第二章

λ-矩阵与矩阵的Jordan标准形

2.1 λ-矩阵及标准形

定义1.1 设 $a_{ij}(\lambda)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$为数域$F$上的多项式，则称以$a_{ij}(\lambda)$为元素的$m\times n$矩阵

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

为多项式矩阵或$\lambda-$矩阵。

Remark1：称多项式$a_{ij}(\lambda)$中（$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$）最高次数为$A(\lambda)$的次数。

Remark2：数字矩阵和特征矩阵$\lambda E-A$都是λ−矩阵的特例。

Remark3：$\lambda-$矩阵的加法、数乘和乘法运算、矩阵的转置与数字矩阵相同，而且有相同的运算规律。

Remark4：一般情况下，λ−矩阵的行列式$|A(\lambda)|$是λ的一个多项式。

定义1.2：如果$\lambda-$矩阵$A(\lambda)$中有一个$r(r\geq 1)$阶子式不为零，而所有的$r+1$阶子式（如果有的话）全为零，则称$A(\lambda)$的秩为r，记为$rankA(\lambda)=r$.

Remark1：零矩阵的秩为0。

Remark2：由于$A(\lambda)$的行列式及一切子式都是λ的多项式，所以上述定义中的$r+1$阶子式全为零的含义是不论λ取何值，该子式均为零。

2.1.1 λ-矩阵的概念

定义1.3：一个n阶$\lambda-$矩阵$A(\lambda)$称为可逆的，如果有一个n阶$\lambda-$矩阵B(λ),满足

$$A(\lambda)B(\lambda)=B(\lambda)A(\lambda)=E$$

这里E为n阶单位矩阵.$B(\lambda)$称为$A(\lambda)$的可逆矩阵，记为$A^{-1}(\lambda)$.

定理1.1：一个n阶$\lambda-$矩阵可逆的充要条件是$detA(\lambda)$是一个非零常数。

Remark1：该定理给出了一种求λ −矩阵逆矩阵的方法。

例1. 已知$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda+1 & \lambda\\ \lambda & \lambda-1\end{bmatrix}$, 求$A^{-1}(\lambda)$.

解： 因为$|A(\lambda)|=-1\neq 0$，从而

$$\tilde{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda-1 & -\lambda\\ -\lambda & \lambda+1\end{bmatrix}$$

故

$$A^{-1}(\lambda)=\begin{bmatrix}-\lambda+1 & \lambda\\ \lambda & -\lambda-1\end{bmatrix}$$

Remark2：n阶λ-矩阵$A(\lambda)$的秩为n，不等价于$A(\lambda)$可逆，这是与数字矩阵的不同之处。

例如，$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{bmatrix}$的秩为2，但是它不可逆。

定义1.4：下列三种类型的变换，叫做λ –矩阵的初等变换：

（1）矩阵的任意两行（列）互换位置；

（2）非零常数c乘矩阵的某一行（列）；

（3）矩阵的某一行（列）的$\varphi(\lambda)$倍加到另一行（列）上去，其中$\varphi(\lambda)$是λ的一个多项式。

对单位矩阵实施一次上述三种类型的初等变换，便得到相应的三种λ –矩阵的初等矩阵$P(i,j), P\big(i(c)\big), P\big(i,j(\varphi)\big)$，即

2.1.2 λ-矩阵的初等变换

$$P(i,j)=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{— — } i\text{行} \\ \\ \text{— — } j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$P(i(c))=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & c & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{--第}i\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

$$P(i,j(\varphi))=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \varphi(\lambda) & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{--第}i\text{行} \\ \\ \text{--第}j\text{行} \\ \\ \\ \end{array}$$

定理1.2：对一个 $m \times n$ 的λ-矩阵 $A(\lambda)$的行作初等行变换，相当于用相应的m阶初等矩阵左乘$A(\lambda)$；对$A(\lambda)$的列作初等列变换，相当于用相应的n阶初等矩阵右乘$A(\lambda)$.

初等矩阵都是可逆的，且

$$P(i,j)^{-1} = P(i,j); \qquad P\big(i(c)\big)^{-1} = P\big(i(c^{-1})\big);$$

$$P\big(i,j(\varphi)\big)^{-1} = P\big(i,j(-\varphi)\big).$$

2.1.2 λ-矩阵的初等变换

定义1.5：如果$A(\lambda)$经过有限次的初等变换后变成$B(\lambda)$，则称$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价，记之为$A(\lambda) \simeq B(\lambda)$.

定理1.3：$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的充要条件是存在两个可逆矩阵$P(\lambda)$与$Q(\lambda)$, 使得

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda).$$

λ-矩阵的等价关系满足：

（1）自反性：每一个λ-矩阵与自己等价；

（2）对称性：若$A(\lambda) \simeq B(\lambda)$，则$B(\lambda) \simeq A(\lambda)$；

（3）传递性：$A(\lambda) \simeq B(\lambda)$, $B(\lambda) \simeq C(\lambda)$, 则 $\mathrm{A}(\lambda) \simeq C(\lambda)$.

引理1.1：设λ −矩阵$A(\lambda)$的左上角元素$a_{11}(\lambda) \neq 0$,并且$A(\lambda)$中至少有一个元素不能被它整除，那么一定可以找到一个与$A(\lambda)$等价的矩阵$B(\lambda)$，它的左上角元素也不为零，但次数比$a_{11}(\lambda)$的次数低。

定理1.4：任意一个非零的$m \times n$阶λ-矩阵$A(\lambda)$都等价于一个“对角形”矩阵，即

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中$r \geq 1, d_i(\lambda)$是首项系数为1的多项式，且

$$d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)(i = 1,2,\cdots,r-1)$$

记号 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)$表示$d_{i+1}(\lambda)$能被$d_i(\lambda)$整除。

定义1.6：与$A(\lambda)$等价的形如

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & d_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

的“对角形”矩阵称为$A(\lambda)$的Smith标准形，$d_1(\lambda), d_2(\lambda), \cdots, d_r(\lambda)$称为$A(\lambda)$的不变因子。

Remark：初等变换的一些记号，r_i表示矩阵第i行，c_j表示矩阵第j列：（以行为例说明）

（1）$r_i \leftrightarrow r_j$表示互换矩阵的第i行和第j行；

（2）ar_i表示矩阵第i行乘以常数a;

（3）$\varphi(\lambda)r_i + r_j$表示矩阵第$i$行的$\varphi(\lambda)$倍加到第$j$行。

例2. 用初等变换把λ −矩阵$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & \lambda & 2\\ \frac{1}{2}\lambda^2+2 & \lambda-\frac{1}{2} & \lambda\\ 0 & \frac{1}{2}\lambda & \lambda+1\end{bmatrix}$化为Smith标准形。

解： $A(\lambda)$的元素中有非零常数2

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda & \lambda & 2\\ \dfrac{1}{2}\lambda^2+2 & \lambda-\dfrac{1}{2} & \lambda\\ 0 & \dfrac{1}{2}\lambda & \lambda+1\end{bmatrix}\xrightarrow[c_1\leftrightarrow c_3]{}\begin{bmatrix}2 & \lambda & \lambda\\ \lambda & \lambda-\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\lambda^2+2\\ \lambda+1 & \dfrac{1}{2}\lambda & 0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-\frac{\lambda}{2}c_1+c_3]{-\frac{\lambda}{2}c_1+c_2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \lambda & -\frac{1}{2}\lambda^2+\lambda-\frac{1}{2} & 2 \\ \lambda+1 & -\frac{1}{2}\lambda^2 & -\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{\lambda+1}{2}r_1+r_3]{-\frac{\lambda}{2}r_1+r_2}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2+\lambda-\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 & -\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[0.5c_1,\ 2c_2,\ 2c_3]{}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2+2\lambda-1 & 4 \\ 0 & -\lambda^2 & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -\lambda^2+2\lambda-1 \\ 0 & -\lambda^2-\lambda & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

2.1.3 λ-矩阵的Smith标准形

$$\xrightarrow[]{\frac{(\lambda^2+\lambda)}{4}r_2+r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -\lambda^2+2\lambda\text{-}1\\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(-\lambda^4+\lambda^3\text{-}3\lambda^2\text{-}\lambda)\end{bmatrix}\xrightarrow[4r_3]{\frac{(\lambda^2-2\lambda+1)}{4}c_2+c_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^4+\lambda^3\text{-}3\lambda^2\text{-}\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-c_3]{\frac{1}{4}c_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda^4-\lambda^3+3\lambda^2+\lambda\end{bmatrix}.$$

例3. 用初等变换把矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{bmatrix}$化成smith标准形 .

解: $\boldsymbol{A}(\lambda)$的元素有公因子λ，利用初等变换将左上角元素变为λ.

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda^3-\lambda & 2\lambda^2\\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1\leftrightarrow c_2}\begin{bmatrix}2\lambda^2 & \lambda^3-\lambda\\ 3\lambda & \lambda^2+5\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{bmatrix}3\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ 2\lambda^2 & \lambda^3-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{3}c_1}\begin{bmatrix}\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ \frac{2}{3}\lambda^2 & \lambda^3-\lambda\end{bmatrix}$$

然后用初等变换把公因子λ所在的行、列的其余元素都化为零。

$$A(\lambda)\longrightarrow\begin{bmatrix}\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ \dfrac{2\lambda^2}{3} & \lambda^3-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{(-\frac{2\lambda}{3})r_1+r_2}\begin{bmatrix}\lambda & \lambda^2+5\lambda\\ 0 & \dfrac{\lambda}{3}(\lambda^2-10\lambda-3)\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(\lambda+5)c_1+c_2}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \dfrac{\lambda}{3}(\lambda^2-10\lambda-3)\end{bmatrix}\xrightarrow{3r_2}\begin{bmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda(\lambda^2-10\lambda-3)\end{bmatrix}.$$

例4. 用初等变换把矩阵 $\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$ 化成smith标准形．

解： $\boldsymbol{A}(\lambda)$的元素没有公因子，也没有常数元素，用初等变换把矩阵中的某个元素变为常数。

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[-(1+\lambda^2)r_1+r_3]{(-\lambda)r_1+r_2}\begin{bmatrix}1 & \lambda^2+\lambda & 0\\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda\\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{-(\lambda^2+\lambda)c_1+c_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda\\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}$$

余下的2×2阶矩阵有公因子λ，如同例3.

$$A(\lambda)\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda & -\lambda\\ 0 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda & -\lambda^2\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda\\ 0 & -\lambda^2 & -\lambda^4-\lambda^3-\lambda\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\lambda r_2+r_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & -\lambda^3-\lambda^2+\lambda\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow{-(\lambda^2+\lambda-1)c_2+c_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -\lambda & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2-\lambda\end{bmatrix}\xrightarrow[-r_3]{-r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)\end{bmatrix}.$$

总结： 在对$A(\lambda)$用初等变换化成Smith标准形时，$A(\lambda)$的特点不外乎三种：

- $A(\lambda)$中的元素至少有一个非零常数（属$A(\lambda)$ 无公因子情况），如例2；
- $A(\lambda)$中的元素有公因子，如例3；
- $A(\lambda)$中的所有元素既无非零常数又无公因子，如例4；

例5. 用初等变换把λ −矩阵$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda(\lambda+1) & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}$化为Smith标准形。

解： $A(\lambda)$虽然是对角形，但不是Smith标准形。

$$A(\lambda)=\begin{bmatrix}\lambda(\lambda+1) & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{bmatrix}\overset{-r_1+r_3}{\simeq}\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ -\lambda^2-\lambda & 0 & \lambda^2+2\lambda+1\end{bmatrix}$$

$$\overset{c_1+c_3}{\simeq}\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & \lambda^2+\lambda\\ 0 & \lambda & 0\\ -\lambda^2-\lambda & 0 & \lambda+1\end{bmatrix}\overset{c_2+c_3}{\simeq}\begin{bmatrix}\lambda^2+\lambda & 0 & \lambda^2+\lambda\\ 0 & \lambda & \lambda\\ -\lambda^2-\lambda & 0 & \lambda+1\end{bmatrix}$$

$$\underset{\simeq}{-r_2+r_3}\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & \lambda^2+\lambda \\ 0 & \lambda & \lambda \\ -\lambda^2-\lambda & -\lambda & 1 \end{bmatrix} \quad \underset{\simeq}{c_1 \leftrightarrow c_3}\begin{bmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & \lambda^2+\lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & -\lambda^2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underset{\simeq}{r_1 \leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -\lambda^2-\lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda^2+\lambda & 0 & \lambda^2+\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} -\lambda r_1+r_2 \\ -(\lambda^2+\lambda)r_1+r_3 \\ \simeq \end{array}\begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -\lambda^2-\lambda \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 0 & \lambda(\lambda^2+\lambda) & (\lambda^2+\lambda)(\lambda^2+\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{\lambda c_1 + c_2 \\ (\lambda^2+\lambda)c_1 + c_3}}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & \lambda^3+\lambda^2 \\ 0 & \lambda(\lambda^2+\lambda) & (\lambda^2+\lambda)(\lambda^2+\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$\overset{-\lambda c_2 + c_3}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2+\lambda & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda^2+\lambda) & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{-\lambda r_2 + r_3}{\simeq} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

2.1.4 Smith标准形的唯一性

定义1.7：设$\lambda-$矩阵$A(\lambda)$的秩为r,对于正整数$k,1 \le k \le r, A(\lambda)$必有非零的$k$阶子式，$A(\lambda)$的全部$k$阶子式的首项系数为1的最大公因式$D_k(\lambda)$称为$A(\lambda)$的$k$阶行列式因子。

定理1.5：等价矩阵有相同的各阶行列式因子，从而有相同的秩。

提示：$\lambda-$矩阵经过一次初等变换，秩与各阶行列式因子是不变。

定理1.6：$\lambda-$矩阵的Smith标准形是唯一的。

证明：设λ-矩阵的smith标准形为

$$\operatorname{diag}(d_1(\lambda),\ d_2(\lambda),\ \cdots,\ d_r(\lambda),0,\cdots,0),$$

其中$d_i(\lambda)(i=1,2,\cdots,r)$是首项系数为 1 的多项式,且 $d_i(\lambda)|d_{i+1}(\lambda)(i=1,2,\cdots,r\text{-}1)$

从而，k阶行列式因子为

$$D_k(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)\ \cdots\ d_k(\lambda)(k=1,2,\cdots,r).$$

从而 $d_1(\lambda)=D_1(\lambda)$，$d_2(\lambda)=\dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)},\cdots,d_r(\lambda)=\dfrac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}.$

据此，矩阵$A(\lambda)$的不变因子由行列式因子唯一确定。

定理1.7：λ −矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的充要条件是对于任何的k,它们的k阶行列式因子相同。

证明：必要性：

设λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \boldsymbol{B}(\lambda)$，由定理1.5知$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$有相同的各阶行列式因子．

充分性：

设λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$有相同的行列式因子，从而$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$有相同的不变因子，从而

$$\boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} \boldsymbol{d}_1(\lambda) & & & & & \\ & \boldsymbol{d}_2(\lambda) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \boldsymbol{d}_r(\lambda) & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \simeq \boldsymbol{B}(\lambda).$$

2.1.4 Smith标准形的唯一性

定理1.8：λ－矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的充要条件是$A(\lambda)$与$B(\lambda)$有相同的不变因子。

推论1.1：λ－矩阵$A(\lambda)$可逆的充要条件是$A(\lambda)$与单位矩阵等价。

证明：必要性：

设$\boldsymbol{A}(\lambda)$是$\boldsymbol{n}$阶可逆矩阵，由定理1.1知$\left|\boldsymbol{A}(\lambda)\right| = \boldsymbol{d}$为一非零常数.

即$\boldsymbol{A}(\lambda)$的$\boldsymbol{n}$阶行列式因子$\boldsymbol{D}_n(\lambda) = 1$，由于$\boldsymbol{D}_k(\lambda) \mid \boldsymbol{D}_{k+1}(\lambda)(\boldsymbol{k} = 1,2,\cdots,\boldsymbol{n}-1)$,

所以$\boldsymbol{D}_k(\lambda) = 1(\boldsymbol{k} = 1,2,\cdots,\boldsymbol{n})$.于是$\boldsymbol{d}_k(\lambda) = 1(\boldsymbol{k} = 1,2,\cdots,\boldsymbol{n})$.

即$\boldsymbol{A}(\lambda)$的标准形为单位矩阵.

充分性：

设$\boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \boldsymbol{E}$，从而$\boldsymbol{D}_n(\lambda) = \left|\boldsymbol{A}(\lambda)\right| = 1 \neq 0, \boldsymbol{A}(\lambda)$可逆。

推论1.2： λ −矩阵$A(\lambda)$可逆的充要条件是$A(\lambda)$可以表示成一系列初等矩阵的乘积。

证明：

$$\boldsymbol{A}(\lambda)\text{可逆} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}(\lambda) \simeq \boldsymbol{E}_n \Leftrightarrow \exists\text{初等矩阵}\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\ldots,\boldsymbol{P}_l,\boldsymbol{Q}_1,\boldsymbol{Q}_2,\ldots,\boldsymbol{Q}_m,$$

$$\text{使得}\boldsymbol{A}(\lambda) = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\ldots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\ldots\boldsymbol{Q}_m$$

$$=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\ldots\boldsymbol{P}_l\boldsymbol{Q}_1\boldsymbol{Q}_2\ldots\boldsymbol{Q}_m.$$

作业1：设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，求$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$的Smith标准形和不变因子。

作业2：课后习题（90页）2-1（3）.

2.2 初等因子与相似条件

定义2.1 λ-矩阵的行列式因子$D_k(\lambda)$与不变因子$d_k(\lambda)$都是λ的多项式，它们都是由$A(\lambda)$的元素$a_{ij}(\lambda)$经过“加、减、乘”而得到。在复数域C内，作为多项式的不变因子$d_k(\lambda)$总可以分解为互不相同的一次因式方幂的乘积，令

$$
\begin{aligned}
d_1(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{12}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{1t}} \\
d_2(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{21}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{2t}} \\
&\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots \\
d_r(\lambda) &= (\lambda-\lambda_1)^{k_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{r2}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{rt}}
\end{aligned}
$$

因为 $$d_{k-1}(\lambda)|d_k(\lambda) \quad (k=2,\cdots,r)$$

所以 $$k_{1j} \le k_{2j} \le \cdots \le k_{rj} \ (j=1,2,\cdots,t)$$

这里$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$是$d_r(\lambda)$的全部相异零点，所以$k_{r1},k_{r2},\cdots k_{rt}$无一为零。但$k_{1j},k_{2j},\cdots,k_{r-1,j}$中（$j=1,2,\cdots,t$）可能出现零，而且若$k_{ij}=0(j=1,2,\cdots,t;i=1,2,\cdots,r-1)$,那么必有$k_{1j},=k_{2j}=\cdots=k_{i-1,j}=0$. 我们将

$$\begin{cases} (\lambda-\lambda_1)^{k_{11}}, & (\lambda-\lambda_2)^{k_{12}}, & \cdots, & (\lambda-\lambda_t)^{k_{1t}} \\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{21}}, & (\lambda-\lambda_2)^{k_{22}}, & \cdots, & (\lambda-\lambda_t)^{k_{2t}} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ (\lambda-\lambda_1)^{k_{r1}}, & (\lambda-\lambda_2)^{k_{r2}}, & \cdots, & (\lambda-\lambda_t)^{k_{rt}} \end{cases}$$

中不是常数的因子全体叫做$A(\lambda)$的初等因子。

例. 若λ矩阵的不变因子为

$$1,1,\cdots,1,\ (\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2(\lambda+1),(\lambda-1)^2(\lambda+1)(\lambda^2+1)^2,$$

那么它的初等因子为

$$(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda-1)^2,(\lambda+1),(\lambda+1),(\lambda-i)^2,(\lambda+i)^2$$

思考：两个λ-矩阵等价$\Rightarrow$它们有相同的不变因子

$\Rightarrow$它们有相同的初等因子。

反之，两个λ-矩阵有相同的初等因子$\overset{?}{\Rightarrow}$它们等价

例：$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-4)^2 & 0 \end{pmatrix}$；$B(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda-4)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

定理2.1 n阶λ-矩阵$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价的充要条件是它们的秩相等和有相同的初等因子。

证明： 必要性：

等价矩阵有相同的不变因子，从而有相同的初等因子.

充分性：

设矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$的秩为$\boldsymbol{r}$,并有相同的初等因子.

由初等因子定义知, $\boldsymbol{A}(\lambda)$与$\boldsymbol{B}(\lambda)$的$\boldsymbol{r}$ 阶不变因子$\boldsymbol{d}_r(\lambda)=\tilde{\boldsymbol{d}}_r(\lambda)$ ，

$$\boldsymbol{d}_r(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{k_{r1}}(\lambda-\lambda_2)^{k_{r2}}\cdots(\lambda-\lambda_t)^{k_{rt}}=\tilde{\boldsymbol{d}}_r(\lambda),$$

同样，对任意的$\boldsymbol{k}(1\le \boldsymbol{k}\le \boldsymbol{r}$）有$\boldsymbol{d}_k(\lambda)=\tilde{\boldsymbol{d}}_k(\lambda)$.

由定理1.8，有$\boldsymbol{A}(\lambda)\simeq \boldsymbol{B}(\lambda)$.

例1. 已知5×6的λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)$的秩为4，其初等因子为

$$\lambda,\ \lambda,\ \lambda^2,\ \lambda-1,\ (\lambda-1)^2,\ (\lambda-1)^3,\ (\lambda+2i)^3,\ (\lambda-2i)^3$$

试求$\boldsymbol{A}(\lambda)$的Smith标准形.

解：首先容易得到$A(\lambda)$的不变因子为

$$d_4(\lambda)=\lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda+2i)^3(\lambda-2i)^3$$

$$d_3(\lambda)=\lambda(\lambda-1)^2$$

$$d_2(\lambda)=\lambda(\lambda-1)$$

$$d_1(\lambda)=1$$

从而$A(\lambda)$的Smith标准形为

2.2.1 初等因子

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda-1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda-1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda-1)^3(\lambda^2+4)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

定理2. 2 设λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}(\lambda) & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C}(\lambda) \end{bmatrix}$为准对角形矩阵，则$\boldsymbol{B}(\lambda)$，$\boldsymbol{C}(\lambda)$的各个初等因子的全体是$\boldsymbol{A}(\lambda)$的全部初等因子.

定理2.3 设λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1(\lambda) & & & \\ & \boldsymbol{B}_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{B}_t(\lambda) \end{bmatrix}$为准对角形矩阵，

则$\boldsymbol{B}_1(\lambda)$，$\boldsymbol{B}_2(\lambda),\cdots,\boldsymbol{B}_t(\lambda)$的各个初等因子的全体是$\boldsymbol{A}(\lambda)$的全部初等因子.

定理2.4 设λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & & & & & \\ & f_2(\lambda) & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & f_r(\lambda) & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$,

则$f_1(\lambda), f_2(\lambda),\cdots,f_r(\lambda)$的所有一次因式幂的全体是$\boldsymbol{A}(\lambda)$的全部初等因子.

例2. 求λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda-\alpha & \boldsymbol{b}_1 & & \\ & \lambda-\alpha & \boldsymbol{b}_2 & \\ & & \ddots & \boldsymbol{b}_{n-1} \\ & & & \lambda-\alpha \end{bmatrix}$的不变因子和初等因子，

其中$\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{n-1}$都是常数，且$\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\cdots\boldsymbol{b}_{n-1}\neq 0$。

解：容易求得$\boldsymbol{A}(\lambda)$的行列式因子为$\boldsymbol{D}_1(\lambda)=\boldsymbol{D}_2(\lambda)=\cdots=\boldsymbol{D}_{n-1}(\lambda)=1$,

$\boldsymbol{D}_n(\lambda)=(\lambda-\alpha)^n$.

于是$\boldsymbol{A}(\lambda)$的不变因子是$\boldsymbol{d}_1(\lambda)=\boldsymbol{d}_2(\lambda)=\cdots=\boldsymbol{d}_{n-1}(\lambda)=1;\boldsymbol{d}_n(\lambda)=(\lambda\text{-}\alpha)^n$.

因而$\boldsymbol{A}(\lambda)$的初等因子只有一个是 $(\lambda-\alpha)^n$.

2.2.2 准对角形矩阵的初等因子

例3. 求λ-矩阵$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \lambda & \alpha_2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda+\alpha_1 \end{bmatrix}$的初等因子和标准形。

解：将$\boldsymbol{A}(\lambda)$的第2行，第3行,...,第$\boldsymbol{n}$行分别乘以$\lambda,\lambda^2,\ldots,\lambda^{n\text{-}1}$ 都加到第1行上去，得到

$$\boldsymbol{A}(\lambda)=\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \lambda & \alpha_2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda+\alpha_1 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \lambda & \alpha_2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda+\alpha_1 \end{bmatrix},$$

2.2.2 准对角形矩阵的初等因子

其中，$f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$.

易知,$|A(\lambda)| = (-1)^{n-1}(-1)^{n+1} f(\lambda) = f(\lambda) = D_n(\lambda)$和$D_{n-1}(\lambda) = 1$,

于是$D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = \cdots = D_{n-2}(\lambda) = 1$,

所以$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1, d_n(\lambda) = f(\lambda)$.

所以$A(\lambda)$的标准形为

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$

2.2.3 矩阵相似条件

数字矩阵的特征矩阵是λ-矩阵，它是研究数字矩阵的重要工具。下面我们将利用特征矩阵的等价来研究数字矩阵的相似。

引理2.1设$\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$是两个n阶数字矩阵，则

$$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Leftrightarrow (\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) \sim (\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}).$$

引理2.2 对于任意非零数字矩阵$\boldsymbol{A}$ 和λ- 矩阵$\boldsymbol{U}(\lambda)$ 、$\boldsymbol{V}(\lambda)$,一定存在λ-矩阵$\boldsymbol{Q}(\lambda)$ 、$\boldsymbol{R}(\lambda)$, 以及数字矩阵$\boldsymbol{U}_0$ 、$\boldsymbol{V}_0$ ，使得

$$\boldsymbol{U}(\lambda)=(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda)+\boldsymbol{U}_0,$$

$$\boldsymbol{V}(\lambda)=\boldsymbol{R}(\lambda)(\lambda \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{V}_0.$$

证明：把 $\boldsymbol{U}(\lambda)$改写成 $\boldsymbol{U}(\lambda)=\boldsymbol{D}_0\lambda^m+\boldsymbol{D}_1\lambda^{m-1}+\cdots+\boldsymbol{D}_{m-1}\lambda+\boldsymbol{D}_m$，这里 $\boldsymbol{D}_0,\boldsymbol{D}_1,\cdots,\boldsymbol{D}_{m-1}$, $\boldsymbol{D}_m$ 是数字矩阵，且 $\boldsymbol{D}_0\neq 0$.

如果 $\boldsymbol{m}=0$,则令 $\boldsymbol{Q}(\lambda)=0,\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{D}_0$.

如果 $\boldsymbol{m}>0$,即 $\boldsymbol{U}(\lambda)$是 $\boldsymbol{m}$次的，而 $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$是1 次的，所以 $\boldsymbol{Q}(\lambda)$ 是 $\boldsymbol{m}-1$ 次的. 不妨设

$$\boldsymbol{Q}(\lambda)=\boldsymbol{Q}_0\lambda^{m-1}+\boldsymbol{Q}_1\lambda^{m-2}+\cdots+\boldsymbol{Q}_{m-2}\lambda+\boldsymbol{Q}_{m-1},$$

这里 $\boldsymbol{Q}_i(\boldsymbol{i}=0,1,\ldots,\boldsymbol{m}-1)$ 是待定的数字矩阵，于是

$$\begin{aligned}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda)&=\lambda\boldsymbol{E}\boldsymbol{Q}(\lambda)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}(\lambda)\\&=\boldsymbol{Q}_0\lambda^m+(\boldsymbol{Q}_1-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_0)\lambda^{m-1}+\cdots+(\boldsymbol{Q}_k-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{k-1})\lambda^{m-k}\\&\quad+\cdots+(\boldsymbol{Q}_{m-1}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{m-2})\lambda-\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{m-1}\end{aligned}$$

要使得$\boldsymbol{U}(\lambda)=(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda)+\boldsymbol{U}_0$成立，只要

$$\boldsymbol{Q}_0=\boldsymbol{D}_0,\boldsymbol{Q}_1=\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_0,\boldsymbol{Q}_k=\boldsymbol{D}_k+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{k-1}$$
$$\boldsymbol{Q}_{m-1}=\boldsymbol{D}_{m-1}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{m-2},\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{D}_m+\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}_{m-1}.$$

对于$\boldsymbol{V}(\lambda)=\boldsymbol{R}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\boldsymbol{V}_0$,同样可证。

定理 2.5 $A \sim B \Leftrightarrow \lambda E - A \simeq \lambda E - B.$

证明： 必要性显然. 现证充分性.

设$\lambda E - A$ 与$\lambda E - B$ 等价，则存在可逆λ- 矩阵$U(\lambda), V(\lambda)$ 使得

$$\lambda E - A = U(\lambda)(\lambda E - B)V(\lambda) \qquad (1)$$

或

$$U^{-1}(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - B)V(\lambda) \qquad (1')$$

由引理2. 2知，存在λ-矩阵$Q(\lambda)$、$R(\lambda)$,以及数字矩阵U_0、V_0,

有

$$U(\lambda) = (\lambda E - A)Q(\lambda) + U_0, \qquad (2)$$

$$V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda E - A) + V_0, \qquad (3)$$

将（3）式代入（1'）式，得到

$$[U^{-1}(\lambda) - (\lambda E - B)R(\lambda)](\lambda E - A) = (\lambda E - B)V_0 \qquad (4)$$

上式右端为一个次数为 1 的λ-矩阵（除非$\boldsymbol{V}_0 = 0$），而左端$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$也是一个次数为 1 的$\lambda$-矩阵，所以

$$\boldsymbol{U}^{-1}(\lambda)\text{-}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{R}(\lambda) = \boldsymbol{P} \qquad (5)$$

是一个数字矩阵。因此（4）式可以写为

$$\boldsymbol{P}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}) = (\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{V}_0, \qquad (6)$$

现证$\boldsymbol{P}$可逆，且$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{V}_0$. 由(5)式可得

$$\boldsymbol{U}(\lambda)\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}-\boldsymbol{U}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{R}(\lambda)$$

即
$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{U}(\lambda)\boldsymbol{P}+\boldsymbol{U}(\lambda)(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{R}(\lambda) \qquad (7)$$

由(1)可把(7)改写成

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{U}(\lambda)\boldsymbol{P}+(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{V}^{-1}(\lambda)\boldsymbol{R}(\lambda) \qquad (8)$$

将(2)带入(8)得

$$\boldsymbol{E}=[(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{Q}(\lambda)+\boldsymbol{U}_0]\boldsymbol{P}+(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{V}^{-1}(\lambda)\boldsymbol{R}(\lambda)$$
$$=\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{P}+(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})[\boldsymbol{Q}(\lambda)\boldsymbol{P}+\boldsymbol{V}^{-1}(\lambda)\boldsymbol{R}(\lambda)]$$

比较两边λ-矩阵的次数知，上式右边第二项为零，故$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{P}$.

即 $$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{U}_0^{-1}.$$

由 $\boldsymbol{P}(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{V}_0$得

$$\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_0(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{V}_0=\lambda\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{V}_0-\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_0.$$

比较上式两端，有$\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{V}_0=\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{U}_0\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_0$,

故 $$\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{V}_0^{-1},\boldsymbol{A}=\boldsymbol{V}_0^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_0.$$

2.2.3 矩阵相似条件

Remark: 今后为叙述简便，约定对于一个数字矩阵A，称$\lambda E - A$的不变因子为A的不变因子，称$\lambda E - A$的初等因子为A的初等因子。

定理 2.6 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$有相同的初等因子。

定理2. 7 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$有相同的不变因子。

作业3：已知数字矩阵A的初等因子为$\lambda, \lambda, \lambda^2, (\lambda-1)^2, \lambda+1$,求$A$的阶数与$A$的不变因子及Smith标准形。

2.3 矩阵的Jordan标准形

定义 3.1 称 n_i 阶矩阵$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$ 为Jordan块.

设$J_1, J_2, \cdots, J_s$为Jordan块, 称准对角矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

为Jordan标准形.

在例2中已知Jordan块的初等因子为$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$，根据定理2.3知，Jordan标准形$J$的初等因子为$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_s)^{n_s}$. 因此，结合定理2.6可得下面结论：

定理 3.1 设$\boldsymbol{A}\in \boldsymbol{C}^{n\times n}$，$\boldsymbol{A}$的初等因子为

$$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},\quad (\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,\quad (\lambda-\lambda_s)^{n_s},$$

则$\boldsymbol{A}\sim \boldsymbol{J}$.

这里$J=\begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$. 其中 $\boldsymbol{J}_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & \mathbf{1} & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & \mathbf{1} \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$ $\quad \boldsymbol{i}=\mathbf{1},\mathbf{2},\cdots,\boldsymbol{s}$

称$\boldsymbol{J}$为矩阵$\boldsymbol{A}$ 的Jordan标准形.

若$n_i = 1$，J_1是1阶Jordan块，当矩阵A的Jordan标准形中的Jordan块全是1阶时，J便是对角矩阵，因此得到：

定理 3.2 $\boldsymbol{A}$可以对角化 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的初等因子都是一次因式。

例1. 求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$的Jordan标准形。

解：首先求A的初等因子. 对$(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$运用初等变换可得

$$\lambda\boldsymbol{E}\text{-}\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \lambda+1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda-4 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda-1 & \\ & & (\lambda-1)^2 \end{bmatrix}.$$

A的初等因子是$\lambda-1$，$(\lambda-1)^2$.

故A的Jordan标准形为$J=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

总结：求一个矩阵的Jordan标准形：

(1) 先求特征矩阵λE-A的初等因子（即为A的初等因子）；

(2) 根据初等因子，写出Jordan块；

(3) 最后组装Jordan标准形。

由定理3.1可知，对于任何一个矩阵A，存在$P \in C_n^{n\times n}$，满足$P^{-1}AP = J$,下面通过两个例子介绍变换矩阵P的求法。

例2. 求矩阵$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{bmatrix}$的Jordan标准形,并求变换矩阵$\boldsymbol{P}$.

解：$\lambda \boldsymbol{E} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \lambda-17 & 0 & 25 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ -9 & 0 & \lambda+13 \end{bmatrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2 \end{bmatrix}$.

因此，$\boldsymbol{A} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2.3.2 变换矩阵P

存在非奇异矩阵$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)$,使$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{J}$.

有 $$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix},$$

即 $$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2=2\boldsymbol{X}_2,\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{X}_2+2\boldsymbol{X}_3.$$

由 $(\boldsymbol{E}\text{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}_1=0$,求得$\boldsymbol{X}_1=(0,1,0)^T$；同理,求得$\boldsymbol{X}_2=(5,0,3)^T$,有$\boldsymbol{X}_3=(2,0,1)^T$.

所以 $$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_2,\boldsymbol{X}_3)=\begin{bmatrix}0&5&2\\1&0&0\\0&3&1\end{bmatrix}.$$

2.3.2 变换矩阵P

例3. 求化矩阵$A=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{bmatrix}$为Jordan标准形的变换矩阵$P$.

解：由例1知，$A\sim\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$.

故存在$P=(X_1,X_2,X_3)\in C_3^{3\times3}$,使得$AP=PJ$.

即 $(AX_1,AX_2,AX_3)=(X_1,X_2,X_3)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

得到 $AX_1 = X_1,\quad AX_2 = X_2,\quad AX_3 = X_2 + X_3,$

$$(E - A)X_1 = 0,\quad (E - A)X_2 = 0,\quad (E - A)X_3 = -X_2.$$

可见，X_1, X_2是A的特征值为1的两个线性无关的特征向量。

求解线性方程组$(E - A)X = 0$, 可以得到

$$\xi = (-1,1,0)^T,\quad \eta = (3,0,1)^T.$$

可以取$X_1 = \xi = (-1,1,0)^T$; 命$X_2 = k_1\xi + k_2\eta = (-k_1 + 3k_2, k_1, k_2)^T$,
确定k_1, k_2满足(1)$(E - A)X_3 = -X_2$有解; (2)X_1, X_2线性无关.

即确定k_1, k_2,使$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 - 3k_2 \\ -k_1 \\ -k_2 \end{bmatrix}$有解.

若使系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩，得到$k_1 = k_2$,

且其解为 $x_1 = -x_2 + 3x_3 - k_1$，其中k_1为任意非零常数.

取$k_1 = 1$，有 $X_2 = (2,1,1)^T, X_3 = (2,0,1)^T$.

于是 $$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

已知常系数线性微分方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \qquad (1)$$

2.3.3 Jordan标准形的应用

记 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} \\ \vdots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} \end{pmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} a_{11} \; a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \; a_{22} \cdots a_{21} \\ \cdots \;\; \cdots \cdots\cdots \\ a_{n1} \; a_{n2} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$

则方程组（1）可写成矩阵形式 $\dfrac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=AX$ (2)

设J是A的Jordan标准形，则$P^{-1}AP=J$.

令 $X=PY$, 其中 $Y=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$.

则 $\dfrac{\mathrm{d}(PY)}{\mathrm{d}t}=APY$, 即 $P\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=APY$, 即 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=P^{-1}APY=JY$.

由上式求得Y，然后通过$X=PY$可求得原方程的解X.

例4.求微分方程组 $\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -x_1 \qquad\quad + 3x_3 \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$ 的解.

解: 令 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$，则方程可以写为 $\dfrac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} X = AX.$

其中$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, 由例3知 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

其中 $P=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$, $P^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & 3\end{bmatrix}$.

令 $X=PY$,则可以得到$\dfrac{dy_1}{dt}=y_1$, $\dfrac{dy_2}{dt}=y_2+y_3$, $\dfrac{dy_3}{dt}=y_3$.

于是求得 $y_1=k_1e^t$, $y_3=k_3e^t$, $y_2=\left(k_2+k_3t\right)e^t$.

代入$X=PY$,得到

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -k_1e^t+2k_3e^t+2\left(k_2+k_3t\right)e^t,\\
x_2 &= k_1e^t+\left(k_2+k_3t\right)e^t,\\
x_3 &= k_3e^t+\left(k_2+k_3t\right)e^t,
\end{aligned}
$$

其中k_1,k_2,k_3为任意常数.

作业：求下列矩阵的Jordan标准形。

$$（1）\begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad （2）\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$