PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
MATEMÁTICA APLICADA E ESTATÍSTICA
DISCIPLINA: **INFERÊNCIA**
PROFESSORA: DIONE MARIA VALENÇA

UFRN
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA

3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1. Verifique por simulação que, a densidade da amostra sob o verdadeiro valor do parâmetro θ_0, excede qualquer outra sob um valor de $\theta \neq \theta_0$ com alta probabilidade quando o tamanho da amostra é grande (exercício computacional dado em sala) ou prove o teorema abaixo:
   "Teo. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de de $X \sim f(x;\theta)$ com $\theta \in \Theta$. Seja θ_0 o verdadeiro valor de θ. Então (sob condições de regularidade) temos que:
   $$\lim_{n\to\infty} P_{\theta_0}[L(\theta_0; X) > L(\theta; X)] = 1 \; para\ todo\ \theta \in \Theta - \{\theta_0\} \text{ ''}$$

2. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim f(x,\theta)$. Considerando válidas a condições de regularidade, prove o teorema dado em sala, ou seja se $g(\theta)$ é uma função contínua e diferenciável de θ, então o estimador de máxima verossimilhança $g(\hat{\theta})$ é assintoticamente eficiente.

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de X com distribuição dada abaixo, com $\beta > 0$ e α conhecido. Obtenha o estimador de máxima verossimilhança de β
   $$P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & se\ x \leq 0 \\ \left(x/\beta\right)^{\alpha} & se\ x \in (0,\beta) \\ 1 & se\ x \geq \beta \end{cases}$$

4. Sejam X_1, X_2, X_3 uma amostra aleatória de $X \sim$ Bernoulli(θ) para $\theta \in \Theta = \{0.5, 0.7\}$.
   a) Obtenha o EMV de θ
   b) Considerando a amostra o observada x={1,0,0}, obtenha a estimativa de MV de θ.

5. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ a. a. de $X \sim f(x \mid \theta) = \theta(1+x)^{-(1+\theta)} I_{(0,\infty)}(x)$, com $\theta \in (0,\infty)$. Obtenha
   a) O EMV de $1/\theta$;
   b) A distribuição assintótica do *EMV de* $1/\theta$;

6. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de X . Obtenha o EMV de θ em cada caso:
   a) $X \sim$ Geometrica(θ) b) $X \sim N(0, \theta)$ c) $X \sim \exp(\theta)$

7. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim U(a,b)$ $a < b$. Obtenha o EMV de $\boldsymbol{\theta}$ para:
   a) $a = \theta - 2$ e $b = \theta + 2$, $\theta > 0$ b) $a = \theta_1$ e $b = \theta_2$

8. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\theta = (\mu,\sigma^2)$ Obtenha o Estimador de Máxima Verossimilhança de θ e verifique se de fato este representa um máximo de $\log L(\theta; \mathbf{x})$.

9. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim f(x \mid \theta)$. Obtenha o EMV de $g(\theta)$ nas seguintes situações:
   a) $X \sim$Poisson (θ) com $g(\theta) = P(X=1)$; b) $X \sim N(\theta,1)$ com $g(\theta) = P(X<0)$; c) $X \sim \exp(\theta)$ com $g(\theta) = P(X>1)$

10. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, $\theta = (\mu,\sigma^2)$. Obtenha o Estimador de Máxima Verossimilhança de $g(\theta) = x_p$, em que x_p é tal que $P(X < x_p) = p$

11. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ amostra aleatória de $X \sim f(x;\theta) = \frac{1+\theta x}{2} I_{(-1,1)}(x)$, com $\theta \in (-1,1)$. Reproduza no exemplo 3.1.6 de BS(2001) pág 40, os procedimentos iterativo dos métodos de Newton-Raphson e Escore, usando uma amostra de tamanho 10 (gerada ou retirada da Tabela 3.1). Considere como valor inicial a estimativa de θ obtido pelo método dos momentos e use como critério de parada o valor $\varepsilon = 10^{-8}$.
    Obs.: BS(2001) denota a referência do livro texto : Bolfarine e Sandoval (2001).