algorithm

4.a.分治策略

本节内容

- 4.1 分治策略的设计思想
- 4.2 分治策略的一般描述和分析方法
- 4.3 芯片测试
- 4.4 快速排序
- 4.5 幂乘算法及应用

4.1 分治策略的设计思想

- 分治策略（Divide and Conquer）
  - 将原始问题划分或者归结为规模较小的子问题
  - 递归或迭代求解每个子问题
  - 将子问题的解综合得到原问题的解
- 注意:
  - 将子问题与原始问题性质完全一样
  - 子问题之间可彼此独立地求解
  - 递归停止时子问题可直接求解

二分检索

- 算法 Binary Search (T, l, r, x)
- 输入：数组 T，下标从 l 到 r；数 x
- 输出：j // 若x在T 中, j 为下标; 否则为 0

1. $l \leftarrow 1$; $r \leftarrow n$
2. while $l \le r$ do
3. $\quad m \leftarrow \lfloor (l+r)/2 \rfloor$
4. $\quad$ if $T[m]=x$ then return m // x是中位数
5. $\quad$ else if $T[m]>x$
6. $\quad\quad$ then $r \leftarrow m-1$
7. $\quad$ else $l \leftarrow m+1$
8. return 0

二分检索算法设计思想

- 通过 x 与中位数的比较，将原问题归结为规模减半的子问题，如果 x 小于中位数，则子问题由小于 x 的数构成，否则子问题由大于 x 的数构成
- 对子问题进行二分检索
- 当子问题规模为 1 时，直接比较 x与$T[m]$，若相等则返回 m，否则返回 0

二分检索时间复杂度分析

- 二分检索问题最坏情况下时间复杂度
  - $W(n) = W(\lfloor n/2 \rfloor)+1$
  - $W(1) = 1$

- 可以解出
  - $W(n)=\lfloor \log n \rfloor + 1$

二分归并排序

- 算法 Merge Sort (A, p, r)
- 输入：数组 $A[p..r]$
- 输出：元素按从小到大排序的数组 A

1. if $p < r$
2. then $q \leftarrow \lfloor (p+r)/2 \rfloor$ 对半划分
3. Merge Sort (A, p, q) 子问题1
4. Merge Sort $(A, q+1, r)$ 子问题 2
5. Merge (A, p, q, r) 综合解

二分归并排序设计思想

- 划分将原问题归结为规模为 n/2 的 2 个子问题
- 继续划分，将原问题归结为规模为 n/4 的 4 个子问题.
- 继续…，当子问题规模为1 时，划分结束.
- 从规模 1到 n/2，陆续归并被排好序的两个子数组.
- 每归并一次，数组规模扩大一倍，直到原始数组.

二分归并排序时间复杂度分析

- 假设n为2的幂，二分归并排序最坏情况下时间复杂度

$$W(n) = 2W(n/2) + n-1 \quad W(1) = 0$$

- 可以解出

$$W(n) = n\log n - n + 1$$

Hanoi塔的递归算法

- 算法 Hanoi (A, C, n) // n个盘子A到C

1. if n=1 then move (A, C) //1个盘子A到C
2. else Hanoi (A, B, n–1)
3. move (A, C)
4. Hanoi (B, C, n–1)

- 设 n个盘子的移动次数为
  - $T(n)$
  - $T(n) = 2\,T(n-1) + 1$,
  - $T(1) = 1$,
  - $T(n)=2^n-1$

算法设计思想

- 将原问题归结为规模为 n-1 的2个子问题.
- 继续归约，将原问题归结为规模为 n-2 的 4 个子问题.
- 继续…，当子问题规模为1 时，归约过程截止.
- 从规模 1到 n-1，陆续组合两个子问题的解.
- 直到规模为n.

4.2 分治算法的一般描述和分析方法

- 分治算法 Divide-and-Conquer(P)

1. if $|P| \le c$ then $S(P)$
2. divide P into $P_1, P_2, \ldots, P_k$ 划分
3. for $i \leftarrow 1$ to k
4. $y_i \leftarrow$ Divide-and-Conquer(P_i) 求解子问题
5. Return Merge ($y_1, y_2, \ldots, y_k$) 综合解

设计要点

- 原问题可以划分或者归约为规模 较小的子问题
  - 子问题与原问题具有相同的性质
  - 子问题的求解彼此独立
  - 划分时子问题的规模尽可能均衡
- 子问题规模足够小时可直接求解
- 子问题的解综合得到原问题的解
- 算法实现：递归或迭代

分治算法时间分析

- 时间复杂度函数的递推方程

$$W(n)=W(|P_1|)+W(|P_2|)+\ldots+W(|P_k|)+f(n)$$

$$W(c)=C$$

- $P_1, P_2, \ldots, P_k$ 为划分后产生的子问题
- $f(n)$为划分子问题以及将子问题的解
- 综合得到原问题解的总工作量

两类常见的递推方程

$$f(n)=\sum_{i=1} a_i f(n-i)+g(n)$$

$$f(n)=af(\frac{n}{b})+d(n)$$

- 例子:
- Hanoi塔， $W(n)=2W(n-1)+1$
- 二分检索，$W(n)=W(n/2)+1$
- 归并排序，$W(n)=2W(n/2)+n-1$

递推方程的求解

方程1 $$f(n)=\sum_{i=1}^{k} a_i f(n-i)+g(n)$$

方程2 $$f(n)=af(\frac{n}{b})+d(n)$$

求解方法

方程1：迭代法、递归树

方程2：迭代法、换元法、递归树、主定理

方程2的解

- $T(n) = aT(n/b) + d(n)$

$d(n)$为常数

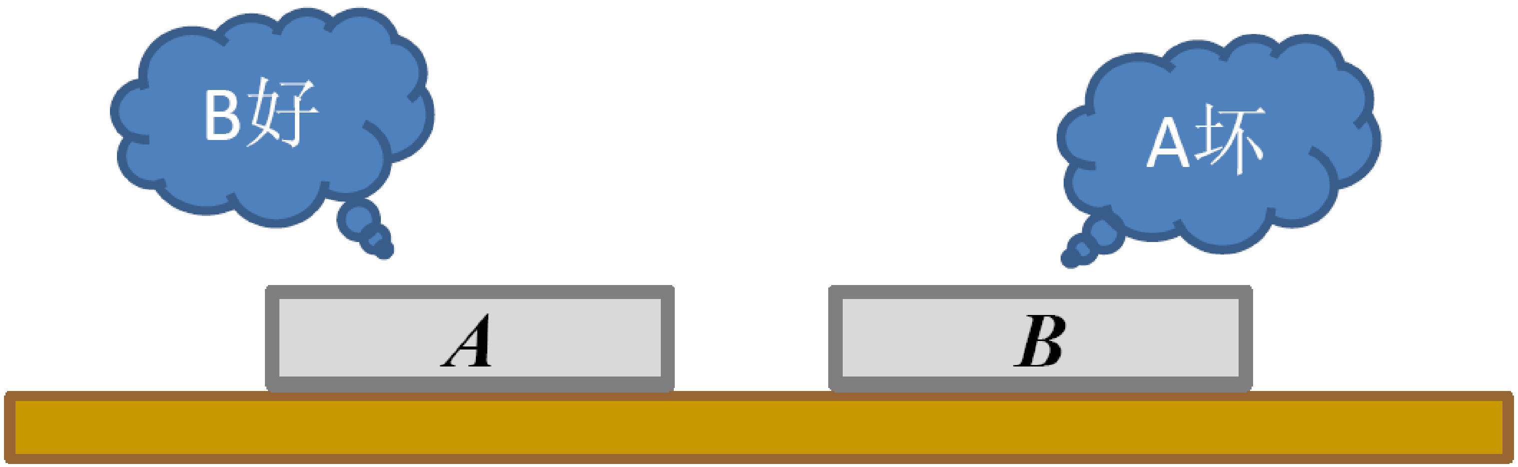
$$T(n) = \begin{cases} O(n^{\log_b a}) & a \neq 1 \\ O(\log n) & a = 1 \end{cases}$$

$d(n) = cn$

$$T(n) = \begin{cases} O(n) & a < b \\ O(n\log n) & a = b \\ O(n^{\log_b a}) & a > b \end{cases}$$

4.3 芯片测试

- 一次测试过程
- 测试方法：将2片芯片（A和B）置于测试台上，互相进行测试，测试报告是“好”或“坏”，只取其一



- 假设：好芯片的报告一定是正确的，坏芯片的报告是不确定的（可能会出错）

测试结果分析

A 报告	B 报告	结论
B是好的	A是好的	A, B 都好或A, B 都坏
B是好的	A是坏的	至少一片是坏的
B是坏的	A是好的	至少一片是坏的
B是坏的	A是坏的	至少一片是坏的

问题

- 输入： n 片芯片，其中好芯片至少比坏芯片多1片.
- 问题：设计一种测试方法
- 通过测试从 n 片芯片中挑出 1 片好芯片
- 要求：使用最少的测试次数.

判定芯片 A 的好坏

- 问题：给定芯片A，判定A的好坏
- 方法：用其他 n-1片芯片对 A 测试 .

n=7：好芯片数 ≥ 4.
A 好, 6个报告中至少 3 个报“好”
A 坏, 6个报告中至少 4 个报“坏”

n是奇数：好芯片数 ≥ (n+1)/2.
A 好, 至少有 (n–1)/2个报“好”
A 坏, 至少有 (n+1)/2个报告“坏”

- 结论：至少一半报“好”，A是好芯片,
  超过一半报“坏”，A是坏芯片.

判定芯片A的好坏

n=8：好芯片数 ≥ 5.

A好, 7个报告中至少 4 个报“好”

A坏, 7个报告中至少 5 个报“坏”

n是偶数：好芯片数 $\geq n/2+1$.

A好, 至少有 $n/2$个报告“好”

A坏, 至少有 $n/2+1$个报告“坏”

- 结论：n-1 份报告中,
- 至少一半报“好”, 则 A 为好芯片
- 超过一半报“坏”, 则 A为坏芯片

蛮力算法

- 测试方法：任取 1片测试，如果是好 芯片，测试结束；如果是坏芯片，抛 弃，再从剩下芯片中任取 1片测试， 直到得到1片好芯片.

- 时间估计：
- 第1片坏芯片，最多测试 n-2次，
- 第2片坏芯片，最多测试 n-3次，
- …
- 总计 $\Theta(n^2)$

分治算法设计思想

- 假设 n为偶数，将 n片芯片两两一组做测试淘汰，剩下芯片构成子问题，进入下一轮分组淘汰.
- 淘汰规则：
  - "好, 好" $\Rightarrow$ 任留 1片，进入下轮
  - 其他情况 $\Rightarrow$ 全部抛弃
- 递归截止条件：$n \leq 3$
  - 3 片芯片，1 次测试可得到好芯片.
  - 1 或2 片芯片，不再需要测试.

分治算法的正确性

- 命题1:
  - 当 n 是偶数时，在上述淘汰规则下，经过一轮淘汰，剩下的好芯片 比坏芯片至少多1片.
- 证:
  - 设A, B都好的芯片 i 组, A与B一好一坏 j 组，A与B 都坏的 k 组.
  - 淘汰后好芯片至少 i片，坏芯片至多 k片 .

$2i + 2j + 2k = n$ *初始芯片总数*

$2i + j > 2k + j$ *初始好芯片多于坏芯片*

$\Rightarrow \quad i > k$

n为奇数时的特殊处理

- 当 n 是奇数时，可能出问题

输入：好 好 好 好 坏 坏 坏

分组：好 好 | 好 好 | 坏 坏 | 坏

淘汰后：好 好 坏 坏

- 处理办法：

  当 n 为奇数时，增加一轮对轮空芯片的单独测试.
  如果该芯片为好芯片，算法结束；
  如果是坏芯片，则淘汰该芯片.

伪码描述

- 算法 Test(n)

```
k ← n
while k >3 do
    将芯片分成⌊k/2⌋组    // 轮空处理
    for i =1 to ⌊k/2⌋ do
        if   2 片好 then 则任取1片留下
        else  2 片同时丢掉
    k←剩下的芯片数
if k =3 then
    任取2片芯片测试
    if    1好1坏  then 取没测的芯片
    else  任取1片被测芯片
if k =2 or 1 then 任取1片
```

时间复杂度分析

- 设输入规模为n
- 每轮淘汰后，芯片数至少减半
- 测试次数(含轮空处理)：$O(n)$

- 时间复杂度：
  - $W(n) = W(n/2) + O(n)$
  - $W(3) = 1, W(2) = W(1) = 0$

- 解得 $W(n) = O(n)$

4.4 快速排序

- 用首元素 x 作划分标准，将输入数组 A划分成不超过 x 的元素构成的数组 A_L，大于 x 的元素构成的数组 A_R. 其中 A_L, A_R 从左到右存放在数组 A 的位置.
- 递归地对子问题 A_L和 A_R 进行排序，直到子问题规模为 1 时停止.

伪码

- 算法 Quicksort (A, p, r)
- 输入：数组$A[p..r]$
- 输出：排好序的数组 A

1. if $p < r$
2. then $q \leftarrow$Partition (A, p, r)
3. $A[p] \leftrightarrow A[q]$
4. Quicksort (A, p, q-1)
5. Quicksort (A, $q+1$, r)

- 初始置 p=1, r=n，然后调用上述算法

划分过程

```
Partition (A, p, r)
x ← A[p]
i ← p
j ← r + 1
while true do
    repeat  j ← j –1
    until  A[ j ]≤ x            // 不超过首元素的
    repeat  i ← i +1
    until  A[ i ]>x             // 比首元素大的
    if  i < j
    then  A[ i ] ↔ A[ j ]
    else  return j
```

划分实例

27 99 0 8 13 64 86 16 7 10 88 25 90

i *j*

27 25 0 8 13 64 86 16 7 10 88 99 90

i *j*

27 25 0 8 13 10 86 16 7 64 88 99 90

i *j*

27 25 0 8 13 10 7 16 86 64 88 99 90

j *i*

<u>16 25 0 8 13 10 7</u> 27 <u>86 64 88 99 90</u>

时间复杂度

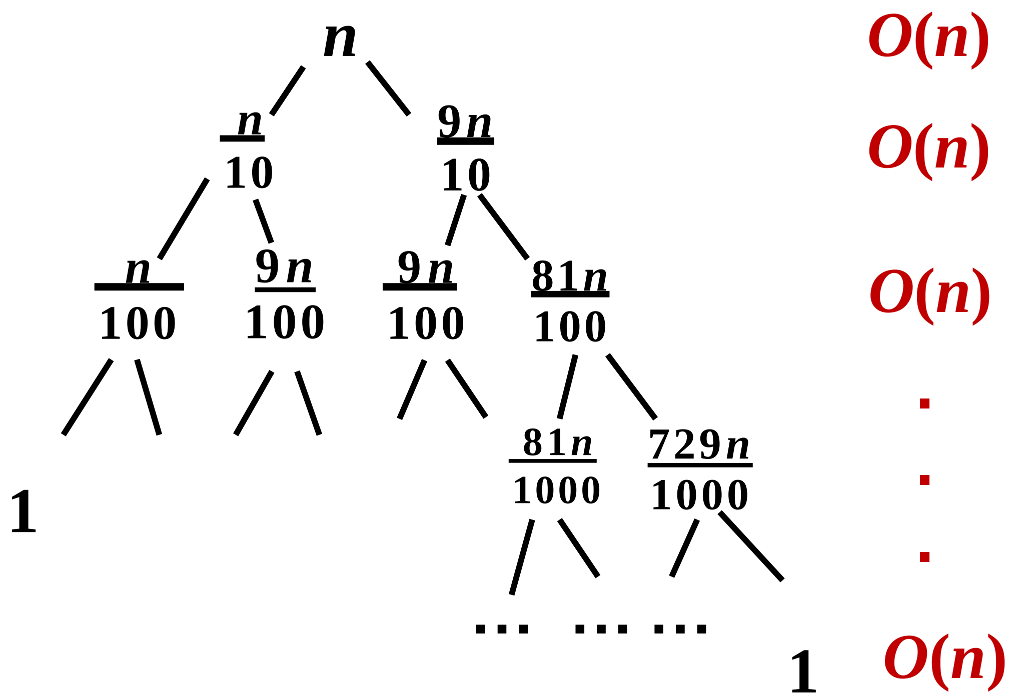
- 最坏情况:
  - $W(n) = W(n-1)+n-1$
  - $W(1) = 0$
  - $W(n) = n(n-1)/2$

- 最好划分:
  - $T(n) = 2\ T(n/2)+n-1$
  - $T(1) = 0$
  - $T(n) = \Theta(n\mathrm{log}n)$

均衡划分的时间复杂度

- 均衡划分：子问题的规模比不变
- 例如为 1:9
  - $T(n) = T(n/10) + T(9n/10) + n \quad T(1) = 0$
- 根据递归树，时间复杂度
  - $T(n) = \Theta(n\log n)$

递归树



$T(n)=O(n\log n)$

平均时间复杂度

- 首元素排好序后处在 1, 2, … , n
- 各种情况概率都为 $1/n$
- 首元素在位置 1： $T(0), T(n-1)$
- 首元素在位置 2： $T(1), T(n-2)$
- ....
- 首元素在位置 n-1： $T(n-2), T(1)$
- 首元素在位置 n： $T(n-1), T(0)$
- 子问题工作量 $2[T(1)+T(2)+\ldots+T(n-1)]$
- 划分工作量 $n-1$

平均时间复杂度

$$T(n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(T(k) + T(n-k)) + n - 1$$

$$T(n) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-1}T(k) + n - 1$$

$$T(1) = 0$$

$$T(n) = \Theta(n \log n)$$

首元素划分后每个位置概率相等

4.5 幂乘问题

- 输入： a为给定实数，n为自然数 输出： a^n

- 传统算法：顺序相乘
  - $a^n = (\ldots(((a\,a)a)a)\ldots)a$
- 乘法次数： $\Theta(n)$

分治算法——划分

n为偶数 $\underbrace{a\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a}_{n/2个} \;|\; \underbrace{a\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a}_{n/2个}$

n为奇数 $\underbrace{a\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a}_{(n-1)/2个} \;|\; \underbrace{a\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,a}_{(n-1)/2个} \;|\; a$

$$a^n=\begin{cases} a^{n/2}\times a^{n/2} & n \text{ 为偶数} \\ a^{(n-1)/2}\times a^{(n-1)/2}\times a & n \text{ 为奇数} \end{cases}$$

分治算法分析

- 以乘法作为基本运算
  - 子问题规模：不超过$n/2$
  - 两个规模近似 $n/2$的子问题完全一样，只要计算1次
- $W(n) = W(n/2) + \Theta(1)$
- $W(n) = \Theta(\log n)$

幂乘算法的应用

- Fibonacci数列： 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …
- 增加 $F_0=0$，得到数列

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

- 问题:已知 $F_0=0, F_1=1$, 给定n, 计算 F_n.
- 通常算法：从 $F_0, F_1, \ldots$ 开始，根据递推公式

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

- 陆续相加可得 F_n， 时间复杂度为$\Theta(n)$

Fibonacci数的性质

- 定理1
  - 设 $\{F_n\}$为 Fibonacci 数构成的数列，那么

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

- 归纳证明

n=1, 左边 $= \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$ 右边

- 假设对任意正整数 n，命题成立，即

$$\begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n$$

- 那么

$$\begin{bmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n+1}$$

算法

- 令矩阵, 用乘幂算法计算 M^n
- 时间复杂度
  - 矩阵乘法次数 $T(n)= \Theta(\log n)$
  - 每次矩阵乘法需要做 8 次元素相乘
  - 总计元素相乘次数为 $\Theta(\log n)$

作业2

- 使用熟悉的语言，画出汉诺塔的计算过程
  - 可以是console
  - 可以是web或app的图形化
- 提交：word格式提交，带有源码+运行截图