Prova 1

Introd. Teoria da Probabilidade — Verão

Wyara Vanesa Moura e Silva — 2023

Questão 1

Sejam $\mathbf{A}_n$ e $\mathbf{B}_n$ sequência de eventos aleatórios de um mesmo espaço de probabilidade tais que $\mathbb{P}(\mathbf{A}_n) \to 1$ e $\mathbb{P}(\mathbf{B}_n) \to p$. Mostre que $\mathbb{P}(\mathbf{A}_n \cap \mathbf{B}_n) \to p$.

Solução:

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}_n \cap \mathbf{B}_n) \; = \; \mathbb{P}(\mathbf{B}_n) - \mathbb{P}(\mathbf{A}_n^c \cap \mathbf{B}_n)$$

E como:

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{A}_n \cap \mathbf{B}_n) & \subset & \mathbf{A}_n^c \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}, \quad \text{temos que} \\ 0 \;\leq\; \mathbb{P}(\mathbf{A}_n^c \cap \mathbf{B}_n) & \leq & \mathbb{P}(\mathbf{A}_n^c) \quad \text{em que} \\ & & \mathbb{P}(\mathbf{A}_n^c) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{e portanto,} \\ \mathbb{P}(\mathbf{A}_n \cap \mathbf{B}_n) & = & \mathbb{P}(\mathbf{B}_n) - \mathbb{P}(\mathbf{A}_n^c \cap \mathbf{B}_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} p - 0 \;=\; p \end{array}$$

Questão 2

Seja $\mathbf{X}$ com densidade $f_X(x) = x^{-2} \cdot \mathbb{1}_{\{(-\infty,-2] \cup [2,\infty))\}}$.

(a) Mostre que para todo $z \geq 0$, $\mathbb{P}(X > z) = \mathbb{P}(X < -z)$.

Solução:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}(X > z) & = & \displaystyle\int_z^\infty \frac{1}{x^2} dx \;=\; -x^{-1}\Big|_z^\infty \;=\; z^{-1} \\ \mathbb{P}(X < -z) & = & \displaystyle\int_{-\infty}^{-z} \frac{1}{x^2} dx \;=\; -x^{-1}\Big|_{-\infty}^{-z} \;=\; z^{-1} \end{array}$$

Portanto, temos que $\mathbb{P}(X > z) = \mathbb{P}(X < -z)$.

(b) O que podemos dizer sobre a esperança de X? (Dica: Calcule $\displaystyle\int_0^\infty \mathbb{P}(X > z) dz$)

Solução:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(X) & = & \displaystyle\int_z^\infty \mathbb{P}(X > z) dz - \int_{-\infty}^{-z} \mathbb{P}(X < -z) dz \\ & = & \displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{z} dz - \int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{z} dz \\ & = & \ln(z)\Big|_2^\infty - \ln(|z|)\Big|_{-\infty}^{-2} \;=\; \infty - \infty \end{array}$$

Portanto, a esperança de X não está bem definida dado que o valor esperado de ambas as partes diverge, $\mathbb{E}(X) > \infty$.

Questão 3

Seja $\mathbf{Q}$ o quadrado de vértices (+1,0), (-1,0), (0,+1), (0,-1) e (X, Y) o vetor com densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) \quad = \quad \frac{\mathbb{1}_{\mathbf{Q}}(x,y)}{2}.$$

As variáveis X e Y são independentes?
Solução:
Temos que as marginas de X e Y são dadas por: Para X, temos:

$$f_X(x) \quad = \quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-x-1}^{1+x} \frac{1}{2} dy, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ \displaystyle\int_{x-1}^{1-x} \frac{1}{2} dy, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

em que:

$$f_X(x) \quad = \quad \begin{cases} 1+x, & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ \\ 1-x, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Para Y, então:

$$f_Y(y) \quad = \quad \begin{cases} 1+y, & \text{se } -1 \leq y < 0 \\ \\ 1-y, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Pode-se observar então a partir das marginas encontradas, que X e Y não são independentes, pois $f_{X,Y}(x,y) \neq f_X(x) \cdot f_Y(y)$.

Questão 4

Em um ensaio de Bernoulli com parâmetros p, seja X a variável que denota o número de tentativas até obtermos o $2^{\underline{o}}$ sucesso. Calcule $\mathbb{E}X$.
Solução:

$$\mathbb{P}(\mathbf{X} = k) = (k-1)p^2(1-p)^{k-2}, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Logo,

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) \quad = \quad \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1)p^2(1-p)^{k-2} \;=\; p^2 \sum_{k=2}^{\infty} k \cdot (k-1)(1-p)^{k-2}$$

Considerando agora, $\alpha = (1-p)$,

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{d^2\alpha^k}{d\alpha^2} \;=\; \frac{d^2}{d\alpha^2}\sum_{k=2}^{\infty}\alpha^k \;=\; \frac{d^2}{d\alpha^2}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha}\right) \;=\; \frac{2}{(1-\alpha)^3}$$

Portanto,

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) \;=\; p^2 \cdot \frac{2}{p^3} \;=\; \frac{2}{p}$$

Questão 5

De um baralho comum retiramos 2 cartas sem reposição, observamos quantas são de paus, devolvemos as cartas para o maço e embaralhamos novamente. Em seguida, retiramos sem reposição 1,3 ou 5 cartas, dependendo do número de cartas de paus observadas na 1ª etapa ter sido 0,1 ou 2, respectivamente.

(a) Qual a probabilidade de retirarmos 4♣ na 2ª etapa?

Solução:

$\mathbf{A}_k$ ={ tirei k cartas de paus}, $k = 0, 1,$ ou 2.

$\mathbf{B}_l$ ={ retirar l cartas}, $l = 1, 3,$ ou 5.

$\mathbf{C}$ ={ 4♣ na segunda etapa }

Temos então que:

$$\mathbb{P}(\mathbf{A}_0) = \frac{39}{52}\cdot\frac{38}{51};\quad \mathbb{P}(\mathbf{A}_1) = 2\cdot\frac{39}{52}\cdot\frac{13}{51};\quad \mathbb{P}(\mathbf{A}_2) = \cdot\frac{13}{52}\cdot\frac{12}{51}$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{C}|\mathbf{A}_0) = \frac{1}{52};\quad \mathbb{P}(\mathbf{C}|\mathbf{A}_1) = \frac{3}{52};\quad \mathbb{P}(\mathbf{C}|\mathbf{A}_2) = \frac{5}{52};$$

Assim,

$$\mathbb{P}(\mathbf{C}) = \mathbb{P}(\mathbf{A}_0)\cdot\mathbb{P}(\mathbf{C}|\mathbf{A}_0) + \mathbb{P}(\mathbf{A}_1)\cdot\mathbb{P}(\mathbf{C}|\mathbf{A}_1) + \mathbb{P}(\mathbf{A}_2)\cdot\mathbb{P}(\mathbf{C}|\mathbf{A}_2)$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{C}) = \frac{39}{52}\frac{38}{51}\cdot\frac{1}{52} + 2\frac{39}{52}\frac{13}{51}\cdot\frac{3}{52} + \frac{13}{52}\frac{12}{51}\cdot\frac{5}{52}$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{C}) = \frac{19}{2\cdot 17}\cdot\frac{1}{52} + \frac{13}{2\cdot 17}\cdot\frac{3}{52} + \frac{1}{17}\cdot\frac{5}{52} = \frac{19+3\cdot 13+2\cdot 5}{52\cdot 2\cdot 17} = \frac{68}{1768}$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{C}) = \frac{1}{26}$$

(b) Qual a probabilidade de termos tirado pelo menos uma carta de paus na 1ª etapa dada que retiramos o 4♣ na 2ª etapa?

Solução:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathbf{A}_1 \cup \mathbf{A}_2 | \mathbf{C}) &= \frac{\mathbb{P}(\mathbf{A}_1) \cdot \mathbb{P}(\mathbf{C}|\mathbf{A}_1) + \mathbb{P}(\mathbf{A}_2) \cdot \mathbb{P}(\mathbf{C}|\mathbf{A}_2)}{\mathbb{P}(\mathbf{C})} \\
&= \frac{3 \cdot 13 + 2 \cdot 5}{52 \cdot 2 \cdot 17} \cdot \frac{26}{} = \frac{49}{68}
\end{aligned}
$$