《数值计算方法》

方程求根的迭代法

讲授人：杨 程
时　间：2021-2022学年
　　　　秋季学期
Email: yang_cheng@nun.edu.cn

复习

1、取步长h=0.2，用欧拉方法解初值问题：

$$\begin{cases} y' = -y - xy^2 \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (0 \le x \le 0.6)$$

解：由题可知 $f(x,y) = -y - xy^2$ $\qquad h = 0.2$

则欧拉公式为：

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_{n+1} = y_n + 0.2(-y_n - x_n y_n^2), (n = 0,1,2) \end{cases}$$

因此得： $y(0.2) \approx y_1 = 0.8$

$y(0.4) \approx y_2 = 0.6144$ $\qquad y(0.6) \approx y_3 = 0.4613$

2、用改进的欧拉方法计算初值问题：$\begin{cases} y' = \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}y^2 \ (1 \le x \le 1.5) \\ y(1) = 0.5 \end{cases}$

取步长h=0.1，并与精确解 $y(x) = \dfrac{x}{1+x}$ 比较。

解：由题可知 $f(x,y) = \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}y^2 \quad h = 0.1$

则改进的欧拉公式为：

$$\begin{cases} \bar{y}_{n+1} = y_n + 0.1\left(\frac{1}{x_n}y_n - \frac{1}{x_n}y_n^2\right) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{0.1}{2}\left[\left(\frac{1}{x_n}y_n - \frac{1}{x_n}y_n^2\right) + \left(\frac{1}{x_{n+1}}\bar{y}_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}\bar{y}_{n+1}^2\right)\right], (n = 0,1,2,3,4) \end{cases}$$

x_n	y_n	精确解	误差
1.1	0. 523835	0. 523810	−0. 000026
1.2	0. 545500	0. 545455	−0. 000045
1.3	0. 565277	0. 565217	−0. 000060
1.4	0. 583404	0. 583333	−0. 000071
1.5	0. 600079	0. 600000	−0. 000079

3、写出用四阶经典龙格-库塔方法求解初值问题 $\begin{cases} y' = 8 - 3y \\ y(0) = 2 \end{cases}$ 的计算公式，取步长h=0.2，并计算y(0.4)的近似值，小数点后至少保留4位。

解：由题可知 $f(x, y) = 8 - 3y$ $\qquad h = 0.2$

对于n=1，x_1=0.2时 $k_1 = hf(x_0, y_0) = h(8 - 3y_0) = 0.2(8 - 3 \times 2) = 0.4$

$$k_2 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0.2\left[8 - 3\left(y_0 + \frac{1}{2}k_1\right)\right] = 0.28$$

$$k_3 = hf\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.2\left[8 - 3\left(y_0 + \frac{1}{2}k_2\right)\right] = 0.316$$

$$k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) = 0.2[8 - 3(y_0 + k_3)] = 0.2104$$

$$y(0.2) \approx y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.3004$$

对于n=2，x_2=0.4时

$$k_1 = hf(x_1, y_1) = h(8 - 3y_1) = 0.2(8 - 3 \times 2.3004) = 0.2198$$

$$k_2 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}k_1\right) = 0.2\left[8 - 3\left(y_1 + \frac{1}{2}k_1\right)\right] = 0.1538$$

$$k_3 = hf\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_1 + \frac{1}{2}k_2\right) = 0.2\left[8 - 3\left(y_1 + \frac{1}{2}k_2\right)\right] = 0.1736$$

$$k_4 = hf(x_1 + h, y_1 + k_3) = 0.2[8 - 3(y_1 + k_3)] = 0.1156$$

$$y(0.4) \approx y_2 = y_1 + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 2.4654$$

目录

方程求根的迭代法

代数方程求根问题是一个古老的数学问题，早在16世纪就找到了三次、四次方程的求根公式。但直到19世纪才证明 $n > 5$ 次的一般代数方程式不能用代数公式求解。因此需要研究用数值方法求得满足一定精度的代数方程式的近似解。

在工程和科学技术中许多问题常常归结为求解非线性方程式问题，例如在控制系统的设计领域，研究人口增长率等。

本章将介绍这种类型方程的近似解的数值方法。设有一非线性方程：

$$f(x)=0 \qquad (\#)$$

其中 $f(x)$为实变量 x 的非线性函数。

定义 1 （1）如果有 x^*使 $f(x^*)=0$，则称 x^*为方程（#）的根，或称为函数 $f(x)$ 的零点。

（2）当 $f(x)$为多项式时，即方程为

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0(a_n\neq 0)$$

称 $f(x)=0$为 n 次代数方程。当 $f(x)$ 包含指数函数或三角函数等特殊函数时，称 $f(x)=0$为超越方程。

（3）如果 $f(x)=(x-x^*)^m g(x)$，其中$g(x^*)\neq 0$，m 为正整数，则称x^*为 $f(x)=0$ 的 m 重根。当 m=1时称x^*为 $f(x)=0$ 的单根。

先叙述两个基本定理。

定理 1 （代数基本定理）

设$f(x)=0$为具有**复系数**的 n 次代数方程，则$f(x)=0$于复数域上恰有 n 个根（r 重根计算 r 个）。如果$f(x)=0$为**实系数**代数方程，则复数根成对出现，即当 $\alpha+i\beta(\beta\neq 0)$是$f(x)=0$的复根，则 $\alpha-i\beta$ 亦是$f(x)=0$ 的根。

定理2（零点定理）

（1）设 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续；

（2）且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则存在有 $x^{*}\in(a,b)$ 使 $f(x^*)=0$

即 $f(x)$ 于 (a,b) 内存在实的零点。

设有非线性实系数方程：

$$f(x)=0$$

问题：需要求出方程的所有实根（或复根）。

PART 1

根的搜索与二分法

6.1.1 根的搜索

设有非线性方程：

$$f(x)=0 \qquad （1.1）$$

其中，$f(x)$为$f(x)$上连续函数且设$f(a)\cdot f(b)<0$。则由连续函数的性质知，方程（1.1）在(a,b)内至少有一个实根。

这时，我们称区间$f(x)$为方程（1.1）的有根区间。

寻找方程（1.1）的有根区间，通常有两种方法：**作图法、逐步搜索法**。

1、作图法

作图法就是作出 $y=f(x)$ 的粗略图像，由此确定 $y=f(x)$ 与 x 轴交点的粗略位置。

但是当函数 $y=f(x)$ 比较复杂时，其图形不容易作出，所以这种方法只是在函数 $f(x)$ 比较简单时适用。

2、逐步搜索法

逐步搜索法即适当选取某一区间 $[a,b]$，从 $x_0=a$ 出发，按照事先选择的步长 $h=(b-a)/N$（N为正整数），逐点计算 $x_k=a+kh$ 处的函数值 $f(x_k)$，当 $f(x_k)$ 与 $f(x_{k+1})$ 的值异号时，那么 $[x_k,x_{k+1}]$ 就是方程 $f(x)=0$ 的一个有根区间。

例题：找出下面方程的有根区间。

$$x^3 - 1.8x^2 + 0.15x + 0.65 = 0$$

解：假设

$$f(x) = x^3 - 1.8x^2 + 0.15x + 0.65$$

取 $a = -1$，$b = 2$ ，因为 $f(-1) < 0$，$f(2) > 0$ ，所以方程在 $[-1,2]$ 内至少有一个实根。

又取N=4，步长 $h = (b-a)/N = 3/4 = 0.75$ ，于是从 $x_0 = -1$ 出发，取 $h = 0.75$ ，向右逐点计算 $f(x_k)$ 的值，列表如下：

x_i	-1	-0.25	0.5	1.25	2
$f(x_i)$	-2.3	0.484375	0.55	-0.021875	1.75

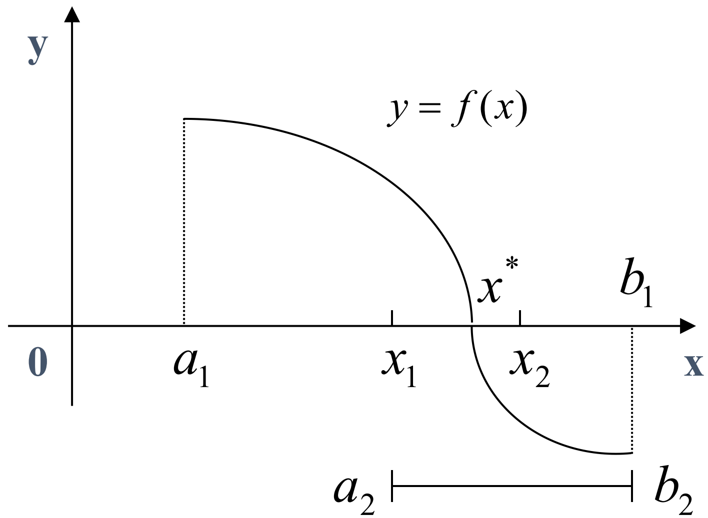
由上表可以看出，在区间$[-1,-0.25]$，$[0.5,1.25]$ 和$[1.25,2]$内各有一个根。

这种逐步搜索寻找有根区间的方法，在计算机上很方便实现，只需要将函数 $f(x)$ 排成一个程序，然后由键盘输入起点 x_0 及步长 h，根据计算的结果，调整步长的大小，总可以把区间找出来。

6.1.2 二分法

假设$f(x)$为连续函数，方程$f(x)=0$ 的有根区间是$[a,b]$，为了研究方便，假定$f(a)<0, f(b)>0$

求方程（1.1）实根 x^*的二分法过程，就是将含根区间$[a,b]$逐步分半，检查函数符号的变化，以便确定含根的充分小区间。



二分法叙述如下：记 $a_1 = a, b_1 = b$

第一步分半计算（k=1）：

将 $[a_1, b_1]$ 分半，计算中点 $x_1 = (a_1 + b_1)/2$ 及 $f(x_1)$，如果 $f(a_1)\cdot f(x_1) < 0$ 则根一定在区间 $[a_1, x_1] \equiv [a_2, b_2]$ 内，否则根一定在区间 $[x_1, b_1] \equiv [a_2, b_2]$ 内（若 $f(x_1) = 0$，则 $x_1 = x^*$）。于是得到长度缩小一半的含根区间 $[a_2, b_2]$，即

$$f(a_2)\cdot f(b_2) < 0, \text{且} b_2 - a_2 = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$$

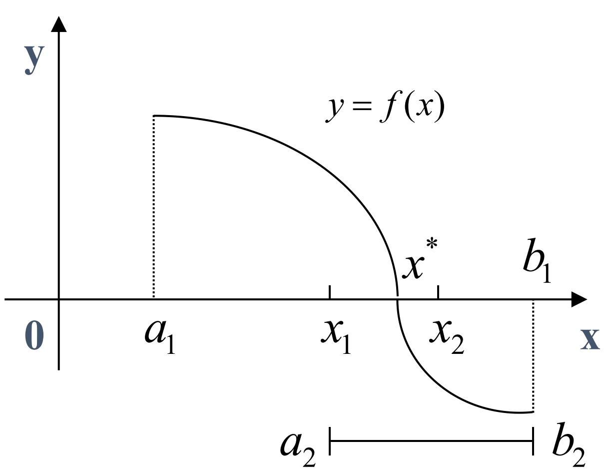
第k步分半计算：重复上述过程，设已完成第1步，・・・，第k-1步分半计算得到含根区间 $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_k, b_k]$，且满足：

（1）$f(a_k)\cdot f(b_k) < 0$，即 $x^* \in [a_k, b_k]$；

（2）$b_k - a_k = \dfrac{1}{2^{k-1}}(b - a)$；

（3）计算 $x_k = (a_k + b_k)/2$ 且有

$$k > (\ln(b-a) - \ln\varepsilon)/\ln 2 \quad (1.2)$$



当 $k \to \infty$ 时，区间 $[a_k, b_k]$ 的长度必然趋于零，即这些区间最终收缩于一点 x^*，x^* 显然就是方程 $f(x) = 0$ 的根。

在实际计算时，只要二分的次数 k 足够大，就可取最后区间的中点 $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ 作为方程 $f(x) = 0$ 的根的近似值，即：

$$x^* = \frac{a_k + b_k}{2}$$

$$|x^* - x_k| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b - a}{2^k}$$

$$b_k - a_k = \frac{b - a}{2^{k-1}}$$

所以只需要：$|x^* - x_k| \le \dfrac{b - a}{2^k} < \varepsilon$ 便可停止计算。

$$\Longrightarrow \quad k > (\ln(b - a) - \ln \varepsilon) / \ln 2$$

练习：设 $x^3-1.8x^2+0.15x+0.65=0$ ，试用二分法求该方程在区间$[0.5,1.25]$ 内根的近似值。

解：由于$f(0.5)>0$,$f(1.25)<0$ ，所以$[0.5,1.25]$ 为有根区间。

取 $x_1=\dfrac{0.5+1.25}{2}=0.875$ 开始计算

n	x_n	$f(x_n)$符号	有根区间
1	0.875	+	(0.875,1.25)
2	1.0625	-	(0.875,1.0625)
3	0.96875	+	(0.96875,1.0625)
4	1.015625	-	(0.96875,1.015625)
5	0.9921875	+	(0.9921875,1.015625)
6	1.00390625	-	(0.9921875,1.00390625)

因此，所求根的近似值为：

$$x^* \approx \frac{1}{2}(0.9921875 + 1.00390625) = 0.998046875$$

所产生的误差是：

$$|x^* - x_6| \leq \frac{1}{2^6}(1.25 - 0.5) = 0.005859$$

练习：

用二分法求方程 $\boldsymbol{x^3+4x^2-10=0}$ 在[1,2]内的一个实根，要求精确到小数点后两位。

解：令 $f(x)=x^3+4x^2-10$　　$a_1=1, b_1=2$

计算：$x_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}=1.5$　$f(x_1)=f(1.5)=2.375>0$

$f(a_1)=-5<0, f(b_1)=14>0$

取区间[1,1.5]　$a_2=1, b_2=1.5$　$x_2=\dfrac{a_2+b_2}{2}=1.25$

$f(x_2)=-1.796875<0$

取区间[1.25,1.5]　$a_3 = 1.25, b_3 = 1.5$　$x_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = 1.375$

$f(x_3) = 0.162109375 > 0$

取区间[1.25,1.375]　$a_4 = 1.25, b_4 = 1.375$

$x_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = 1.3125$　$f(x_4) = -0.8483886719 < 0$

取区间[1.3125,1.375]　$a_5 = 1.3125, b_5 = 1.375$

$x_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} = 1.34375$　$f(x_5) = -0.350982666 < 0$

取区间[1.34375,1.375]　$a_6 = 1.34375, b_6 = 1.375$

$x_6 = \frac{a_6 + b_6}{2} = 1.359375$　$f(x_6) = -0.09640884 < 0$

取区间[1.359375,1.375]　　$a_7 = 1.359375, b_7 = 1.375$

$$x_7 = \frac{a_7 + b_7}{2} = 1.3671875 \qquad f(x_7) = 0.0323557854 > 0$$

取区间[1.359375,1.3671875]

$$a_8 = 1.359375, b_8 = 1.3671875$$

若取近似根　$x^* \approx x_8 = \dfrac{a_8 + b_8}{2} = 1.36328125$

$$|x_8 - x^*| \leq \frac{1}{2}(1.3671875 - 1.359375)$$

$$\approx 0.0039 < \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

事后估计

$$k > (\ln(b-a) - \ln \varepsilon) / \ln 2$$

也可以利用先验估计 $|x_n - x^*| \leq \frac{b-a}{2^n} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$ ，先解出二分次数 $n \geq 8$ ，再计算近似根。

利用区间二分法求非线性方程 $f(x) = 0$ 根的原理比较简单，但是收敛速度慢，且不易求偶数重根。

例题　用二分法求$f(x)=x^6-x-1=0$ 于$[1,2]$内一个实根，且要求精确到小数后第3位（即要求$\left|x^*-x_k\right|<\frac{1}{2}\times10^{-3}$）。显然，$f(1)\cdot f(2)<0$ 。

解　　由 $\varepsilon=0.5\times10^{-3}$ ，由公式（**1. 2**）可确定所需分半次数 $k=11$ 。计算结果如下表(表1)。

表 1

k	a_k	b_k	x_k	$f(x_k)$
1	1.0	2.0	1.5	8.890625
2	1.0	1.5	1.25	1.564697
3	1.0	1.25	1.125	-0.097713
4	1.125	1.25	1.1875	0.616653
5	1.125	1.1875	1.15625	0.233269
6	1.125	1.15625	1.140625	0.0615778
7	1.125	1.140625	1.132813	-0.0195756
8	1.132813	1.140625	1.136719	0.0206190
9	1.132813	1.136719	1.134766	4.307×10^{-4}
10	1.132813	1.134766	$\boxed{1.133789}$	-0.00959799
11	1.133789	1.134766	$\boxed{1.134277}$	-0.0045915

二分法优点是简单，且对 $f(x)$ 只要求连续即可。可用二分法求出 $f(x)=0$ 于 $[a,b]$ 内全部实根。但**二分法不能求复数及偶数重根**。

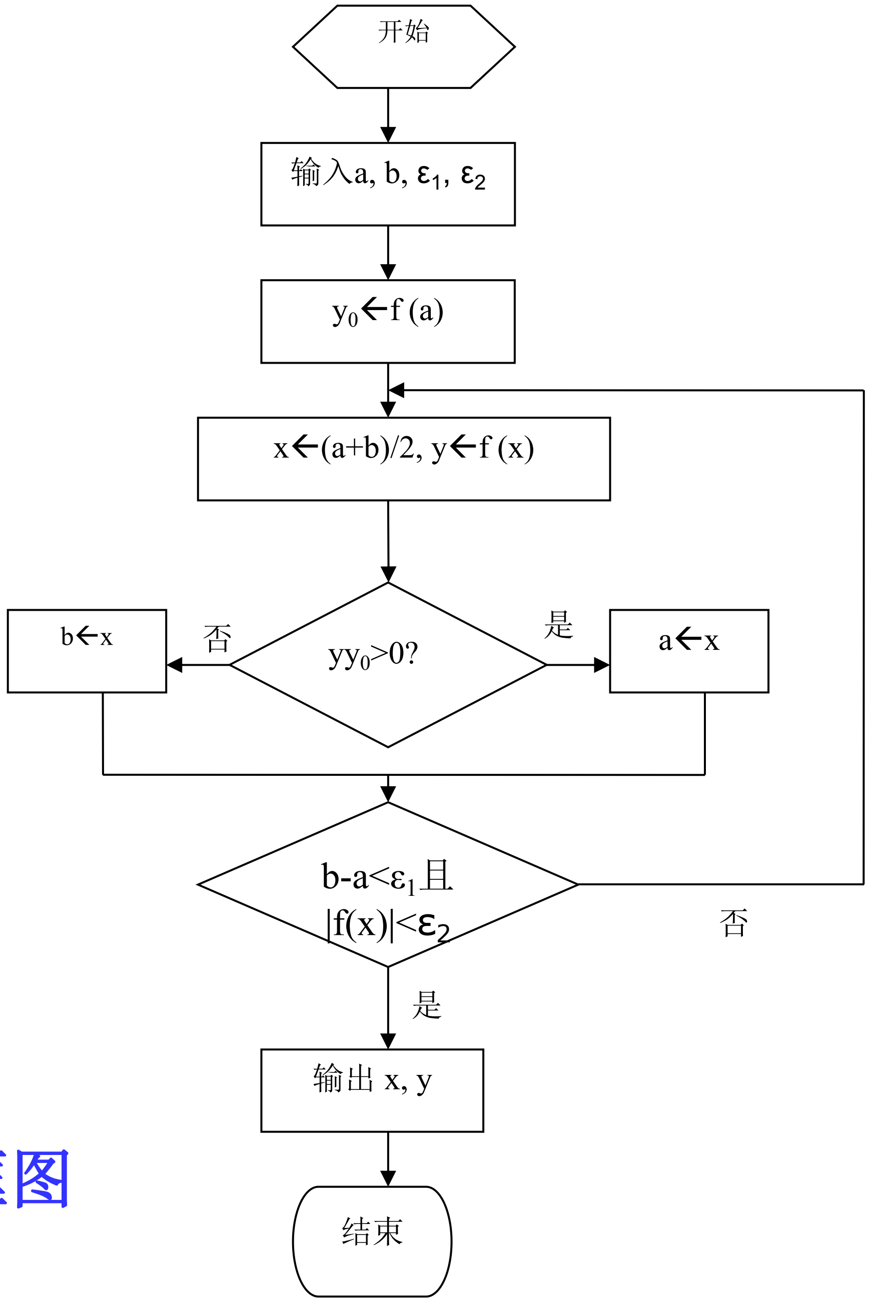
二分法：设有方程 $f(x)=0$，其中 $f(x)$ 于 $[a,b]$ 连续，且满足条件 $f(a)\cdot f(b)<0$（且设于 $[a,b]$ 内只有一个实根）。

（1）计算 $x_0=(a_k+b_k)/2, f(x_k), h=(b_k-a_k)/2;\ k=1,2,\cdots,N_0$

（2）如果 $|f(x_k)|<\varepsilon_1$ 或 $h<\varepsilon_2$ 则输出 $x_k, f(x_k), k;$

（3）如果 $f(a_k)\cdot f(x_k)<0$ 则 $a_{k+1}=a_k, b_{k+1}=x_k$ 否则
$a_{k+1}=x_k, b_{k+1}=b_k$

其中 N_0 表示给定的最大分半次数，当 $|f(x)|<\varepsilon_1$ 或 $h<\varepsilon_2$ 时分半终止，$f_{\max}$ 为一大数。



二分法框图

PART 2

迭代法

一、迭代法的基本思想

求非线性方程 $f(x)=0$ 的根的迭代法是指：从给定的一个或几个初始近似值 $x_0, x_1, \cdots, x_r$ 出发，按某种方法产生一个迭代序列 $x_0, x_1, \cdots, x_r, x_{r+1}, \cdots, x_n, \cdots$ ，使得此迭代序列收敛于非线性方程 $f(x)=0$ 的一个根 x^* ，即 $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$ 。

迭代法是一种逐次逼近法。它是求解代数方法，超越方程及方程组的一种基本方法，但存在收敛性及收敛快慢问题。

为了用迭代法求非线性方程$f(x)=0$的近似值，首先需要将此方程转化为**等价的**方程：

$$x=g(x) \qquad （2.1）$$

显然，将$f(x)=0$转化为等价方程（2.1）的**方法是很多的**。

例如：方程 $f(x)=x-\sin x-0.5=0$ 可用不同方法转化为等价方程：

（a） $x=\sin x+0.5=g_1(x)$

（b） $x=\sin^{-1}(x-0.5)=g_2(x)$

定义 **（迭代法）**设方程为 $x = g(x)$

选取方程的一个初始近似 x_0 ，且按下述逐次代入法，

构造一近似解序列：

$$\begin{cases} x_1 = g(x_0) \\ x_2 = g(x_1) \\ \quad\vdots \\ x_{k+1} = g(x_k) \\ \quad\vdots \end{cases} \qquad (2.2)$$

这种方法称为**迭代法**（或称为**单点迭代法**）。$g(x)$ 称为**迭代函数**。

二、迭代法的收敛性

定义　如果由迭代法产生的序列$\{x_k\}$有极限存在，即$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，　则称$\{x_k\}$为收敛或称迭代过程（**2.2**）收敛。否则称$\{x_k\}$不收敛。

设 $g(x)$ 为连续函数，且有$\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，则有 $x^* = g(x^*)$ 即 x^* 为方程（**2.1**）的解（称 x^* 为函数的不动点）。

事实上，由迭代过程（**2.2**）两边取极限，则有

$$x^* = \lim_{k\to\infty} x_{k+1} = \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(\lim_{k\to\infty} x_k) = g(x^*)$$

显然在由方程 $f(x) = 0$ 转化为等价的方程 $x = g(x)$ 时，选择不同的迭代函数$g(x)$就会产生不同的序列$\{x_k\}$（**即使初始值** x_0**选择一样**），且**这些序列的收敛情况也不会相同**。

例 对前面例子中方程 $f(x)=x-\sin x-0.5=0$ ，考查用迭代法求根

（a） $x_{k+1}=\sin x_k+0.5,(k=0,1,\cdots)$

（b） $x_{k+1}=\sin^{-1}(x_k-0.5),(k=0,1,\cdots)$

k	$(a)x_k$	$(b)x_k$	$(a)f(x_k)$
0	1.0	1.0	
1	1.341471	0.523599	
2	1.473820	0.023601	
3	1.495301	-0.496555	
4	1.497152	-1.487761	
5	1.497285		
6	1.497300		
7	1.497300		-3.6×10^{-7}

由计算看出，选取的两个迭代函数 $g_1(x), g_2(x)$ 分别构造序列 $\{x_k\}$ 收敛情况不一样（初始值都为1. 0），在 (a) 种情况 $\{x_k\}$ 收敛且 $x^* \approx 1.497300$ 。

在 (b) 种情况出现计算 $\arcsin(x_4 - 0.5) = \arcsin(-1.987761)$ 无定义。因此，对于用迭代法求方程 $f(x) = 0$ 近似根需要研究下述问题：

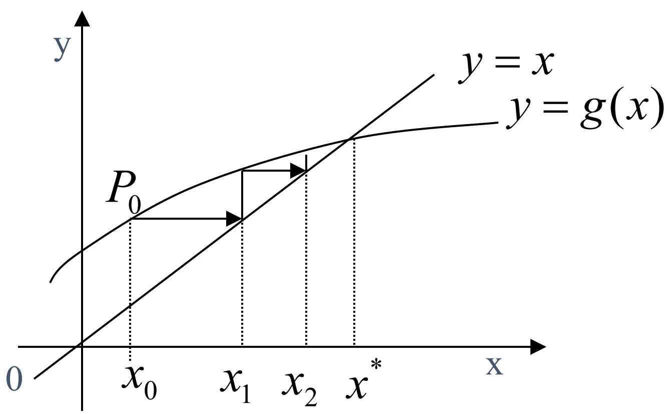
（1）如何选取迭代函数 $g(x)$ 使迭代过程 $x_{k+1} = g(x_k)$ 收敛。

（2）若 $\{x_k\}$ 收敛较慢时，怎样加速 $\{x_k\}$ 收敛。

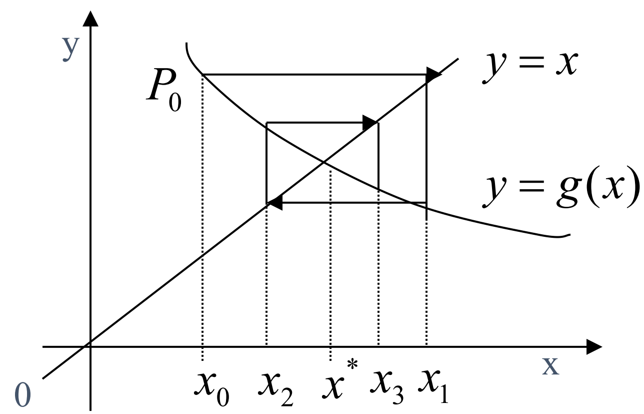
三、迭代法的几何意义

从几何上解释，求方程 $x = g(x)$ 根的问题，是求曲线与 $y = g(x)$ 直线 $y = x$ 交点的横坐标 x^*。当迭代函数 $g(x)$ 的导数 $g'(x)$ 在根 x^* 处满足下述几种条件时，从几何上来考

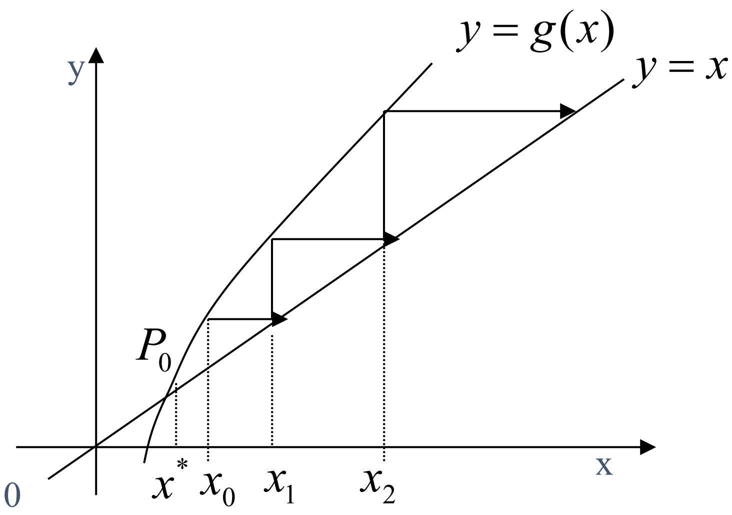
查迭代过程 $x_{k+1} = g(x_k)$ 的收敛情况如下图。



(1) $0 < g'(x^*) < 1$

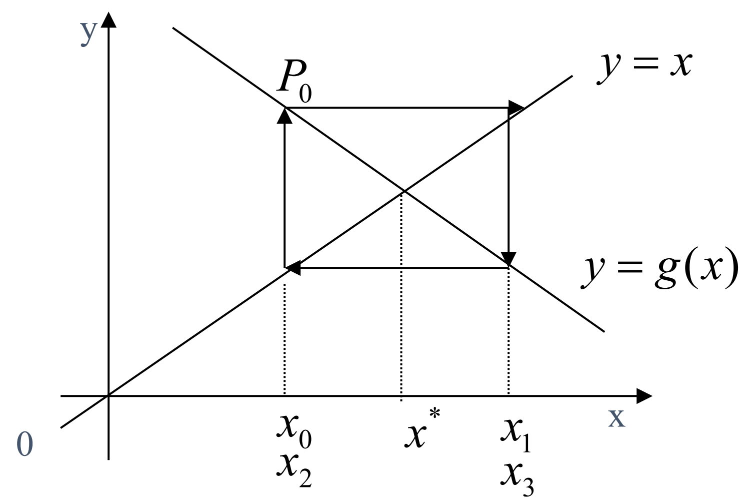


(2) $-1 < g'(x^*) < 0$



(3)

$g'(x^*)>1$



(4) $g(x)=1-x$

$g'(x^*)=-1$

从曲线 $x=g(x)$ 上一点 $P_0(x_0,g(x_0))$ 出发，沿着平行于x 轴方方向前进交 $y=x$ 于一点 Q_0 ，再从Q_0点沿平行于 y 轴方向前进交$y=g(x)$ 于 P_1 点，显然，P_1 的横坐标就是 $x_1=g(x_0)$ 。继续这过程就得到序列$\{x_k\}$，且从几何上观察知在（**1**）（**2**）情况下$\{x_k\}$收敛于x^*，在（**3**）（**4**）情况不收敛于 x^*。

由迭代法的几何意义可知，为了保证迭代过程收敛，应该要求迭代函数的导数满足条件 $|g'(x)| < 1$，当 $x \in [a,b]$ 。

四、迭代法的收敛性判定及误差估计

1、**大范围收敛方法（全局收敛方法）**：从**任意可取的初始值**出发都能保证收敛。

2、**局部收敛方法**：选取的**初始值必须充分接近所要求的根**，才能保证迭代序列收敛于非线性方程 $f(x) = 0$ 所要求的根。

1、大范围收敛性

定理3　设有方程 $x = g(x)$

（1）设 $g(x)$ 于 $[a,b]$ 一阶导数存在；

（2）当 $x \in [a,b]$ 时有 $g(x) \in [a,b]$；

（3）$g'(x)$ 满足条件：$|g'(x)| \le L < 1$，当 $x \in [a,b]$。

则有：

(a) $x = g(x)$ 在 $[a,b]$ 上有唯一解 x^*；

(b) 对任意选取初始值 $x_0 \in [a,b]$，迭代过程 $x_{k+1} = g(x_k)$ 收敛，即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$

(c) $$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{1}{1-L}\left|x_{k+1} - x_k\right|;$$

(d) 误差估计 $$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{L^k}{1-L}\left|x_1 - x_0\right| (k = 1,2,\cdots)$$

定理3中的假设条件 $|g'(x)| \le L < 1$ 当 $x \in [a,b]$。在一般情况下，可能对于大范围的含根区间不满足，而在根的邻近是成立的。

2. 局部收敛性

定理4（迭代法**局部收敛性**）设给定方程 $x = g(x)$

(1) 设 x^* 为方程的解；

(2) 设 $g(x)$ 在 x^* 的邻近**连续可微**且有

（根据 $g'(x)$ 在 x^* 邻近连续性，此条件即为存在 x^* 的一个邻域

$S = \{x \mid |x - x^*| \le \delta\}$ 使 $|g'(x)| \le L < 1$，当 $x \in S$ 时成立）

则对任意取初值 $x_0 \in S$，迭代过程 $x_{k+1} = g(x_k) \quad (k = 0,1,2,\cdots)$

收敛于 x^*（称迭代过程具有**局部收敛性**）。

3. 迭代法的收敛速度

定义1 设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x^*$，若存在 $p \geq 1$, $c > 0$ 使

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\left|x^* - x_{k+1}\right|}{\left|x^* - x_k\right|^p} = c$$

则称序列 $\{x_k\}$ 是 p 阶收敛的，$p=1$ 时是**线性收敛**的，$p>1$ 时是**超线性**收敛的，$p=2$ 时是**平方收敛**的。

定理5 设x^*为g的不动点，整数$p>1$, $g^{(p)}(x)$在x^*的邻域连续，且满足：

$$g'(x^*) = g''(x^*) = \cdots = g^{(p-1)}(x^*) = 0, g^{(p)}(x^*) \neq 0$$

则迭代法 $x_{k+1} = g(x_k)$ **产生的序列** $\{x_k\}$ **在x^*的邻域是p阶收敛的，且有：**

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x^* - x_{k+1}|}{|x^* - x_k|^p} = \frac{g^{(p)}(x^*)}{p!}$$

例　试用迭代法解方程：$f(x)=x-\ln(x+2)=0$

解　（1）显然有

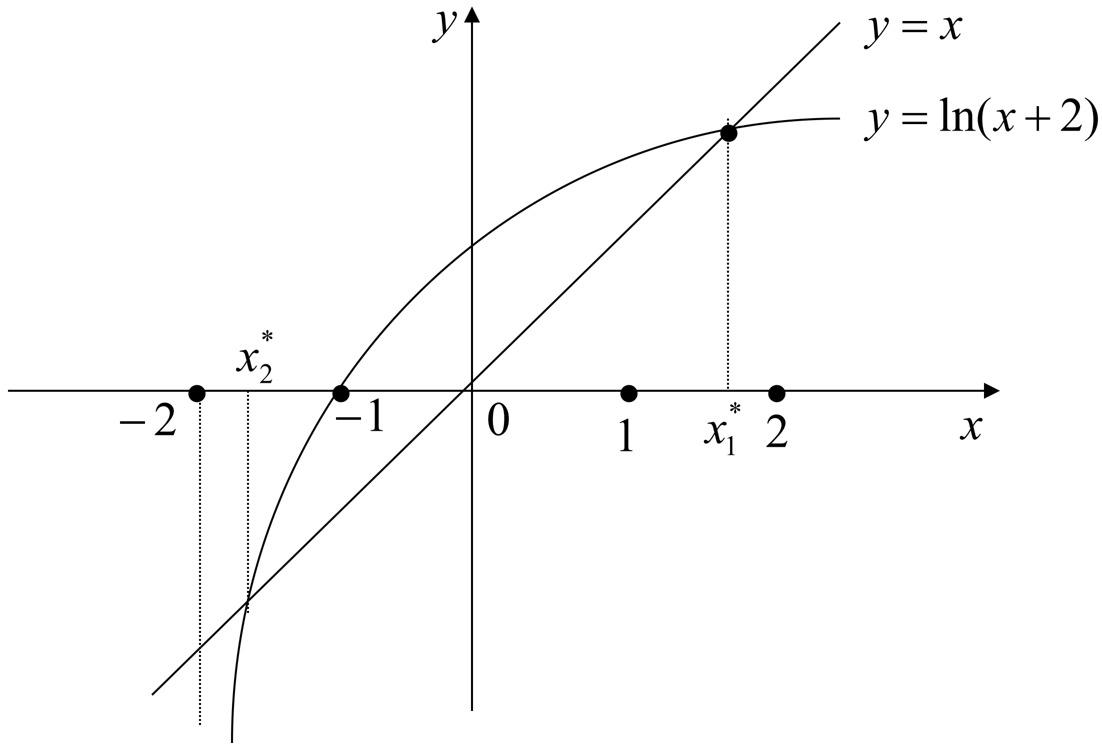
$$f(0)\cdot f(2)<0$$
$$f(-1.9)\cdot f(-1)<0$$

即知，方程于[0, 2]及[-1.9, -1]内有根，记为x_1^* 及x_2^* 。

（2）考查取初值 $x_0\in[0,2]$ 迭代过程 $x_{k+1}=\ln(x_k+2)$ 的收敛性，其中迭代函数为 $g_1(x)=\ln(x+2)$ 。

显然，$g_1(0)=\ln 2\approx 0.6931>0, g_1(2)=\ln 4\approx 1.386<2$ 及$g_1(x)$为增函数，则有当 $0\le x\le 2$时,$0\le g_1(x)\le 2$。又由

$$g_1'(x)=\frac{1}{x+2}$$


y
$y = x$
$y = \ln(x+2)$
x_2^*
-2
-1
0
1
x_1^*
2
x

则有

$$\left|g_1'(x)\right| = \frac{1}{x+2} \le g_1'(0) = \boxed{\frac{1}{2}} < 1, \text{当} x \in [0,2]$$

于是，由**定理3**可知，当初值 $x_0 \in [0,2]$时迭代过程 $x_{k+1} = \ln(x_k + 2)$收敛。

如果要求 x_1^*近似根准确到小数后第6位（即要求$\left|x_1^* - x_k\right| \le \frac{1}{2}\times 10^{-6}$）。

由**右表**可知

$$|\ x_{15} - x_{14}\ | \approx 10^{-7}, \text{且} L = \frac{1}{2}$$

k	$x_{k+1} = \ln(x_k + 2)$
0	0.0
1	0.69314718
2	0.99071046
⋮	⋮
14	1.1461931
15	1.1461932

所以

$$\left|x_1^* - x_{14}\right| \le \frac{1}{1-L}\left|x_{15} - x_{14}\right| \approx 2\times 10^{-7} < 0.5\times 10^{-6}$$

$$x_1^* \approx 1.461931$$

$$\left|f(x_{14})\right| \approx 0.8\times 10^{-7}$$

（3）为了求 $[-1.9,-1]$ 内方程的根，考察迭代过程

$$x_{k+1}=\ln(x_k+2) \qquad (1)$$

显然 $\left|g_1'(x)\right|=\dfrac{1}{x+2}>g'(-1)=1,$ 当 $x\in[-1.9,-1]$

所以，迭代过程（1）（初值 $x_0\in[-1.9,-1],x_0\neq x_2^*$）不收敛于 x_2^*

（4）可将方程转化等价方程

$$e^x=x+2, \text{或} x=e^x-2\equiv g_2(x)$$

$$g_2(x)\in[-1.804,-1.6321], \text{当} x\in[-1.9,-1]$$

且有

$$g_2'(x)=e^x \qquad \left|g_2'(x)\right|\le g_2'(-1)\approx 0.368<1, \text{当} x\in[-1.9,-1]$$

所以，当选取 $x_0\in[-1.9,-1]$ 时迭代方程

$$x_{k+1}=e^{x_k}-2(k=0,1,\cdots)$$

收敛。如取 $x_0=-1$，则迭代12次有

$$x_2^*\approx x_{12}=-1.841405660$$

且有

$$\left|f(x_{12})\right| \approx 0.2\times 10^{-8}$$

由上例可见，对于方程 $f(x)=0$，迭代函数 $g(x)$ 选取不同，相应由迭代法产生的$\{x_k\}$收敛情况也不一样。因此，我们应该选取迭代函数 $x=g(x)$，使构造的迭代过程 $x_{k+1}=g(x_k)$ 收敛且收敛较快。

五、迭代法求解方程的一般步骤

（1） 选取解的初始估计 x_1 ；

（2） 对于 $k=1,2,\cdots,N_0$ 计算 $x_{k+1}=g(x_k)$ ，其中 N_0 为给定的最大迭代次数。当 $\left|x_{k+1}-x_k\right|<\varepsilon$ 时（$\left|f(x_k)\right|<\varepsilon$ 或 $\frac{\left|x_{k+1}-x_k\right|}{\left|x_k\right|}<\varepsilon$ ，其中 ε 为给定精度要求）迭代终止。

PART 3

牛顿法

对于非线性方程 $f(x)=0$ ，如何构造迭代函数，才能保证迭代序列一定收敛于方程的根？

一个重要的途径是用近似方程代替原方程。解非线性方程 $f(x)=0$ 的牛顿方迭代法是一种将非线性函数线性化的方法。

牛顿方法的**最大优点是**在方程单根附近具有较高的收敛速度。牛顿方法可用来计算 $f(x)=0$ 的实根，还可计算代数方程的复根。

Newton法公式推导

设有非线性方程 $f(x)=0$，其中 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶连续可微，且 $f(a)\cdot f(b)<0$;

又设 x_0 是 $f(x)$ 的一个零点 $x^*\in(a,b)$ 的近似值, $f'(x_0)\neq 0$，现考虑用过曲线 $y=f(x)$ 上点 $P(x_0,f(x_0))$ 的**切线近似代替函数** $f(x)$，即用线性函数

$$y=f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$$

代替 $f(x)$。且**用切线（即线性函数）的零点，记为** x_1**，作为方程** $f(x)=0$ **的根** x^* **的近似值**，即求解

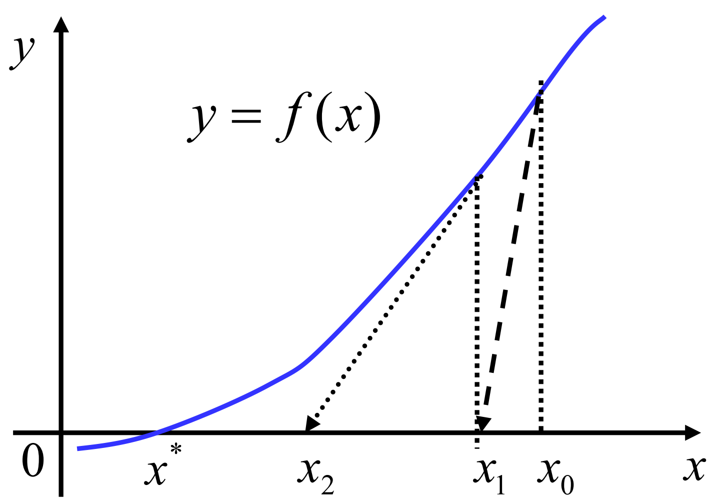
$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

得到

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \tag{3.1}$$

一般，若已求得x_k，将（**3.1**）中 x_0换为x_k，重复上述过程，即求得方程 $f(x)=0$ 根的牛顿方法的计算公式

$$\begin{cases} x_0(\text{初值}) \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}(k=0,1,2,\cdots) \end{cases} \tag{3.2}$$



误差分析

下面利用 $f(x)$ 的泰勒公式进行误差分析。设已知 $f(x)=0$ 根 x^* 的第 k 次近似 x_k，于是 $f(x)$ 在 x_k 点泰勒公式为（设 $f(x)$ 二次连续可微）：

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+\frac{f''(c)}{2!}(x-x_k)^2 \qquad \textbf{(3.3)}$$

其中c在 x 与 x_k 之间。

如果用线性函数 $P(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$ 近似代替 $f(x)$，其误差为 $\frac{f''(c)}{2!}(x-x_k)^2$。且用 $P(x)=0$ 根记为 x_{k+1} 作为 $f(x)=0$ 的根 x^* 的近似值又得到牛顿公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

现在（3.3）中取 $x=x^*$，则有

$$0=f(x^*)=\boxed{f(x_k)}+f'(x_k)(x^*-x_k)+\boxed{\frac{f''(c)}{2!}(x^*-x_k)^2}$$

于是 $$x^*=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-\frac{f''(c)}{2f'(x_k)}(x^*-x_k)^2$$

（设 $f'(x_k)\neq 0$ ）。利用牛顿公式**(3.2)** 即得误差关系式：

$$x^*-x_{k+1}=[\frac{f''(c)}{2f'(x_k)}](x^*-x_k)^2 \qquad \textbf{(3.4)}$$

误差公式（**3.4**）**说明 x_{k+1} 的误差是与 x_k 误差的平方成比例的。当初始误差（即 $x^*-x_0\equiv\varepsilon_0$）是充分小时，以后迭代的误差将非常快的减少。**

由计算公式（3.2）可知，用牛顿法求方程 $f(x)=0$ 根，每计算一步需要计算一次函数值 $f(x_k)$ 以及一次导数 $f'(x_k)$ 。

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

例 用牛顿法求 $f(x)=e^{-x/4}(2-x)-1=0$ 根。

解 显然， $f(0)\cdot f(2)<0$，方程于 $[0,2]$ 内有一根。求导

$$f'(x)=e^{-x/4}(x-6)/4$$

牛顿法计算公式为：

$$x_{k+1}=x_k-\frac{e^{-x_k/4}(2-x_k)-1}{e^{-x_k/4}(x_k-6)/4},(k=0,1,2,\cdots)$$

求得近似值 $x^* \approx 0.783596$ ，$f(x_6) \approx -3.8 \times 10^{-8}$

说明当初值x_0选取靠近根 x^*时牛顿法收敛且收敛较快，当初值不是选取接近方程根时，牛顿法可能会给出发散的结果。

表　取 $x_0 = 1.0$

k	x_k
0	1.0
1	-1.155999
2	0.189438
3	0.714043
4	0.782542
5	0.783595
6	0.783596

表　取 $x_0 = 8.0$

k	x_k
0	8.0
1	34.778107
2	869.1519
3	⋮
⋮	
	发散

牛顿法误差估计

$$\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

设 x^* 为 $f(x)=0$ 的根，其中 $f(x)$ 在 x^* 邻近具有连续的一阶导数，且 $f'(x^*)\neq 0$，x_k 为由牛顿法得到的近似值，考虑 x_k 误差估计。

利用中值公式有 $f(x_k)=f(x_k)-f(x^*)=f'(c_k)(x_k-x^*)$

其中 c_k 在 x_k 与 x^* 之间。

当 x_k 充分接近 x^* 时，则有

$$x^* - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(c_k)}, f'(c_k) \approx f'(x_k)$$

又由牛顿法公式，则 $x^* - x_k = -\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} - x_k$

$$x^* - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_{k+1} - x_k$$

因此，在用牛顿法求 $f(x)=0$ 单根 x^* 时，**一般可用** $|x_{k+1}-x_k|$ **来估计** x_k **的误差**，即当 x_k 充分接近 x^* 时，若

$$|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon$$

得到：

$$|x^* - x_k| \le \varepsilon$$

因此，计算时，**对于牛顿法可用当** $|x_{k+1} - x_k| \le \varepsilon$ **时迭代终止。**

例 对于前面例子中，对于$f(x)=x^6-x-1=0$，在区间$[1,2]$，使用牛顿法计算一实根。

解： $f(x)=x^6-x-1, f'(x)=6x^5-1$

由牛顿法计算公式有：

$$\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^6 - x_k - 1}{6x_k^5 - 1} (k=0,1,\cdots) \end{cases}$$

方程的真根$x^*=1.134724138$，求得的近似根 x_6 具有8位有效数字。且

$$x^* - x_3 = -4.72\cdot 10^{-3}$$

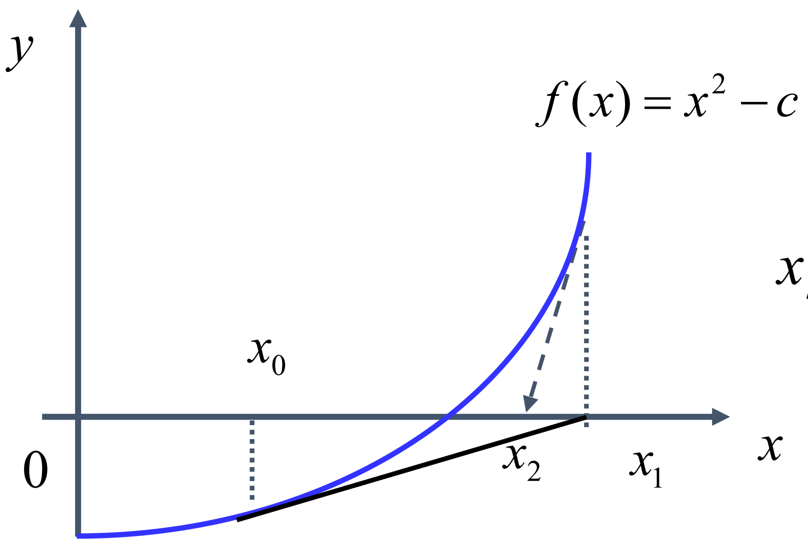
$$x_4 - x_3 = -4.68\cdot 10^{-3}$$

k	x_k	$f(x_k)$	$x_k - x_{k-1}$
0	1.5	8.89×10^{1}	
1	1.30049088	2.54×10^{1}	-2.00×10^{-1}
2	1.18148042	5.38×10^{-1}	-1.19×10^{-1}
3	1.13945559	4.92×10^{-2}	-4.20×10^{-2}
4	1.13477763	5.50×10^{-4}	-4.68×10^{-3}
5	1.13472415	6.08×10^{-8}	-5.35×10^{-5}
6	1.13472414	-4.00×10^{-9}	-1.00×10^{-8}

例 设 $c>0$，试用牛顿法建立计算 $x=\sqrt{c}$ 的公式。

解 开方问题即为求解方程 $f(x)=x^2-c=0$ 。现用牛顿法解此方程，

如下图



$$f(x)=x^2-c=0, f'(x)=2x$$

于是可得计算 $x=\sqrt{c}$ 的公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^2-c}{2x_k}=\frac{1}{2}(x_k+\frac{c}{x_k})(k=0,1,2,\cdots)$$

易知，上述迭代过程，对任意选取初值 $x_0>0$ 都是收敛的。

试计算 $x=\sqrt{10}$ ，要求$\left|x_{k+1}-x_k\right|<10^{-6}$ 时迭代终止。

k	x_k
0	1.0
1	5.5
2	3.65909091
3	3.19600508
4	3.16245562
5	3.16227767
6	3.16227766

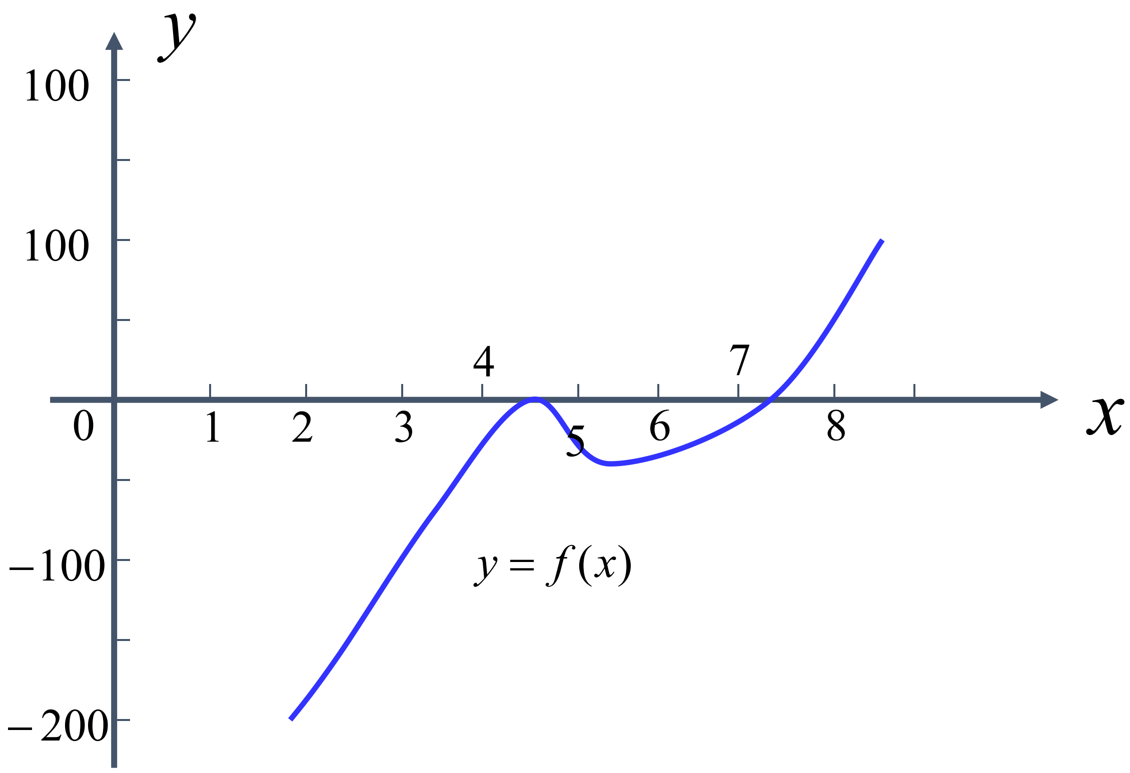
所以 $\sqrt{10}\approx 3.16227766$

例 用牛顿法求方程

$$f(x)=(x-4.3)^2(x^2-54)=$$

$$x^4-8.6x^3-35.51x^2+464.4x-998.46=0$$ 的正实根。

解 方程在 $[7,8]$ 内有一实根，在 $[4,5]$ 内有二重根（下图）。



（1） 用牛顿法计算$[7,8]$内单根，要求$|x_{k+1}-x_k|<10^{-6}$ 。

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
0	7.0	
1	7.0485612	0.485612
2	7.36041	-0.125205
3	7.34857	-0.118×10^{-1}
4	7.34847	-0.102×10^{-3}
5	7.34847	-0.758×10^{-8}

$x_5=7.34847$ 即为所要求的近似根。

（**2**） 用牛顿法求 [4,5] 内重根。

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
0	4.0	
1	4.145408	0.145408
2	4.22138	0.038952
3	4.26033	0.038952
4	4.28007	0.019740
5	4.29001	0.009939
⋮	⋮	⋮

需要迭代19次，则有 $x_{19} = 4.30000$ ， 且 $\left|x_{19} - x_{18}\right| = 0.612 \times 10^{-6}$ 。

由此例可见，牛顿方法在单根附近具有较快的收敛速度（达到一定的精度所需要的迭代次数较少），而用一般牛顿法求[4,5]内**二重根时收敛较慢**。这种情况牛顿方法可改进如下：

设 $\boxed{x^* \text{ 为 } f(x)=0 \text{ 二重根}}$（即 $f(x)=(x-x^*)^2 g(x)$ 且 $g(x^*)\neq 0$）。

这种情况可定义一个函数：$u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

显然，$\boxed{x^* \text{ 为其单根}}$，于是可用牛顿求法解 $u(x)=0$

且计算公式为：
$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k-\dfrac{u(x_k)}{u'(x_k)},(k=0,1,\cdots) \\ u'(x)=\dfrac{(f'(x))^2-f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \\ \qquad =1-\dfrac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \end{cases}$$

k	x_k	$x_k - x_{k-1}$
0	4.0	
1	4.308129	0.308129
2	4.300001	-0.812×10^{-2}
3	4.300000	-0.807×10^{-5}
4	4.300000	-0.660×10^{-9}

用公式计算$[4,5]$内方程 $f(x)=0$ 二重根，只迭代**4** **次**就得到满足精度要求 $|x_{k+1}-x_k|<10^{-6}$ 的二重根，**但这方法付出的代价是需要计算** $f''(x)$ 。

PART 4

弦截法

牛顿迭代法虽然具有收敛速度快的优点，但每迭代一次都要计算导数$f'(x_k)$，当 $f(x)$比较复杂时，不仅每次计算 $f'(x_k)$带来很多不便，而且还可能十分麻烦，如果用不计算导数的迭代方法，往往只有线性收敛的速度。

本节介绍的弦截法便是一种不必进行导数运算的求根方法。弦截法在迭代过程中不仅用到前一步 x_k 处的函数值，而且还使用x_{k-1}处的函数值来构造迭代函数，这样做能提高迭代的收敛速度。

弦截法的基本思想

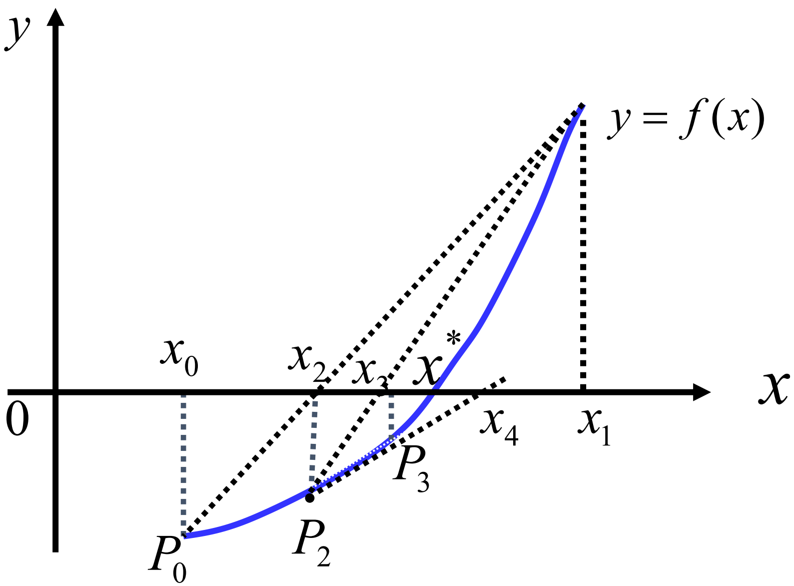
若函数$f(x)$比较复杂，求导可能有困难，此时可将牛顿公式中$f'(x)$近似用差商来代替，即

$$f'(x_k)\approx\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

于是得到计算公式：

$$\begin{cases}\text{初值 } x_0, x_1 \\ x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}(x_k-x_{k-1}) \\ (k=1,2,\cdots)\end{cases} \qquad \textbf{(4.1)}$$

(4.1)就是弦截法公式。



弦截法公式（**4.1**）可从下述想法得到：

设方程 $f(x)=0$ ，且 $f(a)\cdot f(b)<0$ ，在 $[a,b]$ 连续，若已知 x_{k-1},x_k，则可用通过两点 $P_1(x_{k-1},f(x_{k-1}))$ 和 $P_2(x_k,f(x_k))$ 的线性函数 $P(x)$ 近似代替 $f(x)$ 。

于是，求 $P(x)=0$ 的根记为 x_{k+1} 作为 $f(x)=0$ 的近似根，其中 $P(x)$ 为：

$$P(x)=f(x_k)+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$$

可以证明，弦截法具有超线性收敛，收敛的阶约为1.618，它与前面介绍的一般迭代法一样都是线性化方法，但也有区别。

即一般迭代法在计算 x_k 时只用到前一步的值 x_{k+1} ，故称之为单点迭代法；而弦截法在求 x_{k+1} 时要用到前两步的结果 x_{k-1} 和 x_k ，使用这种方法必须给出两个初始近似根 x_0, x_1 ，这种方法称为多点迭代法。

例　用弦截法求方程 $x = e^{-x}$ 在 $x_0 = 0.5$ 初始值邻近的一个根。要求 $|x_{k+1} - x_k| < 0.0001$

解：取 $x_0 = 0.5$，$x_1 = 0.6$，令 $f(x) = x - e^{-x}$

利用弦截迭代公式

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - e^{-x_k})}{(x_k - x_{k-1}) - (e^{-x_k} - e^{-x_{k-1}})}(x_k - x_{k-1})$$

计算结果，

易见取近似根 $x_4 \approx 0.56714$

则可满足精度要求。

抛物线法

以x_k, x_{k-1}和x_{k-2}为插值节点，得到插值函数

$$p_2(x) = f(x_k) + f[x_k, x_{k-1}](x - x_k) + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x - x_k)(x - x_{k-1})$$

令$p_2(x) = 0$，得到两个零点：

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega \pm \sqrt{\omega - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}},$$

式中$\omega = f[x_k, x_{k-1}] + f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}](x_k - x_{k-1})$.

$$\Rightarrow x_{k+1} = x_k - \frac{2f(x_k)}{\omega + \operatorname{sgn}(\omega)\sqrt{\omega - 4f(x_k)f[x_k, x_{k-1}, x_{k-2}]}}.$$

抛物线法按阶$p = 1.840$收敛到x^*.

弦截法与牛顿法的比较：

- 弦截法与牛顿法都是线性化方法；
- 牛顿法需要一个初始值，而弦截法需要两个初始值；
- 弦截法只需要计算函数值，而牛顿法既要计算函数值，还要计算导数值，弦截法计算强度小于牛顿法；
- 弦截法收敛速度稍慢于牛顿法。

20XXPOWERPOINT

感谢观看 THANGKS!

单击此处添加您的副标题文字