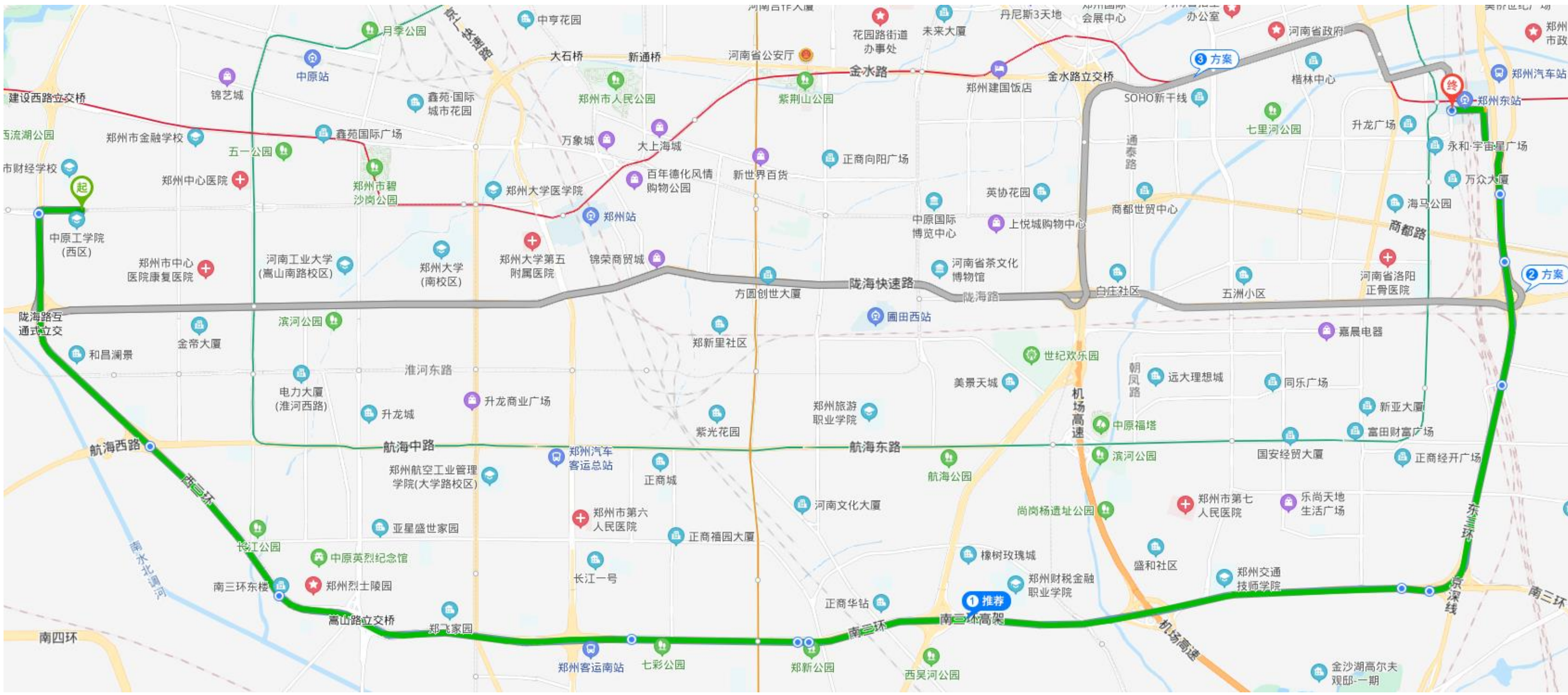
Artificial Intelligence

8.不确定知识与推理a

对应课本13-15章

打车问题

- 已知从郑州开往北京西的**<u>G1572</u>**次列车在早上**8:24**从郑州东站准时发车，小明计划一大早打车去，但是不确定要几点出发



一个不确定性问题

- 令A_t=距离发车的剩余时间
- 假如打车的话，A_t足够我从学校赶往郑州东站吗?
- 问题:
  - 局部可观察性（道路状况，出租车数量，司机的决定）
  - 传感器有噪声（导航APP的滞后性）
  - 行为结果的不确定性（轮胎漏气）
  - 复杂的建模和交通预测
- 几种选择:
  - 冒险：A_{45}可以让我到达东站
  - 放弃：信息不足以让我做决策，不去了
  - 谨慎：如果路上没有事故，也没有下雨，同时一出门就打到车，车况良好不会半路爆胎，那么A_{45}是足够的
  - 过于谨慎：A_{1440}可以保证赶上车，但我要在东站睡一晚上

如何对待不确定性

- 一般处理方法：
    - 假设车不会爆胎
    - 假设A_{45}是足够的，除非有确切的反驳证据
- 问题：
    - 如何对待所有假设?
    - 如何处理假设之间的矛盾?
- 使用可能性描述假设：
    - A_{45}意味着我在0.8的可能性下能够到达车站

主观概率

- 对不确定性进行判断受到这两部分的影响：
  - 条件不全：缺乏相关事实支撑或初始条件等
  - 判断不全：没有列举出所有情况
- 主观概率：
  - 根据人们的知识对概率做判断，如：

$$P\ (A_{45}|\text{路上没有事故}) = 0.8$$

- 但主观概率没有考虑当下的信息变化，事实概率应随着新的证据的出现而变化，如：

$$P\ (A_{45}|\text{路上没有事故，出门打上车}) = 0.9$$

- 类似一阶逻辑中的 $KB \models \alpha$

在不确定性下做决策

- 假设根据我的经验，有如下的判断：

$$
\begin{aligned}
P(A_{25} \text{ 让我准时到达} \mid \ldots) &= 0.04 \\
P(A_{45} \text{ 让我准时到达} \mid \ldots) &= 0.70 \\
P(A_{120} \text{ 让我准时到达} \mid \ldots) &= 0.95 \\
P(A_{1440} \text{ 让我准时到达} \mid \ldots) &= 0.9999
\end{aligned}
$$

- 我要做哪种选择?
- 基于我对错过火车的可接受程度（偏好性）做选择。
- 效用论（utility theory）用于对偏好性进行表示和推断

决策论=效用论+概率论

Decision theory = utility theory + probability theory

理性决策

- 概率论
  - 是用于处理置信度的理论
- 效用论
  - 有效性的度量
  - 用偏好来表现和推理，每个状态都具有“有效性/效用”的度量值
  - 效用是微观经济学中最常用的概念之一。一般而言，效用是指对于消费者对各种商品和服务的消费或投资的相对满意度的度量
- 决策论
  - 是理性决策的通论
  - 决策论 = 概率论 + 效用论
  - 决策论和博弈论关系密切；二者的区别是，决策论研究个人行为选择，而博弈论主要关注多个决策者之间选择的相互关系。

概率基础知识

- 概率始于集合空间 Ω —也称为样本空间，如：
  - 投骰子时为6
  - $\omega \in \Omega$ 是一个样本点/可能的世界/原子事件
- 一个概率空间(probability space)或概率模型(probability model)是指，在一个样本空间(sample space)内，对每一个$\omega \in \Omega$都有一个赋值$P(\omega)$

$$0 \leq P(\omega) \leq 1$$

$$\Sigma_{\omega} P(\omega) = 1$$

- 如 $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = 1/6$
- 一个事件A是Ω的一个子集

$$P(A) = \Sigma_{\{\omega \in A\}} P(\omega)$$

- 如 P (掷骰子< 4) = $P(1) + P(2) + P(3) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$

随机变量

- 随机变量是从采样点到某个范围的函数，如实数或布尔值
  - 比如 $Odd(1) = true$
- 随机变量(Random Variable)可简写为 r.v.
- P可以推导出任何r.v. X:

$$P(X = x_i) = \Sigma_{\{\omega : X(\omega) = x_i\}} P(\omega)$$

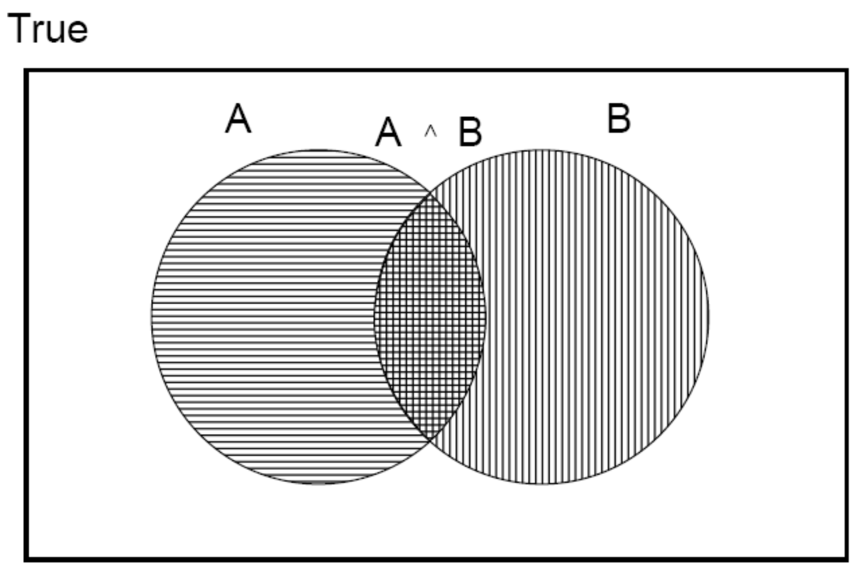
$$P(Odd = true) = P(1) + P(3) + P(5) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

随机变量和命题逻辑

- 将一个命题想象成命题为真时的事件（一组采样点）
- 给定布尔随机变量A和B：
  - 事件 a = 当 $A(\omega) = true$ 时的采样点集合
  - 事件 $\neg a$ = 当 $A(\omega) = false$ 时的采样点集合
  - 事件 $a \wedge b$ = 当 $A(\omega) = true$ 且 $B(\omega) = true$ 时的采样点集合
- 通常在AI应用中，采样点是由一组随机变量的值定义的
- 也就是说，样本空间是变量范围的笛卡尔积(Cartesian product)
- 如果使用布尔变量，采样点=命题逻辑模型，如：
  - $A = true$, $B = false$, 或 $a \wedge \neg b$
- 命题=原子事件的分离，如：
  - $(a \vee b) \equiv (\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge b)$
  - $\Rightarrow P(a \vee b) = P(\neg a \wedge b) + P(a \wedge \neg b) + P(a \wedge b)$

为什么要用概率?

- 这些定义意味着某些逻辑上相关的事件必须具有相关的概率，也就是说：
- $P(a \vee b) = P(a) + P(b) - P(a \wedge b)$



- 一个根据可能性下注的Agent，如果违反了概率公理，迟早会赔钱——Bruno de Finetti，意大利数理统计学家

命题语法

- 命题型或布尔随机变量，如：
  - 牙齿上有蛀牙
  - 命题：空腔=true
- 离散随机变量：
  - 晴天，雨天，阴天，下雪
  - 各个值之间相互排斥
- 连续随机变量
  - 温度=21.6或温度<22.0

先验概率

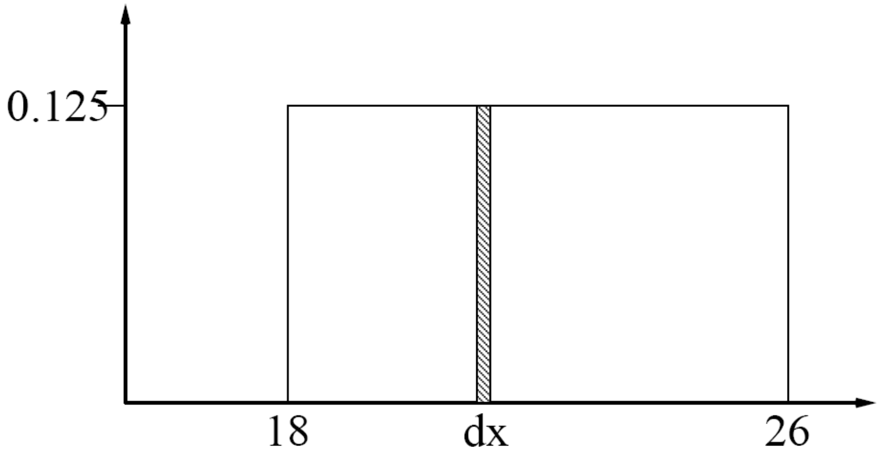
- 命题的先验或无条件的概率，例如
  - $P(蛀牙 = true) = 0.1$
  - $P(天气 = 晴) = 0.72$
- 在新的信息到达之前，以经验为依据
- 概率分布给出了所有可能的赋值：
  - $\mathbf{P}(天气) = (0.72, 0.1, 0.08, 0.1)$
- 一组随机变量的联合概率分布

天气 =	晴	雨	云	雪
蛀牙 = true	0.144	0.02	0.016	0.02
蛀牙 = false	0.576	0.08	0.064	0.08

- 关于域的每个问题都可以用联合分布来回答，因为每个事件都是通过抽样点的总和表示的

连续变量的概率

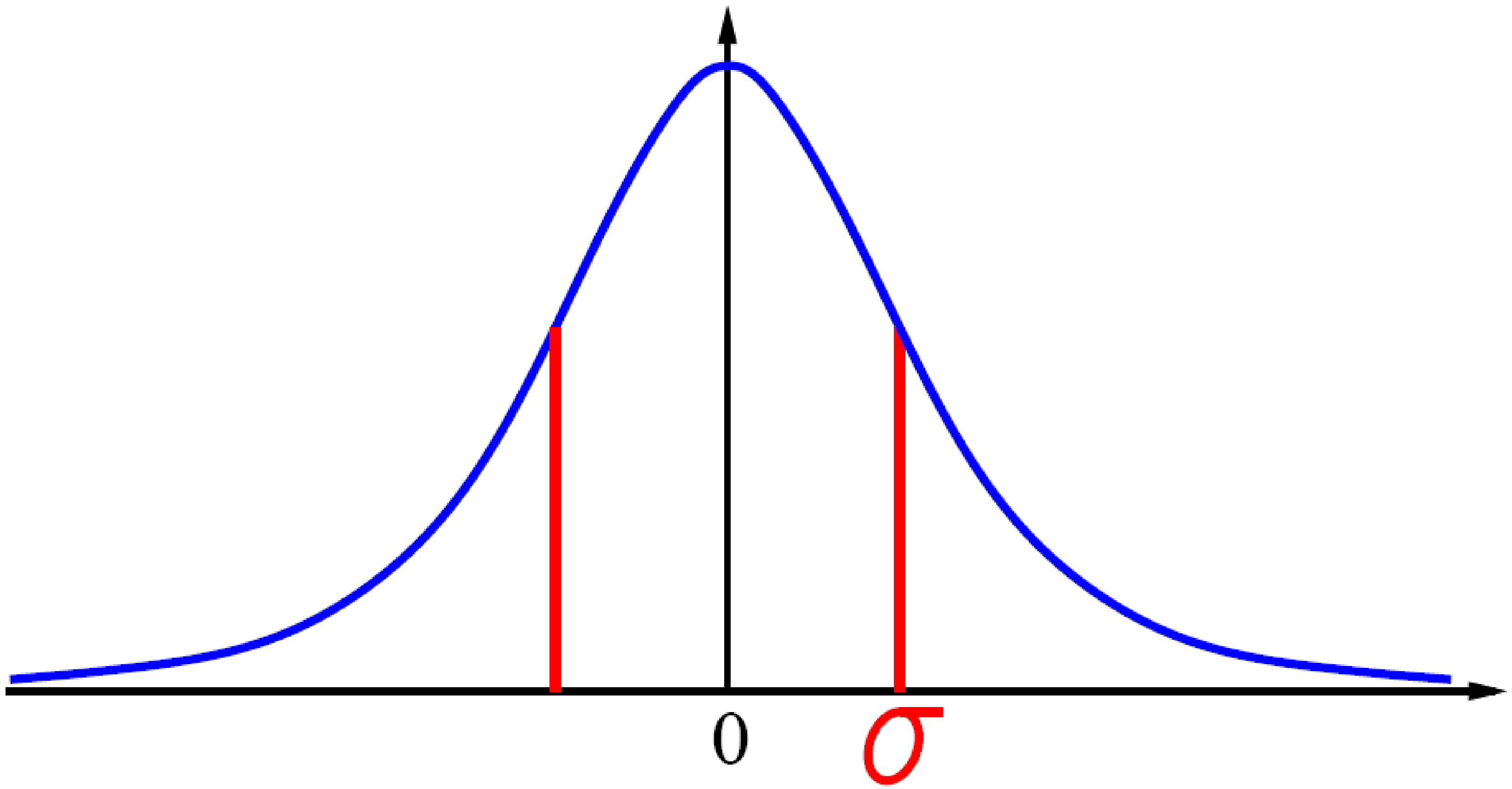
- 将分布表示为参数化的值函数：
  - $P(X=x) = U[18, 26](x)$
    $= $ 在18到26之间的概率密度



- 这里P是概率密度，其积分为1
  - $P(X=20.5) = 0.125$ 意味着
  - $\lim_{dx\to 0} P(20.5 \le X \le 20.5 + dx)/dx = 0.125$

高斯密度

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$



条件概率

- 条件或后验概率
  - P (蛀牙 | *牙疼*) = 0.8
  - 注意这里只有牙疼确切的信息
  - “如果牙痛，我有80%的几率是蛀牙”不是已知信息
- 如果我们知道更多的信息，比如蛀牙是已知的，那么
  - P (蛀牙 | *牙疼，蛀牙*) = 1
- 注意：不那么具体的信念在更多的证据出现后仍然有效，但并不总是有用
- 新的证据可能是不相关的，因此可以简化，例如，
  - P (蛀牙 | *牙疼，建业获胜*) = P (蛀牙 | *牙疼*) = 0.8
- 这种由领域知识认可的推论是至关重要的

条件概率

- 定义条件概率：

$$P(a|b) = \frac{P(a \wedge b)}{P(b)} \text{ if } P(b) \neq 0$$

- 根据乘积法则，也可以写成：

$$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$$

- 对于蛀牙和天气之间的关系，可以写作：

$$\mathrm{P}(\textit{天气}, \textit{蛀牙}) = \mathrm{P}(\textit{天气}|\textit{蛀牙})\ \mathrm{P}(\textit{蛀牙})$$

- 重复运用乘积法则，得到条件概率计算的链式法则：

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_1, \ldots, X_n) &= \mathrm{P}(X_1, \ldots, X_{n-1})\ \mathrm{P}(X_n|X_1, \ldots, X_{n-1}) \\
&= \mathrm{P}(X_1, \ldots, X_{n-2})\ \mathrm{P}(X_{n_1}|X_1, \ldots, X_{n-2})\ \mathrm{P}(X_n|X_1, \ldots, X_{n-1}) \\
&= \ldots \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(X_i | X_1, \ldots, X_{i-1})
\end{aligned}$$

通过枚举的推理

- 观察联合分布：

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	.108	.012	.072	.008
¬cavity	.016	.064	.144	.576

- 对任意可能的 φ, 对其为真时的原子事件求和:

$$P(\varphi) = \sum_{\omega:\omega\models\varphi} P(\omega)$$

通过枚举的推理

- 观察联合分布：

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	.108	.012	.072	.008
¬cavity	.016	.064	.144	.576

- 对任意可能的 φ, 对其为真时的原子事件求和：

$$P(\varphi) = \Sigma_{\omega:\omega|=\varphi} P(\omega)$$

$$P(toothache) = 0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064 = 0.2$$

通过枚举的推理

- 观察联合分布:

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	.108	.012	.072	.008
¬cavity	.016	.064	.144	.576

- 对任意可能的 φ, 对其为真时的原子事件求和:

$$P(\varphi) = \sum_{\omega:\omega \models \varphi} P(\omega)$$

$$P(cavity \vee toothache)$$

$$= 0.108+0.012+0.072+0.008+0.016+0.064$$

$$= 0.28$$

通过枚举的推理

- 观察联合分布：

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	.108	.012	.072	.008
¬cavity	.016	.064	.144	.576

- 对任意可能的 φ, 对其为真时的原子事件求和:

$$P(\varphi) = \Sigma_{\omega:\omega \models \varphi} P(\omega)$$

$$\begin{aligned} P(\neg cavity | toothache) &= \frac{P(\neg cavity \wedge toothache)}{P(toothache)} \\ &= \frac{0.016 + 0.064}{0.108 + 0.012 + 0.016 + 0.064} = 0.4 \end{aligned}$$

归一化

- 观察联合分布：

	toothache		¬toothache	
	catch	¬catch	catch	¬catch
cavity	.108	.012	.072	.008
¬cavity	.016	.064	.144	.576

- 分母可以看作是一个归一化常数：

$$\mathrm{P}(Cavity|toothache) = \alpha\, \mathrm{P}(Cavity, toothache)$$

$$= \alpha\, [\mathrm{P}(Cavity, toothache, catch) + \mathrm{P}(Cavity, toothache, \neg catch)]$$

$$= \alpha\, [\langle 0.108, 0.016\rangle + \langle 0.012, 0.064\rangle]$$

$$= \alpha\, \langle 0.12, 0.08\rangle = \langle 0.6, 0.4\rangle$$

- 总体思路：
  - 通过证据变量的兴和隐变量的累加来计算查询变量的分布

通过枚举的推理

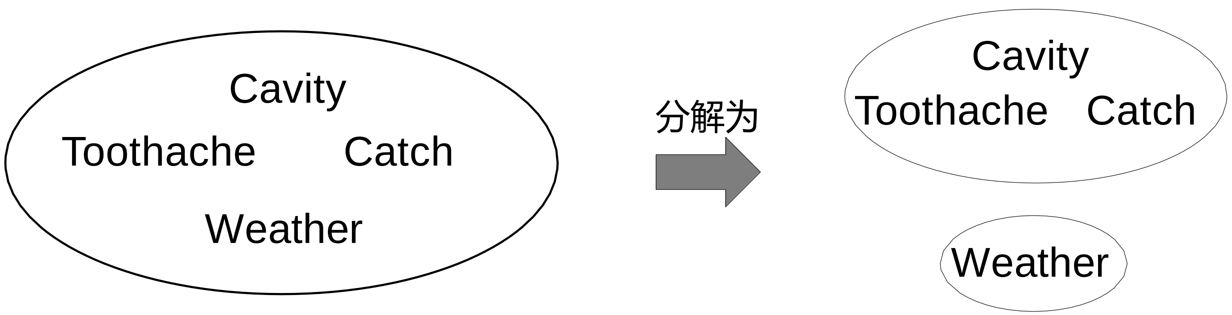
- 设X是所有的变量
  - 通常，我们需要查询变量 Y 的后验联合分布
  - 给定证据变量 E 的具体值 e
- 设隐变量为 H = X−Y−E
- 然后，通过对隐藏变量求和，来对联合项进行求和：

$$P(Y|E=e) = \alpha P(Y, E=e) = \alpha \Sigma_h P(Y, E=e, H=h)$$

- 求和中的项是联合项因为 Y, E 和 H 一起耗尽了随机变量的集合
- 问题：
  - 最坏情况时间复杂度 $O(d^n)$ 其中 d 是最大的量
  - 空间复杂度 $O(d^n)$ 存储联合分布
  - 如何找到数字为 $O(d^n)$ 项?

独立性

- A 和 B 是相互独立的当且仅当
- $P(A|B) = P(A)$ 或 $P(B|A) = P(B)$ 或 $P(A, B) = P(A)P(B)$



- $P(Toothache, Catch, Cavity, Weather)$
    - $= P(Toothache, Catch, Cavity)P(Weather)$
- 因为变量的独立性，可以将32类结果减少为12个
- 变量独立很好用，但是不常见，比如牙医有上百个变量，但是所有的这些变量都不是相互独立的，这种情况下有什么方法吗?

条件独立性

- $P(Toothache, Cavity, Catch)$ 有$2^3-1=7$个相互独立的结果
- 如果我有蛀牙，探针插进去的概率与我是否牙疼无关：
  - $P(catch|toothache, cavity) = P(catch|cavity)$
- 同样的独立性也适用于没有蛀牙的情况：
  - $P(catch|toothache, \neg cavity) = P(catch|\neg cavity)$
- 给定空洞的条件下，$Catch$和$Toothache$条件独立：
  - $P(Catch|Toothache, Cavity) = P(Catch|Cavity)$
- 等价的：
- $P(Toothache|Catch, Cavity) = P(Toothache|Cavity)$
- $P(Toothache, Catch|Cavity) = P(Toothache|Cavity)P(Catch|Cavity)$

条件独立性

- 用链式法则写出全联合分布：

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}(Toothache, Catch, Cavity)\\
&\quad = \mathrm{P}(Toothache|Catch, Cavity)\mathrm{P}(Catch, Cavity)\\
&\quad = \mathrm{P}(Toothache|Catch, Cavity)\mathrm{P}(Catch|Cavity)\mathrm{P}(Cavity)\\
&\quad = \mathrm{P}(Toothache|Cavity)\mathrm{P}(Catch|Cavity)\mathrm{P}(Cavity)
\end{aligned}
$$

- 即一共有 2+2+1=5 个独立的结果（减少2个）
- 在大多数情况下，条件独立的使用使联合分布的表示从n的指数级减少到n的线性级
- 条件独立是我们对不确定环境的最基本和最可靠的知识表现形式

贝叶斯规则

- 乘法法则$P(a \wedge b) = P(a|b)P(b) = P(b|a)P(a)$
- $\Rightarrow$ 贝叶斯规则 $P(a|b) = \frac{P(b|a)P(a)}{P(b)}$
- 其分配形式如下:

$$\mathrm{P}(Y|X) = \frac{\mathrm{P}(X|Y)\mathrm{P}(Y)}{\mathrm{P}(X)} = \alpha \mathrm{P}(X|Y)\mathrm{P}(Y)$$

- 使用因果性表述为:

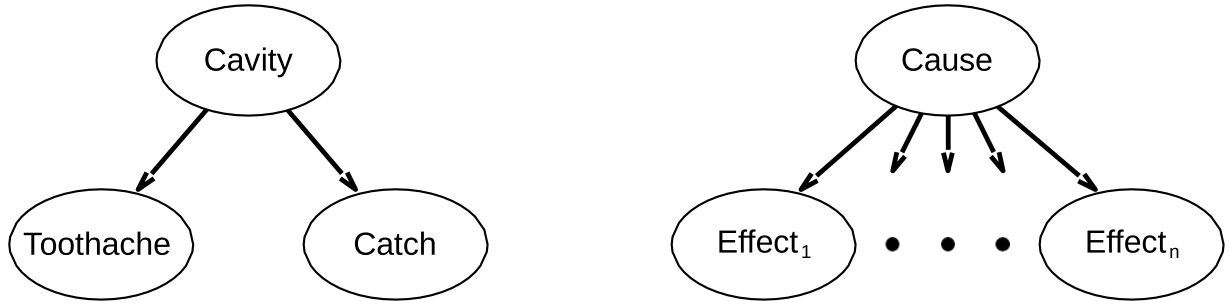
$$P(Cause|Effect) = \frac{P(Effect|Cause)P(Cause)}{P(Effect)}$$

贝叶斯规则和条件独立

$$\begin{aligned}
&P(Cavity \mid toothache \land catch) \\
&\quad = \alpha\ P(toothache \land catch \mid Cavity) P(Cavity) \\
&\quad = \alpha\ P(toothache \mid Cavity) P(catch \mid Cavity) P(Cavity)
\end{aligned}$$

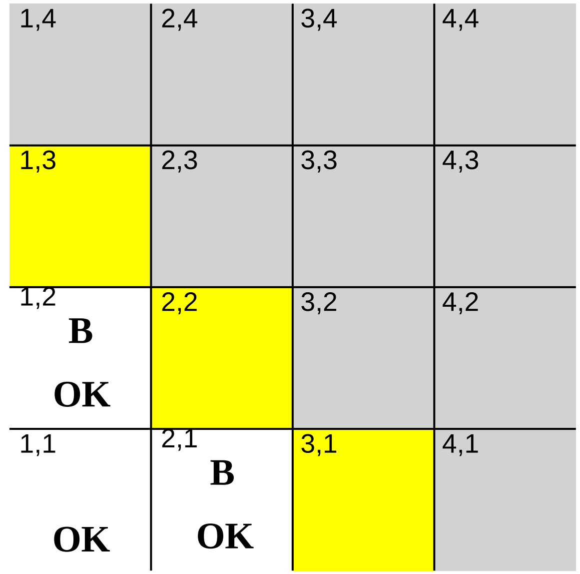
- 一个朴素贝叶斯模型的例子：

$$P(Cause, Effect_1, \ldots, Effect_n) = P(Cause) \prod_i P(Effect_i \mid Cause)$$



- 其中参数的总数与n成线性关系

再看Wumpus的世界



- $P_{ij} = true$ 当且仅当 $[i, j]$ 有一个陷阱
- $B_{ij} = true$ 当且仅当 $[i, j]$ 有微风
- 在概率模型中考察 $B_{1,1}$, $B_{1,2}$, $B_{2,1}$ 三项的情况

指定概率模型

- 定义完整的联合分布为： $\mathrm{P}(P_{1,1},\ldots,P_{4,4},B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1})$
- 应用乘积法则有：

$$\underbrace{\mathrm{P}(B_{1,1},B_{1,2},B_{2,1}\mid P_{1,1},\ldots,P_{4,4})}_{\text{第一项}}\underbrace{\mathrm{P}(P_{1,1},\ldots,P_{4,4})}_{\text{第二项}}$$

- 对于第一项，如果陷阱附近一定有微风就为1，否则为0
- 对于第二项，陷阱的分布是完全随机的，假设每个格子有陷阱的可能性是0.2，那么对于所有n个格子，有：

$$\mathrm{P}(P_{1,1},\ldots,P_{4,4})=\prod_{i,j=1,1}^{4,4}\mathrm{P}(P_{i,j})=0.2^{n}\times 0.8^{16-n}$$

观察和查询

- 根据已知的知识，定义

$$b = \neg b_{1,1} \wedge b_{1,2} \wedge b_{2,1}$$

$$known = \neg p_{1,1} \wedge \neg p_{1,2} \wedge \neg p_{2,1}$$

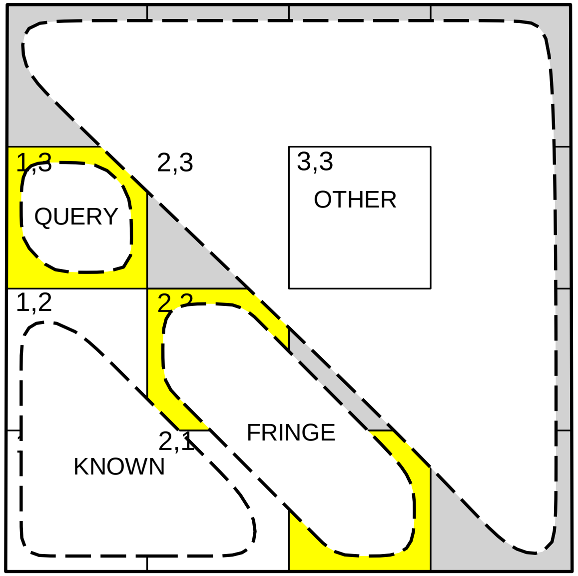
- 那么，为了求解$P_{1,3}$可以用概率公式： $\mathrm{P}(P_{1,3}|known, b)$
- 定义： $Unknown = P_{ij}$ 是除了$P_{1,3}$和$known$以外其它格子的取值
- 对于推理进行枚举，得到：

$$\mathrm{P}(P_{1,3}|known, b) = \alpha \Sigma_{unknown} \mathrm{P}(P_{1,3}, unknown, known, b)$$

- 随着方块的数量呈指数增长

使用条件独立

- 首先明确，我们观察到的结果仅仅和已知区域相邻的格子有关，除此之外的格子可以看做是隐藏区域



- 定义 $Unknown = Fringe \cup Other$
- 则有 $\mathrm{P}(b|P_{1,3}, Known, Unknown) = \mathrm{P}(b|P_{1,3}, Known, Fringe)$

使用条件独立

- 按照这种简化方式，对求解$P_{1,3}$进行简化

$$\mathbf{P}(P_{1,3}|known,b) = \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(P_{1,3},unknown,known,b)$$

$$= \alpha \sum_{unknown} \mathbf{P}(b|P_{1,3},known,unknown)\mathbf{P}(P_{1,3},known,unknown)$$

$$= \alpha \sum_{fringe}\sum_{other} \mathbf{P}(b|known,P_{1,3},fringe,other)\mathbf{P}(P_{1,3},known,fringe,other)$$

$$= \alpha \sum_{fringe}\sum_{other} \mathbf{P}(b|known,P_{1,3},fringe)\mathbf{P}(P_{1,3},known,fringe,other)$$

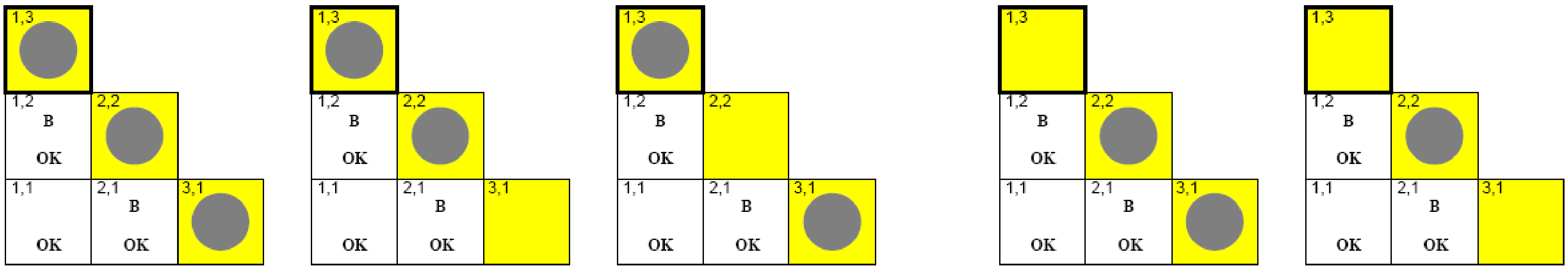
$$= \alpha \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known,P_{1,3},fringe) \sum_{other} \mathbf{P}(P_{1,3},known,fringe,other)$$

$$= \alpha \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known,P_{1,3},fringe) \sum_{other} \mathbf{P}(P_{1,3})P(known)P(fringe)P(other)$$

$$= \alpha P(known)\mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known,P_{1,3},fringe)P(fringe) \sum_{other} P(other)$$

$$\boxed{= \alpha' \mathbf{P}(P_{1,3}) \sum_{fringe} \mathbf{P}(b|known,P_{1,3},fringe)P(fringe)}$$

使用条件独立



0.2 x 0.2 = 0.04 | 0.2 x 0.8 = 0.16 | 0.8 x 0.2 = 0.16 | 0.2 x 0.2 = 0.04 | 0.2 x 0.8 = 0.16

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(P_{1,3} \mid known, b) &= \alpha' \langle 0.2(0.04 + 0.16 + 0.16),\ 0.8(0.04 + 0.16) \rangle \\
&\approx \langle 0.31, 0.69 \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{P}(P_{2,2} \mid known, b) \approx \langle 0.86, 0.14 \rangle
$$