

# 圆与圆求交问题

吴天

2018 年 2 月 2 日

## 1 问题：

2D平面内，给定两个圆，他们的直接的位置关系有哪几种情况？计算方法又是怎样的？计算机上可以如何实现？已知圆 $A(C_1, r_1)$ ， $B(C_2, r_2)$ 。

## 2 分析：

如下图所示： 我们可能更关心第二，三种情况，如下图所示： 图中用红笔标记的两个点为我们要求的点：

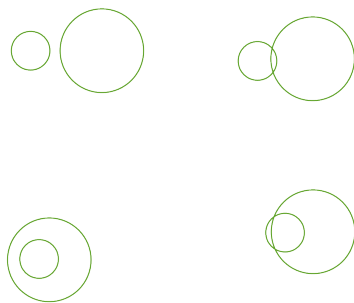


图 1:

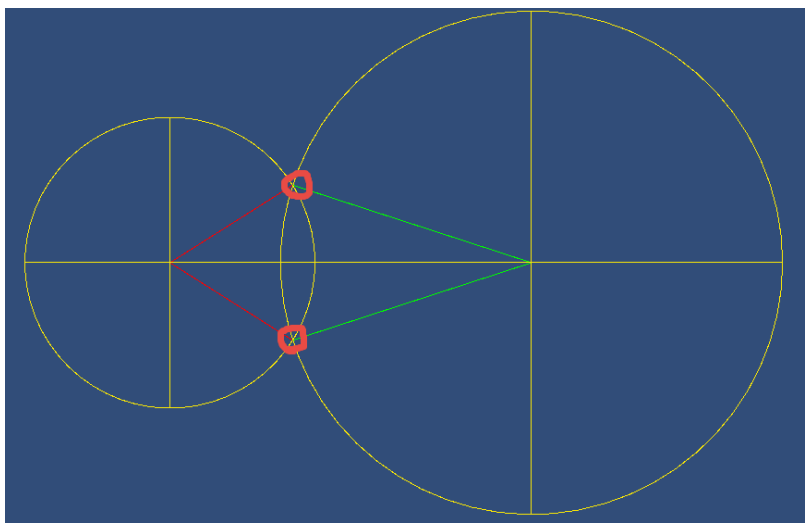


图 2:

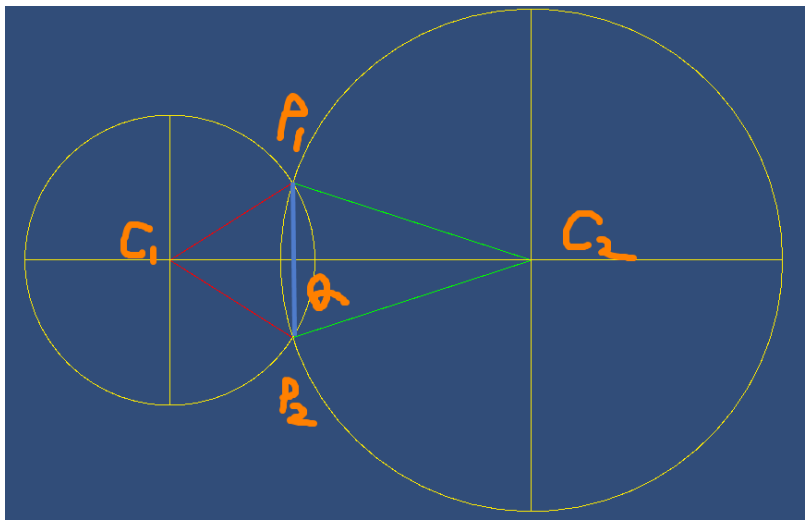


图 3:

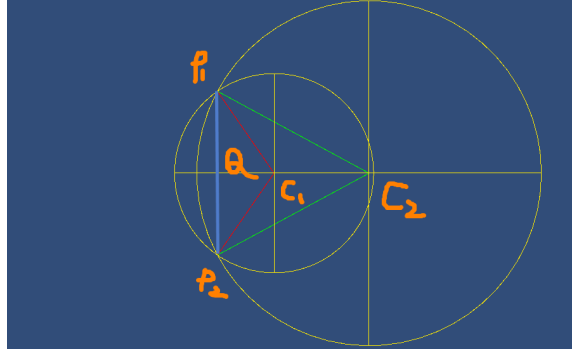


图 4:

实际上，我们只需要算 $P_1$ ， $P_2$ 便同理可得，那我们就开始算 $P_1$ 吧，首先有方程:

$$\vec{P}_1 = \vec{C}_1 + C_1\vec{Q} + Q\vec{P}_1 \quad (1)$$

$$P_1\vec{Q} = Q\vec{P}_2 \quad (2)$$

$$(3)$$

我们甚至可以证明直线 $C_1C_2$ 是图形的对称轴。设 $\angle P_1C_1Q$ 为 $\alpha$ ,我们有方程:

$$|C_1Q| = |C_1P_1| \cos \alpha \quad (4)$$

$$\cos \alpha = \frac{|C_1P_1|^2 + |C_1C_2|^2 - |P_1C_2|^2}{2 * |C_1P_1| * |C_1C_2|} \quad (5)$$

结合(4)和(5)，我们可以计算出 $C_1Q$ 的长度:

$$|C_1Q| = \frac{|C_1P_1|^2 + |C_1C_2|^2 - |P_1C_2|^2}{2 * |C_1C_2|} \quad (6)$$

注意，上式 $C_1Q$ 的长度有正负之分，理由看图4就知道了，接下来，我们根据毕式定理得到 $P_1Q$ 的长度，然后只需求出 $C_1\vec{C}_2$ 的normalized向量，记为 $Norm(\vec{C}_1C_2)$ ,我们有:

$$C_1\vec{Q} = \vec{C}_1 + |C_1Q| * Norm(C_1\vec{C}_2) \quad (7)$$

也就是：

$$C_1 \vec{Q} = \vec{C}_1 + \frac{|C_1 P_1|^2 + |C_1 C_2|^2 - |P_1 C_2|^2}{2 * C_1 \vec{C}_2^2} * C_1 \vec{C}_2 \quad (8)$$

方程(7)是适用于图3，图4这两种情况的，你能看出来吗？至于 $Q\vec{P}_1$ 怎么求，就留给读者吧！