《数值计算方法》

数值积分

讲授人：杨 程
时　间：2021-2022学年
　　　　秋季学期
Email: yang_cheng@nun.edu.cn

目录

数值积分

问题的提出

但是在许多实际问题经常遇到下列情况：

（1）原函数存在但不能用初等函数表示；

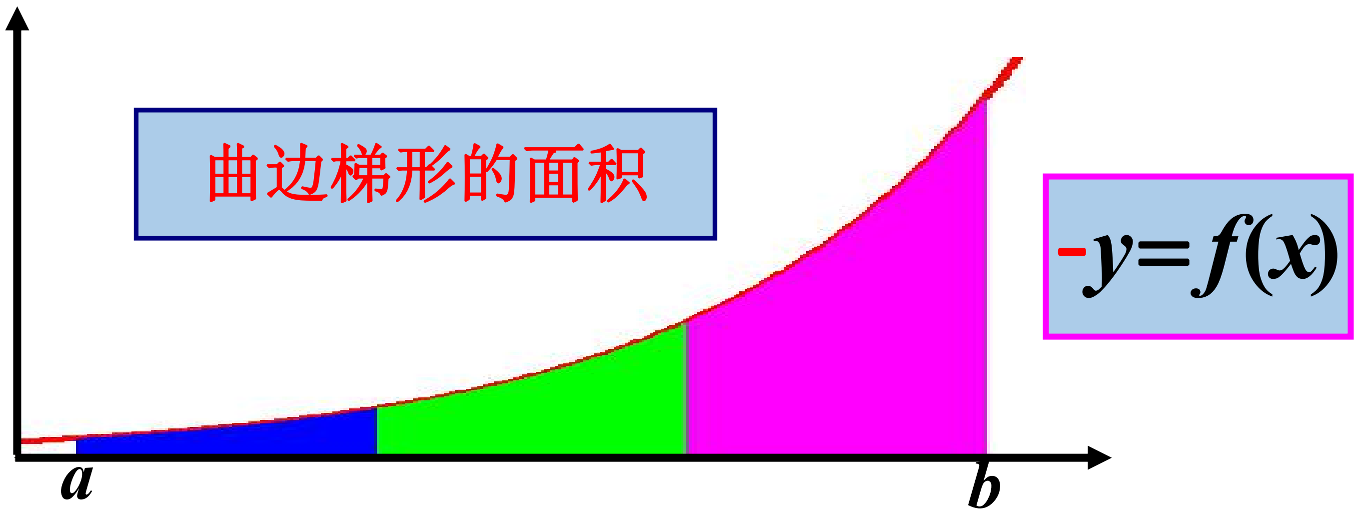
（2）原函数可以用初等函数表示，但结构复杂；

（3）被积函数没有表达式，仅仅提供了一数表。

在高等数学中，曾用牛顿—莱布尼兹（Newton—Leibniz）公式：

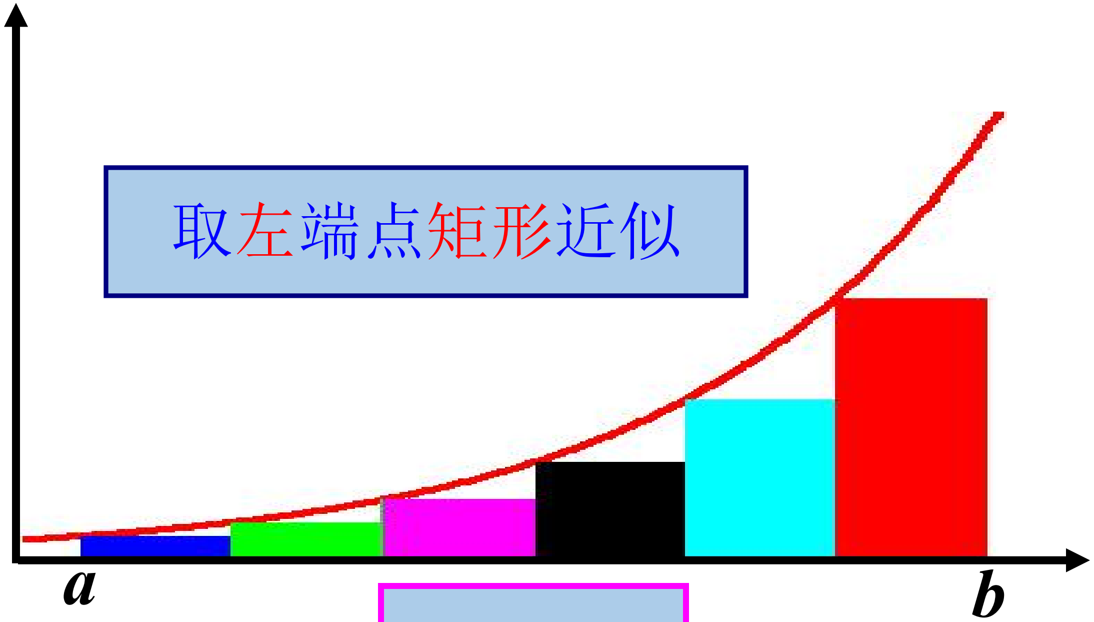
近似计算 $$I=\int_a^b f(x)dx=F(a)-F(b)$$

➢几何意义：

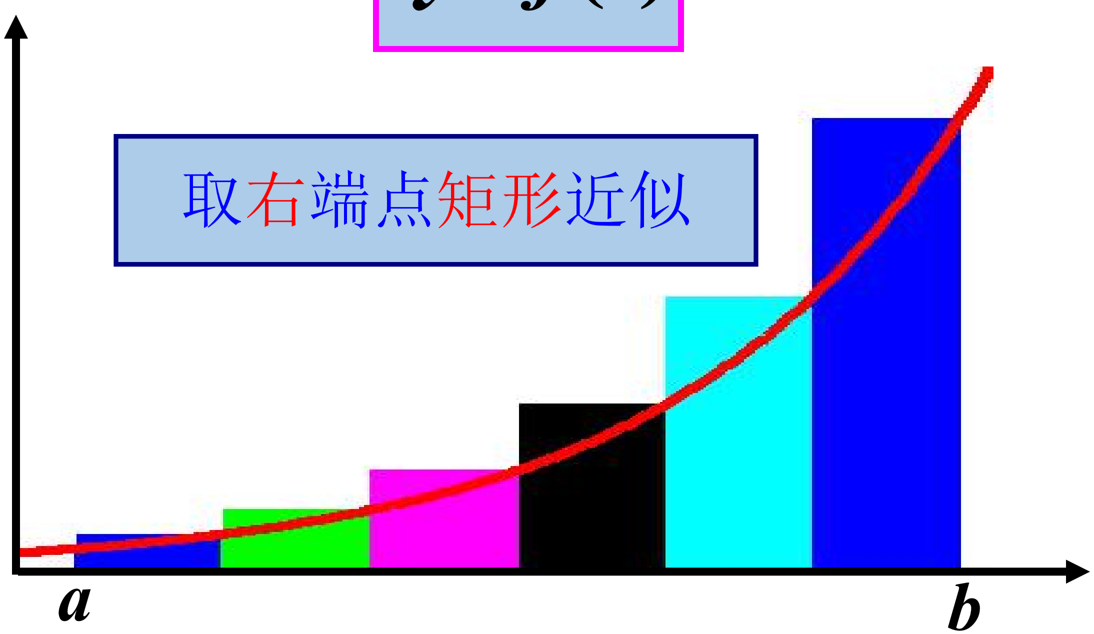


➢求定积分的思想：

分割、近似、求和



$y=f(x)$



复化型求积公式

被积函数$f(x)$可能是由实验数据的表格形式给出，其解析式并不知道，这样，原函数是无法求出的。因此，研究定积分的数值积分方法是十分必要的。

利用函数在有限个节点处的函数值去计算的积分！

数值积分

PART 1

机械求积

一.数值求积的基本思想

定积分的近似计算是：利用插值法，构造函数f(x)的近似函数p(x)。用p(x)的积分值近似替代f(x)的积分值。

积分中值定理：对于区间$[a,b]$上的连续函数$f(x)$,在$[a,b]$内存在一点ξ，成立

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

$f(\xi)$称为平均高度

曲边梯形的面积＝(b-a)为底乘以平均高度

问题：$f(\xi)$如何计算

数值求积，实际上就是对平均高度f(ξ)提供一种数值算法

二、插值型求积公式

前面我们学过插值法知：无论多复杂的函数或用表格形式给出的函数f(x)，**都可以用一个简单的插值多项式去近似**，因此我们在积分区间 $[a, b]$ 内插入n-1个分点：

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

由此得到n+1个数据点：$\left(x_k, f(x_k)\right), k = 0,1,2,\cdots,n$

过这些数据点，作一插值多项式：

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) l_k(x)$$

其中 $l_k(x)(k=0,1,\cdots,n)$

为n 次插值基函数。用 $L_n(x)$ 近似代替被积函数$f(x)$，则得

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b L_n(x)dx = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\int_a^b l_k(x)dx$$

若记 $A_k = \int_a^b l_k(x)dx$

$$= \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}dx \qquad \textbf{(1.1)}$$

得数值求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \qquad (1.2)$$

形如（1.2）的求积公式称为机械求积公式。

其中 x_k 称为求积节点， A_k 称为求积系数。若求积公式（1.2）中的求积系数 A_k 是由（1.1）确定的，则称该求积公式为插值型求积公式。

A_k与被积函数$f(x)$无关，这样就将积分计算简化为计算被积函数在各节点处函数值的线性组合，这就是用插值方法导出的数值积分公式的基本思想。

本章主要讨论插值型求积公式。

1、矩形公式

在[a,b]上任取一点 ξ，做 $f(x)=f(\xi)$ 则：

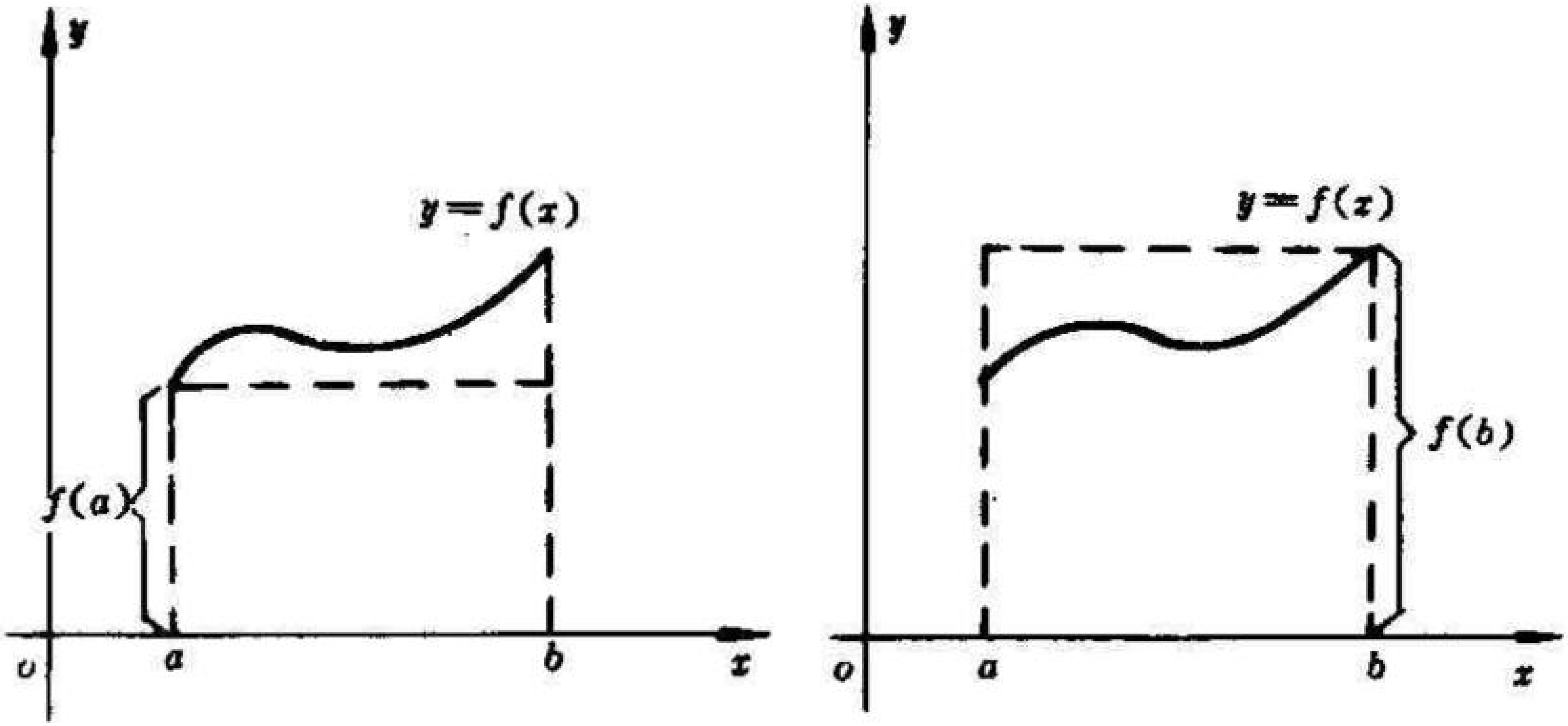
$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b f(\xi)dx = (b-a)\cdot f(\xi)$$

矩形公式分为：

左矩形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot \underline{f(a)}$

右矩形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot \underline{f(b)}$

中矩形公式 $\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\cdot \underline{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}$



矩形求积公式的几何图示

2、梯形公式

为了计算出更加准确的定积分，采用梯形代替矩形计算定积分近似值，**其思想是：求若干个梯形的面积之和，这些梯形的长短边高由函数值来决定**。

这些**梯形左上角和右上角在被积函数上**。这样，**这些梯形的面积之和就约等于定积分的近似值**。

过a,b两点对f(x)做线性插值，得：

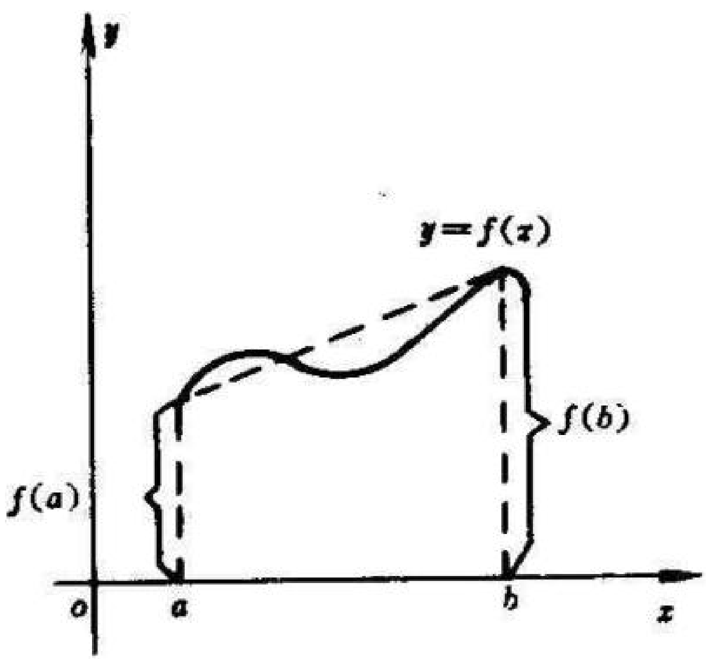
$$P_1(x) = \frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

则

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P_1(x)dx$$

$$= \int_a^b \left[\frac{x-b}{a-b}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right] dx$$

$$= \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$



梯形求积公式

3、辛普森公式

辛普森公式又称抛物线求积公式。

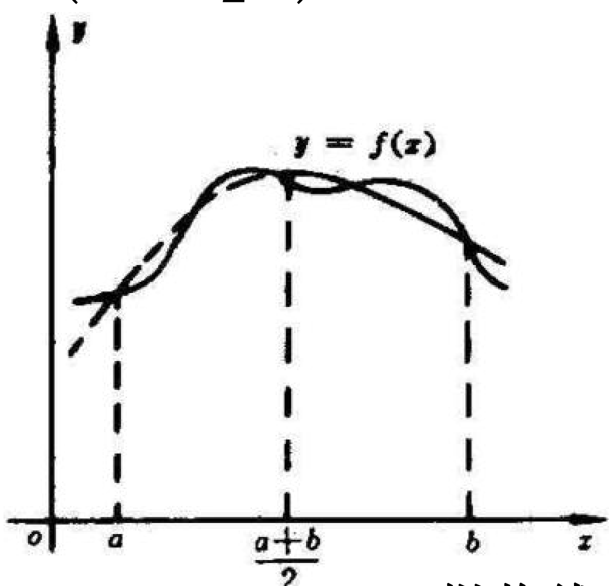
过$a, \frac{a+b}{2}, b$两点对f(x)做二次插值，得：

$$P_2(x)=\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}f(a)+\frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}f(b)$$

抛物线求积公式（辛普森公式）

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b P_2(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

$$P_2(x) = \frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(x-b)}{\left(a-\frac{a+b}{2}\right)(a-b)}f(a) + \frac{(x-a)(x-b)}{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)\left(\frac{a+b}{2}-b\right)}f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(x-a)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)}{(b-a)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)}f(b)$$



抛物线求积公式

例 分别用梯形求积公式、抛物线求积公式计算积分 $\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\,dx$

（准确值为0.43096441）

解：利用梯形求积公式：

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{2}\left(\sqrt{0.5}+\sqrt{1}\right) \approx 0.4267767$$

利用抛物线求积公式：

$$\int_{0.5}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x \approx \frac{1-0.5}{6}\left(\sqrt{0.5}+4\sqrt{0.75}+\sqrt{1}\right) \approx 0.43093403$$

三、求积公式的余项

积分的真值 $\int_a^b f(x)dx$

与由某求积公式给出的近似之差，称为该求积公式的余项，记作$R[f]$。例如，求积公式（1.2）的余项为

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-\sum_{k=0}^{n}A_k f(x_k)$$

如果求积公式（1.1）是插值型的，则由上知

$$R[f]=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b L_n(x)dx$$

$$=\int_a^b [f(x)-L_n(x)]dx$$

于是，由插值余项公式得

$$R[f]=\int_a^b \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)dx \qquad (1.3)$$

其中 $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),\xi\in(a,b)$

四、求积公式的代数精度

为了使一个求积公式能对更多的积分具有良好的实际计算意义，就应该要求它对尽可能多的被积函数 $f(x)$都准确地成立。在计算方法中，常用代数精度这个概念来描述。

定义1 若求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$$

对任意不高于m 次的代数多项式都准确成立，而对于 x^{m+1}却不能准确成立，则称该公式的代数精度为m 。

例如，梯形公式（在几何上就是用梯形面积近似代替曲边梯形面积见下图）

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \quad （1.4）$$

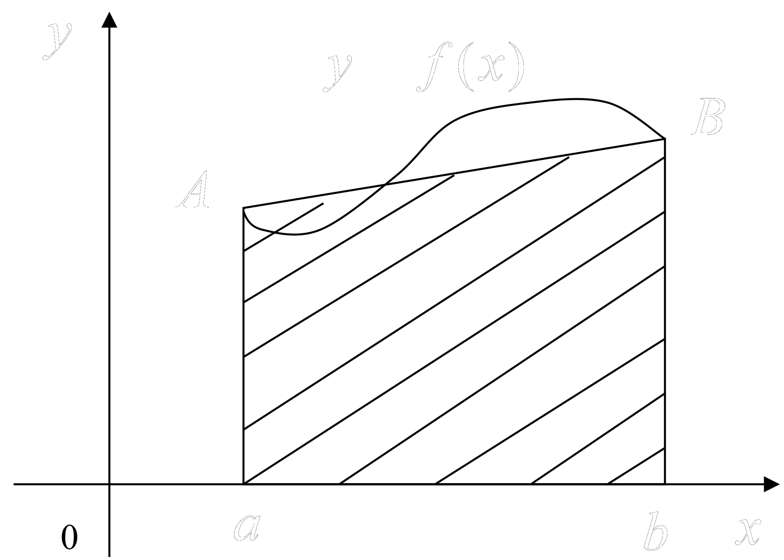
的代数精度m=1。事实上，当$f(x)$=1 时，在（1.4）中

左端= $\int_a^b 1dx = b-a$

右端= $\frac{b-a}{2}\left[1+1\right] = b-a$

左端=右端

这表明求积公式（1.4）对$f(x)$=1是准确成立的；



当 $f(x)=x$ 时，在（1.4）中

左端= $\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

右端= $\frac{b-a}{2}[a+b] = \frac{1}{2}(b^2-a^2)$

左端=右端

这表明求积公式（1.4）对 $f(x)=x$ 也是准确成立的；

综上所述，容易看出求积公式（1.4）对函数 $f(x)=1$ 和 $f(x)=x$ 的任一线性组合（不高于一次的代数多项式）都准确成立，故公式（1.4）的代数精度 m 至少等于1。但是，当 $f(x)=x^2$ 时，其

$$\text{左端}=\int_a^b x^2dx=\frac{1}{3}(b^3-a^3)$$

$$\text{右端}=\frac{(b-a)}{2}[a^2+b^2]$$

左端 $\neq$ 右端（设 $a\neq b$ ）

故由定义知，梯形公式（1.4）的代数精度 $m=1$。

显然，一个求积公式的代数精度越高，它就越能对更多的被积函数 $f(x)$ 准确（或较准确）地成立，从而具有更好的实际计算意义。由插值型求积公式的余项（1.3）易得。

定理1　含有$n+1$个节点 x_k $(k=0,1,\ldots,n)$的插值型求积公式（1.2）的代数精度至少为n 。

例：证明求积公式 $\int_0^h f(x)dx \approx \frac{2h}{3}f(0)+\frac{h}{3}f(h)+\frac{h^2}{6}f'(0)$

具有二次代数精度。

证明：令 $f(x)=1$ 则

左边=$\int_0^h dx = h$　　右边= $\frac{2h}{3}+\frac{h}{3}+0=h$

左边=右边，所以求积公式对零次多项式准确成立。

同样，令 $f(x)=x$ 则

左边= $\int_0^h xdx=\frac{h^2}{2}$　右边= $0+\frac{h^2}{3}-\frac{h^2}{6}=\frac{h^2}{2}$

左边=右边，所以求积公式对一次多项式准确成立。

令 $f(x)=x^2$ 则

$$左边=\int_0^h x^2dx=\frac{h^3}{3}\qquad 右边=0+\frac{h^3}{3}+0=\frac{h^3}{3}$$

左边=右边，所以求积公式对二次多项式准确成立。

令 $f(x)=x^3$ 则

$$左边=\int_0^h x^3dx=\frac{h^4}{4}\qquad 右边=0+\frac{h^4}{3}+0=\frac{h^4}{3}$$

左边≠右边，所以求积公式对三次多项式**不准确**成立。

即求积公式对次数不大于2的多项式都准确成立，而对三次多项式不能准确成立，故该求积公式具有2次代数精度。

PART 2

Newton-Cotes求积

介绍了插值型求积公式及其构造方法。在实际应用时，考虑到计算的方便，常将积分区间等分之，并取分点为求积分节点。这样构造出来的插值型求积公式就称为Newton-Cotes公式。

本节在介绍一般Newton-Cotes公式的基础上，介绍几个常用的Newton- Cotes公式以及这些公式在实际计算时的用法。

2.1 Newton-Cotes公式

若将积分区间 $[a, b]$ 分成 n 等份，取分点

$$x_k = a + kh\left(h = \frac{b-a}{n}; k = 0,1,\cdots,n\right)$$

作为求积节点，并作变量替换 $x = a + th$，那么插值型求积公式(**1.2**)的系数由（**1.1**）可得：

$$A_k = \int_a^b l_k(x)dx = \int_a^b \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}dx \quad \textbf{(1.1)}$$

$$A_k = h\int_0^n \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)(t-k-1)\cdots(t-n)}{k!(-1)^{n-k}(n-k)!}dt$$

$$= \frac{b-a}{n}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-k+1) \cdot(t-k-1)\cdots(t-n)dt$$

记

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{n\cdot k!\cdot(n-k)!}\int_0^n t(t-1)\cdots(t-k+1)(t-k-1)\cdots(t-n)dt \quad \textbf{(2.1)}$$

则 $$A_k=(b-a)C_k^{(n)}$$

于是，由（1.2）就可写出相应的插值型求积公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k) \quad \textbf{(1.2)}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f(x_k) \quad \textbf{(2.2)}$$

这就是一般的Newton-Cotes公式，其中$C_k^{(n)}$称为Cotes系数。

$$C_k^{(n)} = \frac{(-1)^{n-k}}{n \cdot k! \cdot (n-k)!} \int_0^n t(t-1)\cdots(t-k+1)(t-k-1)\cdots(t-n)dt \quad (2.1)$$

从Cotes系数的算式（2.1）可以看出，其值与积分区间[a，b]及被积函数$f(x)$ 都无关，只要给出了积分区间的等分数n，就能毫无困难地算出$C_0^{(n)}$ 、 $C_1^{(n)}$ 、… 、 $C_n^{(n)}$ 。

例如，当n =1时有：

$$C_0^{(1)} = -\int_o^1 (t-1)dt = \tfrac{1}{2}$$

$$C_1^{(1)} = \int_0^1 t dt = \tfrac{1}{2}$$

当$n=2$时，有

$$C_0^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^2 (t-1)(t-2)dt = \frac{1}{6}$$

$$C_1^{(2)} = -\frac{1}{2}\int_0^2 t(t-2)dt = \frac{4}{6}$$

$$C_2^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^2 t(t-1)dt = \frac{1}{6}$$

为了便于应用，部分Cotes系数列见**表2-1**。

表 2-1

n	$C_0^{(n)}$	$C_1^{(n)}$	$C_2^{(n)}$	$C_3^{(n)}$	$C_4^{(n)}$	$C_5^{(n)}$	$C_6^{(n)}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$				
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{17}{90}$		
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{199}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$

利用**Cotes**系数表（**表2-1**），由（**2.2**）可以直接写出当$n=1,2,\ldots,6$时的**Newton-Cotes**公式。例如，当$n=1$时有**两点公式**。

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] \quad \textbf{(2.3)}$$

当$n=2$时有**三点公式**

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right] \quad \textbf{(2.4)}$$

求积公式（**2.3**）就是**梯形公式**。求积公式（2.4）称为Simpson公式。

当$n=4$时有五点公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{90}\left[7f(x_0)+32f(x_1)+12f(x_2)+32f(x_3)+7f(x_4)\right] \qquad \textbf{(2.5)}$$

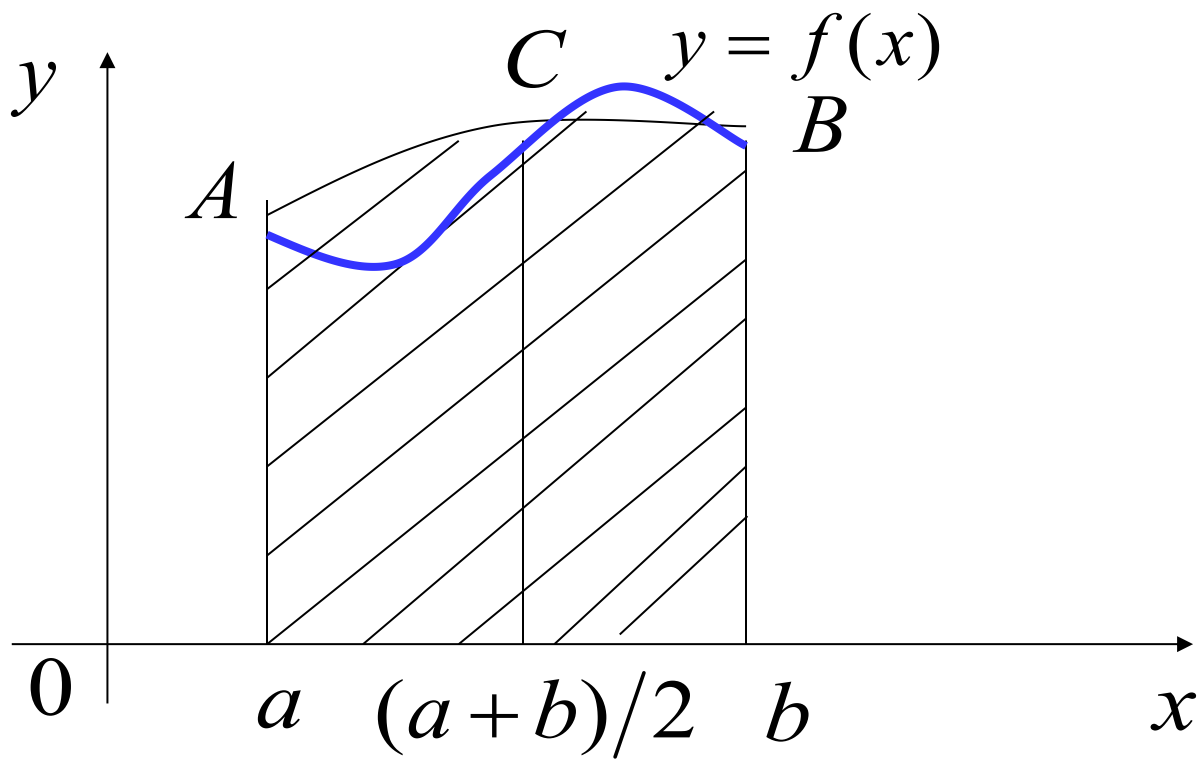
其中

$$x_k = a + k\cdot\frac{b-a}{4} \qquad (k=0,1,\cdots n).$$

求积公式（**2.5**）称为**Cotes公式**。

求积公式（**2.4**）称为**Simpson公式**。其几何意义就是通过A, B, C三点的抛物线 $y = L_2(x)$ 围成的曲边梯形面积近似地代替原曲边梯形面积（见下**图**）。因此，求积公式（**2.4**）又名**抛物线公式**。

梯形公式、Simpson公式和Cotes公式，是三个最基本、最常用的等距节点下的求积公式。下述定理给出了这些求积公式的余项为：



定理2 若 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则梯形公式（**2.3**）的余项为:

$$R_1[f] = -\frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \quad \textbf{(2.6)}$$

若 $f^{(4)}(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，则Simpson公式（**2.4**）的余项为:

$$R_2[f] = \frac{1}{90}\left(\frac{b-a}{2}\right)^5 f^{(4)}(\xi) \quad \textbf{(2.7)}$$

若 $f^{(6)}(x)$ 在 $[a，b]$ 上连续，则Cotes公式**(2.5)**的余项为：

$$R_4[f] = -\frac{8}{945}\left(\frac{b-a}{4}\right)^7 f^{(6)}(\xi) \quad \textbf{(2.8)}$$

其中ξ∈$[a，b]$。

2.2 复合Newton-Cotes公式

由**定理2**知，当积分区间 $[a, b]$ 较大时，直接使用Newton-Cotes公式所得积分**近似值的精度是很难得到保证的**。

因此在实际应用中，为了既能提高结果的精度，又使算法简便且易在电子计算机上实现，往往采用复合求积的方法。所谓复合求积，**就是先将积分区间分成几个小区间，并在每个小区间上用低阶Newton-Cotes公式**。

计算积分的近似值，然后对这些近似值求和，从而得到所求积分的近似值。由此得到的一些具有更大实用价值的数值求积公式，统称为复合求积公式。

例如，先将区间[a，b] n 等分，记分点为

$$\boxed{x_k = a + kh, (k = 0, 1, \cdots, n)}$$

其中

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n}}$$

h称为步长，然后在每个小区间[x_{i-1}，x_i] 上应用梯形公式（**2.3**），即

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left[f\left(x_{k-1}\right)+f\left(x_k\right)\right]$$
$$(k=1,2,\cdots n)$$

就可导出复合梯形公式

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx$$
$$\approx \frac{h}{2}\sum_{k=1}^{n}[f(x_{k-1})+f(x_k)]$$

若将所得积分近似值记成T_n，并注意到$x_0=a$，$x_n=b$，则上式即为

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n = \frac{h}{2}\left[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)\right] \tag{2.9}$$

仿上，可得**复合Simpson公式**

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{h}{6}\left[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)+f(b)\right] \tag{2.10}$$

复合Cotes公式

$$\int_a^b f(x)dx \approx C_n = \frac{h}{90}[7f(a) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{4}}) + 12\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{1}{2}}) + 32\sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+\frac{3}{4}}) + 14\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + 7f(b)] \qquad (2.11)$$

其中

$$x_{k+\frac{1}{4}} = x_k + \frac{1}{4}h, \quad x_{k+\frac{1}{2}} = x_k + \frac{1}{2}h,$$

$$x_{k+\frac{3}{4}} = x_k + \frac{3}{4}h$$

例 利用复合Newton-Cotes公式，计算

$$\pi = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

的近似值。

解 这里用两种方法进行计算。

先将积分区间 $[0,1]$ 八等分（分点及分点处的函数值见**表2-3**），用复合梯形公式得

$$\pi \approx T_8 = \frac{1}{16}\left\{ f(0) + 2\left[f(\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{4}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{1}{2}) \right.\right.$$

$$\left.\left. + f(\frac{5}{8}) + f(\frac{3}{4}) + f(\frac{7}{8}) \right] + f(1) \right\}$$

$$= 3.138988$$

再将积分区间 $[0,1]$ 四等分，用复合Simpson公式得

$$\pi \approx S_4 = \frac{1}{4\times 6}\left\{ f(0) + 4\left[f(\frac{1}{8}) + f(\frac{3}{8}) + f(\frac{5}{8}) \right.\right.$$

$$\left.\left. + f(\frac{7}{8}) \right] + 2\left[f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{3}{4}) \right] + f(1) \right\}$$

$$= 3.141593$$

表 2-3

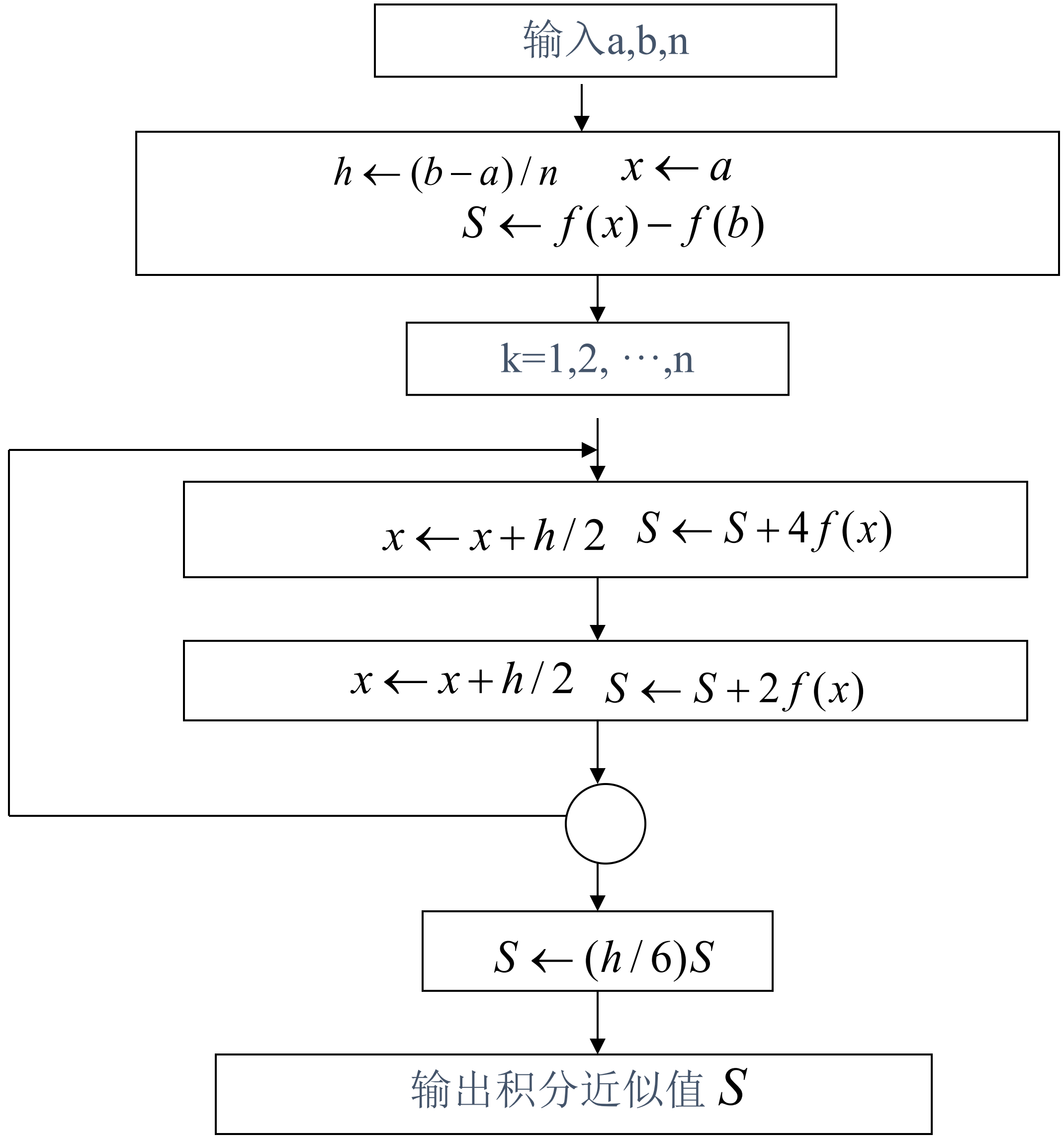
x	$f(x)=\frac{4}{1+x^2}$	x	$f(x)=\frac{4}{1+x^2}$
0	4.00000000	3/8	2.87640449
1/8	3.93846154	5/8	2.56000000
1/4	3.76470588	7/8	2.26548763
3/8	3.50684932	1	2.00000000
1/2	3.20000000		

两种方法都用到**表2-3**中九个点以上的函数值，它们的计算工作量基本上相同，但所得结果与积分真值π=3.14159265···相比较，复合辛普生公式所得近似值 S_4远比复合梯形公式所得近似值 T_8要精确。因此，在实际计算时，较多地应用复合Simpson公式。

为了便于上机计算，常将复合Simpson公式（2 11）改写成

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_n = \frac{h}{6}\left\{ f(a) - f(b) + 2\sum_{k=1}^{n}\left[2f(x_{k-\frac{1}{2}}) + f(x_k) \right] \right\}$$

相应的程序框图见下**图**。


输入a,b,n
$h \leftarrow (b-a)/n \quad x \leftarrow a$
$S \leftarrow f(x) - f(b)$
k=1,2, ···,n
$x \leftarrow x + h/2 \quad S \leftarrow S + 4f(x)$
$x \leftarrow x + h/2 \quad S \leftarrow S + 2f(x)$
$S \leftarrow (h/6)S$
输出积分近似值 S