电子科技大学概率论与数理统计MOOC

第 1 章

知识点名称：概率的公理化定义

主讲人：徐全智，龚丽莎

§1.5 概率的公理化定义

一、概率的客观性和唯一性

人们寻求建立一种数量指标—概率，用来刻画随机事件发生的可能性大小.

试验条件确定的前提下，随机事件发生的可能性大小是一个客观存在的量.

概率是随机事件发生可能性大小的客观度量！

概率具有客观性和唯一性！

一旦试验条件确定，一个随机事件发生的概率值不能因人因时而异，更不能因计算方法的不同而改变！！！

二、概率计算方法分析

怎样客观量度随机事件发生可能性大小？

问题1 频率是概率吗？

不是!

理论缺陷 频率$f_n(A)$有不可预言性，不是数值；

频率不符合概率的客观性和唯一性！

问题2 古典概率能广泛应用于各类随机试验吗？

不能!

古典概型试验 满足以下两个条件

(1) 有限性 仅有有限多个基本事件;

(2) 等可能性 每个基本事件发生的可能性相等.

古典概率

$$P(A)=\frac{A\text{所含基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

古典概率定义明显有局限性!

三、几何测度与几何概率

突破古典概率的局限性—有限性

对物体的量化表述，抽象出如线段的“长度”、平面图形的“面积”、立体的“体积”等数量，称为**几何测度**.

几何概率定义 设样本空间 Ω 可用欧氏空间的子集 S 表示，而且 S 及其全体子集 A 均可用几何测度 μ 度量，称度量值之比

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

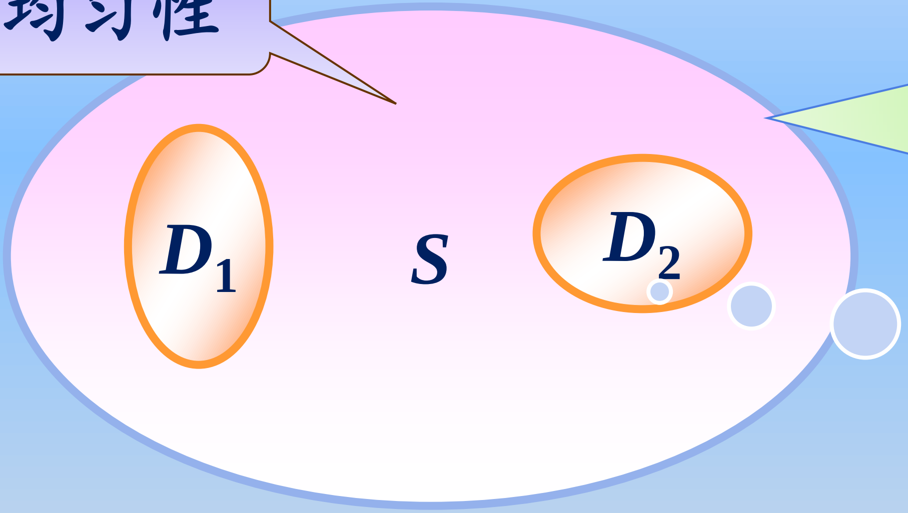
称为事件 A 发生的几何概率.

问题3 几何概率能广泛应用于各类随机试验吗？

不能！

均匀性

欧氏空间的子集S表示样本空间.



样本点落入子区域 D的概率只与 D的面积有关,与形状、位置等均无关,.

实质要求 样本点在样本空间分布具有均匀性！

几何概率定义也有明显的局限性！

四、概率的公理化抽象

没有严格的概率定义,严重阻碍概率论的进一步发展和应用!

追求概率的严格数学定义,具有客观性和唯一性的同时,还具有普适性及科学性!

可验证以上概率定义的**共同属性**:

(1) 对任意事件A，有$0 \le P(A) \le 1$;

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 若A_1，A_2，…，A_m互不相容，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

记线段为L, 其长度记为，有性质：

(1) 任何线段L的长度非负　$m(L)\geq 0$;

(2) 将线段L分割为有限段(或可列段)，则线段的总长为

$$m(L)=\sum_{k=1}^{\infty}m(L_k)$$

并在此基础上人们抽象建立起测度理论.

波莱尔重要思想：概率论与测度论有联系！

1933年, 科尔莫哥洛夫给出在他的《概率论基础》一书中首次给出概率的测度论式定义.

定义 设随机试验E的样本空间为Ω，若对于E的每一事件A都赋予一个实数$P(A)$，其对应规则满足以下三条

(1) **非负性** 对任意事件A，有$0 \le P(A) \le 1$；

(2) **规范性** $P(\Omega)=1$；

(3) **可列可加性** 对于互不相容事件列 A_1，A_2，…有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

称$P(A)$为事件A的**概率**, 亦称**概率测度**.

五、概率公理化定义的科学性

概率的公理化定义是科学的公理化结构：

(1) 无矛盾，即公理化结构中的三个条件不相互矛盾；

(2) 完备的，可由结构中三条用逻辑推理出概率的其它性质.

该定义具有高度的抽象性和严密的逻辑性！

注 规范性是抽象过程中的人为规定，合乎常识且反映了直观实际背景.

概率公理化定义的引进是科尔莫格洛夫为概率论公理化体系建立所做的奠基性工作.