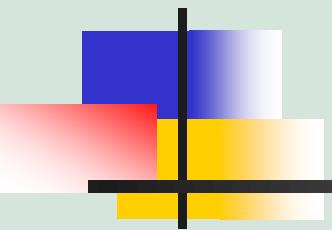
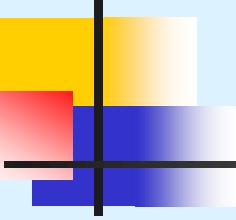


第二章

λ -矩阵与矩阵的Jordan标准形



2.1 λ -矩阵及标准形

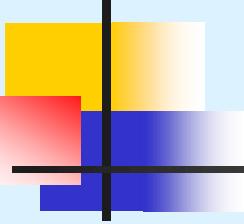


2.1.1 λ -矩阵的概念

定义1.1 设 $a_{ij}(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 为数域 F 上的多项式，则称以 $a_{ij}(\lambda)$ 为元素的 $m \times n$ 矩阵

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) & \cdots & a_{1n}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) & \cdots & a_{2n}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}(\lambda) & a_{m2}(\lambda) & \cdots & a_{mn}(\lambda) \end{bmatrix}$$

为多项式矩阵或 λ - 矩阵。



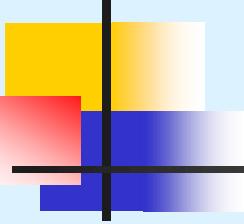
2.1.1 λ -矩阵的概念

Remark1: 称多项式 $a_{ij}(\lambda)$ 中 ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) 最高次数为 $A(\lambda)$ 的次数。

Remark2: 数字矩阵和特征矩阵 $\lambda E - A$ 都是 λ -矩阵的特例。

Remark3: λ -矩阵的加法、数乘和乘法运算、矩阵的转置与数字矩阵相同，而且有相同的运算规律。

Remark4: 一般情况下， λ -矩阵的行列式 $|A(\lambda)|$ 是 λ 的一个多项式。

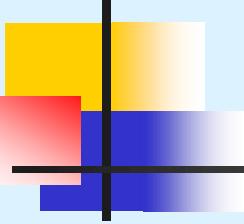


2.1.1 λ -矩阵的概念

定义1.2：如果 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 中有一个 $r(r \geq 1)$ 阶子式不为零，而所有的 $r + 1$ 阶子式（如果有的话）全为零，则称 $A(\lambda)$ 的秩为 r ，记为 $rank A(\lambda) = r$.

Remark1：零矩阵的秩为0。

Remark2：由于 $A(\lambda)$ 的行列式及一切子式都是 λ 的多项式，所以上述定义中的 $r + 1$ 阶子式全为零的含义是不论 λ 取何值，该子式均为零。



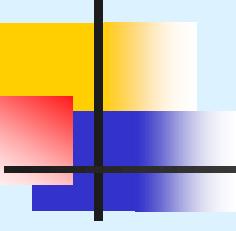
2.1.1 λ -矩阵的概念

定义1.3：一个 n 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 称为可逆的，如果有一个 n 阶 λ -矩阵 $B(\lambda)$,满足

$$A(\lambda)B(\lambda) = B(\lambda)A(\lambda) = E$$

这里 E 为 n 阶单位矩阵. $B(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的可逆矩阵，记为 $A^{-1}(\lambda)$.

定理1.1：一个 n 阶 λ -矩阵可逆的充要条件是 $\det A(\lambda)$ 是一个非零常数。



2.1.1 λ -矩阵的概念

Remark1：该定理给出了一种求 λ -矩阵逆矩阵的方法。

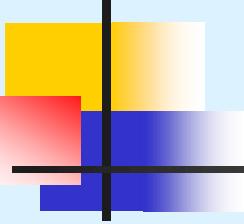
例1. 已知 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & \lambda - 1 \end{bmatrix}$, 求 $A^{-1}(\lambda)$.

解：因为 $|A(\lambda)| = -1 \neq 0$, 从而

$$\tilde{A}(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -\lambda \\ -\lambda & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

故

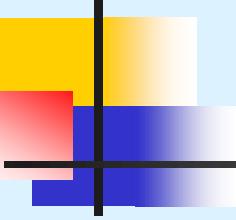
$$A^{-1}(\lambda) = \begin{bmatrix} -\lambda + 1 & \lambda \\ \lambda & -\lambda - 1 \end{bmatrix}$$



2.1.1 λ -矩阵的概念

Remark2: n 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 n , 不等价于 $A(\lambda)$ 可逆, 这是与数字矩阵的不同之处。

例如, $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$ 的秩为2, 但是它不可逆。



2.1.2 λ -矩阵的初等变换

定义1.4：下列三种类型的变换，叫做 λ -矩阵的初等变换：

- (1) 矩阵的任意两行（列）互换位置；
- (2) 非零常数 c 乘矩阵的某一行（列）；
- (3) 矩阵的某一行（列）的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到另一行（列）上去，其中 $\varphi(\lambda)$ 是 λ 的一个多项式。

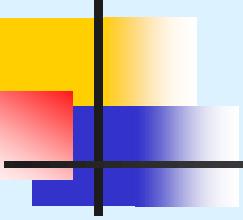
对单位矩阵实施一次上述三种类型的初等变换，便得到相应的三种 λ -矩阵的初等矩阵 $P(i,j), P(i(c)), P(i,j(\varphi))$ ，即

2.1.2 λ -矩阵的初等变换

$$P(i, j) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{-- } i\text{行} \\ \text{-- } j\text{行} \end{array}$$

$$P(i(c)) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & c & \\ & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{-- 第 } i\text{ 行}$$

$$P(i, j(\varphi)) = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \varphi(\lambda) \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{-- 第 } i\text{ 行} \\ \text{-- 第 } j\text{ 行} \end{array}$$

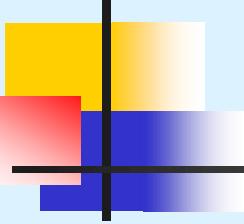


2.1.2 λ -矩阵的初等变换

定理1.2：对一个 $m \times n$ 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的行作初等行变换，相当于用相应的 m 阶初等矩阵左乘 $A(\lambda)$ ；对 $A(\lambda)$ 的列作初等列变换，相当于用相应的 n 阶初等矩阵右乘 $A(\lambda)$.

初等矩阵都是可逆的，且

$$P(i,j)^{-1} = P(i,j); \quad P(i(c))^{-1} = P(i(c^{-1}));$$
$$P(i,j(\varphi))^{-1} = P(i,j(-\varphi)).$$



2.1.2 λ -矩阵的初等变换

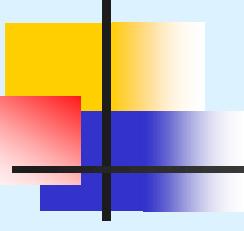
定义1.5：如果 $A(\lambda)$ 经过有限次的初等变换后变成 $B(\lambda)$ ，则称 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价，记之为 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$.

定理1.3： $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是存在两个可逆矩阵 $P(\lambda)$ 与 $Q(\lambda)$ ，使得

$$B(\lambda) = P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda).$$

λ -矩阵的等价关系满足：

- (1) **自反性**：每一个 λ -矩阵与自己等价；
- (2) **对称性**：若 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$ ，则 $B(\lambda) \simeq A(\lambda)$ ；
- (3) **传递性**： $A(\lambda) \simeq B(\lambda), B(\lambda) \simeq C(\lambda)$ ，则 $A(\lambda) \simeq C(\lambda)$.



2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

引理1.1：设 λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 的左上角元素 $a_{11}(\lambda) \neq 0$, 并且 $A(\lambda)$ 中至少有一个元素不能被它整除，那么一定可以找到一个与 $A(\lambda)$ 等价的矩阵 $B(\lambda)$ ，它的左上角元素也不为零，但次数比 $a_{11}(\lambda)$ 的次数低。

2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

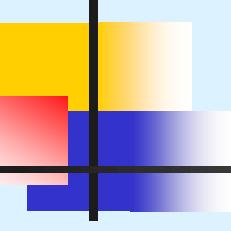
定理1.4：任意一个非零的 $m \times n$ 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 都等价于一个“对角形”矩阵，即

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r(\lambda) & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

其中 $r \geq 1$, $d_i(\lambda)$ 是首项系数为1的多项式，且

$$d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda) (i = 1, 2, \dots, r-1)$$

记号 $d_i(\lambda) | d_{i+1}(\lambda)$ 表示 $d_{i+1}(\lambda)$ 能被 $d_i(\lambda)$ 整除。

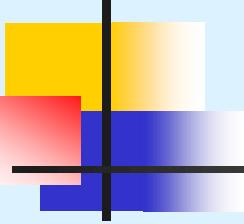


2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

定义1.6：与 $A(\lambda)$ 等价的形如

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & & \\ & d_2(\lambda) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & d_r(\lambda) & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

的“对角形”矩阵称为 $A(\lambda)$ 的Smith标准形， $d_1(\lambda), d_2(\lambda), \dots, d_r(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的不变因子。



2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

Remark: 初等变换的一些记号, r_i 表示矩阵第*i*行, c_j 表示矩阵第*j*列: (以行为例说明)

- (1) $r_i \leftrightarrow r_j$ 表示互换矩阵的第*i*行和第*j*行;
- (2) ar_i 表示矩阵第*i*行乘以常数*a*;
- (3) $\varphi(\lambda)r_i + r_j$ 表示矩阵第*i*行的 $\varphi(\lambda)$ 倍加到第*j*行。

2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

例2. 用初等变换把 λ -矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 2 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 + 2 & \lambda - \frac{1}{2} & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda & \lambda + 1 \end{bmatrix}$ 化为Smith标准形。

解： $A(\lambda)$ 的元素中有非零常数2

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & 2 \\ \frac{1}{2}\lambda^2 + 2 & \lambda - \frac{1}{2} & \lambda \\ 0 & \frac{1}{2}\lambda & \lambda + 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} 2 & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda - \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\lambda^2 + 2 \\ \lambda + 1 & \frac{1}{2}\lambda & 0 \end{bmatrix}$$

2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

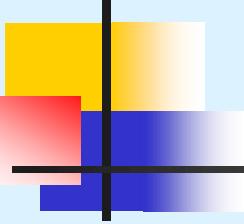
$$\begin{array}{c}
 -\frac{\lambda}{2}c_1 + c_2 \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ \lambda & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} & 2 \\ \lambda + 1 & -\frac{1}{2}\lambda^2 & -\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda \end{array} \right] \\
 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda - \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda^2 & -\frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda \end{array} \right]
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 0.5c_1 \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^2 + 2\lambda - 1 & 4 \\ 0 & -\lambda^2 & -\lambda^2 - \lambda \end{array} \right] \\
 2c_2 \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -\lambda^2 + 2\lambda - 1 \\ 0 & -\lambda^2 - \lambda & -\lambda^2 \end{array} \right] \\
 \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -\lambda^2 + 2\lambda - 1 \\ 0 & -\lambda^2 - \lambda & -\lambda^2 \end{array} \right]
 \end{array}$$

2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

$$\frac{(\lambda^2 + \lambda)}{4} r_2 + r_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -\lambda^2 + 2\lambda - 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}(-\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda) \end{bmatrix} \xrightarrow[4r_3]{\frac{(\lambda^2 - 2\lambda + 1)}{4} c_2 + c_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^4 + \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}c_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^4 - \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda \end{bmatrix}. \quad -c_3$$



2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

例3. 用初等变换把矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - \lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2 + 5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix}$ 化成smith标准形 .

解: $A(\lambda)$ 的元素有公因子 λ , 利用初等变换将左上角元素变为 λ .

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda^3 - \lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2 + 5\lambda & 3\lambda \end{bmatrix} c_1 \leftrightarrow c_2 \begin{bmatrix} 2\lambda^2 & \lambda^3 - \lambda \\ 3\lambda & \lambda^2 + 5\lambda \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} r_1 &\leftrightarrow r_2 \begin{bmatrix} 3\lambda & \lambda^2 + 5\lambda \\ 2\lambda^2 & \lambda^3 - \lambda \end{bmatrix} \quad \frac{1}{3}c_1 \rightarrow \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 + 5\lambda \\ \frac{2}{3}\lambda^2 & \lambda^3 - \lambda \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \end{aligned}$$

2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

然后用初等变换把公因子 λ 所在的行、列的其余元素都化为零。

$$A(\lambda) \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 + 5\lambda \\ \frac{2\lambda^2}{3} & \lambda^3 - \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{2\lambda}{3})r_1 + r_2} \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^2 + 5\lambda \\ 0 & \frac{\lambda}{3}(\lambda^2 - 10\lambda - 3) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{-(\lambda+5)c_1+c_2} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{3}(\lambda^2 - 10\lambda - 3) \end{bmatrix} \xrightarrow{3r_2} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda^2 - 10\lambda - 3) \end{bmatrix}.$$

2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

例4. 用初等变换把矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$ 化成smith标准形 .

解： $A(\lambda)$ 的元素没有公因子，也没有常数元素，用初等变换把矩阵中的某个元素变为常数。

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & \lambda^2 + \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{bmatrix}$$

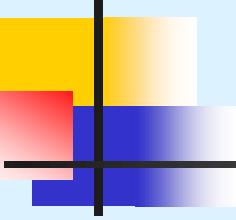
2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

$$\begin{array}{c}
 (-\lambda)r_1+r_2 \\
 -(1+\lambda^2)r_1+r_3 \\
 \hline
 \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & \lambda^2 + \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda & -\lambda^2 \end{array} \right]
 \end{array} \xrightarrow{-(\lambda^2 + \lambda)c_1 + c_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda & -\lambda^2 \end{array} \right]$$

余下的 2×2 阶矩阵有公因子 λ , 如同例3.

$$A(\lambda) \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda & -\lambda \\ 0 & -\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda & -\lambda^2 \end{array} \right] \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda \\ 0 & -\lambda^2 & -\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{c}
 -\lambda r_2 + r_3 \\
 \hline
 \longrightarrow \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda \\ 0 & 0 & -\lambda^2 - \lambda \end{array} \right] \xrightarrow{-(\lambda^2 + \lambda - 1)c_2 + c_3} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda^2 - \lambda \end{array} \right] \xrightarrow{-r_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1) \end{array} \right].
 \end{array}$$



2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

总结：在对 $A(\lambda)$ 用初等变换化成Smith标准形时， $A(\lambda)$ 的特点不外乎三种：

- $A(\lambda)$ 中的元素至少有一个非零常数（属 $A(\lambda)$ 无公因子情况），如例2；
- $A(\lambda)$ 中的元素有公因子，如例3；
- $A(\lambda)$ 中的所有元素既无非零常数又无公因子，如例4；

2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

例5. 用初等变换把 λ -矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$ 化为Smith标准形。

解： $A(\lambda)$ 虽然是对角形，但不是Smith标准形。

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-r_1 + r_3} \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda & 0 & \lambda^2 + 2\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{c_1 + c_3} \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda & 0 & \lambda^2 + \lambda \\ 0 & \lambda & 0 \\ -\lambda^2 - \lambda & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_3} \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda & 0 & \lambda^2 + \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda \\ -\lambda^2 - \lambda & 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

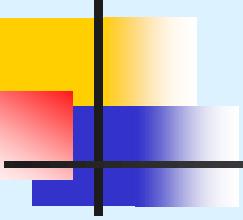
2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

$$-r_2 + r_3 \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda & 0 & \lambda^2 + \lambda \\ 0 & \lambda & \lambda \\ -\lambda^2 - \lambda & -\lambda & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \leftrightarrow c_3 \begin{bmatrix} \lambda^2 + \lambda & 0 & \lambda^2 + \lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \\ 1 & -\lambda & -\lambda^2 - \lambda \end{bmatrix}$$

$$r_1 \leftrightarrow r_3 \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -\lambda^2 - \lambda \\ \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda^2 + \lambda & 0 & \lambda^2 + \lambda \end{bmatrix}$$

$$-\lambda r_1 + r_2 \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & -\lambda^2 - \lambda \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & \lambda^3 + \lambda^2 \\ 0 & \lambda(\lambda^2 + \lambda) & (\lambda^2 + \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1) \end{bmatrix}$$
$$-(\lambda^2 + \lambda)r_1 + r_3$$

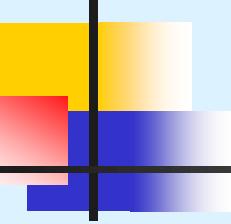


2.1.3 λ -矩阵的Smith标准形

$$\begin{matrix} \lambda c_1 + c_2 \\ (\lambda^2 + \lambda)c_1 + c_3 \end{matrix} \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & \lambda^3 + \lambda^2 \\ 0 & \lambda(\lambda^2 + \lambda) & (\lambda^2 + \lambda)(\lambda^2 + \lambda + 1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -\lambda c_2 + c_3 \\ \simeq \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 + \lambda & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda^2 + \lambda) & \lambda(\lambda + 1)^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} -\lambda r_2 + r_3 \\ \simeq \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(1 + \lambda) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1)^2 \end{bmatrix}$$

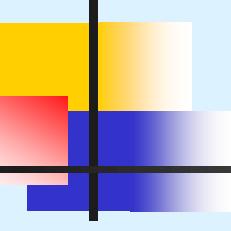


2.1.4 Smith标准形的唯一性

定义1.7：设 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为 r ,对于正整数 $k, 1 \leq k \leq r$, $A(\lambda)$ 必有非零的 k 阶子式, $A(\lambda)$ 的全部 k 阶子式的**首项系数为1**的最大公因式 $D_k(\lambda)$ 称为 $A(\lambda)$ 的 **k 阶行列式因子**。

定理1.5：等价矩阵有相同的各阶行列式因子，从而有相同的秩。

提示： λ -矩阵经过一次初等变换，秩与各阶行列式因子是不变。



2.1.4 Smith标准形的唯一性

定理1.6： λ – 矩阵的Smith标准形是唯一的。

证明：设 λ -矩阵的smith标准形为

$$\text{diag}(\mathbf{d}_1(\lambda), \mathbf{d}_2(\lambda), \dots, \mathbf{d}_r(\lambda), 0, \dots, 0),$$

其中 $\mathbf{d}_i(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, r$) 是首项系数为 1 的多项式, 且 $\mathbf{d}_i(\lambda) | \mathbf{d}_{i+1}(\lambda)$ ($i = 1, 2, \dots, r-1$)
从而, k 阶行列式因子为

$$D_k(\lambda) = \mathbf{d}_1(\lambda) \mathbf{d}_2(\lambda) \cdots \mathbf{d}_k(\lambda) (k = 1, 2, \dots, r).$$

从而 $\mathbf{d}_1(\lambda) = D_1(\lambda)$, $\mathbf{d}_2(\lambda) = \frac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)}$, \dots , $\mathbf{d}_r(\lambda) = \frac{D_r(\lambda)}{D_{r-1}(\lambda)}$.

据此, 矩阵 $A(\lambda)$ 的不变因子由行列式因子唯一确定。

2.1.4 Smith标准形的唯一性

定理1.7: λ -矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是对于任何的 k ,它们的 k 阶行列式因子相同。

证明: 必要性:

设 λ -矩阵 $A(\lambda) \simeq B(\lambda)$, 由定理1.5知 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的各阶行列式因子 .

充分性:

设 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的行列式因子, 从而 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子, 从而

$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} d_1(\lambda) & & & \\ & d_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_r(\lambda) & 0 & \cdots \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \simeq B(\lambda).$$

2.1.4 Smith标准形的唯一性

定理1.8： λ – 矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 有相同的不变因子。

推论1.1： λ – 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件是 $A(\lambda)$ 与单位矩阵等价。

证明：必要性：

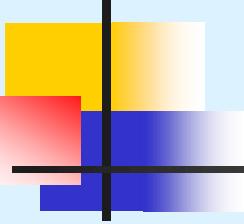
设 $A(\lambda)$ 是 n 阶可逆矩阵，由定理1.1知 $|A(\lambda)| = d$ 为一非零常数。

即 $A(\lambda)$ 的 n 阶行列式因子 $D_n(\lambda) = 1$ ，由于 $D_k(\lambda) | D_{k+1}(\lambda)$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$)，
所以 $D_k(\lambda) = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$)。于是 $d_k(\lambda) = 1$ ($k = 1, 2, \dots, n$)。

即 $A(\lambda)$ 的标准形为单位矩阵。

充分性：

设 $A(\lambda) \simeq E$ ，从而 $D_n(\lambda) = |A(\lambda)| = 1 \neq 0$, $A(\lambda)$ 可逆。

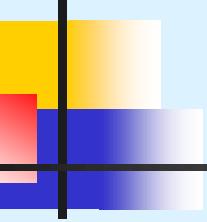


2.1.4 Smith标准形的唯一性

推论1.2: λ - 矩阵 $A(\lambda)$ 可逆的充要条件是 $A(\lambda)$ 可以表示成一系列初等矩阵的乘积。

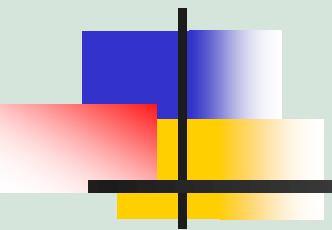
证明:

$$\begin{aligned} A(\lambda) \text{可逆} &\Leftrightarrow A(\lambda) \simeq E_n \Leftrightarrow \exists \text{初等矩阵 } P_1, P_2, \dots, P_l, Q_1, Q_2, \dots, Q_m, \\ &\quad \text{使得 } A(\lambda) = P_1 P_2 \dots P_l E_n Q_1 Q_2 \dots Q_m \\ &\quad = P_1 P_2 \dots P_l Q_1 Q_2 \dots Q_m. \end{aligned}$$

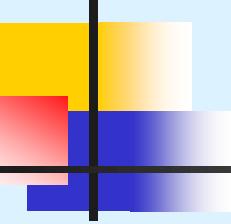


作业1：设 $A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$, 求 $\lambda E - A$ 的Smith标准形和不变因子。

作业2：课后习题（90页）2-1 (3) .



2.2 初等因子与相似条件



2.2.1 初等因子

定义2.1 λ -矩阵的行列式因子 $D_k(\lambda)$ 与不变因子 $d_k(\lambda)$ 都是 λ 的多项式，它们都是由 $A(\lambda)$ 的元素 $a_{ij}(\lambda)$ 经过“加、减、乘”而得到。在复数域 C 内，作为多项式的不变因子 $d_k(\lambda)$ 总可以分解为互不相同的一次因式方幂的乘积，令

$$d_1(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{11}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{12}} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{k_{1t}}$$

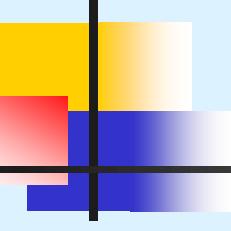
$$d_2(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{21}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{22}} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{k_{2t}}$$

...

...

...

$$d_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{r1}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{r2}} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{k_{rt}}$$



2.2.1 初等因子

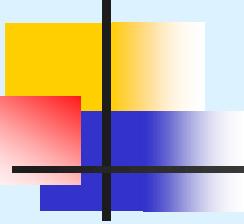
因为

$$d_{k-1}(\lambda) | d_k(\lambda) \quad (k = 2, \dots, r)$$

所以

$$k_{1j} \leq k_{2j} \leq \dots \leq k_{rj} \quad (j = 1, 2, \dots, t)$$

这里 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$ 是 $d_r(\lambda)$ 的全部相异零点，所以 $k_{r1}, k_{r2}, \dots, k_{rt}$ 无一为零。但 $k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{r-1,j}$ 中 ($j = 1, 2, \dots, t$) 可能出现零，而且若 $k_{ij} = 0$ ($j = 1, 2, \dots, t; i = 1, 2, \dots, r - 1$)，那么必有 $k_{1j} = k_{2j} = \dots = k_{i-1,j} = 0$ 。我们将



2.2.1 初等因子

$$\begin{cases} (\lambda - \lambda_1)^{k_{11}}, (\lambda - \lambda_2)^{k_{12}}, \dots, (\lambda - \lambda_t)^{k_{1t}} \\ (\lambda - \lambda_1)^{k_{21}}, (\lambda - \lambda_2)^{k_{22}}, \dots, (\lambda - \lambda_t)^{k_{2t}} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ (\lambda - \lambda_1)^{k_{r1}}, (\lambda - \lambda_2)^{k_{r2}}, \dots, (\lambda - \lambda_t)^{k_{rt}} \end{cases}$$

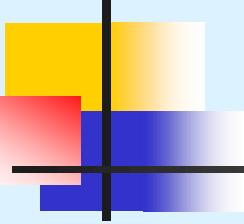
中不是常数的因子全体叫做 $A(\lambda)$ 的初等因子。

例. 若 λ 矩阵的不变因子为

$$1, 1, \dots, 1, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2(\lambda + 1), (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1)^2,$$

那么它的初等因子为

$$(\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2, (\lambda - 1)^2, (\lambda + 1), (\lambda + 1), (\lambda - i)^2, (\lambda + i)^2$$



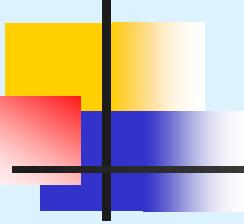
2.2.1 初等因子

思考：两个 λ -矩阵等价 \Rightarrow 它们有相同的不变因子

\Rightarrow 它们有相同的初等因子。

反之，两个 λ -矩阵有相同的初等因子 \nrightarrow 它们等价

例： $A(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 4)^2 & 0 \end{pmatrix}$; $B(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - 4)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$



2.2.1 初等因子

定理2.1 n 阶 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 等价的充要条件是它们的秩相等和有相同的初等因子。

证明： 必要性：

等价矩阵有相同的不变因子，从而有相同的初等因子.

充分性：

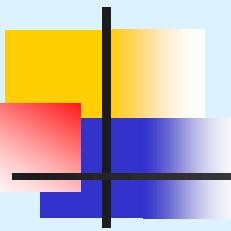
设矩阵 $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的秩为 r , 并有相同的初等因子.

由初等因子定义知, $A(\lambda)$ 与 $B(\lambda)$ 的 r 阶不变因子 $d_r(\lambda) = \tilde{d}_r(\lambda)$,

$$d_r(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_{r1}} (\lambda - \lambda_2)^{k_{r2}} \cdots (\lambda - \lambda_t)^{k_{rt}} = \tilde{d}_r(\lambda),$$

同样, 对任意的 $k (1 \leq k \leq r)$ 有 $d_k(\lambda) = \tilde{d}_k(\lambda)$.

由定理1.8, 有 $A(\lambda) \sim B(\lambda)$.



2.2.1 初等因子

例1. 已知 5×6 的 λ -矩阵 $A(\lambda)$ 的秩为4，其初等因子为

$$\lambda, \lambda, \lambda^2, \lambda-1, (\lambda-1)^2, (\lambda-1)^3, (\lambda+2i)^3, (\lambda-2i)^3$$

试求 $A(\lambda)$ 的Smith标准形.

解：首先容易得到 $A(\lambda)$ 的不变因子为

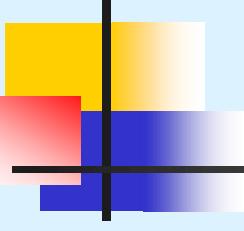
$$d_4(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 1)^3(\lambda + 2i)^3(\lambda - 2i)^3$$

$$d_3(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)^2$$

$$d_2(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$$

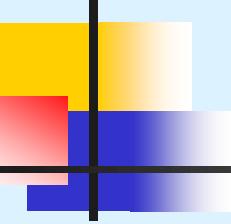
$$d_1(\lambda) = 1$$

从而 $A(\lambda)$ 的Smith标准形为



2.2.1 初等因子

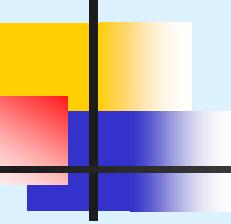
$$A(\lambda) \simeq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda - 1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda - 1)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^2(\lambda - 1)^3(\lambda^2 + 4)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



2.2.2 准对角形矩阵的初等因子

定理2.2 设 λ -矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} B(\lambda) & 0 \\ 0 & C(\lambda) \end{bmatrix}$ 为准对角形矩阵，则 $B(\lambda), C(\lambda)$ 的各个初等因子的全体是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子。

定理2.3 设 λ -矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} B_1(\lambda) & & & \\ & B_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_t(\lambda) \end{bmatrix}$ 为准对角形矩阵，
则 $B_1(\lambda), B_2(\lambda), \dots, B_t(\lambda)$ 的各个初等因子的全体是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子。



2.2.2 准对角形矩阵的初等因子

定理2.4 设 λ -矩阵 $A(\lambda)=\begin{bmatrix} f_1(\lambda) & & & & \\ & f_2(\lambda) & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & f_r(\lambda) & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$,

则 $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots, f_r(\lambda)$ 的所有一次因式幂的全体是 $A(\lambda)$ 的全部初等因子.

2.2.2 准对角形矩阵的初等因子

例2. 求 λ -矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda - \alpha & b_1 & & \\ & \lambda - \alpha & b_2 & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & \lambda - \alpha \end{bmatrix}$ 的不变因子和初等因子,
其中 b_1, b_2, \dots, b_{n-1} 都是常数, 且 $b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \neq 0$ 。

解: 容易求得 $A(\lambda)$ 的行列式因子为 $D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = \cdots = D_{n-1}(\lambda) = 1$,
 $D_n(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$.

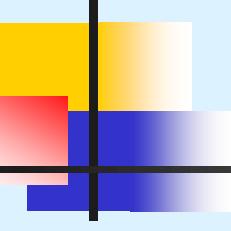
于是 $A(\lambda)$ 的不变因子是 $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1$; $d_n(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$.
因而 $A(\lambda)$ 的初等因子只有一个 $(\lambda - \alpha)^n$.

2.2.2 准对角形矩阵的初等因子

例3. 求 λ -矩阵 $A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \lambda & \alpha_2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda + \alpha_1 \end{bmatrix}$ 的初等因子和标准形。

解：将 $A(\lambda)$ 的第2行，第3行,...,第 n 行分别乘以 $\lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{n-1}$ 都加到第1行上去，得到

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 & \alpha_n \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \lambda & \alpha_2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda + \alpha_1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{=} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & f(\lambda) \\ -1 & \lambda & \ddots & \vdots & \alpha_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \lambda & \alpha_2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & \lambda + \alpha_1 \end{bmatrix},$$



2.2.2 准对角形矩阵的初等因子

其中, $f(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n$.

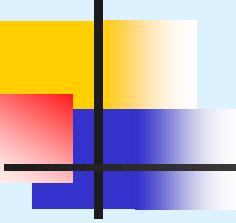
易知, $|A(\lambda)| = (-1)^{n-1}(-1)^{n+1}f(\lambda) = f(\lambda) = D_n(\lambda)$ 和 $D_{n-1}(\lambda) = 1$,

于是 $D_1(\lambda) = D_2(\lambda) = \cdots = D_{n-2}(\lambda) = 1$,

所以 $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \cdots = d_{n-1}(\lambda) = 1, d_n(\lambda) = f(\lambda)$.

所以 $A(\lambda)$ 的标准形为

$$A(\lambda) \sim \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\lambda) \end{bmatrix}.$$



2.2.3 矩阵相似条件

数字矩阵的特征矩阵是 λ -矩阵，它是研究数字矩阵的重要工具。下面我们将利用特征矩阵的等价来研究数字矩阵的相似。

引理2.1 设 A 、 B 是两个 n 阶数字矩阵，则

$$A \sim B \Leftrightarrow (\lambda E - A) \sim (\lambda E - B).$$

引理2.2 对于任意非零数字矩阵 A 和 λ -矩阵 $U(\lambda)$ 、 $V(\lambda)$ ，一定存在 λ -矩阵 $Q(\lambda)$ 、 $R(\lambda)$ ，以及数字矩阵 U_0 、 V_0 ，使得

$$U(\lambda) = (\lambda E - A)Q(\lambda) + U_0,$$

$$V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda E - A) + V_0.$$

2.2.3 矩阵相似条件

证明：把 $U(\lambda)$ 改写成 $U(\lambda) = D_0\lambda^m + D_1\lambda^{m-1} + \cdots + D_{m-1}\lambda + D_m$, 这里 $D_0, D_1, \dots, D_{m-1}, D_m$ 是数字矩阵，且 $D_0 \neq 0$.

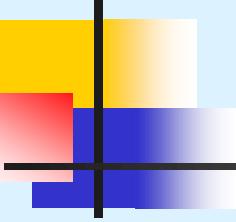
如果 $m = 0$, 则令 $Q(\lambda) = 0, U_0 = D_0$.

如果 $m > 0$, 即 $U(\lambda)$ 是 m 次的, 而 $\lambda E - A$ 是 1 次的, 所以 $Q(\lambda)$ 是 $m - 1$ 次的. 不妨设

$$Q(\lambda) = Q_0\lambda^{m-1} + Q_1\lambda^{m-2} + \cdots + Q_{m-2}\lambda + Q_{m-1},$$

这里 $Q_i (i = 0, 1, \dots, m - 1)$ 是待定的数字矩阵, 于是

$$\begin{aligned} (\lambda E - A)Q(\lambda) &= \lambda EQ(\lambda) - A Q(\lambda) \\ &= Q_0\lambda^m + (Q_1 - A Q_0)\lambda^{m-1} + \cdots + (Q_k - A Q_{k-1})\lambda^{m-k} \\ &\quad + \cdots + (Q_{m-1} - A Q_{m-2})\lambda - A Q_{m-1} \end{aligned}$$

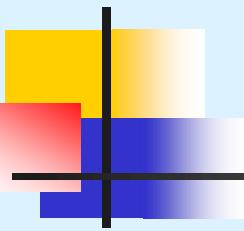


2.2.3 矩阵相似条件

要使得 $U(\lambda) = (\lambda E - A)Q(\lambda) + U_0$ 成立，只要

$$\begin{aligned} Q_0 &= D_0, Q_1 = D_1 + A Q_0, Q_k = D_k + A Q_{k-1} \\ Q_{m-1} &= D_{m-1} + A Q_{m-2}, U_0 = D_m + A Q_{m-1}. \end{aligned}$$

对于 $V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda E - A) + V_0$, 同样可证。



2.2.3 矩阵相似条件

定理 2.5 $A \sim B \Leftrightarrow \lambda E - A \sim \lambda E - B$.

证明：必要性显然. 现证充分性.

设 $\lambda E - A$ 与 $\lambda E - B$ 等价，则存在可逆 λ -矩阵 $U(\lambda), V(\lambda)$ 使得

$$\lambda E - A = U(\lambda) (\lambda E - B) V(\lambda) \quad (1)$$

或 $U^{-1}(\lambda)(\lambda E - A) = (\lambda E - B) V(\lambda) \quad (1')$

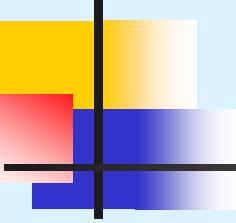
由引理2.2知，存在 λ -矩阵 $Q(\lambda), R(\lambda)$ ，以及数字矩阵 U_0, V_0 ，

有 $U(\lambda) = (\lambda E - A)Q(\lambda) + U_0, \quad (2)$

$$V(\lambda) = R(\lambda)(\lambda E - A) + V_0, \quad (3)$$

将 (3) 式代入 (1') 式，得到

$$[U^{-1}(\lambda) - (\lambda E - B)R(\lambda)] (\lambda E - A) = (\lambda E - B) V_0 \quad (4)$$



2.2.3 矩阵相似条件

上式右端为一个次数为 1 的 λ -矩阵（除非 $V_0 = 0$ ），而左端 $\lambda E - A$ 也是一个次数为 1 的 λ -矩阵，所以

$$U^{-1}(\lambda) - (\lambda E - B)R(\lambda) = P \quad (5)$$

是一个数字矩阵。因此 (4) 式可以写为

$$P(\lambda E - A) = (\lambda E - B) V_0, \quad (6)$$

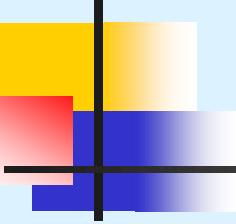
现证 P 可逆，且 $P = V_0$ 。由 (5) 式可得

$$U(\lambda)P = E - U(\lambda)(\lambda E - B) R(\lambda)$$

即 $E = U(\lambda)P + U(\lambda)(\lambda E - B) R(\lambda) \quad (7)$

由 (1) 可把 (7) 改写成

$$E = U(\lambda)P + (\lambda E - A) V^{-1}(\lambda)R(\lambda) \quad (8)$$



2.2.3 矩阵相似条件

将(2)带入(8)得

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= [(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A})\mathbf{Q}(\lambda) + \mathbf{U}_0] \mathbf{P} + (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) \mathbf{V}^{-1}(\lambda) \mathbf{R}(\lambda) \\ &= \mathbf{U}_0 \mathbf{P} + (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) [\mathbf{Q}(\lambda) \mathbf{P} + \mathbf{V}^{-1}(\lambda) \mathbf{R}(\lambda)] \end{aligned}$$

比较两边 λ -矩阵的次数知，上式右边第二项为零，故 $\mathbf{E} = \mathbf{U}_0 \mathbf{P}$.

即

$$\mathbf{P} = \mathbf{U}_0^{-1}.$$

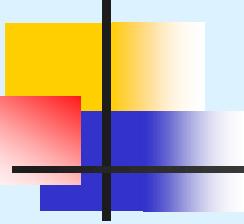
由 $\mathbf{P}(\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A}) = (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B})\mathbf{V}_0$ 得

$$\lambda \mathbf{E} - \mathbf{A} = \mathbf{U}_0 (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{B}) \mathbf{V}_0 = \lambda \mathbf{U}_0 \mathbf{V}_0 - \mathbf{U}_0 \mathbf{B} \mathbf{V}_0.$$

比较上式两端，有 $\mathbf{U}_0 \mathbf{V}_0 = \mathbf{E}$, $\mathbf{A} = \mathbf{U}_0 \mathbf{B} \mathbf{V}_0$,

故

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{V}_0^{-1}, \mathbf{A} = \mathbf{V}_0^{-1} \mathbf{B} \mathbf{V}_0.$$

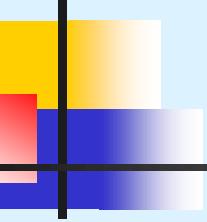


2.2.3 矩阵相似条件

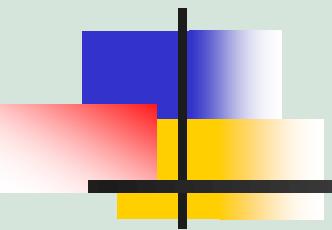
Remark: 今后为叙述简便，约定对于一个数字矩阵 A ，称 $\lambda E - A$ 的不变因子为 A 的不变因子，称 $\lambda E - A$ 的初等因子为 A 的初等因子。

定理 2.6 $A \sim B \Leftrightarrow A$ 和 B 有相同的初等因子。

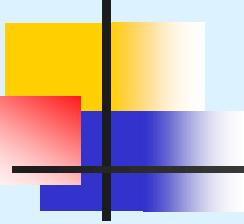
定理2. 7 $A \sim B \Leftrightarrow A$ 和 B 有相同的不变因子。



作业3：已知数字矩阵 A 的初等因子为 $\lambda, \lambda, \lambda^2, (\lambda - 1)^2, \lambda + 1$, 求 A 的阶数与 A 的不变因子及Smith标准形。



2.3 矩阵的Jordan标准形



2.3.1 Jordan标准形

定义 3.1 称 n_i 阶矩阵 $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$ 为Jordan块.

设 J_1, J_2, \dots, J_s 为Jordan块, 称准对角矩阵

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$$

为Jordan标准形.

2.3.1 Jordan标准形

在例2中已知Jordan块的初等因子为 $(\lambda - \lambda_i)^{n_i}$, 根据定理2.3知, Jordan标准形J的初等因子为 $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{n_s}$. 因此, 结合定理2.6可得下面结论:

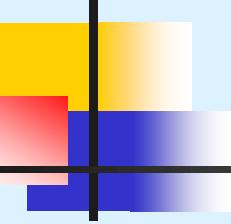
定理 3.1 设 $A \in C^{n \times n}$, A的初等因子为

$$(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \dots, (\lambda - \lambda_s)^{n_s},$$

则 $A \sim J$.

这里 $J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_s \end{bmatrix}$. 其中 $J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$ $i = 1, 2, \dots, s$

称 J 为矩阵 A 的Jordan标准形.



2.3.1 Jordan标准形

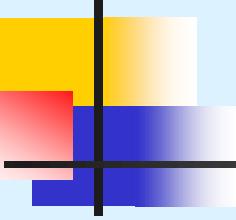
若 $n_i = 1$, J_1 是1阶Jordan块, 当矩阵 A 的Jordan标准形中的Jordan块全是1阶时, J 便是对角矩阵, 因此得到:

定理 3.2 A 可以对角化 $\Leftrightarrow A$ 的初等因子都是一次因式。

例1. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 的**Jordan**标准形。

解: 首先求 A 的初等因子. 对 $(\lambda E - A)$ 运用初等变换可得

$$\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda + 1 & 2 & -6 \\ 1 & \lambda & -3 \\ 1 & 1 & \lambda - 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \lambda - 1 & \\ & & (\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}.$$



2.3.1 Jordan标准形

A 的初等因子是 $\lambda - 1, (\lambda - 1)^2$.

故 A 的**Jordan**标准形为 $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

总结：求一个矩阵的Jordan标准形：

- (1) 先求特征矩阵 $\lambda E - A$ 的初等因子（即为 A 的初等因子）；
- (2) 根据初等因子，写出Jordan块；
- (3) 最后组装Jordan标准形。

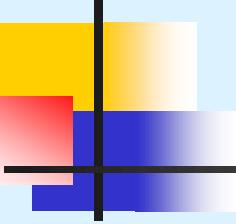
2.3.2 变换矩阵P

由定理3.1可知，对于任何一个矩阵 A ，存在 $P \in C_n^{n \times n}$ ，满足 $P^{-1}AP = J$ ，下面通过两个例子介绍变换矩阵 P 的求法。

例2. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{bmatrix}$ 的Jordan标准形，并求变换矩阵 P .

解： $\lambda E - A = \begin{bmatrix} \lambda - 17 & 0 & 25 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ -9 & 0 & \lambda + 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 \end{bmatrix}.$

因此， $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.



2.3.2 变换矩阵P

存在非奇异矩阵 $P = (X_1, X_2, X_3)$, 使 $P^{-1}AP = J$.

有 $A(X_1, X_2, X_3) = (X_1, X_2, X_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$,

即 $AX_1 = X_1, AX_2 = 2X_2, AX_3 = X_2 + 2X_3$.

由 $(E-A)X_1 = 0$, 求得 $X_1 = (0, 1, 0)^T$; 同理, 求得 $X_2 = (5, 0, 3)^T$, 有 $X_3 = (2, 0, 1)^T$.

所以 $P = (X_1, X_2, X_3) = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

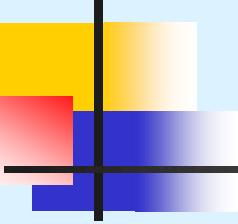
2.3.2 变换矩阵P

例3. 求化矩阵 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$ 为Jordan标准形的变换矩阵 P .

解：由例1知， $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

故存在 $P = (X_1, X_2, X_3) \in C_3^{3 \times 3}$, 使得 $AP = PJ$.

即 $(AX_1, AX_2, AX_3) = (X_1, X_2, X_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



2.3.2 变换矩阵P

得到 $A\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_1, A\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_2, A\mathbf{X}_3 = \mathbf{X}_2 + \mathbf{X}_3,$

$$(\mathbf{E} - A)\mathbf{X}_1 = 0, (\mathbf{E} - A)\mathbf{X}_2 = 0, (\mathbf{E} - A)\mathbf{X}_3 = -\mathbf{X}_2.$$

可见， $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 是 A 的特征值为1的两个线性无关的特征向量。

求解线性方程组 $(\mathbf{E} - A)\mathbf{X} = 0$ ，可以得到

$$\xi = (-1, 1, 0)^T, \eta = (3, 0, 1)^T.$$

可以取 $\mathbf{X}_1 = \xi = (-1, 1, 0)^T$ ；命 $\mathbf{X}_2 = k_1\xi + k_2\eta = (-k_1 + 3k_2, k_1, k_2)^T$ ，
确定 k_1, k_2 满足(1) $(\mathbf{E} - A)\mathbf{X}_3 = -\mathbf{X}_2$ 有解；(2) $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2$ 线性无关。

2.3.2 变换矩阵P

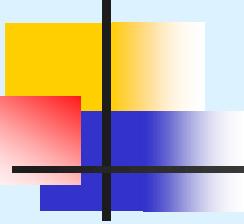
即确定 k_1, k_2 , 使 $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 - 3k_2 \\ -k_1 \\ -k_2 \end{bmatrix}$ 有解.

若使系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩, 得到 $k_1 = k_2$,
且其解为 $x_1 = -x_2 + 3x_3 - k_1$, 其中 k_1 为任意非零常数.

取 $k_1 = 1$, 有 $X_2 = (2, 1, 1)^T, X_3 = (2, 0, 1)^T$.

于是

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$



2.3.3 Jordan标准形的应用

已知常系数线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases} \quad (1)$$

2.3.3 Jordan标准形的应用

$$\text{记 } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

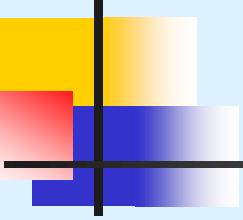
则方程组 (1) 可写成矩阵形式 $\frac{dX}{dt} = AX \quad (2)$

设 J 是 A 的 Jordan 标准形, 则 $P^{-1}AP = J$.

$$\text{令 } X = PY, \quad \text{其中 } Y = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix}.$$

$$\text{则 } \frac{d(PY)}{dt} = APY, \quad \text{即 } P \frac{dY}{dt} = APY, \quad \text{即 } \frac{dY}{dt} = P^{-1}APY = JY.$$

由上式求得 Y , 然后通过 $X = PY$ 可求得原方程的解 X .



2.3.3 Jordan标准形的应用

例4. 求微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -x_1 - 2x_2 + 6x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + 3x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_1 - x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

解：令 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$, 则方程可以写为 $\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} X = AX.$

其中 $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -1 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, 由例3知 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,

2.3.3 Jordan标准形的应用

其中 $P = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

令 $X = PY$, 则可以得到 $\frac{dy_1}{dt} = y_1$, $\frac{dy_2}{dt} = y_2 + y_3$, $\frac{dy_3}{dt} = y_3$.

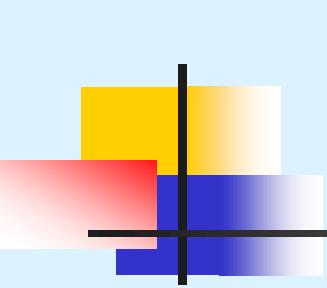
于是求得 $y_1 = k_1 e^t$, $y_3 = k_3 e^t$, $y_2 = (k_2 + k_3 t) e^t$.

代入 $X = PY$, 得到 $x_1 = -k_1 e^t + 2k_3 e^t + 2(k_2 + k_3 t) e^t$,

$x_2 = k_1 e^t + (k_2 + k_3 t) e^t$,

$x_3 = k_3 e^t + (k_2 + k_3 t) e^t$,

其中 k_1, k_2, k_3 为任意常数.



作业：求下列矩阵的Jordan标准形。

$$(1) \begin{bmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$