CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

1ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Obtenha a função geradora de momentos das distribuições:
a) Poisson(θ); b) Gama(α,β); c) Normal (μ, σ^2); d) $\chi^2_{(n)}$ (qui-quadrado com n g.l.)

2. Verifique que os modelos abaixo são membros da família exponencial
d) Gama(α,β); b) Exponencial(θ); c) Bernoulli (θ); d) Beta(α,β).

3. Mostre que os modelos abaixo são membros da *família de posição e escala* (*location and scale families*)

a) U($\theta,\theta+1$);

b) Valor extremo com fdp dada por $f(y) = \sigma^{-1}\exp\{ (y-\mu)/\sigma - \exp[(y-\mu)/\sigma] \}$, $y \in \Re$

4. Seja *f(.)* uma fdp. Seja μ um número real e σ um real positivo. Mostre que X é uma v.a. com fdp $f_X(x) = 1/\sigma\, f[(x-\mu)/\sigma]$ se, e somente se $X = \mu + \sigma Z$, sendo Z uma v.a.com fdp *f(.).*

5. Mostre que se *f(.)* é uma fdp simétrica em torno de zero, então μ é a mediana da v.a. com fdp da família de posição e escala $f_X(x) = 1/\sigma\, f[(x-\mu)/\sigma]$, $x \in \Re$.

6. Sejam (X,Y) um vetor aleatório contínuo com densidade conjunta f(x,y) e considere que E(X) e E(X|Y) existem. Mostre que E(E(X|Y))= E(X)

7. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e todas com a mesma distribuição, representada pela a função de probabilidade ou de densidade $f(x|\theta)$. *(i)* Obtenha a função de densidade (probabilidade) conjunta do vetor $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ e *(ii)* identifique a distribuição de $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, considerando os modelos:
a) Poisson (θ); b) Normal (μ, σ^2); c) geométrica(θ)

8. Seja X uma v. a. contínua com função de distribuição F e seja $F^{-1}(y) = \inf\{x \in R;\ F(x) = y\}$. Mostre que *Y=F(X)* tem distribuição U[0,1].

9. Seja X ~ N (0, 1). Mostre que se $Y = X^2$ então $Y \sim X^2_{(1)}$.

10. Mostre que se $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ são v.a.(s) independentes com $Y_i \sim X^2_{(ni)}$ então $Z = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k$ tem distribuição $\chi^2_{(n)}$ sendo $n = n_1 + \ldots + n_k$.

11. Seja X ~ U [0, θ] sendo $\theta > 0$. Se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são variáveis aleatórias independentes e todas com a mesma distribuição se X, mostre que a densidade de $X_{(n)} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ é dada por $f(x|\theta) = \theta^{-n} n x^{n-1}$, para $0 < x < \theta$, e $f(x|\theta) = 0$, fora desta intervalo.

12. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias iid com $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, i=1,...,n. Denotando a média amostral por Xb, mostre que:
a) Xb tem distribuição $N(\mu, \sigma^2/n)$ b) X_i – Xb em distribuição $N(0, (n-1)\sigma^2/n)$
c) Xb e X_i – Xb são independentes para todo i=1,...,n.

13. Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e todas com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Mostre que a média amostral e a variância amostral são variáveis aleatórias indenpendentes.