algorithm

2.时间复杂度与伪码

2.1 问题及实例

- 问题
  - 需要回答的一般性提问，通常含若干参数
- 问题描述
  - 定义问题参数(集合,变量,函数,序列等)
  - 说明每个参数的取值范围及参数间的关系
  - 定义问题的解
  - 说明解满足的条件(优化目标或约束条件)
- 问题实例
  - 参数的一组赋值可得到问题的一个实例

算法

- 算法
  - 有限条指令的序列
  - 这个指令序列确定了解决某个问题的一系列运算或操作

- 算法 A 解问题 P
  - 把问题 P 的任何实例作为算法 A 的输入
  - 每步计算是确定性的
  - A 能够在有限步停机
  - 输出该实例的正确的解

基本运算与输入规模

- 算法时间复杂度: 针对指定基本运算,计数算法所做运算次数
- 基本运算: 比较, 加法, 乘法, 置指针, 交换…
- 输入规模：输入串编码长度，通常用下述参数度量：
  - 数组元素多少
  - 调度问题的任务个数
  - 图的顶点数与边数等

- 算法基本运算次数可表为输入规模的函数
- 给定问题和基本运算就决定了一个算法类

输入规模

- 排序：数组中元素个数 n
- 检索：被检索数组的元素个数 n
- 整数乘法：两个整数的位数 m, n
- 矩阵相乘：矩阵的行列数 i, j, k
- 图的遍历：图的顶点数 n, 边数 m

基本运算

- 排序: 元素之间的比较
- 检索: 被检索元素 x 与数组元素的比较
- 整数乘法:
  - 每位数字相乘(位乘) 1 次
  - m 位和 n 位整数相乘要做 mn 次位乘
- 矩阵相乘:
  - 每对元素乘 1 次
  - $i\times j$矩阵与 $j\times k$ 矩阵相乘要做 ijk 次乘法
- 图的遍历: 置指针

算法的两种时间复杂度

- 对于相同输入规模的不同实例，算法的基本运算次数也不一样，可定义两种时间复杂度

- 最坏情况下的时间复杂度 W(n)
  - 算法求解输入规模为 n 的实例所需要的最长时间

- 平均情况下的时间复杂度 A(n)
  - 在给定同样规模为 n 的输入实例的概率分布下，算法求解这些实例所需要的平均时间

A(n) 计算公式

- 平均情况下的时间复杂度 A(n)
- 设 S 是规模为 n 的实例集
- 实例 I∈S 的概率是 P_i
- 算法对实例 I 执行的基本运算次数是 t_i

$$A(n) = \sum_{I \in S} P_I t_I$$

- 在某些情况下可以假定每个输入实例概率相等

例子：检索

- 检索问题
- 输入：
  - 非降顺序排列的数组 L
  - 元素数 n
  - 数 x
- 输出：j
  - 若 x 在 L 中，j 是 x 首次出现的下标
  - 否则 j = 0
- 基本运算：
  - x 与 L 中元素的比较

顺序检索算法

- $j=1$, 将 x 与 $L[j]$ 比较:
  - 如果 $x=L[j]$，则算法停止，输出 j;
  - 如果不等，则把 j 加1，继续 x 与 $L[j]$ 的比较，如果 $j>n$，则停机并输出0

- 实例

1	2	3	4	5

- $x = 4$，需要比较　次
- $x = 2.5$，需要比较　次

最坏情况的时间估计

- 不同的输入有 个，分别对应：

$$x = L[1],\ x = L[2],\ \ldots,\ x = L[n]$$

$$x<L[1],\ L[1]<x<L[2],\ L[2]<x<L[3],\ \ldots,\ L[n]<x$$

- 最坏情况下时间：
  - $W(n) = n$
- 最坏的输入：
  - x 不在 L中或 $x = L[n]$要做 n 次比较

平均情况的时间估计

- 输入实例的概率分布：
- 假设 x 在 L 中概率是 p，且每个位置概率相等

$$A(n)=\sum_{i=1}^{n} i\frac{p}{n}+(1-p)n$$

$$=\frac{p(n+1)}{2}+(1-p)n$$

当 p=1/2时，

$$A(n)=\frac{n+1}{4}+\frac{n}{2}\approx\frac{3n}{4}$$

改进顺序检索算法

- j=1, 将 x与L[j]比较：
  - 如果 x=L[j]，则算法停止，输出 j;
  - 如果 x>L[j]，则把 j 加1，继续 x 与 L[j] 的比较;
  - 如果 x<L[j]，则停机并输出0;
  - 如果 j >n，则停机并输出 0.

- 实例

1	2	3	4	5

- x = 4，需要比较　　次
- x = 2.5，需要比较　　次

- 前提：数组需要是排好序的

时间估计

- 最坏情况下：W(n) = n
- 平均情况下：
  - 输入实例的概率分布：假设 x 在 L 中每个 位置与空隙的概率都相等


改进检索算法平均时间复杂度是多少?

- 小结：
  - 算法最坏和平均情况下的时间复杂度定义
  - 如何计算上述时间复杂度

2.2 算法的伪码描述

- 赋值语句：←
- 分支语句：if …then … [else…]
- 循环语句：while，for，repeat until
- 转向语句：goto
- 输出语句：return
- 调用：直接写过程的名字
- 注释：//…

例：求最大公约数

- 算法 Euclid (m, n)
- 输入：非负整数 m, n,其中m与n不全为0
- 输出：m 与 n 的最大公约数

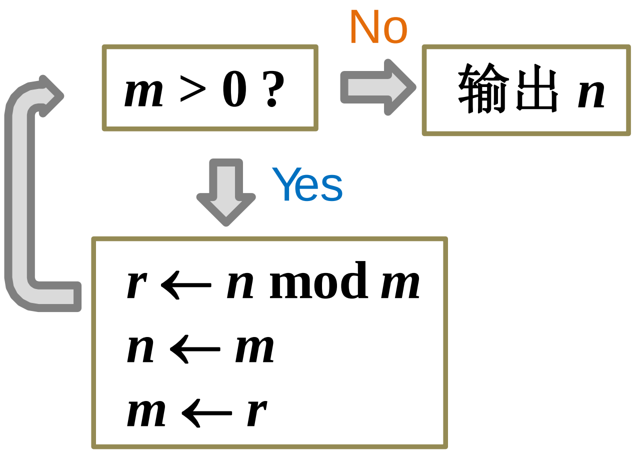
1. **while** $m > 0$ **do**
2. $\quad r \leftarrow n \bmod m$
3. $\quad n \leftarrow m$
4. $\quad m \leftarrow r$
5. **return** n

运行实例：n=36，m=15

while	n	m	r
第1次	36	15	6
第2次	15	6	3
第3次	6	3	0
	3	0	0

⇩

输出3



例：改进的顺序检索

- 算法 Search (L, x)
- 输入：数组 $L[1..n]$, 元素从小到大排列, 数 x.
- 输出:
  - 若 x 在 L 中，输出 x 的位置下标 j
  - 否则输出0

1. $j \leftarrow 1$
2. **while** $j \leq n$ **and** $x > L[j]$ **do** $j \leftarrow j+1$
3. **if** $x < L[j]$ **or** $j > n$ **then** $j \leftarrow 0$
4. **return** j

例：插入排序

- 算法 Insert Sort (A, n)
- 输入：n个数的数组A
- 输出：按照递增顺序排好序的数组A

1. **for** $j \leftarrow 2$ **to** n **do**
2. $x \leftarrow A[j]$
3. $i \leftarrow j-1$ //3-7 行把 $A[j]$ 插入$A[1..j-1]$
4. **while** $i > 0$ **and** $x < A[i]$ **do**
5. $\quad A[i+1] \leftarrow A[i]$
6. $\quad i \leftarrow i-1$
7. $A[i+1] \leftarrow x$

运行实例

2	4	1	5	3

$j = 3,\ \ x = A[3] = 1$

$i = 2,\ \ A[2] = 4$

$i > 0,\ \ x < A[2]$ √

2	4	4	5	3

$A[3]=4,\ i = 1,\ x=1$

$i > 0,\ \ x < A[1]$ √

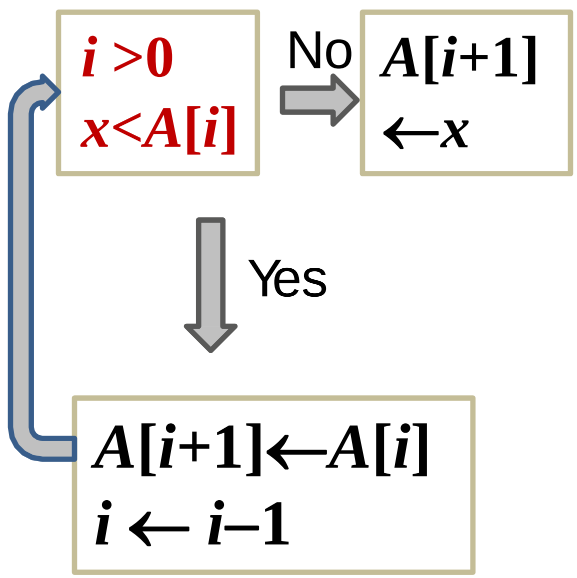
2	2	4	5	3

$A[2]=2,\ i = 0,\ x=1$

$i > 0$ ×

1	2	4	5	3

4. while $i>0$ and $x<A[i]$ do
5. $\qquad A[i+1] \leftarrow A[i]$
6. $\qquad i \leftarrow i-1$
7. $A[i+1] \leftarrow x$



例：二分归并排序

- MergeSort (A, p, r)
- 输入：数组$A[p..r]$
- 输出：按递增顺序排序的数组A

1. **if** $p < r$
2. **then** $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$
3. **MergeSort** (A, p, q)
4. **MergeSort** (A, $q+1$, r)
5. **Merge** (A, p, q, r)

- MergeSort有递归调用,也调用Merge过程

例：算法A的伪码

- 算法 A
- 输入：实数的数组 $P[0..n]$，实数 x
- 输出：y

1. $y \leftarrow P[0]$； $power \leftarrow 1$
2. for $i \leftarrow 1$ to n do
3. $\quad power \leftarrow power * x$
4. $\quad y \leftarrow y + P[i] * power$
5. return y

例：算法A的伪码

对 $i = 1, 2, \ldots, n$ ⟹

$power \leftarrow power * x$
$y \leftarrow y + P[i] * power$

	i	$power$	y
初值		1	$P[0]$
循环	1	x	$P[0] + P[1]*x$
	2	x^2	$P[0] + P[1]*x + P[2]*x^2$
	3	x^3	$P[0] + P[1]*x + P[2]*x^2 + P[3]*x^3$
			…

输入 $P[0..n]$是 n 次多项式 $P(x)$的系数
算法 A 计算该多项式在 x 的值

小结

- 用伪码表示算法
- 伪码不是程序代码，只是给出算法的主要步骤
- 伪码中有哪些关键字?
- 伪码中允许过程调用

2.3 函数渐进界

- 大O符号
- 定义：设 f 和 g 是定义域为自然数集N上的函数
- 若存在正数 c 和 n_0，使得对一切 $n \geq n_0$ 有
  - $0 \leq f(n) \leq cg(n)$
- 成立，则称 f(n) 的渐近的上界是 g(n)，记作
  - $f(n) = O(g(n))$

例子

- 设 $f(n) = n^2 + n$，则
  - $f(n)=O(n^2)$，取c = 2，n_0 =1 即可
  - $f(n)=O(n^3)$，取c = 1，n_0 =2 即可

1. $f(n) = O(g(n))$，$f(n)$ 的阶不高于 $g(n)$ 的阶
2. 可能存在多个正数c，只要指出一个即可
3. 对前面有限个值可以不满足不等式
4. 常函数可以写作$O(1)$

大Ω符号

- 定义：设 f 和 g 是定义域为自然数集N上的函数
- 若存在正数 c 和 n_0，使得对一切 $n \geq n_0$，有

$$0 \leq cg(n) \leq f(n)$$

- 成立，则称 $f(n)$ 的渐近的下界是 $g(n)$
- 记作

$$f(n) = \Omega(g(n))$$

例子

- 设 $f(n) = n^2 + n$，则

  $f(n) = \Omega(n^2)$，取 $c = 1, n_0 = 1$即可

  $f(n) = \Omega(100n)$, 取 $c=1/100$，$n_0 = 1$即可

1. $f(n)=\Omega(g(n))$，$f(n)$ 的阶不低于 $g(n)$ 的阶
2. 可能存在多个正数c，指出一个即可
3. 对前面有限个 n 值可以不满足上述不等式

小o符号

- 定义:设 f 和 g是定义域为自然数集 N 上的函数
- 若对于任意正数 c 都存在 n_0，使得对一切 $n \geq n_0$ 有

$$0 \leq f(n) < c\, g(n)$$

- 成立, 则记作

$$f(n) = o(g(n))$$

例子

- 例子：$f(n)=n^2+n$，则

$$f(n)=o(n^3)$$

- $c \geq 1$显然成立，因为$n^2+n<cn^3$（$n_0=2$）
- 任给$1>c>0$, 取 $n_0 > \lceil 2/c \rceil$即可，因为

$$cn \geq cn_0 > 2 \qquad （当n \geq n_0）$$

$$n^2+n < 2n^2 < cn^3$$

1. $f(n) = o(g(n))$，$f(n)$的阶低于$g(n)$的阶
2. 对不同正数c, n_0不一样，c越小n_0越大
3. 对前面有限个 n 值可以不满足不等式

小ω符号

- 定义：设 f 和 g 是定义域为自然数集 N 上的函数
- 若对于任意正数 c 都存在 n_0，使得对一切 $n \geq n_0$ ，有
  - $0 \leq cg(n) < f(n)$
- 成立, 则记作
  - $f(n) = \omega(g(n))$

例子

- 设 $f(n) = n^2 + n$，则

$$f(n) = \omega(n),$$

- 不能写 $f(n) = \omega(n^2)$，因为取 $c = 2$，不存在 n_0 使得对一切 $n \geq n_0$有下式成立

$$c\, n^2 = 2n^2 < n^2 + n$$

1. $f(n)=\omega(g(n))$, $f(n)$的阶高于$g(n)$ 的阶
2. 对不同的正数c, n_0不等，c 越大n_0 越大
3. 对前面有限个 n 值可以 不满足不等式

Θ 符号

- 若 $f(n) = O(g(n))$ 且 $f(n) = \Omega(g(n))$，
- 则记作

$$f(n) = \Theta(g(n))$$

- 例子：$f(n) = n^2 + n$, $g(n) = 100n^2$，那么有

$$f(n)=\Theta(g(n))$$

1. $f(n)$ 的阶与 $g(n)$ 的阶相等
2. 对前面有限个 n 值可以不满足条件

例子：素数测试

- 算法PrimalityTest(n)
- 输入：n, 大于2的奇整数
- 输出：true 或者 false

1. $s \leftarrow \lfloor n^{1/2} \rfloor$
2. for $j \leftarrow 2$ to s
3. if j 整除 n
4. then return false
5. return true

思考：

若 $n^{1/2}$ 可在 $O(1)$ 计算，基本运算是整除，以下表示是否正确？

$W(n)=O(n^{1/2})$

$W(n)=\theta(n^{1/2})$

小结

- 五种表示函数的阶的符号
  - $O, \Omega, o, \omega, \Theta$

- 如何用定义证明函数的阶?

2.4 有关函数渐进界的定理

- 定理1：设 f 和 g 是定义域为自然数集合的函数
- (1) 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$ 存在, 并且等于某个常数c>0, 那么

$$f(n) = \theta(g(n))$$

- (2) 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = 0$，那么

$$f(n) = o(g(n))$$

- (3) 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)} = +\infty$，那么

$$f(n) = \omega(g(n))$$

定理1证明

根据极限定义，对于给定正数 ε 存在某个 n_0，只要 $n \geq n_0$，就有

$$|f(n)/g(n)-c| < \varepsilon$$

$$c-\varepsilon < f(n)/g(n) < c+\varepsilon$$

取 $\varepsilon = c/2$,

$$c/2 < f(n)/g(n) < 3c/2 < 2c$$

对所有 $n \geq n_0$，$f(n) \leq 2cg(n)$, 于是 $f(n)=O(g(n))$；

对所有 $n \geq n_0$，$f(n) \geq (c/2)g(n)$,于是 $f(n)=\Omega(g(n))$.

从而 $f(n) = \Theta(g(n))$.

例：估计函数的阶

例1 设$f(n)=\frac{1}{2}n^2-3n$，证明 $f(n) = \Theta(n^2)$.

证 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n^2-3n}{n^2}=\frac{1}{2}$$

根据定理1，有 $f(n) = \Theta(n^2)$

多项式函数的阶低于指数函数的阶

$$n^d = o(r^n)，r > 1，d > 0$$

- 证：不妨设d为正整数，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^d}{r^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{dn^{d-1}}{r^n \ln r} = \lim_{n\to\infty}\frac{d(d-1)n^{d-2}}{r^n(\ln r)^2}$$

$$= \ldots = \lim_{n\to\infty}\frac{d!}{r^n(\ln r)^d} = 0$$

对数函数的阶低于幂函数的阶

$$\ln n = o\left(n^{d}\right),\ d > 0$$

- 证:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{d}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{dn^{d-1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{dn^{d}} = 0$$

定理 2

- 定理：设函数f, g, h的定义域为自然数集合，
  - (1) 如果 $f = O(g)$ 且 $g=O(h)$，那么 $f = O(h)$
  - (2) 如果 $f = \Omega(g)$ 且 $g=\Omega(h)$，那么 $f = \Omega(h)$
  - (3) 如果 $f = \Theta(g)$ 和 $g=\Theta(h)$，那么 $f = \Theta(h)$

- 函数的阶之间的关系具有传递性

定理2例子

- 按照阶从高到低排序以下函数：

  $f(n)=(n^2+n)/2$， $g(n)=10n$ $h(n)=1.5^n$ ， $t(n)=n^{1/2}$

  $h(n) = \omega(f(n))$,

  $f(n) = \omega(g(n))$,

  $g(n) = \omega(t(n))$,

- 排序 $h(n), f(n), g(n), t(n)$

定理3

- 定理：假设函数f和g的定义域为自然数集，若对某个其它函数h, 有$f=O(h)$和$g=O(h)$,
- 那么 $f+g=O(h)$

- 该性质可以推广到有限个函数
- 算法由有限步骤构成，若每一步的时间复杂度函数的上界都是 $h(n)$，那么该算法的时间复杂度函数可以写作 $O(h(n))$

2.5 几类重要的函数

- 基本函数类

- 阶的高低
- 至少指数级： $2^n, 3^n, n!, \ldots$
- 多项式级： $n, n^2, n\log n, n^{1/2}, \ldots$
- 对数多项式级： $\log n, \log^2 n, \log\log n, \ldots$

对数函数

- 符号:
  - $\log n = \log_2 n$
  - $\log^k n = (\log n)^k$
  - $\log\log n = \log(\log n)$

- 性质:

(1) $\log_2 n = \Theta(\log_l n)$

(2) $\log_b n = o(n^{\alpha})$ $\quad \alpha > 0$

$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$

(3)

性质(1)的证明

$$\log_k n = \frac{\log_l n}{\log_l k} \quad \log_l k\text{为常数}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_k n}{\log_l n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log_l n}{\log_l k \cdot \log_l n} = \frac{1}{\log_l k}$$

根据定理， $\log_k n = \Theta(\log_l n)$

性质(2)(3)的说明

$$\log_b n = \Theta(\ln n)$$

$$\ln n = o(n^{\alpha}) \quad \Rightarrow \quad \log_b n = o(n^{\alpha}) \quad \alpha > 0$$

$$a^{\log_b n} = n^{\log_b a}$$

$$\Updownarrow$$

$$\log_b n \log_b a = \log_b a \log_b n$$

指数函数与阶乘

Stirling公式 $$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\Theta\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$n! = o(n^n)$$

$$n! = \omega(2^n)$$

$$\log(n!) = \Theta(n\log n)$$

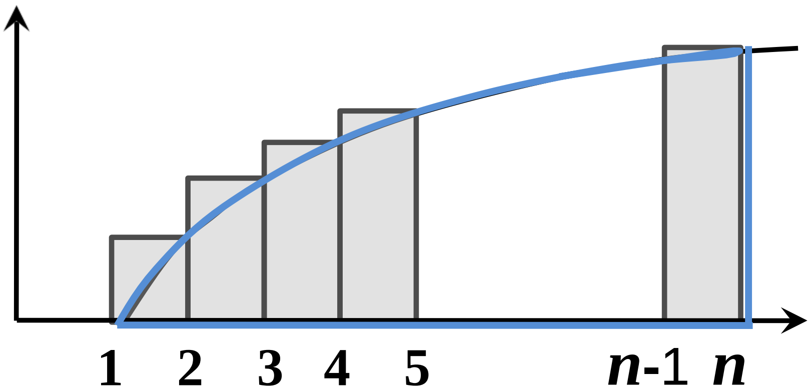
应用：估计搜索空间大小

$$C_{m+n-1}^{m}=\frac{(m+n-1)!}{m!(n-1)!}$$

$$=\frac{\sqrt{2\pi(m+n-1)}(m+n-1)^{m+n-1}(1+\Theta(\frac{1}{m+n-1}))}{\sqrt{2\pi m}m^{m}(1+\Theta(\frac{1}{m}))\sqrt{2\pi(n-1)}(n-1)^{n-1}(1+\Theta(\frac{1}{n-1}))}$$

$$=\Theta((1+\varepsilon)^{m+n-1})$$

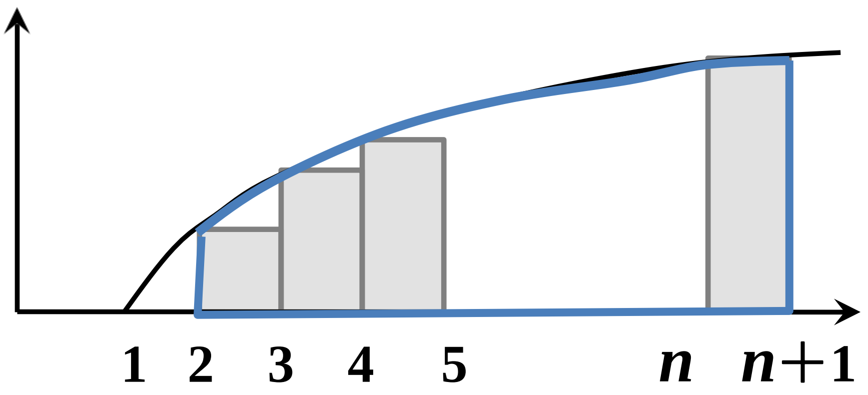
$\log(n!) = \Omega(n\log n)$的证明



$$\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k \geq \int_{1}^{n} \log x dx$$

$$= \log e(n\ln n - n + 1) = \Omega(n \log n)$$

$\log(n!) = O(n\log n)$的证明



$$\log(n!) = \sum_{k=1}^{n} \log k \le \int_{2}^{n+1} \log x dx = O(n \log n)$$

取整函数

- 取整函数的定义
  - $\lfloor x \rfloor$：表示小于等于 x 的最大的整数
  - $\lceil x \rceil$：表示大于等于 x 的最小的整数

- 实例
  - $\lfloor 2.6 \rfloor = 2$
  - $\lceil 2.6 \rceil = 3$
  - $\lfloor 2 \rfloor = \lceil 2 \rceil = 2$

取整函数的性质

(1) $x-1<\lfloor x\rfloor \le x \le \lceil x\rceil < x+1$

(2) $\lfloor x+n\rfloor = \lfloor x\rfloor + n$, $\lceil x+n\rceil = \lceil x\rceil + n$, n为整数

(3) $$\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = n$$

(4) $$\left\lceil \frac{\left\lceil \frac{n}{a} \right\rceil}{b} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{ab} \right\rceil, \quad \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{n}{a} \right\rfloor}{b} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{ab} \right\rfloor$$

证明(1)

如果x是整数n，根据定义

$$\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = n,$$

$$x-1 < \lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil < x+1$$

如果 $n < x < n+1$，n为整数，那么

$$\lfloor x \rfloor = n,\ \lceil x \rceil = n+1,$$

从而有

$$x-1 < n = \lfloor x \rfloor,\ n < x < n+1 = \lceil x \rceil$$

$$\Rightarrow x-1 < n = \lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil = n+1 < x+1$$

例：按照阶排序

$$\log(n!),\quad \log^2 n,\quad 1,\ n!,\ n2^n,\quad n^{1/\log n},$$

$$(3/2)^n,\quad \sqrt{\log n},\quad (\log n)^{\log n},\ 2^{2^n},$$

$$n^{\log\log n},\quad n^3,\ \log\log n,\quad n\log n,\quad n,$$

$$2^{\log n},\quad \log n$$

排序结果

2^{2^n}, $n!$, $n2^n$, $(3/2)^n$, $(\log n)^{\log n} = n^{\log\log n}$,

n^3, $\log(n!) = \Theta(n\log n)$, $n = 2^{\log n}$,

$\log^2 n$, $\log n$, $\sqrt{\log n}$, $\log\log n$,

$n^{1/\log n} = 1$

作业

- 1、请分析并写出插入排序、冒泡排序、快速排序在最坏情况和平均情况下的时间复杂度
- 2、请用伪码表示冒泡排序

回顾：排序算法效率

算法	最坏情况下	平均情况下
插入排序	$O(n^2)$	$O(n^2)$
冒泡排序	$O(n^2)$	$O(n^2)$
快速排序	$O(n^2)$	$O(n\log n)$
堆排序	$O(n\log n)$	$O(n\log n)$
二分归并排序	$O(n\log n)$	$O(n\log n)$

- 2.1　算法的时间复杂度
  - 2.1.1 算法基本运算与输入规模
  - 2.1.2 算法的两种时间复杂度
- 2.2　算法的伪码表示
  - 2.2.1 数据集的线性可分性
  - 2.2.2 求最大公约数
  - 2.2.3 插入排序
- 2.3　函数的渐进的界
  - 2.3.1 大O和小o符号
  - 2.3.2 大Ω和小ω符号
  - 2.3.3 θ符号
- 2.4　有关函数渐近的界的定理
  - 2.4.1　定理1
  - 2.4.2　定理2
  - 2.4.3　定理3
- 2.5　几类重要的函数
  - 2.5.1　基本函数
  - 2.5.2　对数函数
  - 2.5.3　指数函数
  - 2.5.4　取整函数