第 1 章

知识点名称：频率和概率

主讲人：高晴

§1.2 频率和概率

问题1. 频率是否是概率？　问题2. 频率是什么变量？

一：概率

刻划随机事件发生的可能性大小的数量指标是一个客观存在的量.

例 → 概率的客观性试验

概率是刻划随机事件发生可能性大小的数量指标.

它不依主观变化而变化！

事件A的概率(Probability)记为$P(A)$　常规定 $0\le P(A)\le 1$

$$P(\Omega)=1,\quad P(\Phi)=0.$$

如何计算概率？怎样客观量度随机事件发生可能性大小？

二：频率

定义： 在相同条件下，进行了n次试验，事件A发生了m次，称比值

$$f_n(A)=\frac{m}{n}$$

为事件A发生的频率.

例如： 抛硬币试验 π的小数频率

频率从一定程度上反映了事件发生可能性的大小. 它随着试验的次数、试验者的变化会有所不同.

频率具有稳定性：在一定条件（意义）下，频率稳定于某个常数.

频率的不确定性：不会随试验次数的增大，"趋于"特定常数.

问题1. 频率是否是概率？

频率不是概率！但在某种意义下，频率稳定于概率.

问题2. 频率是什么变量？

$$f_n(A) = \frac{m}{n}$$

频率具有事前不可预言性

频率性质：

(1) 对任意事件A，有$0 \le f_n(A) \le 1$；

(2) $f_n(\Omega)=1$；

(3) 若A_1，A_2，…，A_m互不相容，则：

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} f_n(A_i).$$

三：古典概率

事件的可能性分析 → 赌马问题

定义： 设E是一个随机试验,若它满足以下两个条件：

(1)仅有**有限多个**基本事件；

(2)每个基本事件发生的**可能性相等**.

则称E是古典概型的试验. 例如： → 古典概型的判断

定义： 设试验E为古典概型试验，A_i，$i=1,2,\ldots,n$是基本事件,则由

$$P(A)=\frac{A\text{所含的基本事件个数}}{\text{基本事件总数}}=\frac{A\text{所含样本点的数目}}{\text{样本空间的样本点总数}}$$

所确定的概率称为事件A的古典概率.

生活中的古典概率问题

古典概率性质：

(1) 对任意事件A，有$0\le P(A)\le 1$；

(2) $P(\Omega)=1$；

(3) 若A_1，A_2，…，A_m互不相容，则：

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} P(A_i).$$

用古典概率能解决所有的概率问题吗？

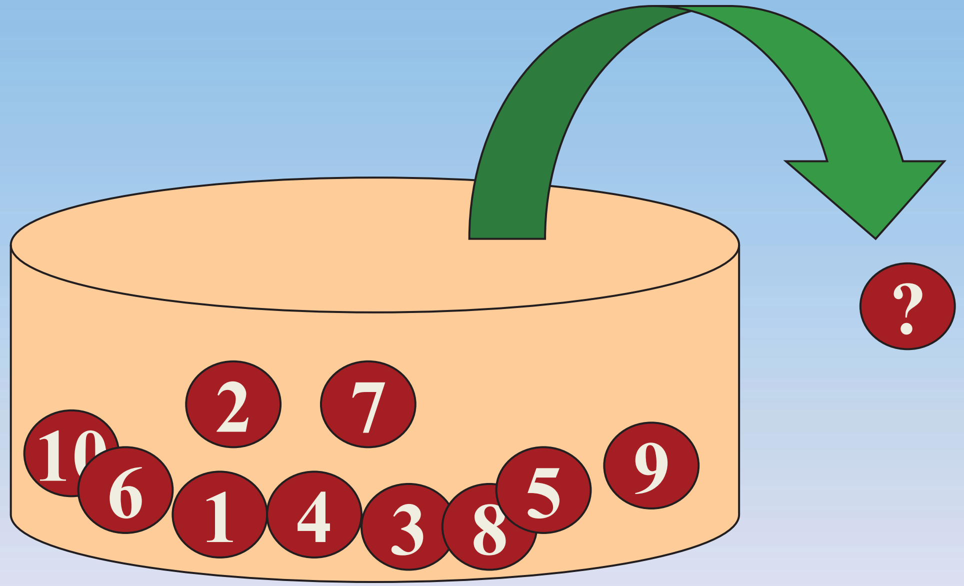
例1 抛一颗均匀的骰子，观察其出现的点数情况.

我们通过实践与分析可得：

出现的点数为1,2,3,4,5,6的可能性都是相等的.

例2 从 10个标有号码 1, 2,…, 10 的小球中任取一个, 记录所得小球的号码.

我们可得：摸出任一号码的小球的可能性是相同的，这是客观存在的事实.



例3 抛一枚均匀硬币，观察其出现正面H和反面T的情况.

我们通过实践与分析可得：硬币出现正面的可能性等于它出现反面的可能性.

历史上几位著名科学家亲自做了实验，并记录下来：

实验者	抛掷次数	出现正面次数	m/n
德.摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维尼	30000	14994	0.4998

例4 圆周率π的计算.

刘徽(公元263年，割圆术) $\pi=3.1416$.
祖冲之(429~500年) $3.1415926 < \pi < 3.1415927$.

1872年，威廉.向克斯用20年时间将π算到小数后707位.

法格逊怀疑向克斯的结果，用了一年的时间，于1945年发现向克斯π只有前527位是正确的.

法格逊猜想：在π的数值中各数码0,1,…9出现的可能性大小应当相等.

1973年，法国学者让·盖尤对π的前100万位小数中各数码的频率统计结果表明，尽管各数字出现也有起伏，但频率都稳定于1/10.

向克斯π的前608位的各数码出现频率

数码	出现次数	出现频率
0	60	0.099
1	62	0.102
2	67	0.110
3	68	0.112
4	64	0.105
5	56	0.092
6	62	0.102
7	44	0.072
8	58	0.095
9	57	0.110

π的前一百万位中各数码出现的频率

数码	出现次数	出现频率
0	99959	0.1000
1	99758	0.0998
2	100026	0.1000
3	100229	0.1002
4	100230	0.1002
5	100359	0.1003
6	99548	0.0995
7	99800	0.0998
8	99985	0.1000
9	100106	0.1001

例5 编号为1, 2, 3的3匹马进行赛马比赛，1号马赢的可能性有多大?

分析 将比赛的可能结果逐一列出：

(1,2,3)、 (1,3,2)、 (2,1,3)、

(2,3,1)、 (3,2,1)、 (3,1,2)

若不知道各匹马的实际状况，只能假定它们获胜机会均等，有

$$P(A_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

例6 抛一颗均匀的骰子，观察其出现的点数情况.

因为该试验的基本事件有6个：

$\{\omega_i\}=\{$出现的点数为$i\}$ $i=1,2,..,6$

而且基本事件$\{\omega_1\}$、$\{\omega_2\},\ldots\{\omega_6\}$发生的可能性相等.

这是一个古典概型的随机试验.

思考：

掷两颗骰子，得到总点数. 掷出的总点数2～12，得到这11个数的可能性是否相等？

例7 判断以下试验是否为古典概型试验？

E_1 检查N件产品中的次品个数.

基本事件 $A_i=\{$次品个数为$i\}$，$i=0,1,2,\ldots,N$.

出现的可能性不均等.

E_2 仪器上某种型号的电子元件使用时间已达30小时，该元件还能使用多少小时？

样本空间有无数多个样本点.

故 E_1，E_2都不是古典概型试验.

例10 某班级有n个人(n≤365)，问至少有两个人的生日在同一天的概率有多大？ ——典型鸽笼问题

解：设一年365天，设365=N，基本事件总数： N^n

令A={n个人中至少两个人生日相同}，则：

$\overline{A}$ = {n个人生日全不相同}

$$P(\overline{A}) = \frac{C_N^n \cdot n!}{N^n} = \frac{N!}{N^n (N-n)!} \qquad (N = 365)$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{N!}{N^n (N-n)!}$$

n	10	15	25	30	40	50	55
P	0.12	0.25	0.57	0.71	0.89	0.97	0.99

思考：

设有10双不同的袜子，丢了6只，求下列事件的概率：

(1) A={丢了3双}；(2) B={丢了单6只}

注意样本空间的划分：如何确定基本事件