第 1 章

知识点名称：概率的基本性质

主讲人：陈碟

§1.6 概率的基本性质

概率公理化：

(1) 非负性 对任意事件A，有$0 \le P(A) \le 1$;

(2) 规范性 $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性 对于互不相容事件列A_1, A_2, …有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

思考：

1. $P(\varnothing)=?$
2. 有限可加性是否成立？
3. 去掉“互不相容”，怎么处理？

性质（1）：不可能事件概率为0， $P(\varnothing)=0$

证明： $\because \quad \varnothing=\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots,$

$$P(\varnothing)=P(\varnothing\cup\varnothing\cup\cdots)$$

（可列可加性） $=P(\varnothing)+P(\varnothing)+\cdots$

$$\therefore \ P(\varnothing)=0$$

实际问题中，我们往往处理的随机事件个数有限

性质（2）：有限可加性，即对于互不相容事件列 $A_1, A_2, \ldots A_n$ 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

证明：令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$，注意到 $P(\varnothing)=0$

可列可加性

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

抽检试验

性质（3）：对任何事件A有 $P(A)+P(\overline{A})=1$

证明：注意到

$$A\cap\overline{A}=\phi, A\cup\overline{A}=\Omega$$

由规范性及有限可加性，有

$$1=P(\Omega)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A})$$

抽检试验2

性质（4）：单调性，若随机事件A和B满足$A\subset B$, 则

$$P(A)\le P(B), P(B-A)=P(B)-P(A)$$

证明： $A\subset B$时，有 $B=A\bigcup(B-A)$

注意到：$A, B-A$ 互不相容，由有限可加性有

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

再由非负性可知 $P(B-A)\ge 0$

故 $P(A)\le P(B)$

性质（5）：概率加法定理,对任意两个随机事件A和B有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

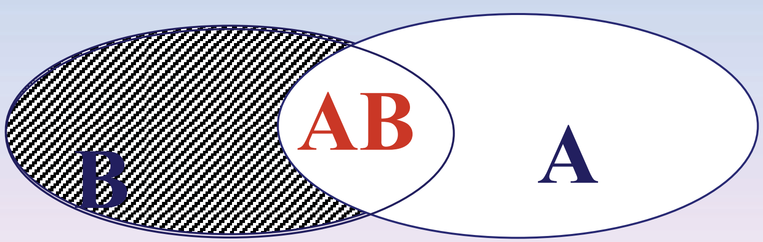
证明：注意到 $A\cup B=A\cup(B-AB)$

且 $A,(B-AB)$ 互不相容，再由**有限可加性**

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)$$

$AB\subset B$

$$=P(A)+P(B)-P(AB)$$



重中之重：可列可加性

对于互不相容事件列 A_1，A_2, …有 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

思考：如何求解任意n个随机事件之并的概率

例1 设50件产品中有5件是次品，其余的是合格品，从中任取2件，求选到的2件产品中有次品的概率。

解： 设A={选到的2件产品中有次品}

A_i={选到的2件产品中有i件次品}，$i=1,2$

则A_1，A_2互不相容。并且有$A=A_1\cup A_2$。

所以有 $P(A)=P(A_1)+P(A_2)$

$$=\frac{C_5^1 C_{45}^1}{C_{50}^2}+\frac{C_5^2 C_{45}^0}{C_{50}^2}\approx 0.1918$$

思考：“任取2件”改为**任取4件** 你会怎么做？

例2 设50件产品中有5件是次品，其余的是合格品，从中任取4件，求选到的4件产品中有次品的概率。

解： 设A={选到的4件产品中有次品}，

考虑A的对立事件

$$\overline{A}=\{\text{选到的4件产品全是合格品}\}$$

有
$$P(\overline{A})=\frac{C_{45}^{4}}{C_{50}^{4}}\approx 0.6470$$

从而
$$P(A)=1-P(\overline{A})$$
$$\approx 1-0.6470$$
$$=0.3530$$