PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA APLICADA E ESTATÍSTICA
DISCIPLINA: **INFERÊNCIA**
PROFESSORA: DIONE MARIA VALENÇA

UFRN
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

2ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Exercício 1.10 , pag 14, BS(2001)
2. Sejam $X_1,\ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim f(x;\theta) = \frac{1+\theta x}{2} I_{(-1,1)}(x)$, com $\theta \in (-1,1)$. Encontre um estimador consistente para θ.
3. Sejam $X_1,\ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim U(\theta-1, \theta+1)$. Verifique se $(X_{(1)}+X_{(n)})/2$ é consistente para θ, sendo $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$ estatísticas de ordem (respectivamente, mínimo e máximo)
4. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim N(1,\theta)$ e seja $S_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \;/(n-1)$. Verifique se:
   a) Para n fixo, S_n é um estimador viciado para σ; b) S_n é um estimador consistente de σ .
5. Seja $f(x|\theta)$ uma função de densidade satisfazendo as condições de regularidade adequadas. Mostre que a informação de Fisher de θ é tal que
$$I_F(\theta) = E\left[\left(\frac{\partial \log f(X;\theta)}{\partial\theta}\right)^2\right] = -E\left[\left(\frac{\partial^2 \log f(X;\theta)}{\partial\theta^2}\right)\right]$$
   Seja $\mathbf{I_F}(\theta)$ a informação total de Fisher correspondente à amostra, então: *i)* o resultado acima vale também para $\mathbf{I_F}(\theta)$; ii) $\mathbf{I_F}(\theta) = nI_F(\theta)$;
6. Considere que a distribuição X é da família exponencial unidimensional, com densidade dada por $f(x;\theta) = exp\{c(\theta)T(x) + b(\theta) + S(x)\} I_A(x)$. Sendo $I_F(\theta)$ a informação de Fisher, mostre que $I_F(\theta) = \left[\frac{d}{d\theta} c(\theta)\right]^2 Var(T)$.
7. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim \exp(\theta)$. Seja $X_{(1)} = \min\{X_1,\ldots, X_n\}$
   a) Obtenha um estimador não viciado para $1/\theta$ com base em $X_{(1)}$;
   b) Verifique se o estimador obtido em (a) é eficiente parar $1/\theta$
8. Sejam X_1,X_2 amostra aleatória de X~Poisson (θ). Verifique se $T = X_1X_2$ é uma estatística suficiente para θ.
9. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de X~Uniforme discreta(θ) em que $A = \{1,2,\ldots,\theta\}$, e $f(x;\theta) = \frac{1}{\theta} I_A(x)$. Mostre que $X(n) = max\{X_1, \ldots, X_n\}$ é uma estatística suficiente para θ.
10. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de X ~ f(x;θ). Encontre uma estatística suficiente bi-dimensional para $\theta = (\mu, \sigma)$, sendo $f(x;\theta) = \frac{1}{\sigma} exp\left\{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right\} I_{(\mu,\infty)}(x), com\ \mu \in R\ e\ \sigma > 0$.
11. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de X . Obtenha uma estatística suficiente e completa em cada caso abaixo. Justifique
    a) X ~ B(n,θ) b) X ~ N(θ, 1) c) X ~ exp(θ)
12. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de X ~ Poisson (θ). Qual o melhor estimador para θ, $\bar{X}\ ou\ S^2$?
13. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de X ~ Bernoulli(θ). Mostre que S^2 é o estimador NVVUM de $\theta(1-\theta)$.
14. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de X~ U(0,θ). Verifique se W= (n+1)X(n)/n é NVVUM para θ. W é eficiente?
15. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a.a. de X ~ Poisson (θ). Obtenha o estimador NVVUM de P(X=0) .

Obs.: NVVUM denota o (estimador) não viciado de variância uniformemente mínima.