代过程**，由消元过程和回代过程求解线性方程组的方法称为**高斯消去法**。

定理1（高斯消去法）设$Ax=b$, 其中$A\in R^{n\times n}$如果约化的主元素$a_{kk}^{(k)}\neq 0(k=1,2,\cdots,n)$,则可通过高斯消去法（不进行交换两行的初等变换）将方程组$Ax=b$约化为三角形矩阵方程组（**0.13**），且消元和求解公式为：

1. 消元计算

$$k=1,2,\cdots,n-1$$

$$l_{ik}=\frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}(i=k+1,\cdots,n)$$

$$a_{ij}^{(k+1)}=a_{ij}^{(k)}-l_{ik}a_{kj}^{(k)},(i,j=k+1,\cdots,n)$$

$$b_i^{(k+1)}=b_i^{(k)}-l_{ik}b_k^{(k)},(i=k+1,\cdots,n)$$

2. 回代计算

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{b^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}} \\ x_i = \dfrac{b_i^{(i)} - \sum\limits_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}}, (i = n-1, \cdots, 1) \end{cases}$$

当A为非奇异矩阵时，也可能有某$a_{kk}^{(k)} = 0$, 但在第k列存在元素

$$a_{i_k k}^{(k)} \neq 0 (k+1 \leq i_k \leq n)$$

于是可能通过交换（A，b）的第k行和第i_k行将$a_{i_k k}^{(k)}$调到(k,k)位置，然后再进行消元计算。于是，在A为非奇异矩阵时，只要引进行交换，则高斯消去法可将原线性方程组 $Ax=b$ 约化为三角形方程组（**0.13**），且通过回代法即可求得方程组的解。

高斯消去法计算量:

（1） 消元计算：第k步 $(k=1,2,\cdots,n-1)$。

1. 计算乘数：需要作（n-k）次除法运算；
2. 消元：需作$(n-k)^2$次乘法运算；
3. 计算 $b^{(k)}$：需作（n-k）次乘法运算；

于是，完成全部消元计算共需作乘除运算的次数为s：

$$s \equiv \sum_{k=1}^{n-1}(n-k)+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)$$
$$=\frac{n(n-1)}{2}+\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}+\frac{n(n-1)}{2}$$

（2） 回代计算：共需要作n(n+1)/2次乘除运算。

于是，用高斯消去法解$Ax=b$(其中$A\in R^{n\times n}$)的计算量为共需作

$$MD=\frac{n(n+1)}{2}+s=\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3} \qquad (0.15)$$

次乘除运算。

下面比较用高斯消去法和用克莱姆（Cramer）法则解20阶方程组的计算量。

表

方法	高斯消去法	Cramer 法则
计算量	3060次乘除法	大约5×10^{19}次乘法

如果计算在每秒作10亿次乘除法运算的计算机上进行，那么用高斯消去法解20阶方程组约需要0.000003秒时间即可完成，而用克莱姆法则大约需1.3×10^{7}小时完成（大约相当于10^{3}年）。由此可知克莱姆法则完全不适用在计算机上求解高维方程组。

在计算机上用高斯消去法解低阶稠密矩阵线性方程组时要注意几点:

(1) 要用一个二维数组**A**(n,n)存放系数矩阵**A**的元素，用一维数组b(n)存放常数项**b**向量；

(2) 需要输入的数据：**A**，**b**，n

(3) 约化的中间结果 $A^{(k)}$元素冲掉**A**元素，$b^{(k)}$冲掉**b**，乘数m_{ik}冲掉$a_{(ik)}^{(k)}$。

(4) 在高斯消去法中一般要引进行交换；

(5) 如果不存在 i_k 使$a_{i_k k}^{(k)} \neq 0$,要输出方程没有唯一解的信息。

例题：用Gauss消去法解方程组并求其系数矩阵行列式的值。

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

解　消元可得

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 3/2 & 3/2 & 3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 5/2 & 3/2 & 4 \\ 0 & 0 & 3/5 & 3/5 \end{array}\right]$$

回代可得

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1, \det A = 3$$

选主元素的高斯消去法

　　用高斯消去法解 $Ax=b$ 时，其中设A为非奇异矩阵，可能出现 $a_{kk}^{(k)}=0$ 情况，这时必须进行带行交换的高斯消去法。但在实际计算中即使 $a_{kk}^{(k)}\neq 0$ 但其绝对值很小时，用 $a_{kk}^{(k)}$ 作除数，会导致中间结果矩阵 $A^{(k)}$ 元素数量级严重增长和舍入误差的扩散，使得最后的计算结果不可靠。

例　设有方程组

$$\begin{cases} 0.0001x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=2 \end{cases}$$

解　　精确解为 $x^* = (0.99989999,\ 1.00010001)^T$

[方法1]：　用高斯消去法求解(用具有舍入的6位浮点数进行运算)

$$[A,b]=\begin{bmatrix} 0.000100 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{m_{21}=10000}$$

$$\begin{bmatrix} 0.0001000 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & -10000 & \vdots & -10000 \end{bmatrix}$$

回代得到计算解$x_1 = 1.00, x_2 = 0.00$。与精确解比较,这是一个很坏的结果。

[方法2] 用具有行交换的高斯消去法(避免小主元)。

$$[A,b] \xrightarrow{r_1 \Leftrightarrow r_2, m_{21}=0.000100} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0.000100 & 1 & \vdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \vdots & 2 \\ 0 & 1.00 & \vdots & 1.00 \end{bmatrix}$$

回代求解 $x_2 = 1.00, x_1 = 1.00$。对于用具有舍入的6位浮点数进行运算，这是一个很好的计算结果。

方法1计算失败的原因，是用了一个绝对值很小的数作除数，乘数很大，引起约化中间结果数量很严重增长，再舍入就使得结果不可靠了。

◆在采用高斯消去法解方程组时，**小主元可能导致计算失败**，故**在消去法中应避免采用绝对值很小的主元素**。

◆对一般方程组，**需要引进选主元的技巧**，即在高斯消去法的每一步应该选取系数矩阵或消元后的低阶矩阵中选取绝对值最大的元素作为主元素，**保持**乘数$|m_{ik}| \le 1$, 以便减少计算过程中舍入误差对计算解的影响；

◆对同一个数值问题，用不同的计算方法，得到的结果的精度大不一样，一个计算方法，如果用此方法的计算过程中舍入误差得到控制，对计算结果影响较小，称此方法为数值稳定的；

◆如果用此计算方法的计算过程中舍入误差增长迅速，计算结果受舍入误差影响较大，称此方法为数值不稳定。

◆解数值问题时，应选择和使用数值稳定的计算方法，否则，如果使用数值不稳定的计算方法去解数值计算问题，就可能导致计算失败。

追赶法

在一些实际问题中， 例如解常微分方程边值问题，热传导方程以及船体数学放样中建立三次样条函数等，都会要求解系数矩阵为对角占优的三对角线方程组。

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & a_i & b_i & c_i & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \\ f_n \end{pmatrix} \tag{0.16}$$

其中A满足条件

$$\left.\begin{array}{ll} (1) & |b_1| > |c_1| > 0; \\ (2) & |b_i| \ge |a_i| + |c_i|, (a_i c_i \ne 0, i = 1, 2, \cdots, n-1); \\ (3) & |b_n| > |a_n| > 0 \end{array}\right\} \tag{0.17}$$

对于具有条件（**0.16)** 的方程组 **(0.17)**，可用下述的**追赶法**求解。追赶法具有计算量少，方法简单，算法稳定等特点。

定理1　**设三对角方程组** $Ax=f$，**且A满足条件(0.17)，**

则A为非奇异矩阵。

证明　用归纳法证明，显然，对n=2时有

$$\det(A)=\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=b_1b_2-c_1a_2\neq 0$$

现设定理对n-1阶满足条件**(0.17)**的三对角阵成立，求证对满足条件**(0.17)**的n阶三对角阵定理亦成立。

因$b_1\neq 0$，消去法执行一步后得

$$A \to \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 - \dfrac{c_1}{b_1} a_2 & c_2 & & \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \equiv A^{(2)}$$

显然

$$\det(A) = b_1 \det(B)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} a_2' & c_2 & & \\ a_3 & b_3 & c_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & a_n & b_n \end{bmatrix}, \quad a_2' = b_2 - \frac{c_1}{b_1} a_2$$

$$\left|a_2'\right| = \left|b_2 - \frac{c_1}{b_1}a_2\right| \geq \left|b_2\right| - \left|\frac{c_1}{b_1}\right|\left|a_2\right| > \left|b_2\right| - \left|a_2\right| \geq \left|c_2\right| \neq 0$$

于是由归纳法假设，则有

$$\det(B) \neq 0$$

故

$$\det(A) \neq 0$$

定理2 设 $Ax=f$，其中A为满足条件（0.17）的三对角阵，则A的所有顺序主子式都不为零，即

$$\boxed{\det(A_k)\neq 0, \qquad (k=1,2,\cdots,n)}$$

证明　　由于A是满足（0.17）的n阵三对角阵，因此，A的任一个顺序主子阵亦是满足（0.17）的三对角阵，由定理1，则有：

$$\boxed{\det(A_k)\neq 0,(k=1,2,\cdots,n)}$$

于是，由矩阵的三角分解定理，则有

$$\boxed{A=LU}$$

即

$$
\begin{bmatrix}
b_1 & c_1 & & & & & \\
a_2 & b_2 & c_2 & & & & \\
& \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
& & a_i & b_i & c_i & & \\
& & & \ddots & \ddots & \ddots & \\
& & & & & a_n & b_n
\end{bmatrix}
=
$$

$$
\begin{bmatrix}
\alpha_1 & & & & & \\
\gamma_2 & \alpha_2 & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & \\
& & \gamma_i & \alpha_i & & \\
& & & \ddots & \ddots & \\
& & & & \gamma_n & \alpha_n
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
1 & \beta_1 & & & & & & \\
& 1 & \beta_2 & & & & & \\
& & 1 & \ddots & & & & \\
& & & \ddots & & & & \\
& & & & 1 & \beta_{i-1} & & \\
& & & & & 1 & \beta_i & \cdots \\
& & & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & & 1 & \beta_{n-1} \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & 1
\end{bmatrix}
$$

由矩阵乘法，可得计算待定系数 $\{\alpha_i\},\{\beta_i\},\{\gamma_i\}$ 的计算公式，即

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad b_1=\alpha_1,\quad c_1=\alpha_1\beta_1,\quad \beta_1=c_1/b_1;\\
&(2)\quad a_i=\gamma_i,\quad b_i=\alpha_i+\gamma_i\beta_{i-1}=a_i\beta_{i-1}+\alpha_i,\quad (i=2,\cdots,n);\\
&(3)\quad c_i=\alpha_i\beta_i,\quad (i=2,\cdots,n-1)
\end{aligned}
$$

于是，得到解（0.16）的追赶法公式：

(1) 分解计算公式 A=LU

$$
\begin{cases}
\beta_1=c_1/b_1,\\
\alpha_i=b_i-a_i\beta_{i-1},\\
\qquad \beta_i=c_i/\alpha_i \qquad (i=2,\cdots,n-1)
\end{cases}
$$

求解 $Ax=f \Leftrightarrow$ 求解(1) $Ly=f$, 求 y

(2) $Ux=y$, 求 x

(2) 求解 $Ly = f$ 的递推公式

$$\begin{cases} y_1 = f_1 / b_1 \\ y_i = (f_i - a_i y_{i-1}) / \alpha_i \\ (i = 2, 3, \cdots . n) \end{cases}$$

(3) 求解 $Ux = y$ 的递推公式

$$\begin{cases} x_n = y_n \\ x_i = y_i - \beta_i x_{i+1}, \quad \left(i = n-1, \cdots, 2, 1\right) \end{cases}$$

将计算 $\beta_1 \to \beta_2 \to \cdots \to \beta_{n-1}$ 及 $y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_n$ 的过程称为**追的过程**，计算方程组解

$$x_n \to x_{n-1} \to \cdots \to x_2 \to x_1$$

的过程称为**赶的过程**。追赶法解 $Ax = f$ 仅需要5n-4次乘除运算。只需要用3个一维数组分别存贮A的系数 $\{a_i\},\{b_i\},\{c_i\}$ 且还需要用三个一维数组保存计算的中间结果 $\{\alpha_i\},\{\beta_i\}$ 和 $\{y_i\}$(或 $\{x_i\}$)

PART 1

雅可比迭代法

解线性方程组有直接法（例如选主元的高斯消去法等），但是，对于工程技术中产生的大型稀疏矩阵方程组，则利用迭代法求解是合适的，并可利用矩阵A中有大量零元素的特点节省计算机内存。

设有方程组 $Ax = b$ 其中 A 为非奇异阵，解方程组的迭代法，首先需要将 $Ax = b$ 转化为一个等价方程组

非奇异矩阵是行列式不为 **0** 的矩阵，也就是可逆矩阵。

$$\boxed{x = Bx + f} \qquad (7.1)$$

任取初始向量 $x^{(0)}$ 按下述逐次代入方法构造向量序列 $x^{(k)}$：

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f \qquad (7.2)$$

其中，B与k无关，称此迭代法为**一阶定常迭代法**，如果

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^*$$

则称此迭代法**收敛**且 x^* 为（7.1）的解。事实上，在（7.2）式两边取极限即知：

$$\begin{aligned} x^* &= \lim_{k\to\infty} x^{(k+1)} \\ &= \lim_{k\to\infty}(Bx^{(k)} + f) \\ &= Bx^* + f \end{aligned}$$

例 设有方程组
$$\begin{cases} 10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15 \end{cases}$$

解 精确解 $x^* = (1,2,-1,1)^T$

首先将 $Ax = b$ 转化为等价方程组

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{10}(6 + x_2 - 2x_3) \\ x_2 = \dfrac{1}{11}(25 + x_1 + x_3 - 3x_4) \\ x_3 = \dfrac{1}{10}(-11 - 2x_1 + x_2 + x_4) \\ x_4 = \dfrac{1}{8}(15 - 3x_2 + x_3) \end{cases}$$

取初始向量 $x^{(0)} = (0,0,0,0)^T$ 时的迭代公式：

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \frac{1}{10}(6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\ x_2^{(k+1)} = \frac{1}{11}(25 + x_1^{(k)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)}) \\ x_3^{(k+1)} = \frac{1}{10}(-11 - 2x_1^{(k)} + x_2^{(k)} + x_4^{(k)}) \\ x_4^{(k+1)} = \frac{1}{8}(15 - 3x_1^{(k)} + x_3^{(k)}), (k = 0,1,2,\ldots) \end{cases}$$

且有误差 $\left\| x^* - x^{(10)} \right\|_\infty \approx 0.0002$

计算结果如下表：

精确解：$x^* = (1,2,-1,1)^T$

$x^{(k)}$	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$x_4^{(k)}$
$x^{(0)}$	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
$x^{(1)}$	0.6000	2.2727	-1.100	1.8750
$x^{(2)}$	1.0473	1.7159	-0.8052	0.8852
$x^{(3)}$	0.9326	2.0533	-1.0493	1.1309
$x^{(4)}$	1.0152	1.9637	-0.9681	0.9739
$x^{(5)}$	0.9890	2.0114	-1.0103	1.0214
$x^{(6)}$	1.0032	1.9922	-0.9945	0.9944
$x^{(7)}$	0.9981	2.0023	-1.0020	1.0036
$x^{(8)}$	1.0006	1.9987	-0.9990	0.9989
$x^{(9)}$	0.9997	2.0004	-1.0004	1.0006
$x^{(10)}$	1.0001	1.9998	-0.9998	0.9998

从此例看出，由迭代法产生的向量序列$\left\{x^{(k)}\right\}$逐次逼近方程组的精确解。**但是，并不是对任何一个方程组（7.1），由迭代法产生的向量序列$\left\{x^{(k)}\right\}$都收敛。**

*基本迭代法

设有方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, (i=1,2,\cdots,n)$$

或 $$Ax = b \qquad \text{（7.3）}$$

其中A为非奇异矩阵，且

$$a_{ii} \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$$

将A写为：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \\ & & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 0 \\ & & & \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$$\equiv D - L - U \qquad (7.4)$$

现将A分裂为

$$A = M - N$$

于是方程组（7.3）等价于方程组

$$Mx = Nx + b \qquad (7.5)$$

其中M为可选择的一个非奇异矩阵，应选择M使 $Mx = f$ **容易求解**。

对应于方程**(7.5)** 可构造一个迭代过程：

$$\begin{cases} x^{(0)}\text{(初始向量)} \\ x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b \\ (k = 0,1\cdots) \end{cases} \qquad (7.6)$$

选取M=D，于是 $N = M - A = (L+U)$ ，方程（**7.3**）转化为等价方程组

$$Dx = (L+U)x + b$$

于是得到**雅可比迭代公式**：

$$\begin{cases} x^{(0)}(\text{初始向量}) \\ x^{(k+1)} = Jx^{(k)} + f \\ \text{其中} J = D^{-1}(L+U)\text{，} f = D^{-1}b \end{cases} \qquad \textbf{(7.7)}$$

J 称为 **J a c o b i** 迭代法的迭代矩阵。

Jacobi迭代公式的分量形式：

记 $x^{(k)}=(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T$ 为第 k 次近似，则（7.7）式可写出为

$$a_{ii}x_i^{(k+1)}=b_i-\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}$$

或

$$\begin{cases}x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T\\ x_i^{(k+1)}=\dfrac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum\limits_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}a_{ij}x_j^{(k)})\\ (i=1,2,\cdots,n;\quad k=0,1,\cdots)\end{cases}\qquad(7.8)$$

Jacobi 迭代法公式简单,由公式**(7.7)**或 **(7.8)**可知，**每次迭代只需计算一次矩阵与向量的乘法**。

电算时Jacobi方法需要两组工作单元来保存 $x^{(k)}$ 及 $x^{(k+1)}$ 且可用 $\left\| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right\|_{\infty} < \varepsilon$ 来控制迭代终止。由迭代法计算公式可知，**迭代法一个重要特点是计算过程中原来矩阵A数据始终不变**。

PART 2

塞德尔迭代法

在（7.5）式中选取 M = D – L （下三角矩阵）。于是，

$$N = M - A = U$$

方程（7.3）转化为等价方程组。

$$(D-L)x = Ux + b$$

于是得到高斯-塞德尔（G – S ）迭代公式：

$$\begin{cases} x^{(0)}(\text{初始向量}) \\ x^{(k+1)} = Gx^{(k)} + f \\ \text{其中} G = (D-L)^{-1}U,\ f = (D-L)^{-1}b \end{cases} \quad (7.9)$$

G称为**G – S 迭代法的迭代矩阵**。

G - S 迭代法的分量形式：

记 $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \cdots x_n^{(k)})^T$,公式（7.9）可写为：

$$(D-L)x^{(k+1)} = Ux^{(k)} + b$$

$$a_{ii}x_i^{(k+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)} + b_i$$

或

$$\begin{cases} x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots x_n^{(0)})^T \\ x_i^{(k+1)} = \dfrac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}\right) \\ (i = 1,2,\cdots,n; k = 0,1,2,\cdots) \end{cases} \qquad \textbf{(7.10)}$$

G –S 迭代法每次迭代只需计算一次矩阵与向量的乘法。但 G –S 迭代法比 Jacobi 迭代法有一个明显的优点就是电算时仅需一组工作单位用来保存 $x^{(k)}$ 分量(或 $x^{(k+1)}$ 分量）。当计算出 $x_i^{(k+1)}$就冲掉旧分量 $x_i^{(k)}$ 。

从 G- S 迭代公式（**7.10**）可以看出在 $x^{(k)} \to x^{(k+1)}$ 的一步迭代中，计算分量 $x_i^{(k+1)}$ 时利用了已经计算出的最新分量 。因此，G – S 迭代法可看作是Jacobi 迭代法的一种修正。

例10 用G – S 迭代法解方程组

$$
\begin{cases}
10x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \\
-x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 = 25 \\
2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \\
3x_2 - x_3 + 8x_4 = 15
\end{cases}
$$

解： G – S 迭代公式（结果如下表）

$$
\begin{cases}
x_1^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}(6 + x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}) \\
x_2^{(k+1)} = \dfrac{1}{11}(25 + x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)} - 3x_4^{(k)}) \\
x_3^{(k+1)} = \dfrac{1}{10}(-11 - 2x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + x_4^{(k)}) \\
x_4^{(k+1)} = \dfrac{1}{8}(15 - 3x_2^{(k+1)} + x_3^{(k+1)}), (k = 0,1,\cdots)
\end{cases}
$$

$x^{(k)}$	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$
$x_1^{(k)}$	0.0	0.6000	1.030	1.0065	1.0009	1.0001
$x_2^{(k)}$	0.0	2.3272	2.037	2.0036	2.003	2.0000
$x_3^{(k)}$	0.0	-0.9873	-1.014	-1.0025	-1.0003	-1.0000
$x_4^{(k)}$	0.0	0.8789	0.9844	0.9983	0.9999	1.0000

且 $\left\| x^* - x^{(5)} \right\|_\infty \approx 0.0001$

从此例看出，G－S 迭代比 Jacobi 迭代法收敛快(初始向量相同，达到同样精度，所需要迭代次数少）。**但这个结论对 $Ax = b$ 的矩阵A满足某些条件时才是对的，甚至有这样的方程组，用 Jacobi 方法是收敛的，而用 G－S 迭代法却是发散的。**

解线性方程组的超松弛迭代法

逐次超松弛迭代 （ Successive Over- Relaxation ）,简称SOR方法是G – S 迭代法的一种加速方法，是解大型稀疏矩阵方程组的有效方法之一，它有着广泛的应用。

设有方程组

$$Ax = b, A \in R^{n\times n}$$

且 $a_{ii} \neq 0(i = 1,2,\cdots,n)$, A为非奇异矩阵。分裂A为:

$$A = D - L - U$$

设已知第k次近似 $x^{(k)}$ 及第k+1次近似的分量:

$$x_j^{(k+1)}(j=1,2,\cdots,i-1)$$

首先，用G-S迭代法计算一个辅助量$\tilde{x}_i^{(k+1)}$：

$$\tilde{x}_i^{(k+1)}=\frac{1}{a_{ii}}(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum_{j=i+1}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}) \quad (7.11)$$

再由 $x^{(k)}$ 的第i个分量 $x_i^{(k)}$与$\tilde{x}_i^{(k+1)}$加权平均，定义 $x_i^{(k+1)}$：

$$\begin{aligned} x_i^{(k+1)} &= (1-\omega)x_i^{(k)}+\omega\tilde{x}_i^{(k+1)} \\ &= x_i^{(k)}+\omega(\tilde{x}_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}) \end{aligned} \quad (7.12a)$$

将（**7.11**）代入（**7.12a** ）得到解 $Ax=b$ 的SOR方法：

$$
\begin{cases}
x^0=(x_1^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})^T \\
x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\dfrac{\omega}{a_{ii}}(b_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum\limits_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}) \\
\quad(i=1,2,\cdots,n) \\
\text{其中}x^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)})^T,\omega\text{称为松弛因子}
\end{cases}
\quad \textbf{（7.13a）}
$$

或写为

$$
\begin{cases}
x_i^{(k+1)}=x_i^{(k)}+\Delta x_i \\
\Delta x_i=\dfrac{\omega}{a_{ii}}(b_i-\sum\limits_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k+1)}-\sum\limits_{j=i}^{n}a_{ij}x_j^{(k)}) \\
\quad(i=1,2,\cdots,n),(k=0,1,\cdots)
\end{cases}
$$

在SOR方法（**7.11**）中取 $\omega=1$，则SOR方法就是 G－S 迭代法，当松弛因子ω满足$0<\omega<1$时，迭代法（**7.13a**）称为**低松弛方法**，当$1<\omega<2$时迭代方法（**7.13a**）称为**超松弛方法**。

SOR方法每次迭代主要计算量是计算一次矩阵乘向量。电算时可用

$$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}| < \varepsilon$$

来控制 迭代，且这时SOR方 法 只 需 一 组 工 作单元 $X(n)$ 存放$x^{(k+1)}$或$x^{(k)}$。也可用剩余向量：

$$\|r^{(k)}\|_\infty = \|b-Ax^{(k)}\|_\infty < \varepsilon$$

来控制迭代终止。

PART 3

向量和矩阵的范数

为了对方程组的计算解进行误差分析，讨论迭代法的收敛性，需要对 R^n（n维列向量空间）及$R^{n\times n}$ 中矩阵引进某种量度，即引进向量或矩阵的范数概念。

定义1 （**向量范数**）如果向量 $x \in R^n$ 的某个实值函数 $N(x) \equiv \|x\|$ 满足条件

（1）正定条件：$\|x\| \geq 0$ 且 $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

（2）齐次性：$\|cx\| = |c|\|x\|$　c为实数。

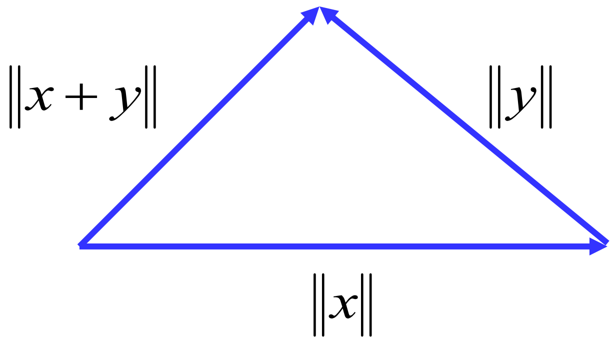
（3）三角不等式：$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in R^n$

称 $N(x) \equiv \|x\|$ 是 R^n 上的一个**向量范数**（或向量的**模**）。

利用三角不等式可推得：

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$$

R^2 **中三角不等式，即为两边之和大于第三边。**



定义2 设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T\in R^n$，定义 R^n 上三种常用的**向量范数**

（1）向量的 **"1"**范数：
$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

（2）向量的 **"2"**范数：
$$\|x\|_2=(x,x)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

（3）向量的 **"∞"** 范数：
$$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$$

上述定义的向量的函数 $N(x)\equiv\|x\|_v$，（v=1或2或∞）满足**定义1**的3个条件，因此，$N(x)$是 R^n上的向量的范数。

例　设 $x=(-1,2,3)^T$，计算 $\|x\|_1, \|x\|_2, \|x\|_\infty$

解：

$$\|x\|_1 = 1+2+3=6$$

$$\|x\|_2 = (1^2+2^2+3^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{14}$$

$$\|x\|_\infty = \max\{1,2,3\} = 3$$

定义3（向量序列的极限）

设$\left\{x^{(k)}\right\}$为向量序列记为 $x^{(k)}=\left(x_1^{(k)},x_2^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}\right)^T\in R^n$

及 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T\in R^n$ 。如果 n 个数列极限存在且

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i^*\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

则称 $\left\{x^{(k)}\right\}$收敛于 x^* 且记为

$$\lim_{k\to\infty}x^{(k)}=x^*$$

定理6　设 $\{x^{(k)}\}$ 是 R^n 中一向量序列，$x^* \in R^n$

则

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^* \Leftrightarrow \|x^{(k)} - x^*\|_v \to 0(k \to \infty)$$

证明　只就 $v = \infty$ 证明。显然有：

$$\begin{cases} x_i^{(k)} \to x_i^* \\ (i = 1,2,\cdots,n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \|x^{(k)} - x^*\|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n}|x_i^{(k)} - x_i^*| \to 0 \\ (k \to \infty) \end{cases}$$

定义4 （**矩阵的范数**）如果矩阵 $A \in R^{n\times n}$ 的某个非负实值函数 $N(A) = \|A\|$ 满足下述条件

（1）正定性：$\|A\| \geq 0$ 且 $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

（2）齐次性：

$$\|cA\| = |c|\|A\| \qquad \text{c为实数。}$$

（3）三角不等式：

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \forall A, B \in R^{n\times n}$$

（4）
$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$$

称 $N(A) = \|A\|$ 是 $R^{n\times n}$ 上一个**矩阵范数**（或称为**模**）。

也可借助向量范数来定义矩阵范数。

定义5（矩阵的算子范数）设 $x \in R^n, A \in R^{n\times n}$，且给出一种向量范数 $\|x\|_v$，相应地定义一个矩阵的非负函数 $N(A) = \|A\|_v$。即

$$\|A\|_v = \max_{\substack{x\neq 0 \\ x\in R^n}} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_v} = \max_{\|x\|_v=1} \|Ax\|_v \quad \textbf{(7.14)}$$

显然，由**（7.14）**式对任意 $x \in R^n, A \in R^{n\times n}$ 有

$$\|Ax\|_v \le \|A\|_v \|x\|_v \quad \textbf{(7.15)}$$

易验证 $N(A) = \|A\|_v$ 满足矩阵范数条件（**1**）**-**（**4**），所以 $\|A\|_v$ 是$R^{n\times n}$上的矩阵范数，下面只验证条件（**3**）成立，事实上，利用向量范数的三角不等式及（**7.2** ）则有

$$\|(A+B)x\|_v \le \|Ax\|_v + \|Bx\|_v$$

$$\le \|A\|_v\|x\|_v + \|B\|_v\|x\|_v$$

设 $x \neq 0$ ，故有

$$\frac{\|(A+B)x\|_v}{\|x\|_v} = \le \|A\|_v + \|B\|_v, \forall x \in R^n$$

下面介绍矩阵的算子范数 $\|A\|_v$ 计算公式有如下定理：

定理7（矩阵范数求算公式）设 $x \in R^n$， $A \in R^{n \times n}$， 则

（1）列范数

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{对应} \quad \|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

（2）行范数

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i| \quad \text{对应} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

（3）谱范数

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)}$$

矩阵的Frobenius范数

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$

则 $$\|A\|_F=\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

也称为Euclid范数，简称F-范数。

例　设$A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -4 & 5\end{bmatrix}$,计算$\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_2,\|A\|_F$.

解

$$\|A\|_1=\max\{5,8\}=8$$

$$\|A\|_\infty=\max\{4,9\}=9$$

$$\|A\|_F=\sqrt{1+9+16+25}=\sqrt{51}$$

$$A^TA=\begin{pmatrix}10 & 11\\ 11 & 41\end{pmatrix}$$

$$\|A\|_2=\sqrt{\rho(A^TA)}=2.0305$$

矩阵范数的几个性质

- 定义7 设 $A \in R^{n\times n}$ 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 称 $\rho(A)=\max\limits_{1\le i\le n}|\lambda_i|$ 为A的谱半径。
- 定理8 对任何 $A \in R^{n\times n}, \|\cdot\|$ 为任一种从属范数，则

$$\rho(A) \le \|A\|$$

反之，对任意 $\varepsilon < 0$，至少存在一种从属范数 $\|\cdot\|_\varepsilon$，使得

$$\|A\|_\varepsilon \le \rho(A) + \varepsilon$$

- 定理9 如果 $A \in R^{n\times n}$ 为对称矩阵，则

$$\|A\|_2 = \rho(A)$$

- 定理10 如果 $\|B\| \le 1$，则 $I \pm B$ 为非奇异矩阵，且

$$\|(I \pm B)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|B\|}$$

其中 $\|\cdot\|$ 是指矩阵的算子范数。

PART 4

迭代法的收敛性

迭代法收敛性的判断

设迭代法的迭代矩阵为B，则有

（1） 迭代法收敛的充分且必要条件为： $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$

证法：设 $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$

则 $e^{(k)} = Be^{(k-1)} = B^2 e^{(k-2)} = \cdots = B^k e^{(0)}$

两边取极限即可。

（2）迭代法收敛的充分且必要条件为： $\rho(B) < 1$

证法： 若迭代法收敛，则 $\lim\limits_{k\to\infty} B^k = 0$

$$[\rho(B)]^k = \rho(B^k) \le \|B^k\| \to 0$$

从而 $\rho(B) < 1$

反过来同样成立。

（3）定理9（迭代法收敛的充分条件）

设方程组$x = Bx + f$，且 $\{x^{(k)}\}$ 为迭代

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f$$

（ $x^{(0)}$为任意选取的初始向量）产生的向量序列。如果迭代矩阵B有某一种范数 $\|B\| = q < 1$

则

（a） $\{x^{(k)}\}$收敛于方程组 $(I - B)x = f$ 唯一解 x^*

（b） $$\|x^* - x^{(k)}\| \le \frac{1}{1-q} \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|$$

（c）误差估计

$$\|x^* - x^{(k)}\| \le \frac{q^k}{1-q} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

定义 （对角占优阵）设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ ，如果满足条件

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$$

若A的每一行对角元素的绝对值都严格大于同行其他元素绝对值之和，则称A为**严格对角占优阵**；**若上式中至少有一个严格不等号成立，则称A为弱对角占优阵。**

定义 （不可约矩阵） 假定 $A\in R^{n\times n}, n\geq 2$ ，若存在n阶排列阵P，使得

$$P^T AP=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$

其中，A_{11} 为r（0<r<n）阶的方阵。则称A为可约阵，若不存在这样的排列阵，使得上式成立，则称矩阵A为不可约的。

定理10　如果 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为严格对角占优阵或不可约对角占优阵，则A 为非奇异矩阵。

定理11　设 $Ax = b, A \in R^{n \times n}$ ，如果A为严格对角占优阵或不可约弱对角占优阵，则解 $Ax = b$ 的Jacobi方法，G-S迭代法都收敛，且G-S迭代法收敛比Jacobi方法为快。

定理12　（1）设 $Ax = b$ 其中A为对称正定阵；

（2） $0 < \omega < 2$ ；

则解 $Ax = b$ 的SOR方法收敛。

20XXPOWERPOINT

感谢观看 THANGKS!

单击此处添加您的副标题文字