Universidade Federal de Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Estatística

Take Home - Séries Temporais

Wyara Moura

Professor: André Luís Santos de Pinho

Natal, RN
2015

Sumário

1 Questão 1

Considerando o processo $\{Y_t\}$ abaixo, será verificado se tal processo é estacionário segundo algumas condições especificadas na questão.

$$Y_t = \phi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i}, \quad t = 1, 2, \cdots$$

Primeiro caso, quando: $Y_0 = 0$ e ϕ uma constante satisfazendo $\mid \phi \mid < 1$. Em que também, $\{\varepsilon_t\}$ é um processo de ruído branco forte. com média 0 e variância σ^2_ε. Para verificar se o processo é ou não estacionário, serão calculados a esperança e as autocoraviâncias do modelo, para verificar se existe depêndencia do período t.

Cálculo da esperança:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_t) &= \mathrm{E}\left(\phi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\phi^0 \varepsilon_{t-0} + \phi^1 \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^{t-3}\varepsilon_3 + \phi^{t-2}\varepsilon_2 + \phi^{t-1}\varepsilon_1\right) \\
&= 0 + \phi\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) + \phi^2\mathrm{E}(\varepsilon_{t-2}) + \cdots + \phi^{t-3}\mathrm{E}(\varepsilon_3) + \phi^{t-2}\mathrm{E}(\varepsilon_2) + \phi^{t-1}\mathrm{E}(\varepsilon_1) \\
&= 0 + \phi \times 0 + \phi^2 \times 0 + \cdots + \phi^{t-3} \times 0 + \phi^{t-2} \times 0 + \phi^{t-1} \times 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Assim, observa-se que a esperança do processo $\{Y_t\}$ não depende de t, mas não é condição suficiente para concluir se a série é ou não estacionária.

Cálculo das autocovariâncias ($\gamma(s)$):

$$\gamma(s) = \mathrm{cov}(Y_t, Y_{t+s}) = \mathrm{cov}\left(\phi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i},\ \ \phi^{t+s} Y_0 + \sum_{i=0}^{t+s-1} \phi^i \varepsilon_{t+s-i}\right)$$

em que desenvolvendo, tem-se Y_t igual a:

$$\begin{aligned}
Y_t &= \phi^0 Y_0 + \phi^0 \varepsilon_{t-0} + \phi^1 \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^{t-3}\varepsilon_{t-(t-3)} + \phi^{t-2}\varepsilon_{t-(t-2)} + \phi^{t-1}\varepsilon_{t-(t-1)} \\
&= \phi^0 \varepsilon_{t-0} + \phi^1 \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^{t-3}\varepsilon_3 + \phi^{t-2}\varepsilon_2 + \phi^{t-1}\varepsilon_1
\end{aligned}$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\text{cov}(Y_t, Y_{t+s}) &= \text{cov}\begin{pmatrix} \varepsilon_t + \phi^1\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^{t-3}\varepsilon_3 + \phi^{t-2}\varepsilon_2 + \phi^{t-1}\varepsilon_1, \\ \varepsilon_{t+s} + \phi^1\varepsilon_{t+s-1} + \phi^2\varepsilon_{t+s-2} + \cdots + \phi^{t+s-3}\varepsilon_3 + \phi^{t+s-2}\varepsilon_2 + \phi^{t+S-1}\varepsilon_1 \end{pmatrix} \\
(1) \qquad &= \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s}) + \phi\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s-1}) + \phi^2\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t+s-2}) + \cdots + \\
&\quad +\phi^{t+s-3}\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_3) + \phi^{t+s-2}\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_2) + \phi^{t+s-1}\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_1) + \\
&\quad +\phi^1\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+s}) + \phi^2\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+s-1}) + \phi^3\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+s-2}) + \cdots + \\
&\quad +\phi^{t+s-2}\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_3) + \phi^{t+s-1}\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_2) + \phi^{t+s}\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_1) + \\
&\quad \vdots \\
&\quad +\phi^{t-2}\text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_{t+s}) + \phi^{t-1}\text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_{t+s-1}) + \phi^{t}\text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_{t+s-2}) + \cdots + \\
&\quad +\phi^{2(t-2)-1+s}\text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_3) + \phi^{2(t-2)+s}\text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_2) + \phi^{2(t-2)+1+S}\text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_1) + \\
&\quad +\phi^{t-1}\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_{t+s}) + \phi^{t}\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_{t+s-1}) + \phi^{t+1}\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_{t+s-2}) + \cdots + \\
&\quad +\phi^{2(t-1)-2+s)}\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) + \phi^{2(t-1)-1+s}\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \phi^{2(t-1)+s}\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_1)
\end{aligned}
$$

Fazendo para o caso de $s = 0$, e levando em conta que $\text{var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$

$$
\begin{aligned}
\gamma(0) = \text{cov}(Y_t, Y_t) &= \text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) + \phi^2\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \phi^4\text{cov}(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2}) + \cdots + \\
&\quad +\phi^{2(t-3)}\text{cov}(\varepsilon_3, \varepsilon_3) + \phi^{2(t-2)}\text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_2) + \phi^{2(t-1)}\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_1) + \\
&= \sigma_\varepsilon^2 + \phi^2\sigma_\varepsilon^2 + \phi^4\sigma_\varepsilon^2 + \cdots + \\
&\quad +\phi^{2(t-3)}\sigma_\varepsilon^2 + \phi^{2(t-2)}\sigma_\varepsilon^2 + \phi^{2(t-1)}\sigma_\varepsilon^2 \\
&= \sigma_\varepsilon^2\left[1 + \phi^2 + \phi^4 + \cdots + \phi^{2(t-3)} + \phi^{2(t-2)} + \phi^{2(t-1)}\right] \\
(2) \qquad &= \sigma_\varepsilon^2\left[\sum_{i=0}^{t-1}\phi^{2i}\right]
\end{aligned}
$$

$s = 1$

$$
\begin{aligned}
\gamma(1) = \text{cov}(Y_t, Y_{t+1}) &= \phi\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) + \phi^3\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \phi^5\text{cov}(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2}) + \cdots + \\
&\quad +\phi^{2(t-3)+1}\text{cov}(\varepsilon_3, \varepsilon_3) + \phi^{2(t-2)+1}\text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_2) + +\phi^{2(t-1)+1}\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \\
&= \phi\sigma_\varepsilon^2 + \phi^3\sigma_\varepsilon^2 + \phi^5\sigma_\varepsilon^2 + \cdots + \\
&\quad +\phi^{2(t-3)+1}\sigma_\varepsilon^2 + \phi^{2(t-2)+1}\sigma_\varepsilon^2 + +\phi^{2(t-1)+1}\sigma_\varepsilon^2 \\
&= \sigma_\varepsilon^2\left[\phi + \phi^3 + \phi^5 + \cdots + \phi^{2(t-3)+1} + \phi^{2(t-2)+1} + \phi^{2(t-1)+1}\right] \\
(3) \qquad &= \sigma_\varepsilon^2\left[\sum_{i=0}^{t-1}\phi^{2i+1}\right]
\end{aligned}
$$

$s = 2$

$$
\begin{aligned}
\gamma(2) = \text{cov}(Y_t, Y_{t+2}) &= \phi^2\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_t) + \phi^4\text{cov}(\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1}) + \phi^6\text{cov}(\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-2}) + \cdots + \\
&\quad +\phi^{2(t-3)+2}\text{cov}(\varepsilon_3, \varepsilon_3) + \phi^{2(t-2)+2}\text{cov}(\varepsilon_2, \varepsilon_2) + \phi^{2(t-1)+2}\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_1) \\
&= \phi^2\sigma_\varepsilon^2 + \phi^4\sigma_\varepsilon^2 + \phi^6\sigma_\varepsilon^2 + \cdots + \\
&\quad +\phi^{2(t-3)+2}\sigma_\varepsilon^2 + \phi^{2(t-2)+2}\sigma_\varepsilon^2 + \phi^{2(t-1)+2}\sigma_\varepsilon^2 \\
&= \sigma_\varepsilon^2\left[\phi^2 + \phi^4 + \phi^6 + \cdots + \phi^{2(t-3)+2} + \phi^{2(t-2)+2} + \phi^{2(t-1)+2}\right] \\
&= \sigma_\varepsilon^2\left[\sum_{i=0}^{t-1}\phi^{2i+2}\right]
\end{aligned}
$$

Portanto, tem-se como formula geral para todo $s \geq 0$,

$$
\gamma(s) = \text{cov}(Y_t, Y_{t+s}) \;=\; \sigma_\varepsilon^2\left[\sum_{i=0}^{t-1}\phi^{2i+s}\right]
$$

Observando então, que o processo $\{Y_t\}$ não é estacionário, pois as autocovariâncias dependem do valor de t. Agora, será mostrato que para valores grandes de t a dependência em t das autocovariâncias é negligenciável.

Para isso, primeiramente observa-se que,

$$
\left[\sum_{i=0}^{t-1}\phi^{2i+s}\right]
$$

é uma progressão geométrica com razão dada por,

$$
q \;=\; \tfrac{\phi^{2+s}}{\phi^s} \;=\; \phi^2
$$

em que a soma dessa progressão geométrica é,

$$
= \;\phi^s\tfrac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2} \;=\; \tfrac{\phi^s}{1-\phi^2} - \tfrac{\phi^{2t}}{1-\phi^2}
$$

Aplicando então o limite, para verificar o que acontece quando o valor de t tende ao infinito,

$$
\lim_{t\to\infty}\frac{\phi^s}{1-\phi^2} - \underbrace{\frac{\phi^{2t}}{1-\phi^2}}_{\text{tende para 0, pois } \mid \phi \mid < 1} \;=\; \frac{\phi^s}{\phi^2-1}
$$

O processo $\{Y_t\}$ pode ser escrito da forma recursiva mostrada abaixo, levando em conta que $Y_0 = 0$.

$$
\begin{aligned}
Y_t &= \phi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} \\
&= \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i} \\
&= \phi^0 \varepsilon_{t-0} + \phi^1 \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^{t-3}\varepsilon_3 + \phi^{t-2}\varepsilon_2 + \phi^{t-1}\varepsilon_1 \\
&= \varepsilon_t + \phi^1 \varepsilon_{t-1} + \phi^2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^{t-3}\varepsilon_3 + \phi^{t-2}\varepsilon_2 + \phi^{t-1}\varepsilon_1 \\
&= \varepsilon_t + \phi \underbrace{\left[\varepsilon_{t-1} + \phi\varepsilon_{t-2} + \phi^2\varepsilon_{t-3} + \cdots + \phi^{t-4}\varepsilon_3 + \phi^{t-3}\varepsilon_2 + \phi^{t-2}\varepsilon_1\right]}_{Y_{t-1}} \\
Y_t &= \varepsilon_t + \phi Y_{t-1}
\end{aligned}
$$

Agora para o segundo caso, quando: $Y_0 \neq 0$ e ϕ uma constante satisfazendo $\mid \phi \mid < 1$. Em que também, $\{\varepsilon_t\}$ é um processo de ruído branco forte.

Cálculo da esperança:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y_t) &= \mathrm{E}\left(\phi^t Y_0 + \sum_{i=0}^{t-1} \phi^i \varepsilon_{t-i}\right) \\
&= \mathrm{E}\left(\phi^t Y_0 + \phi^0\varepsilon_{t-0} + \phi^1\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^{t-3}\varepsilon_3 + \phi^{t-2}\varepsilon_2 + \phi^{t-1}\varepsilon_1\right) \\
&= 0 + \phi^t\mathrm{E}(Y_0) + \mathrm{E}(\varepsilon_t) + \phi\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) + \phi^2\mathrm{E}(\varepsilon_{t-2}) + \cdots + \phi^{t-3}\mathrm{E}(\varepsilon_3) + \phi^{t-2}\mathrm{E}(\varepsilon_2) + \phi^{t-1}\mathrm{E}(\varepsilon_1) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

A esperânça do processo, não depende de t, mas não é condição necessária para concluir se a série é ou não estacionária.

O cálculo das autocovariâncias ($\gamma(s)$) será:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(Y_t, Y_{t+s}) &= \mathrm{cov}\left(\begin{array}{l} \phi^t Y_0 + \varepsilon_t + \phi^1\varepsilon_{t-1} + \phi^2\varepsilon_{t-2} + \cdots + \phi^{t-3}\varepsilon_3 + \phi^{t-2}\varepsilon_2 + \phi^{t-1}\varepsilon_1, \\ \phi^{t+s}Y_0 + \varepsilon_{t+s} + \phi^1\varepsilon_{t+s-1} + \phi^2\varepsilon_{t+s-2} + \cdots + \phi^3\varepsilon_{s+3} + \phi^2\varepsilon_{s+2} + \phi^{t-1}\varepsilon_{s+1} \end{array}\right) \\
&= \phi^t\phi^{t+s}\mathrm{cov}(Y_0, Y_0) + (1)
\end{aligned}
$$

Fazendo para o caso de $s = 0$ (assim como foi feito no primeiro caso), em que tem-se $\mathrm{var}(\varepsilon_t) = \sigma^2_\varepsilon$ e $\mathrm{var}(Y_0) = \frac{\sigma^2}{1-\phi^2}$. Como foi estabelecido que σ^2 que aparece na variância de Y_0, é igual a $\mathrm{var}(\varepsilon_t)$, então a partir daqui, será utilizado apenas σ^2.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{cov}(Y_t, Y_t) &= \phi^{2t}\mathrm{cov}(Y_0, Y_0) + (2) \\
&= \phi^{2t}\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} + \sigma^2\left[\sum_{i=0}^{t-1}\phi^{2i}\right] \\
&= \phi^{2t}\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} + (1-\phi^{2t})\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} \\
&= \tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}\left[\phi^{2t} + (1-\phi^{2t})\right] \\
&= \tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}
$$

$s = 1$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Y_t, Y_{t+1}) &= \phi^{2t+1}\operatorname{cov}(Y_0, Y_0) + (3) \\
&= \phi^{2t+1}\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} + \sigma^2\left[\sum_{i=0}^{t-1}\phi^{2i+1}\right] \\
&= \phi^{2t+1}\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} + (\phi - \phi^{2t+1})\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} \\
&= \tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}\left[\phi^{2t+1} + (\phi - \phi^{2t+1})\right] \\
&= \phi\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}
$$

$s = 2$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{cov}(Y_t, Y_{t+1}) &= \phi^{2t+2}\operatorname{cov}(Y_0, Y_0) + (3) \\
&= \phi^{2t+2}\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} + \sigma^2\left[\sum_{i=0}^{t-1}\phi^{2i+2}\right] \\
&= \phi^{2t+2}\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} + (\phi^2 - \phi^{2t+2})\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2} \\
&= \tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}\left[\phi^{2t+2} + (\phi^2 - \phi^{2t+2})\right] \\
&= \phi^2\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}
\end{aligned}
$$

Assim, a fórmula geral para todo $s \geq 0$,

$$
\gamma(s) = \operatorname{cov}(Y_t, Y_{t+s}) = \phi^s\tfrac{\sigma^2}{1-\phi^2}
$$

Mostrando assim, que o processo $\{Y_t\}$ para o caso de $Y_0 \neq 0$ é estacionário, pois a esperança e as autocovariâncias não dependem de t.

2 Questão 2

Abaixo encontra-se a função implementada no R, com a finalidade de representar o processo analisado na questão 1. A função criada, possui 3 argumentos, p, n e s, em que p seria o valor da constante ϕ, n o tamanho da série e s a variância do ruído branco desejado. A seguir, no código abaixo, seria um processo Y_t tomando como tamanho da série de 50, e $\phi = 0.7$, como pede a questão e foi escolhido para a variância do ruído branco como sendo 1, em que o ruído branco escolhido para o desenvolvimento da função foi uma normal com média 0.

```
R> y<-NULL
R> x<-NULL
R> takehome<-function(p,n,s){
R+   r<-rnorm(n,0,s)
R+   for(j in 1:n){
R+         for(i in 1:j){
R+                x[i]<-p^(i-1)*r[j-(i-1)]
R+         }
R+     y[j]<-sum(x[1:j])
R+   }
R+ y
R+ }
```

Partindo disso, serão criados três gráficos, o gráfico da série gerada, e os gráfico das funções de autorrelação (FAC´s) e das funções de autorrelação parciais (FACP´s). Abaixo, encontra-se o código utilizado para o desenvolvimento dos gráficos, e o gráfico em seguida.

```
R> plot.ts(takehome(0.7,50,1), main="", xlab="", ylab="")
```

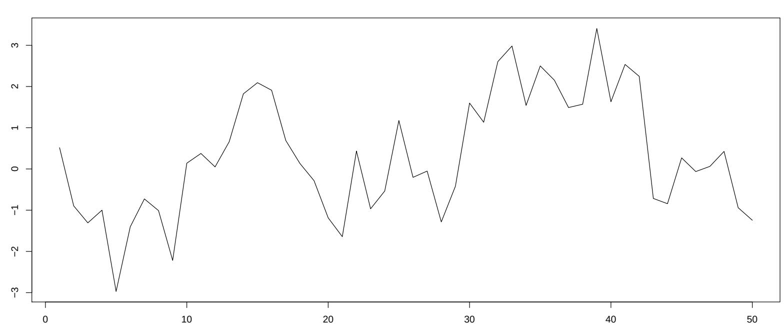

Figura 2.1: Gráfico da Série.

Analisando o gráfico da série, que encontra-se na Figura 2.1, poderia ser observado o que foi provado teoricamente na primeira questão, se o valor de t aumentasse, de que o processo $\{Y_t\}$ é não estacionário, mas quando o valor de t cresce, ele torna-se estacionário.

```
R> acf(takehome(0.7,50,1),  main="FAC's", xlim=c(1,16))
```

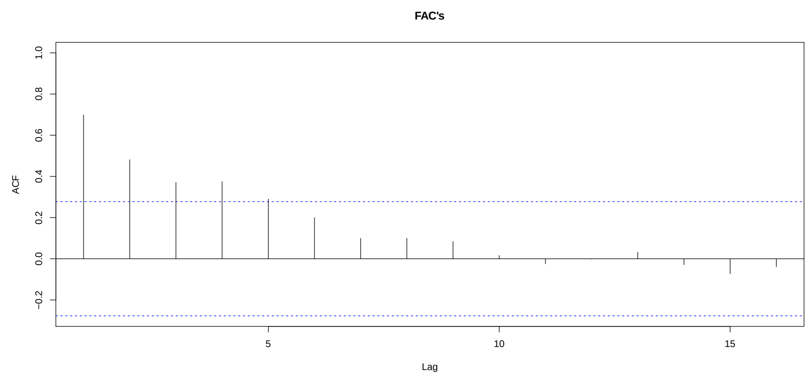

Figura 2.2: Gráfico das FAC's.

O gráfico gerado das FAC's, que encontra-se na Figura 2.2, como pode ser observado, apresenta um rápido decaimento exponencial.

```
R> pacf(takehome(0.7,50,1), main="FACP's")
```

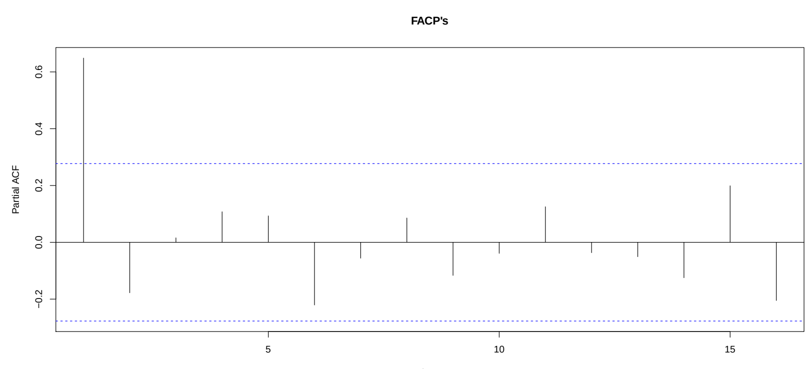

Figura 2.3: Gráfico das FACP's.

O gráfico das FACP's, que encontra-se na Figura 2.3, dá indícativos de que o processo é um processo autoregressivo de primeira ordem, como ficou indicado em uma observação feita na primeira questão.

3 Questão 3

Será analisado nesta questão, dados sobre um tipo de investimento chamado BOND, em que os dados são quadrimensais e vão de 1953 até 1970. O arquivo foi disponibilizado em formato do Excel. O objetivo é encontrar um melhor modelo para esta série. O software utilzado para a realização da analise será o `R`, os códigos utilizados para a análise serão colocados no Anexo I, deste relatório, e abaixo será comentado sobre análises concluídas, a partir dos resultados encontrados.

Inicialmente, foi construido o gráfico da série, que encontra-se na Figura 3.4.

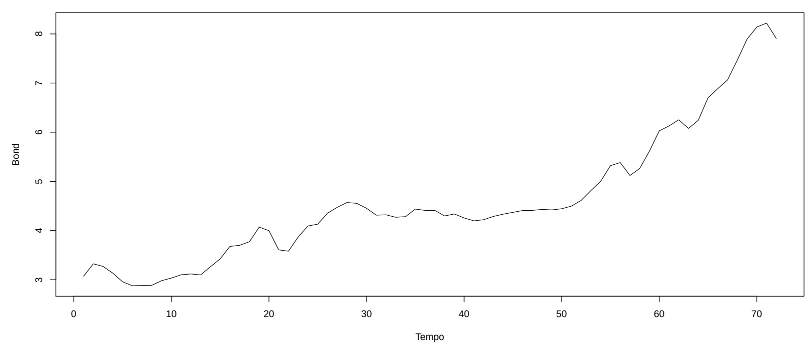

Figura 3.4: Gráfico da Série BOND.

Observando assim, que existe uma tendência na série, então será necessário aplicar uma diferença, para tentar deixar a série livre de tendências. Formando assim, o gráfico abaixo, da Figura 3.5.

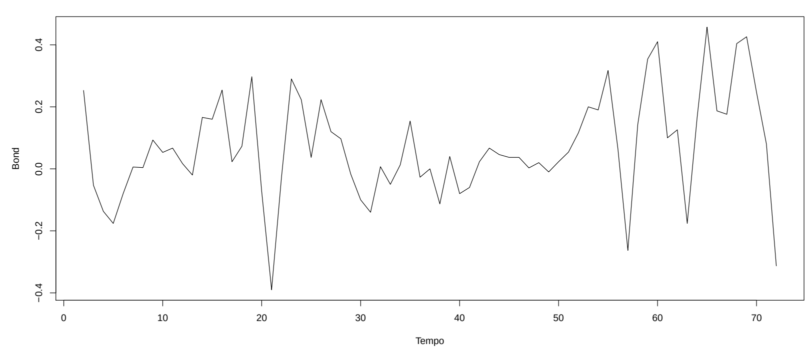

Figura 3.5: Gráfico da Série BOND com uma diferença.

Após isso, serão feitos gráficos das FAC's e FACP's, da série após a diferença, para se ter uma melhor noção de como a série funciona, e verificar quais modelos poderiam melhor se ajustar a esta série. Na Figura 3.6 encontram-se os gráficos das FAC's e FACP's.

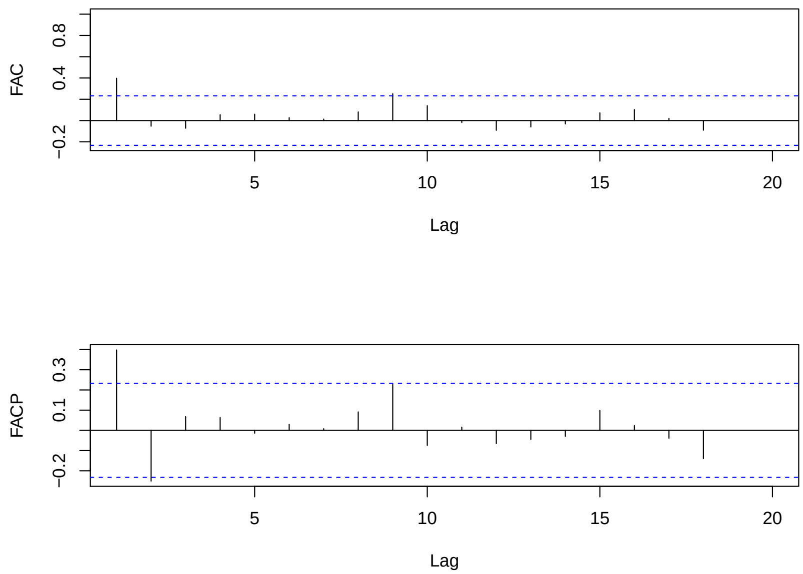

Figura 3.6: Gráfico das FAC's e FACP's.

Após analisar os gráficos acima, conclui-se que existem três possibilidades de modelos, para a qual a série após tirada uma diferença poderá ser ajustada:

- O gráfico das FAC's sugerem um modelo (médias móveis) MA(1) pois, os lag 1 é o único diferente de 0, e as FACP's aparentam um decaimento exponencial com senóide, indicando um MA(1).
- O gráfico das FACP's sugerem um modelo (autoregressivo) AR(2), pois para os lags > 2 todos os demais valores estão dentro do intervalo de confiança e as FAC's aparentam um decaimento exponencial com senóide.
- Ou uma combinação dos dois modelos, formando um modelo misto (médias móveis integrado com médias movéis) ARMA(2,1).

Ajustando assim aos modelos, MA(1), AR(2) e ARMA(2,1) temos que,

Pelo Modelo MA(1):

Após realizado as estimações do coeficientes, encontrou-se o processo abaixo.

$$\hat{Y}_t = 0.0670 + \varepsilon_t + 0.5572\varepsilon_{t-1}$$

Em que todos os coeficientes do modelos apresentam significância, como pode ser observado na Tabela 3.1, em que o intercept, seria o valor do termo constate no modelo MA(1) estimado.

Tabela 3.1: Significâncias dos coeficientes.

	ma1	intercept
significância	9.056494e-08	6.802578e-03

Com relação a análise de resíduos, pelos gráficos da Figura 3.7, tem-se que ao longo do tempo os resíduos não apresentam nenhum padrão aparente e parecem estar aleatoriamente distribuídos ao longo do tempo em torno do zero, e variância constante.

A respeito das FAC's dos resíduos com lag $\neq 1$ são estatisticamente iguais a zero, indicando que os resíduos são não correlacionados.

E a estatística de Ljung-Box, verifica quanto ao valores-p do teste de hipótese de que os resíduos são não correlacionados, como os valores são altos, a hipótese nula não foi rejeitada.

Será verificado quanto a distribuição dos resíduos, pois se os resíduos apresentarem distribuição normal, a não correlação implicará independência, e alguns testes estatísticos poderam ser utilizados com mais credibilidade.

Realizado o teste de Kolmogorvo-Smirnov para verificação de normalidade, encontrou-se um valor-p de 2.224e-10, o que indica que a hipótese nula de que os resíduos vêm da realização de uma variável aleatória com uma distribuição normal, foi fortemente rejeitada.

Pelo Modelo AR(2):

Após realizado as estimações do coeficientes, encontrou-se o processo abaixo.

$$\hat{Y}_t = 0.05012 + 0.5781\hat{Y}_{t-1} - 0.3173\hat{Y}_{t-2}$$

Em que todos os coeficientes do modelos apresentam significância, como pode ser observado na Tabela 3.2, em que o valor constante no modelo seria o "intercept"que encontra-se na tabela multiplicado por um menos a soma dos demais coeficientes do modelo AR(2) estimado.

Tabela 3.2: Significâncias dos coeficientes.

	ar1	ar2	intercept
significância	4.415847e-06	4.905385e-03	2.144352e-03

Com relação a análise de resíduos, pelos gráficos da Figura 3.7, tem-se que ao longo do tempo os resíduos não apresentam nenhum padrão aparente e parecem estar aleatoriamente distribuídos ao longo do tempo em torno do zero, e variância constante. A respeito

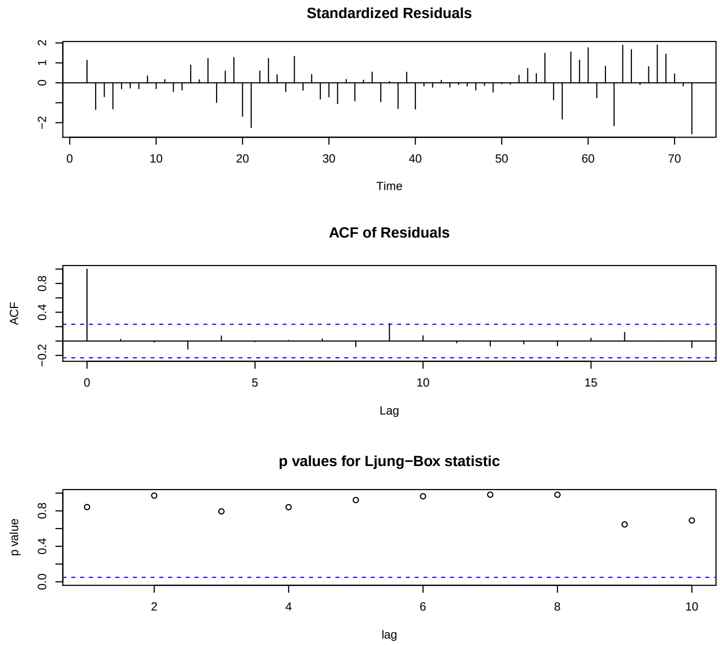

Figura 3.7: Gráficos das Análises de Resíduos.

das FAC's dos resíduos com lag $\neq 1$ são estatisticamente iguais a zero, indicando que os resíduos são não correlacionados.

E a estatística de Ljung-Box, verifica quanto ao valores-p do teste de hipótese de que os resíduos são não correlacionados, como os valores são altos, a hipótese nula não foi rejeitada.

Será verificado quanto a distribuição dos resíduos, pois se os resíduos apresentarem distribuição normal, a não correlação implicará independência, e alguns testes estatísticos poderam ser utilizados com mais credibilidade.

Realizado o teste de Kolmogorvo-Smirnov para verificação de normalidade, encontrou-se um valor-p de 8.462e-10, o que indica que a hipótese nula de que os resíduos vêm da realização de uma variável aleatória com uma distribuição normal, foi fortemente rejeitada.

Pelo Modelo ARMA(2,1):

Após realizado as estimações do coeficientes, encontrou-se que todos os coeficientes do modelos não apresentam significância, como pode ser observado na Tabela 3.3. E portanto, irá-se desconsiderar este possível modelo, para modelagem.

Comparando os modelos MA(1) e AR(2)

Assim, temos dois canditados para modelar a série temporal em questão, os modelos

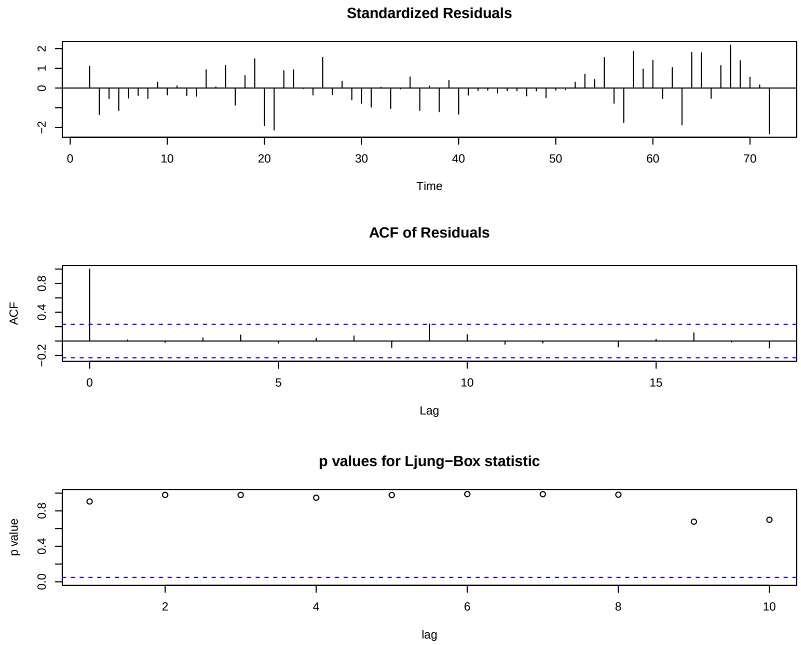

Figura 3.8: Gráficos das Análises de Resíduos.

Tabela 3.3: Significâncias dos coeficientes.

	ar1	ar2	ma1	intercept
significância	0.11774780	0.10990448	0.25035247	0.00332605

MA(1) e AR(2). Serão utilizados três critérios de informação sobre o ajuste do modelo (AIC - Critério de informação de Akaike, BIC - Critério de Informação Bayesiano e FPE - Erro Final de Predição), pra ajudar a escolher o melhor ajuste, já que os parâmetros dos dois modelos foram significativos, e os resíduos possuem mesmas características. A Tabela 3.4 mostra o resultados para cada critério de informação sobre cada modelo. Para a escolha do melhor modelo, com relação a esses critérios, utiliza-se o modelo de menores valores, e portanto o modelo que melhor se ajusta, seria o MA(1). Apesar da diferença ser bem pequena entre os dois modelos quanto a esses critérios, levando em conta o principio da parcimônia, o melhor modelo seria o MA(1) também, pois o modelo possui apenas um parâmetro.

Tabela 3.4: Critérios de informação, AIC, BIC e FPE, sobre o ajuste dos modelos.

	AICn	BICn	FPE
MA(1)	-0.9512322	-0.9273611	0.02217271
AR(2)	-0.9375743	-0.9057462	0.0224571

4 Anexo I

Analisando a série

Leitura dos dados utilizados e gráfico da série.

```
R> bond<-read.csv("F:\\mestrado-ufrn-2015.2016\\ufrn-2015.2\\
R> series-temporais\\prova-1\\bond.csv", header=T, dec=".", sep=";")
R> attach(bond)
R> seriesd<-ts(bond)
R> plot(seriesd,xlab="Tempo",ylab="Bond",main="")
```

Gráfico da série com uma diferença.

```
R> serie<-diff(seriesd)
R> plot(serie,xlab="Tempo",ylab="Bond",main="")
```

Gráfico das FAC's e FACP's.

```
R> par(mfrow=c(2,1))
R> acf(serie,main="",xlab="Lag",ylab="FAC", xlim=c(1,20))
R> pacf(serie,main="",xlab="Lag",ylab="FACP",  xlim=c(1,20))
```

Ajustando ao modelo MA(1)

```
R> ma1<-arima(serie,order=c(0,0,1))
R> ma1

Call:
arima(x = serie, order = c(0, 0, 1))

Coefficients:
         ma1  intercept
      0.5572     0.0670
s.e.  0.0960     0.0264

sigma^2 estimated as 0.02067:  log likelihood = 36.77,  aic = -67.54
```

Verificando a significância dos coeficientes estimados.

```
R> dp.coef<-sqrt(diag(ma1$var.coef))
R> t.valor<-ma1$coef/dp.coef
R> gl<-length(serie)-length(ma1$coef)
R> valor.p<-pt(abs(t.valor),gl,lower.tail=F) #Valor-p unilateral!
R> valor.p
         ma1    intercept
9.056494e-08 6.802578e-03
```

Gráficos dos resíduos ao longo do tempo, as FAC's dos resíduos e o teste de Ljung-Box para vários lags.

```
R> tsdiag(ma1)
```

Verificação de normalidade dos resíduos.

```
R> ks.test(ma1\$residuals,"pnorm")

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  ma1\$residuals
D = 0.3927, p-value = 2.224e-10
alternative hypothesis: two-sided
```

Ajustando ao modelo AR(2)

```
R> ar2<-arima(serie,order=c(2,0,0))
R> ar2

Call:
arima(x = serie, order = c(2, 0, 0))

Coefficients:
         ar1      ar2  intercept
      0.5781  -0.3173     0.0678
s.e.  0.1203   0.1194     0.0229

sigma^2 estimated as 0.02036:  log likelihood = 37.28,  aic = -66.57
```

Verificando a significância dos coeficientes estimados.

```
R> dp.coef<-sqrt(diag(ar2$var.coef))
R> t.valor<-ar2$coef/dp.coef
R> gl<-length(serie)-length(ar2$coef)
R> valor.p<-pt(abs(t.valor),gl,lower.tail=F) #Valor-p unilateral!
R> valor.p
         ar1          ar2    intercept
4.415847e-06 4.905385e-03 2.144352e-03
```

Gráficos dos resíduos ao longo do tempo, as FAC's dos resíduos e o teste de Ljung-Box para vários lags.

```
R> tsdiag(ar2)
```

Verificação de normalidade dos resíduos.

```
R> ks.test(ar2$residuals,"pnorm")

        One-sample Kolmogorov-Smirnov test

data:  ar2$residuals
D = 0.3815, p-value = 8.462e-10
alternative hypothesis: two-sided
```

Ajustando ao modelo ARMA(2,1)

```
R> arma21<-arima(serie,order=c(2,0,1))
R> arma21

Call:
arima(x = serie, order = c(2, 0, 1))

Coefficients:
         ar1      ar2     ma1  intercept
      0.3837  -0.2345  0.2157     0.0675
s.e.  0.3206   0.1893  0.3185     0.0241

sigma^2 estimated as 0.02024:  log likelihood = 37.48,  aic = -64.97
```

Verificando a significância dos coeficientes estimados.

```
R> dp.coef<-sqrt(diag(arma21$var.coef))
R> t.valor<-arma21$coef/dp.coef
R> gl<-length(serie)-length(arma21$coef)
R> valor.p<-pt(abs(t.valor),gl,lower.tail=F) #Valor-p unilateral!
R> valor.p
       ar1        ar2        ma1  intercept
0.11774780 0.10990448 0.25035247 0.00332605
```

Cálculo dos critérios de informação, AIC, BIC e FPE.

```
R> csm<-function(objeto)
R+ {
R+ aicn<-AIC(objeto,k=2)/length(objeto$res)
R+ bicn<-AIC(objeto,k=log(length(objeto))) /length(objeto$res)
R+ EQM<-objeto$sigma2*length(objeto$resid)/
R+ (length(objeto$resid)-length(objeto$coef))
```

```
R+ fpe<-EQM*(1+(length(objeto$coef)+1)/length(objeto$resid))
R+ saida<-matrix(c(aicn,bicn,fpe),byrow=T,nrow=1,
R+ dimnames=list(c("Valor"),c("AICn","BICn","FPE")))
R+ saida
R+ }
R>
R> csm(ma1)
            AICn       BICn        FPE
Valor -0.9512322 -0.9273611 0.02217271
R>
R> csm(ar2)
            AICn       BICn       FPE
Valor -0.9375743 -0.9057462 0.0224571
```