

线段求交问题

吴天

2018 年 2 月 2 日

1 问题

2D平面内的两条线段 AB 与 CD ，分析两条线段之间的关系。比如两条线段是否有交点，如果无交点，是否是平行的。

2 分析

还是利用上次的老办法,假设交点为 Q ，列方程：

$$A + (B - A) * t1 = Q \quad (1)$$

$$C + (D - C) * t2 = Q \quad (2)$$

于是，我们有如下方程：

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x - A_x \\ B_y - A_y \end{bmatrix} * t1 = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_x - C_x \\ D_y - C_y \end{bmatrix} * t2 \quad (3)$$

方程(3)可写成：

$$(A_x - C_x)(D_y - C_y) + (B_x - A_x)(D_y - C_y) * t1 = (D_x - C_x)(D_y - C_y) * t2 \quad (4)$$

$$(A_y - C_y)(D_x - C_x) + (B_y - A_y)(D_x - C_x) * t1 = (D_y - C_y)(D_x - C_x) * t2 \quad (5)$$

消元 t_2 得到:

$$t_1 = \frac{(A_y - C_y)(D_x - C_x) - (A_x - C_x)(D_y - C_y)}{(B_x - A_x)(D_y - C_y) - (B_y - A_y)(D_x - C_x)} \quad (6)$$

我不知道大家看到方程(6)会有什么想法, 就我的直觉来说, 如果等号右边的分式的分母为0, 则 t_1 不存在, 也就是

$$(B_x - A_x)(D_y - C_y) - (B_y - A_y)(D_x - C_x) = 0$$

如果你足够敏锐:

$$\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} = \frac{D_y - C_y}{D_x - C_x}$$

这让我看到斜率一样, 共线或平行。

我们用同样的方法得到:

$$t_2 = \frac{(B_y - A_y)(C_x - A_x) - (B_x - A_x)(C_y - A_y)}{(B_x - A_x)(D_y - C_y) - (B_y - A_y)(D_x - C_x)} \quad (7)$$

再一次印证了平行的条件的猜测。那么问题来了, 相交的条件又是什么呢? 首先:

$$(B_x - A_x)(D_y - C_y) - (B_y - A_y)(D_x - C_x) \neq 0$$

然后, 我们的 t_1 和 t_2 必须在 $[0, 1]$ 之间, 既:

$$0 \leq t_1 \leq 1 \quad (8)$$

$$0 \leq t_2 \leq 1 \quad (9)$$

看起来我们算是已经解决了问题, 不过得多说几句, 如果我们要把这套计算过程用计算机程序来实现, 真的得注意一些事情。假定 $a = (A_y - C_y)(D_x - C_x) - (A_x - C_x)(D_y - C_y)$, $b = (B_y - A_y)(C_x - A_x) - (B_x - A_x)(C_y - A_y)$, $c = (B_x - A_x)(D_y - C_y) - (B_y - A_y)(D_x - C_x)$ 。也就是 $t_1 = \frac{a}{c}$, $t_2 = \frac{b}{c}$ 。

得考虑下线段 AB 与 CD 共线时的特殊情形了, 也就是 $c = 0$ 这种情况下:

- AB 与 CD 重叠, 存在一个或者多个交点
- AB 与 CD 不重叠, 无交点

先讨论第一种情况，如果AB与CD共线，我们得出：

$$\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} = \frac{A_y - C_y}{A_x - C_x} \quad (10)$$

$$\frac{A_y - C_y}{A_x - C_x} = \frac{D_y - C_y}{D_x - C_x} \quad (11)$$

根据对角线法则，(10)和(11)与 a 和 b 是密切相关的。另一方面， $c = 0$ ，就几何意义上来讲，如果 $a = 0, c = 0$ ，一定有 $b = 0$ 。你能看出来吗？接下来的工作是确定交点到底有多少个了，可能是一个，也可能是线段的一部分。首先我们得对点 A, B, C, D 以 x 坐标为参考做由左向右，由上到下的排序，得到经过排序后的线段 AB, CD ，要知道，排序很重要！接下来再做一次以一维相交性检测，通过少量的计算存在以下情况：

- ALL : 线段CD在A点左侧
- BRR : 线段CD在B点右侧
- LAR : 线段CD在A点左右两侧
- LBR : 线段CD在B点左右两侧
- LA : 线段D点与A点重合
- BR : 线段C点与B点重合

我们可以确定的是：当 $a = 0, b = 0, c = 0$ 时，AB与CD也是相交的。

3 结论：

- 当 $(B_x - A_x)(D_y - C_y) - (B_y - A_y)(D_x - C_x) \neq 0$ 时，一定有一个交点Q；
- 当 $(B_x - A_x)(D_y - C_y) - (B_y - A_y)(D_x - C_x) = 0$ 时， AB 与 CD 平行或共线，特殊的,当且仅当 $a = 0, b = 0, c = 0$ 时，AB与CD共线且至少有一点重合。