第二章 复习要点

1、运算符：+ - * / ^

2、基本的函数输入：正弦、余弦、指数函数、多项式函数等。

$$y = 2x^2 + \sin x - e^3$$

3、数组与矩阵的输入：按照题目要求创建一个向量或者矩阵。

如：生成一个1行2列向量的命令是？生成一个3阶方阵的随机矩阵的命令是？

4、能够读懂简单的程序语句。

该部分一般出选择题。

第三章 复习要点

1、插值的基本思想

设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有定义，且已知在点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ 上的值 $y_0, y_1, \cdots, y_n$ ，若存在一简单函数 $P(x)$，使

$$P(x_i) = y_i \qquad (i = 0,1,\cdots,n),$$

成立，就称 $P(x)$ 为 $f(x)$ 的**插值函数**，点 $x_0, x_1, \cdots, x_n$ 称为**插值节点**，包含节点的区间 $[a,b]$ 称为**插值区间**，求插值函数 $P(x)$ 的方法称为**插值法**。

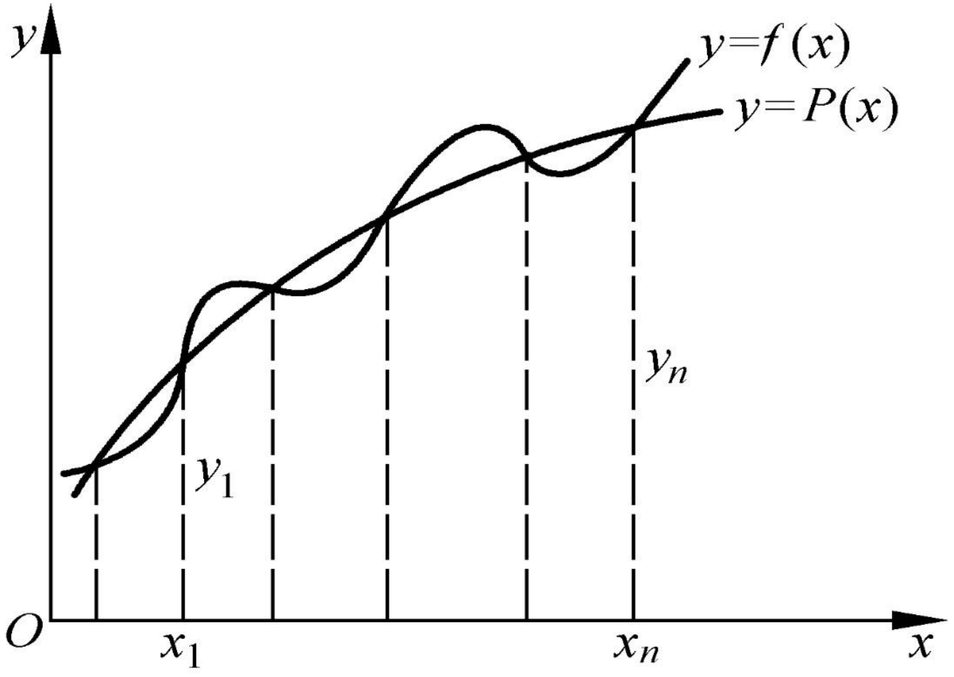
当选用代数多项式作为插值函数时，相应的插值问题就称为多项式插值。

在多项式插值中，最常见、最基本的问题是：求一次数不超过n的代数多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ （1）

使 $P_n(x_i)=y_i(i=0,1,,\cdots,n)$ （2）

其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为实数。满足插值条件(2)的多项式(1)，称为函数f(x) 在节点处的n次插值多项式。

从几何上看，插值法就是确定曲线 $y = P(x)$，使其通过给定的 $n+1$ 个点 (x_i, y_i), $i = 0,1,\cdots,n$，并用它近似已知曲线 $y = f(x)$ 。



拉格朗日插值多项式

定义 若 n 次多项式 $l_j(x)\ (j=0,1,\cdots,n)$ 在 $n+1$ 个节点

$x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ 上满足条件：

$$l_j(x_k)=\begin{cases}1, & k=j;\\ 0, & k\neq j.\end{cases} \quad (j,k=0,1,\cdots,n)$$

$$l_k(x)=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)} \quad (k=0,1,\cdots,n).$$

于是，插值多项式 $L_n(x)$ 可表示为

$$L_n(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k l_k(x).$$

例 已知 $y=\sqrt{x}, x_0=4, x_1=9$, 用线性插值(即一次插值多项式)求 $\sqrt{7}$ 的近似值。

解 $y_0=2, y_1=3$, 基函数分别为:

$$l_0(x)=\frac{x-9}{4-9}=-\frac{1}{5}(x-9), l_1(x)=\frac{x-4}{9-4}=\frac{1}{5}(x-4)$$

插值多项式为

$$L_1(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)=2\times\frac{-1}{5}(x-9)+3\times\frac{1}{5}(x-4)$$

$$=-\frac{2}{5}(x-9)+\frac{3}{5}(x-4)=\frac{1}{5}(x+6)$$

所以 $\sqrt{7}\approx L_1(7)=\frac{13}{5}=2.6$

例 求过点(−1,−2), (1,0), (3,−6), (4,3)的抛物线插值(即三次插值多项式).

解 以 $x_0 = -1, x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 4$ 以为节点的基函数分别为:

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(-1-1)(-1-3)(-1-4)} = -\frac{1}{40}(x-1)(x-3)(x-4)$$

$$l_1(x) = \frac{(x+1)(x-3)(x-4)}{(1+1)(1-3)(1-4)} = \frac{1}{12}(x+1)(x-3)(x-4)$$

$$l_2(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(3+1)(3-1)(3-4)} = -\frac{1}{8}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$l_3(x) = \frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(4+1)(4-1)(4-3)} = \frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$$

则拉格朗日的三次插值多项式为

$$L_3(x) = y_0 l_0(x) + y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)$$

$$= (-2)\times\frac{-1}{40}(x-1)(x-3)(x-4) + 0\times\frac{1}{12}(x+1)(x-3)(x-4)$$

$$+(-6)\times\frac{-1}{8}(x+1)(x-1)(x-4) + 3\times\frac{1}{15}(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$= \frac{1}{20}(x-1)(x-3)(x-4) + \frac{3}{4}(x+1)(x-1)(x-4)$$

$$+\frac{1}{5}(x+1)(x-1)(x-3)$$

$$(= x^3 - 4x^2 + 3)$$

当 $n=1$ 时，线性插值余项为

$$R_1(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)\omega_2(x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)(x-x_1), \qquad \xi\in[x_0,x_1]$$

当 $n=2$ 时，抛物插值余项为

$$R_2(x)=\frac{1}{6}f'''(\xi)(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2), \qquad \xi\in[x_0,x_2]$$

例　设$y=\ln x$，且有函数表

x	0. 40	0. 50	0. 70	0.80
$\ln x$	-0.916291	-0.693147	-0.356675	-0.223144

用线性和抛物插值计算 $f(0.6)=\ln 0.6$ 的近似值，并估计误差。

解:插值节点选择（内插，就近）

（1）取插值节点：$x_1=0.50,\ x_2=0.70$， 做线性插值

$$f(0.6)\approx L_1(0.6)=\left[y_1\frac{x-x_2}{x_1-x_2}+y_2\frac{x-x_1}{x_2-x_1}\right]_{x=0.6}=-0.524911$$

误差：$R_1(0.6)=f(0.6)-L_1(0.6)$

$$=\frac{f^{(2)}(\xi)}{2!}(0.6-0.5)(0.6-0.7)=\frac{0.01}{2}\cdot\frac{1}{\xi^2}\quad(0.5<\xi<0.7)$$

由于 $\frac{100}{49}<\frac{1}{\xi^2}<\frac{100}{25}$，　故 $0.01<R_1(x)<0.02$

（2）取插值节点：$x_1 = 0.50$，$x_2 = 0.70$，$x_3 = 0.80$ 做抛物线插值

$$\ln 0.6 \approx L_2(0.6) = [y_1 l_1(x) + y_2 l_2(x) + y_3 l_3(x)]_{x=0.6} = -0.513343$$

误差：

$$R_2(0.6) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}(0.6-0.5)(0.6-0.7)(0.6-0.8)$$

$$= \frac{2}{3}\frac{10^{-3}}{\xi^3}, \quad x_1 < \xi < x_3$$

$$1.3\times 10^{-3} < R_2(0.6) = f(0.6) - L_2(0.6) < 5.34\times 10^{-3}$$

$f(0.6) = \ln 0.6$ 的真值为：-0.510826

$$x_1 = 0.40,\ x_2 = 0.50,\ x_3 = 0.70$$

例：已知$\sqrt{100}=10,\sqrt{121}=11,\sqrt{144}=12$, 分别利用线性和抛物插值求$\sqrt{115}$的近似值($\sqrt{115}=10.723805$)

解： 线性插值：$x_0=100, y_0=10, x_1=121, y_1=11, x=115$

$$y^*=\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1=\frac{115-121}{100-121}\times 10+\frac{115-100}{121-100}\times 11=10.71428$$

$$\left|y-y^*\right|=\left|10.723805-10.71428\right|\le 0.01$$

抛物插值：$x_0=100, y_0=10, x_1=121, y_1=11, x_2=144, y_2=12$，$x=115$

$$y^*=L_2(115)=10.7228$$

$$\left|y-y^*\right|=\left|10.723805-10.7228\right|\le 0.001$$

➢反插值问题

已知定义于区间 $[a,b]$上的单调连续函数 $f(x)$在 $n+1$ 个互异节点 $\{x_i\}_{i=0}^{n}\subset[a,b]$ 处的函数值 $\{f(x_i)\}_{i=0}^{n}$，若函数值 $\bar{y}=f(\bar{x})$ 已知，如何求 $\bar{x}$？

$$\boxed{\text{即求 } \bar{x}=f^{-1}(\bar{y})}$$

因此可以看作如下插值问题：

已知定义于区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $n+1$个互异节点 $\{y_i=f(x_i)\}_{i=0}^{n}$ 处的函数值 $\{x_i=f^{-1}(y_i)\}_{i=0}^{n}$，

求函数值 $\bar{x}=f^{-1}(\bar{y})$

例（反插值）：已知单调连续函数 $y = f(x)$ 在如下采样点的函数值：

x_i	1.0	1.4	1.8	2.0
$y_i=f(x_i)$	-2.0	-0.8	0.4	1.2

求方程 $f(x)=0$ 在[1，2]内根的近似值 x^*。

分析：求解如上问题等价于求解x关于y的反函数问题。

y_i	-2.0	-0.8	0.4	1.2	0
$f^{-1}(y_i)=x_i$	1.0	1.4	1.8	2.0	?

$$x^* = f^{-1}(0)$$

解：

需要对反函数 $x = f^{-1}(y)$ 进行三次插值，则插值多项式是：

$$f^{-1}(y) \approx L_3(y) = \frac{(y+0.8)(y-0.4)(y-1.2)}{(-2.0+0.8)(-2.0-0.4)(-2.0-1.2)} \times 1.0$$
$$+ \frac{(y+2.0)(y-0.4)(y-1.2)}{(-0.8+2.0)(-0.8-0.4)(-0.8-1.2)} \times 1.4$$
$$+ \frac{(y+2.0)(y+0.8)(y-1.2)}{(0.4+2.0)(0.4+0.8)(0.4-1.2)} \times 1.8$$
$$+ \frac{(y+2.0)(y+0.8)(y-0.4)}{(1.2+2.0)(1.2+0.8)(1.2-0.4)} \times 2.0$$

$$x^* = f^{-1}(0) \approx L_3(0) \doteq 1.675$$

例 设 $l_i(x)(i=0,1,2,\cdots,n)$ 是n+1个互异节点$\{x_i\}_{i=0}^{n}$ 的Lagrange基函数，则下列选项正确的是(   )

(A) $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 l_i(x) = x$

(B) $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 l_i(x) = x^2$

(C) $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 l_i(x) = x_i^2$

(D) $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 l_i(x_j) = x^2$

差商

为建立牛顿插值多项式，定义各阶差商：

零阶差商： $f[x_i] = y_i = f(x_i)$

一阶差商： $f[x_i, x_{i+1}] = \dfrac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$

二阶差商：$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \dfrac{f[x_{i+1}, x_{i+2}] - f[x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$

例 已知函数 $f(x) = 3x^3 + 3x + 1$ ，求差商 $f[1,2,3,4,5]$

表

x_k	$f(x_k)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商	四阶差商
x_0	$\underline{f(x_0)}$				
x_1	$f(x_1)$	$\underline{f[x_0,x_1]}$			
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2]}$		
x_3	$f(x_3)$	$f[x_2,x_3]$	$f[x_1,x_2,x_3]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3]}$	
x_4	$f(x_4)$	$f[x_3,x_4]$	$f[x_2,x_3,x_4]$	$f[x_1,x_2,x_3,x_4]$	$\underline{f[x_0,x_1,x_2,x_3,x_4]}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

例 已知下列数据点，计算*f*[1,3,4,7].

x_i	1	3	4	7
$f(x_i)$	0	2	15	12

解：列差商表如下

x_i	$f(x_i)$	一阶差商	二阶差商	三阶差商
1	0			
		1		
3	2		4	
		13		-5/4
4	15		-7/2	
		-1		
7	12			

$$f[1,3]=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{2}{2}=1$$

即求得 **f[1,3,4,7]=-5/4**

Newton插值多项式

利用插值基函数很容易得到拉格朗日插值多项式，公式结构紧凑，在理论分析中甚为方便，但当插值节点增减时全部插值基函数 $l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$ 均要随之变化，整个公式也将发生变化，甚为不便。为了计算方便可重新设计一种逐次生成插值多项式的方法。

$$
\begin{aligned}
N_n(x) &= f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1) \\
&\quad \cdots + f[x_0,x_1,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1}) \\
&= f(x_0)+\sum_{k=1}^{n} f[x_0,x_1,\cdots,x_k]\omega_k(x)
\end{aligned}
$$

例：已知函数 $y=f(x)$ 的函数表，写出4次Newton插值多项式

x_i	1	2	3	4	5
$y_i=f(x_i)$	1	4	7	8	6

解： 构造差商表

x_i	$f(x_i)$				
1	1				
		3			
2	4		0		
		3		$-\frac{1}{3}$	
3	7		-1		$\frac{1}{24}$
		1		$-\frac{1}{6}$	
4	8		$-\frac{3}{2}$		
		-2			
5	6				

$$N_4(x)=1+3(x-1)+0(x-1)(x-2)$$

$$-\frac{1}{3}(x-1)(x-2)(x-3)$$

$$+\frac{1}{24}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

$$N_4(x)=\frac{1}{24}x^4-\frac{9}{12}x^3+\frac{83}{24}x^2-\frac{33}{24}x+1$$

三次样条插值

x	x_0	x_1	$\cdots$	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	$\cdots$	y_n

其中 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ ，若函数 $S(x)$ 满足:

（1）$S(x)$在每个子区间 $[x_i,x_{i+1}](i=0,1,\cdots,n-1)$ 上是三次多项式;

（2）$S(x)\in C^2[a,b]$ （二阶连续可微）;

（3）满足插值条件 $S(x_i)=y_i(i=0,1,\cdots,n)$

则称$S(x)$为函数$f(x)$关于节点$x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的三次样条插值。

第一步：建立基本方程组

设在x_i处：$S''(x_i)=M_i(i=0,1,\ldots,n)$，这种通过确定$M_i$来求S(x)的方法称为三弯矩法。

$S''(x)$在[x_{i-1} , x_i]上是一次多项式，由拉格朗日线性插值公式得：

$$S''(x)=M_{i-1}\frac{x_i-x}{h_i}+M_i\frac{x-x_{i-1}}{h_i} \qquad h_i=x_i-x_{i-1}$$

对$S''(x)$积分两次并利用$S(x_i)=y_i$和$S(x_{i+1})=y_{i+1}$定出积分常数得

$$S(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+C_i\left(x_i-x\right)+D_i\left(x-x_{i-1}\right)$$

其中 C_i 和 D_i 是两个待定常数。将插值条件 $S(x_{i-1}) = y_{i-1}$，$S(x_i) = y_i$ 代入上式，可确定这两个待定常数，从而得到 $S(x)$的表达式：

$$S(x) = M_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + (y_{i-1} - \frac{M_{i-1}h_i^2}{6})\frac{x_i - x}{h_i}$$
$$+ (y_i - \frac{M_i h_i^2}{6})\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \qquad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, \cdots, n)$$

上式就是三次样条函数的“M表达式”。由构造过程知：该式不仅保证了所求函数在每个小区间上是一个三次多项式的插值函数，而且保证了函数本身在样条节点处的连续性，从而保证了再整个区间的连续性。

$$S(x)=M_{i-1}\frac{(x_i-x)^3}{6h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^3}{6h_i}+(y_{i-1}-\frac{M_{i-1}h_i^2}{6})\frac{x_i-x}{h_i}$$

$$+(y_i-\frac{M_ih_i^2}{6})\frac{x-x_{i-1}}{h_i}\qquad x\in[x_{i-1},x_i]\quad(i=1,\cdots,n)$$

但是，由于S(x)在节点处的二阶导数值实际上并不知道，因此，我们还需设法将这些待定参数求出来。下面利用S(x)的导数在节点处的连续性来确定这些参数所满足的关系式。

对$S(x)$求导得

$$S'(x)=-M_{i-1}\frac{(x_i-x)^2}{2h_i}+M_i\frac{(x-x_{i-1})^2}{2h_i}$$

$$+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}-\frac{M_i-M_{i-1}}{6}h_i$$

$$x\in[x_{i-1},x_i]\quad(i=1,\cdots,n)$$

$$S'(x) = -M_{i-1}\frac{(x_i - x)^2}{2h_i} + M_i\frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{6}h_i$$

所以 $$S'(x_{i-1}+0) = -\frac{h_i}{3}M_{i-1} - \frac{h_i}{6}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$$

$$\boxed{S'(x_i - 0) = \frac{h_i}{6}M_{i-1} + \frac{h_i}{3}M_i + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}}$$

由上式可得：

$$\boxed{S'(x_i + 0) = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}}$$

由 $\boldsymbol{S'(x_i+0) = S'(x_i-0)}$ (i=1,2,...,n-1)

$$-\frac{h_i}{6}M_i - \frac{h_i}{3}M_{i-1} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = -\frac{h_{i+1}}{3}M_i - \frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1} + \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}}$$

$$-\frac{h_i}{6}M_i-\frac{h_i}{3}M_{i-1}+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}=-\frac{h_{i+1}}{3}M_i-\frac{h_{i+1}}{6}M_{i+1}+\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}$$

得

$$\mu_i M_{i-1}+2M_i+\lambda_i M_{i+1}=d_i\ (i=1,2,\cdots,n-1)\qquad (1)$$

其中

$$\lambda_i=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}\qquad \mu_i=\frac{h_i}{h_i+h_{i+1}}=1-\lambda_i$$

$$d_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left[\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right]=6f[x_{i-1},x_i,x_{i+1}]$$

称式（1）是“M关系式”，也称为基本方程组。如上过程，通过利用S(x)在样条节点处的二阶导数值，我们建立了S(x)的M表达式，并建立了这些二阶到数值满足的基本方程组。

第二步：建立端点条件

1. 边界条件：给出两端点一阶导数值

$$S'(x_0)=m_0, S'(x_n)=m_n$$

由公式

$$S'(x_{i-1}+0)=-\frac{h_i}{3}M_{i-1}-\frac{h_i}{6}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$$

$$S'(x_i-0)=\frac{h_i}{6}M_{i-1}+\frac{h_i}{3}M_i+\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}$$

得

$$m_0=S'(x_0)=-\frac{h_1}{3}M_0-\frac{h_1}{6}M_1+\frac{y_1-y_0}{h_1}$$

$$m_n=S'(x_n)=\frac{h_n}{6}M_{n-1}+\frac{h_n}{3}M_n+\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}$$

$$m_0 = S'(x_0) = -\frac{h_1}{3}M_0 - \frac{h_1}{6}M_1 + \frac{y_1 - y_0}{h_1}$$

$$m_n = S'(x_n) = \frac{h_n}{6}M_{n-1} + \frac{h_n}{3}M_n + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n}$$

即

$$\begin{cases} 2M_0 + M_1 = d_0 \\ M_{n-1} + 2M_n = d_n \end{cases}$$

其中$d_0 = \frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1 - y_0}{h_1} - m_0\right)$ $\quad d_n = \frac{6}{h_{n-1}}\left(m_n - \frac{y_n - y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)$

$$2M_0 + M_1 = d_0$$

$$M_{n-1} + 2M_n = d_n$$

$$\mu_i M_{i-1} + 2M_i + \lambda_i M_{i+1} = d_i \ (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

从中解出M_i (i=0,1,...,n) 得三次样条$S(x)$.

第三步：方程组求解

对于以上几个端点条件，除周期条件外，其他几个对应的方程组都是三对角方程组，如第一种边界条件，方程组为：

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & & & \\ \mu_1 & 2 & \lambda_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ & & & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ \vdots \\ M_{n-1} \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_0 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{n-1} \\ d_n \end{bmatrix}$$

以上方程组的系数矩阵是严格对角占优矩阵，后续会介绍求解的方法。

例 已知函数 $y=f(x)$ 的函数值如下

x	-1.5	0	1	2
y	0.125	-1	1	9

在区间 $[-1.5,2]$ 上求三次样条插值函数 $S(x)$，使它满足边界条件：

$$S'(-1.5)=0.75, S'(2)=14$$

解 先根据给定数据和边界条件算出 μ_i, λ_i 与 d_i ，写出确定 M_i 的线性方程组。

在本例中，给出的是第1种边界条件，确定 $M_i(i=0,1,2,3)$ 的线性方程组。由所给函数表知

$$h_1 = 1.5 \qquad h_2 = 1 \qquad h_3 = 1$$

$$f[x_0, x_1] = -0.75 \quad f[x_1, x_2] = 2 \quad f[x_2, x_3] = 8$$

于是由 μ_i, λ_i与$d_i (i = 1, 2)$ 的算式，知

$$\boldsymbol{\lambda_i = \frac{h_{i+1}}{h_i + h_{i+1}} \qquad \mu_i = \frac{h_i}{h_i + h_{i+1}} = 1 - \lambda_i}$$

$$\boldsymbol{d_i = \frac{6}{h_i + h_{i+1}} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right] = 6 f[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]}$$

$$\mu_1 = 0.6 \quad \mu_2 = 0.5$$

$$\lambda_1 = 0.4 \quad \lambda_2 = 0.5$$

$$d_1 = 6.6 \quad d_2 = 18$$

由第**1**边界条件下 d_0 与 d_n 的计算公式知

由第1边界条件下 d_0 与 d_n 的计算公式知

$$d_0=\frac{6}{h_1}\left(f\left[x_0,x_1\right]-y_0'\right)=-6,d_3=\frac{6}{h_3}\left(y_3'-f\left[x_2,x_3\right]\right)=36$$

故确定 M_0,M_1,M_2与M_3 的方程组为

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} M_0 \\ M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 \\ 6.6 \\ 18 \\ 36 \end{bmatrix}$$

然后解所得方程组，得到$S''(x)$在各节点x_i 上的值M_i 。

在本例中，解得

$$M_0=-5,M_1=4,M_2=4,M_3=16$$

最后将所得 M_i 代入，即得 $S(x)$ 在各子区间上的表达式 $S_i(x)(i=1,2,\ldots,n)$。

$S(x)$ 在 $[x_0, x_1]$ 上的表达式为：

$$S_1(x)=M_0\frac{(x_1-x)^3}{6h_1}+M_1\frac{(x-x_0)^3}{6h_1}+\left(y_0-\frac{M_0}{6}h_1^2\right)\frac{x_1-x}{h_1}+\left(y_1-\frac{M_1}{6}h_1^2\right)\frac{x-x_0}{h_1}$$

在本例中，将 $x_0=-1.5, x_1=0, y_0=0.125, y_1=-1,$

$M_0=-5, M_1=4$

代入，整理后得：$S_1(x)=x^3+2x^2-1 \qquad x\in[-1.5,0]$

同理可得：

$S_2(x)=2x^2-1 \qquad x\in[0,1]$

$S_3(x)=2x^3-4x^2+6x-3 \qquad x\in[1,2]$

故所求三次样条插值函数为

$$S(x)=\begin{cases} x^3+2x^2-1 & (-1.5\le x<0) \\ 2x^2-1 & (0\le x<1) \\ 2x^3-4x^2+6x-3 & (1\le x\le 2) \end{cases}$$

第1边界条件下计算三次样条插值函数 $\boldsymbol{S}(\mathbf{x})$ 在 $\boldsymbol{x}$ 处函数值的程序框图如下图。

第四章 复习要点

定积分的近似计算是：利用插值法，构造函数f(x)的近似函数p(x)。用p(x)的积分值近似替代f(x)的积分值。

前面我们学过插值法知：无论多复杂的函数或用表格形式给出的函数f(x)，**都可以用一个简单的插值多项式去近似**，因此我们在积分区间 $[a, b]$ 内插入n-1个分点：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

由此得到n+1个数据点：$\left(x_k, f(x_k)\right), k = 0,1,2, \cdots, n$

过这些数据点，作一插值多项式：

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

其中 $l_k(x)(k = 0,1,\cdots,n)$

为n 次插值基函数。用 $L_n(x)$ 近似代替被积函数$f(x)$，则得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\int_a^b l_k(x)dx$$

若记 $A_k = \int_a^b l_k(x)\,dx$

$$= \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}\,dx$$

得数值求积公式

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

上式的求积公式称为机械求积公式。

1、矩形公式

在[a,b]上任取一点 ξ ，做 $f(x)=f(\xi)$ 则：

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(\xi)dx=(b-a)\cdot f(\xi)$$

矩形公式分为：

左矩形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot \underline{f(a)}$

右矩形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot \underline{f(b)}$

中矩形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot \underline{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$

2、梯形公式

过a,b两点对f(x)做线性插值，得：

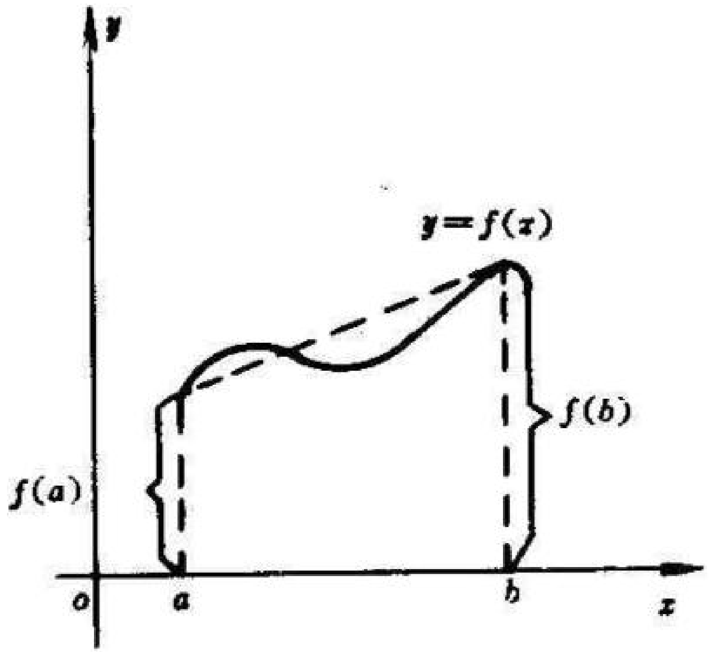
$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

则

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right]dx$$

$$= \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$



梯形求积公式

3、辛普森公式

辛普森公式又称抛物线求积公式。

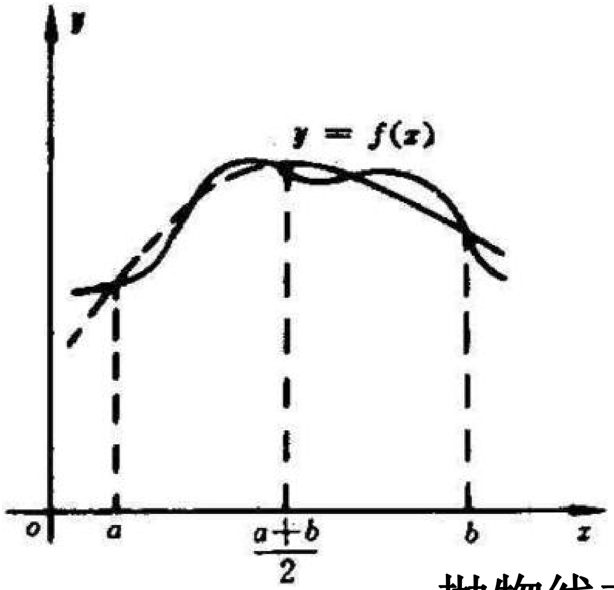
过 $a, \dfrac{a+b}{2}, b$ 两点对f(x)做二次插值，得：

$$P_2(x) = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} f(b)$$

抛物线求积公式（辛普森公式）

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_2(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$P_2(x) = \frac{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b - \frac{a+b}{2}\right)} f(b)$$



抛物线求积公式

例 分别用梯形求积公式、抛物线求积公式计算积分 $\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\,dx$

（准确值为0.43096441）

解：利用梯形求积公式：

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{2}\left(\sqrt{0.5}+\sqrt{1}\right) \approx 0.4267767$$

利用抛物线求积公式：

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{6}\left(\sqrt{0.5}+4\sqrt{0.75}+\sqrt{1}\right) \approx 0.43093403$$

求积公式的代数精度

为了使一个求积公式能对更多的积分具有良好的实际计算意义，就应该要求它对尽可能多的被积函数 $f(x)$都准确地成立。在计算方法中，常用代数精度这个概念来描述。

定义1 若求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

对任意不高于m 次的代数多项式都准确成立，而对于 x^{m+1}却不能准确成立，则称该公式的代数精度为m 。

例如，梯形公式（在几何上就是用梯形面积近似代替曲边梯形面积见下图）

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

的代数精度m =1。事实上，当$f(x)$=1 时，在上式中

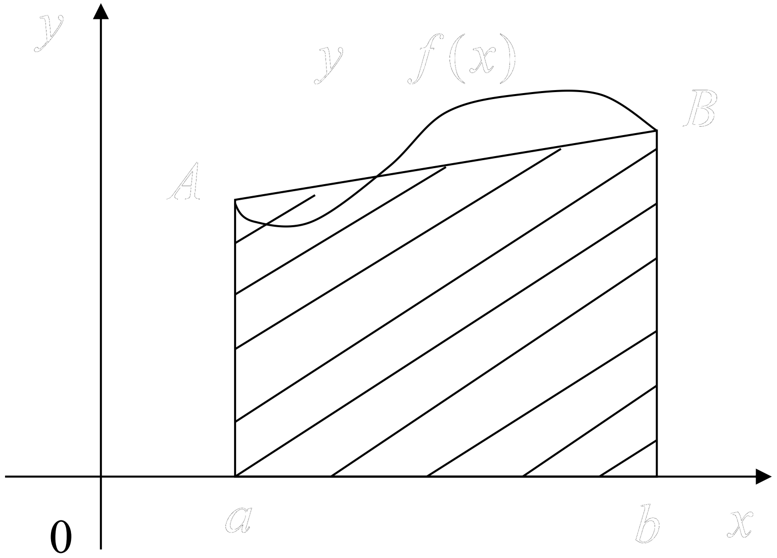
左端= $\int_a^b 1dx = b-a$

右端= $\frac{b-a}{2}\left[1+1\right] = b-a$

左端=右端

这表明求积公式（1.4）对$f(x)$=1

是准确成立的；



当 $f(x)=x$ 时， 左端= $\int_a^b x\,dx=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

右端= $\frac{b-a}{2}[a+b]=\frac{1}{2}(b^2-a^2)$

左端=右端

这表明求积公式对 $f(x)=x$ 也是准确成立的；

综上所述，容易看出求积公式（1.4）对函数 $f(x)=1$ 和 $f(x)=x$ 的任一线性组合（不高于一次的代数多项式）都准确成立，故公式（1.4）的代数精度 m 至少等于1。但是，当 $f(x)=x^2$ 时，其

$$\text{左端} = \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$$

$$\text{右端} = \frac{(b-a)}{2}[a^2 + b^2]$$

左端$\neq$右端（设$a \neq b$）

故由定义知，梯形公式的代数精度m =1。

例：证明求积公式 $\int_0^h f(x)dx \approx \frac{2h}{3}f(0) + \frac{h}{3}f(h) + \frac{h^2}{6}f'(0)$

具有二次代数精度。

证明：令 $f(x) = 1$ 则

左边=$\int_0^h dx = h$　　右边= $\frac{2h}{3} + \frac{h}{3} + 0 = h$

左边=右边，所以求积公式对零次多项式准确成立。

同样，令 $f(x) = x$ 则

左边= $\int_0^h xdx = \frac{h^2}{2}$　右边= $0 + \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{6} = \frac{h^2}{2}$

左边=右边，所以求积公式对一次多项式准确成立。

令 $f(x)=x^2$ 则

$$\text{左边}=\int_0^h x^2dx=\frac{h^3}{3} \qquad \text{右边}=0+\frac{h^3}{3}+0=\frac{h^3}{3}$$

左边=右边，所以求积公式对二次多项式准确成立。

令 $f(x)=x^3$ 则

$$\text{左边}=\int_0^h x^3dx=\frac{h^4}{4} \qquad \text{右边}=0+\frac{h^4}{3}+0=\frac{h^4}{3}$$

左边≠右边，所以求积公式对三次多项式**不准确**成立。

即求积公式对次数不大于2的多项式都准确成立，而对三次多项式不能准确成立，故该求积公式具有2次代数精度。

第五章 复习要点

- 两类求定解问题
  - 实际中求解常微分方程的所谓定解问题有两类:初值问题和边值问题
  - 定解指已知因变量和/或其导数在某些点上是已知的(约束条件)。
  - 1. 边值问题

    约束条件为已知，在自变量的任一非初值上，已知函数值和/或其导数值，如

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ \boxed{y(a) = \alpha,\ y(b) = \beta} \end{cases} \quad \text{求解} y$$

常常可以**将边解问题转化为初值问题**求解。

约束条件为在自变量的 初值上已知函数值，如：

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ \boxed{y(x_0) = y_0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dy/dx = f(x,y)\ x/x_0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

求解$y(x)$，以满足上述两式，即 在$a \le x_0' \le x_1' \cdots \le x_n' \le b$

上的$y(x_i)$的近似值 $y_i = (i = 0,1,2,\cdots,n)$。

通常取等距节点，即 $h = x_{i+1} - x_i$，有

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0,1,2,\cdots,n)$$

初值问题的数值解法特 点：按节点顺序依次推 进，由已知的$y_0, y_1, \cdots, y_i$，求出y_{i+1}，这可以通过递推公式 得到。

一阶常微分方程的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{dx} = f(x,y), x \in [a,b] \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

下式离散化后，求找其解$y = y(x)$在一系列离散节点：

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_i < \cdots x_n = b$$

上的近似值$y_0, y_1, \ldots, y_\mathrm{n}$。

两相邻节点间的距离

$$h_i = x_{i-1} - x_i (i = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

称为**步长**。当 $h_i = h$（常值）时称为**等步长**，有

$$x_i = x_0 + ih (i = 1,2,\cdots,n)$$

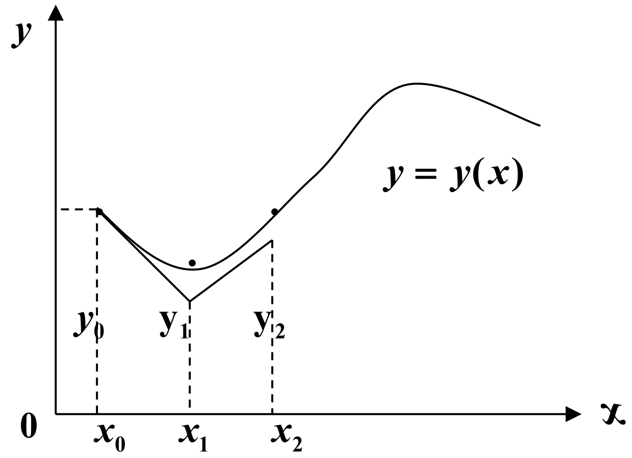
$$x_{i+1} = x_i + h (i = 0,1,2,\cdots,n-1)$$

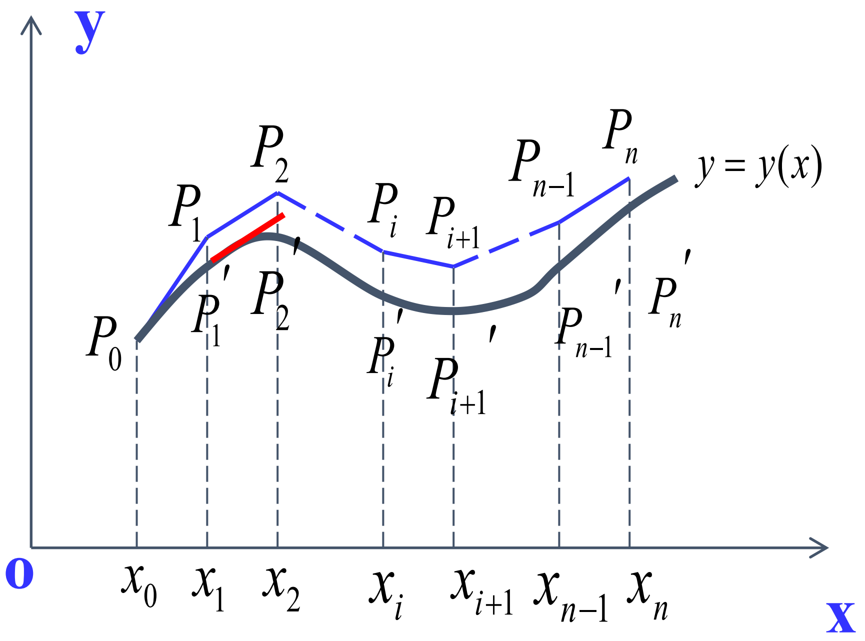
1、欧拉折线法

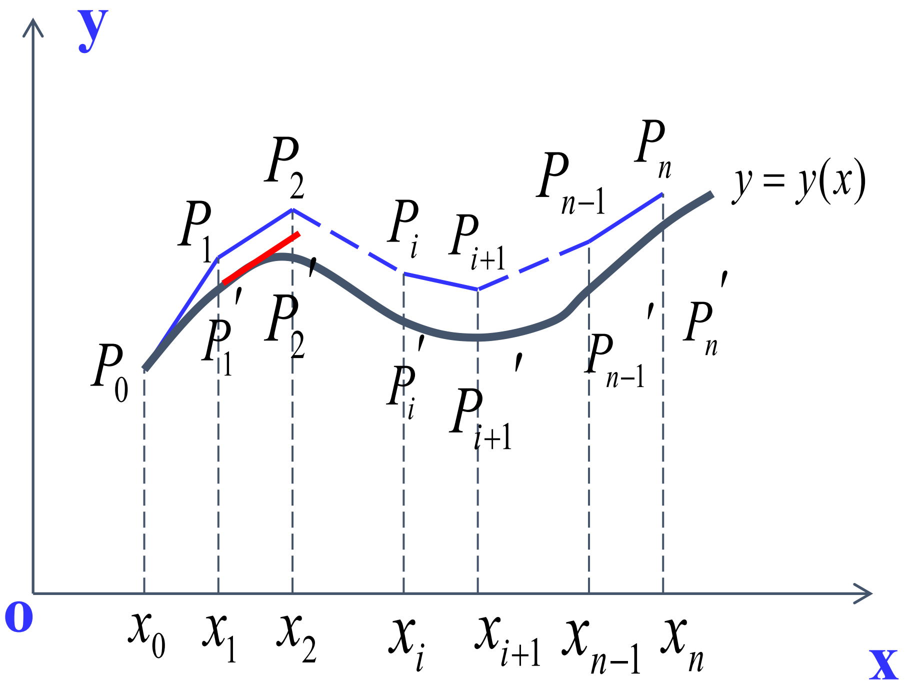
对于一阶常微分方程的初值问题（如下式）的解y=$y(x)$，在几何上是表示过点(x_0,y_0)的一条曲线。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases} \qquad (1)$$

欧拉折线法的数值解法是如右图所示：







首先，过点(x_0,y_0)作曲线$y=y(x)$的切线，由式（1）知该点切线斜率是$f(x_0,y_0)$，所以切线方程是：

$$y = y_0 + f(x_0,y_0)(x - x_0)$$

它与直线$x=x_1$交点的纵坐标为：

$$y_1 = y_0 + f(x_0,y_0)(x_1 - x_0)$$

则取 $y_1 \approx y(x_1)$ 。然后，再过点（x_1,y_1）作斜率如下式的直线：

$$y = y_1 + f(x_1,y_1)(x - x_1)$$

它与直线$x=x_2$交点的纵坐标为： $y_2 = y_1 + f(x_1,y_1)(x_2 - x_1)$

依次做下去，如果已求出(x_n,y_n)，那么过这点且斜率是$f(x_n,y_n)$的直线方程为：

$$y = y_n + f(x_n, y_n)(x - x_n)$$

它与直线x=x_{n+1}交点的纵坐标为：

$$y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n)$$

则取 $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$ 。

于是便得到处置问题的解$y(x)$在节点 $x_1, x_2, \cdots, x_n, x_{n+1}, \cdots$ 处的近视值 $y_1, y_2, \cdots, y_n, y_{n+1}, \cdots$

欧拉折线法的计算公式为：

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ x_n = x_0 + nh \end{cases} \quad (n = 1,2,\cdots)$$

这里$h=x_{n+1}-x_n$是常数。这就是**欧拉（Euler）公式**，又称**Euler格式**。

由以上计算过程可知，欧拉折线法的基本思想是：**用一系列直线所组成的折线去近似地代替曲线，并用这些直线交点处的纵坐标y_i作为精确解$y(x_i)$的近似值。**

常微分问题：

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \\ y(a) = \alpha \end{cases}$$

数值解计算公式：

$$\begin{cases} \boxed{y_{n+1} = y_n} + hf(x_n, y_n) \\ x_n = x_0 + nh \end{cases} \quad （2） \quad (n = 1,2,\cdots)$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{dy}{dx} dx = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y) dx \quad (n = 0,1,\cdots) \xrightarrow{\text{利用数值积分方法求解}}$$

即 $\boxed{y(x_{n+1}) - y(x_n)} \approx \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x)) dx$

所以公式（2）右端是用左矩形公式$hf(x_n,y(x_n))$近似，再以y_n代替$y(x_n)$，y_{n+1}代替$y(x_{n+1})$也得到（显式）欧拉公式。

如果右端积分用右矩形公式$hf(x_{n+1},y(x_{n+1}))$近似，则得到另一个公式：

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_{n+1},y_{n+1})$$

称为(隐式)后退的欧拉公式.

例 求解初值问题(步长$h=0.1$)

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} & (0 < x < 1) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

解 $f(x,y) = y - 2x / y$

Euler格式为:

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(y_n - 2\dfrac{x_n}{y_n}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

$$x_i = a + hi, i = 1,2,\cdots,10$$

$$x_1 = 0 + 0.1 * 1 = 0.1, x_2 = 0.2, \cdots, x_{10} = 1$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + h(y_n - 2\frac{x_n}{y_n})} \\ \boldsymbol{y(0) = 1} \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + h\left(y_0 - 2\frac{x_0}{y_0}\right) = 1 + 0.1 * (1 - 0) = 1.1$$

$$y_2 = y_1 + h\left(y_1 - 2\frac{x_1}{y_1}\right) = 1.1 + 0.1 * \left(1.1 - 2 * \frac{0.1}{1.1}\right) \approx 1.1918$$

$$\vdots$$

• 计算结果为　　解析解：$y=\sqrt{1+2x}$

x_n	y_n	$y(x_n)$	$\lvert y_n-y(x_n)\rvert$
0.1	1.1	1.0954	0.0046
0.2	1.1918	1.1832	0.0086
0.3	1.2774	1.2649	0.0125
0.4	1.3582	1.3416	0.0166
0.5	1.4351	1.4142	0.0209
0.6	1.5090	1.4832	0.0257
0.7	1.5803	1.5492	0.0311
0.8	1.6498	1.6125	0.0373
0.9	1.7178	1.6733	0.0445
1.0	1.7848	1.7321	0.0527

例：用欧拉法解初值问 题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 1 - xy \qquad (0 < x < 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

取步长$h = 0.2$。计算过程保留4位小数。

解：因为$f(x, y) = 1 - xy$，$h = 0.2$,

欧拉公式为：

$$y(x_{i+1}) \approx y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$$

$$= y_i + 0.2(1 - x_i y_i) \quad (i = 0,1,2,3,4,5)$$

当i=0，即x_0=0时，

y_1=0+0.2(1-0×0)=0.2000

$$y_{i+1} = y_i + 0.2(1 - x_i y_i)$$

当i=1，即x_1=0.2时，

y_2=0.2+0.2(1-0.2×0.2)=0.3920

当i=2，即x_2=0.4时，

y_3=0.392+0.2(1-0.4×0.392)=0.56064

当i=3，即x_3=0.6时，

y_4=0.56064+0.2(1-0.6×0.56064)=0.6933632

当i=4，即x_4=0.8时，

y_4=0.6933632+0.2(10.8×0.6933632)=0.782425088

列表计算如下：

i	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
x_i	**0**	**0.2**	**0.4**	**0.6**	**0.8**	**1**
y_i	**0.0000**	**0.200**	**0.3920**	**0.5606**	**0.6934**	**0.7824**

2、欧拉方法的改进

为了提高欧拉方法的精确度，将微分方程（1）两边在区间$[x_0,x]$对x取积分，于是得到初值问题的等价积分方程：

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\mathrm{d}t$$

因此，求解$y(x)$就转化为计算上式右端的积分。

令x=x_1，得：

$$y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f[t, y(t)]\mathrm{d}t$$

令x=x_2，得：

$$\begin{aligned} y(x_2) &= y_0 + \int_{x_0}^{x_2} f[t, y(t)]\mathrm{d}t \\ &= y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f[t, y(t)]\mathrm{d}t + \int_{x_1}^{x_2} f[t, y(t)]\mathrm{d}t \\ &= y(x_1) + \int_{x_1}^{x_2} f[t, y(t)]dt \end{aligned}$$

一般地有：

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f[t, y(t)]\mathrm{d}t$$

为了求得$y(x_{n+1})$的近似值，**只要用数值积分方法求出积分** $\int_{x_n}^{x_{n+1}} f[t, y(t)]\mathrm{d}t$ **的近似值就可以了**。而**选用不同的积分方法，将导出不同的计算公式**。

为了提高精度，该用梯形公式计算积分，即：

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f[t, y(t)]\mathrm{d}t \approx \frac{1}{2}h\left[f\left(x_n, y(x_n)\right) + f\left(x_{n+1}, y(x_{n+1})\right)\right]$$

所以由式（3）有：

$$y(x_{n+1}) \approx y(x_n) + \frac{1}{2}h\left[f\left(x_n, y(x_n)\right) + f\left(x_{n+1}, y(x_{n+1})\right)\right]$$

若用y_{n+1}，y_n分别近似代替$y(x_{n+1})$，$y(x_n)$，则有计算公式：

$$y_{n+1}=y_n + \frac{1}{2}h[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})] \quad （4）$$

$$(n = 0,1,2,\cdots)$$

用公式（4）求一阶微分方程初值问题的方法就称为梯形法则，该公式的精确度要比欧拉公式的精确度高。

欧拉公式：$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

梯形法则：$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$

- 由上面两个公式可知，这两种公式在计算上有根本的区别。
- 欧拉公式中，y_n是已知值或已算出的值，由y_n可以直接求出y_{n+1}，这种方法通常称为**显式方法**。
- 梯形法则中，y_{n+1}隐含在函数$f(x_{n+1},y_{n+1})$中，必须通过解方程才能求出，因此这种方法称为**隐式方法**。

梯形法则：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]$

用梯形法则计算时，一般**先用欧拉公式求出初始近似值**，然后**按迭代方法求解**。其迭代公式为：

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)}=y_n+hf(x_n,y_n) \\ y_{n+1}^{(k+1)}=y_n+\frac{h}{2}\left[f(x_n,y_n)+f\left(x_{n+1},y_{n+1}^{(k)}\right)\right] \end{cases} \quad (5)$$

$$(n=0,1,2,\cdots)$$

利用（5）求$y(x_{n+1})$的近似值y_{n+1}的方法称为**改进的欧拉方法**。

若函数$f(x,y)$连续，而且序列 $y_{n+1}^{(0)}, y_{n+1}^{(1)}, \cdots$ 收敛，那么它的极限必满足梯形法则（4），这时，序列的极限就是y_{n+1}。但是这样做**计算量太大**，因此实际计算时，**若步长h比较小，迭代一次的结果就取作y_{n+1}**，于是得计算公式：

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}\right)\right] \end{cases} \quad (6)$$

上式通常称为**预报-校正公式**。其中，第一式称为预报公式，第二式称为校正公式。为了便于计算，将（6）式改为：

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf(x_n, y_n) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f\left(x_{n+1}, y_{n+1}^{(0)}\right)\right] \end{cases} \quad (6)$$

令 $k_1 = hf(x_n, y_n)$ 则

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + k_1$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\left(k_1 + hf(x_{n+1}, y_n + k_1)\right)$$

再令 $k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$ 则

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = hf(x_n, y_n) \\ k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) \end{cases} \qquad (7)$$

下面分析公式(6)（即式(7)）的截断误差。**假设$y_n=y(x_n)$**，由于

$$k_1 = hf(x_n, y_n) = hf\big(x_n, y(x_n)\big) = hy'(x_n)$$

$$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1) = hf(x_n + h, y(x_n) + k_1)$$

$$= h\Big[f\big(x_n, y(x_n)\big) + h\frac{\partial}{\partial x}f\big(x_n, y(x_n)\big)$$

$$+ k_1\frac{\partial}{\partial y}f\big(x_n, y(x_n)\big) + \cdots\Big]$$

$$= hy'(x_n) + h^2 y''(x_n) + O(h^3)$$

将上述的 k_1 ，k_2 代入公式（7）的第一式，整理得：

$$y_{n+1} = y_n + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n) + O(h^3)$$

因此，预报-校正公式的截断误差为：

$$y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^3)$$

由此可见，它比欧拉折线法的截断误差提高了一阶。

由于数值积分的梯形公式的截断误差为 $O(h^3)$，因此，梯形法则的截断误差也是 $O(h^3)$ 。

预报-校正公式的截断误差与梯形法则是同阶的，然而预报-校正公式是显示的，便于计算。

1、取步长h=0.2，用欧拉方法解初值问题：

$$\begin{cases} y' =- y - xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} (0 \le x \le 0.6)$$

解：由题可知 $f(x,y) =- y - xy^2$ $h = 0.2$

则欧拉公式为：

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = y_n + 0.2(- y_n - x_n y_n^2), (n = 0,1,2) \end{cases}$$

因此得： $y(0.2) \approx y_1 = 0.8$

$y(0.4) \approx y_2 = 0.6144$ $y(0.6) \approx y_3 = 0.4613$

2、用改进的欧拉方法计算初值问题：$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x}y - \dfrac{1}{x}y^2 & (1 \le x \le 1.5) \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$

取步长h=0.1，并与精确解 $y(x) = \dfrac{x}{1+x}$ 比较。

解：由题可知 $f(x,y) = \dfrac{1}{x}y - \dfrac{1}{x}y^2 \quad h = 0.1$

则改进的欧拉公式为：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + 0.1\left(\dfrac{1}{x_n}y_n - \dfrac{1}{x_n}y_n^2\right) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{0.1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{x_n}y_n - \dfrac{1}{x_n}y_n^2\right) + \left(\dfrac{1}{x_{n+1}}\bar{y}_{n+1} - \dfrac{1}{x_{n+1}}\bar{y}_{n+1}^2\right)\right], (n = 0,1,2,3,4) \end{cases}$$

x_n	y_n	精确解	误差
1.1	0. 523835	0. 523810	−0. 000026
1.2	0. 545500	0. 545455	−0. 000045
1.3	0. 565277	0. 565217	−0. 000060
1.4	0. 583404	0. 583333	−0. 000071
1.5	0. 600079	0. 600000	−0. 000079

四阶龙格-库塔公式

$$
\begin{cases}
y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\
k_1 = hf(x_n, y_n) \\
k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_1\right) \\
k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}k_2\right) \\
k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)
\end{cases}
$$

其截断误差 $y(x_{n+1}) - y_{n+1} = O(h^5)$

3、写出用四阶经典龙格-库塔方法求解初值问题 $\begin{cases} y' = 8 - 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ 的计算公式，取步长h=0.2，并计算y(0.4)的近似值，小数点后至少保留4位。

解：由题可知 $f(x,y) = 8 - 3y \qquad h = 0.2$

对于n=1，x_1=0.2时 $k_1 = hf(x_0, y_0) = h(8 - 3y_0) = 0.2(8 - 3 \times 2) = 0.4$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0.2\left[8 - 3\left(y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)\right] = 0.28$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.2\left[8 - 3\left(y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)\right] = 0.316$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2[8 - 3(y_0 + k_3)] = 0.2104$$

$$y(0.2) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.3004$$

对于n=2，x_2=0.4时

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = h(8 - 3y_1) = 0.2(8 - 3 \times 2.3004) = 0.2198$$

$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0.2\left[8 - 3\left(y_1 + \frac{1}{2}k_1\right)\right] = 0.1538$$

$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.2\left[8 - 3\left(y_1 + \frac{1}{2}k_2\right)\right] = 0.1736$$

$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.2[8 - 3(y_1 + k_3)] = 0.1156$$

$$y(0.4) \approx y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.4654$$