圆与圆求交问题

吴天

2018 年 2 月 2 日

1 问题：

2D平面内，给定两个圆，他们的直接的位置关系有哪几种情况？计算方法又是怎么样的？计算机上可以如何实现？已知圆A($C_1, r1$)，B($C_2, r2$)。

2 分析：

如下图所示： 我们可能更关心第二，三种情况，如下图所示： 图中用红笔标记的两个点为我们要求的点：

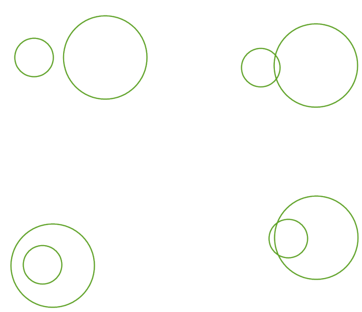

图 1:

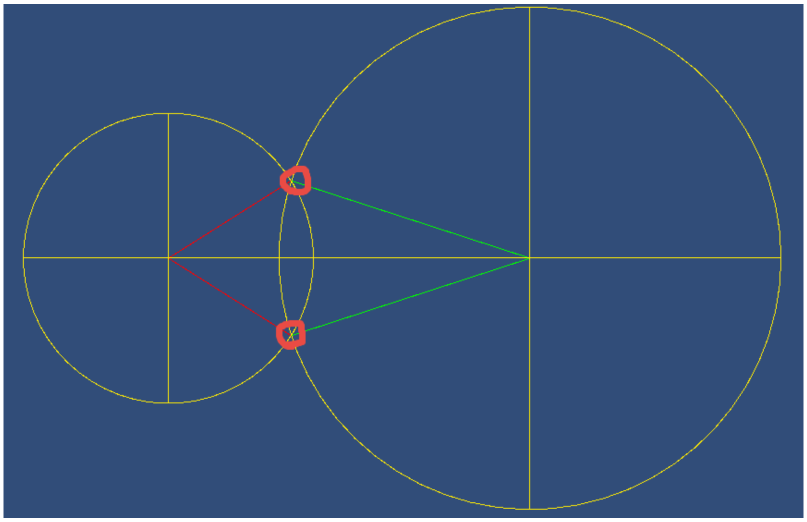

图 2:

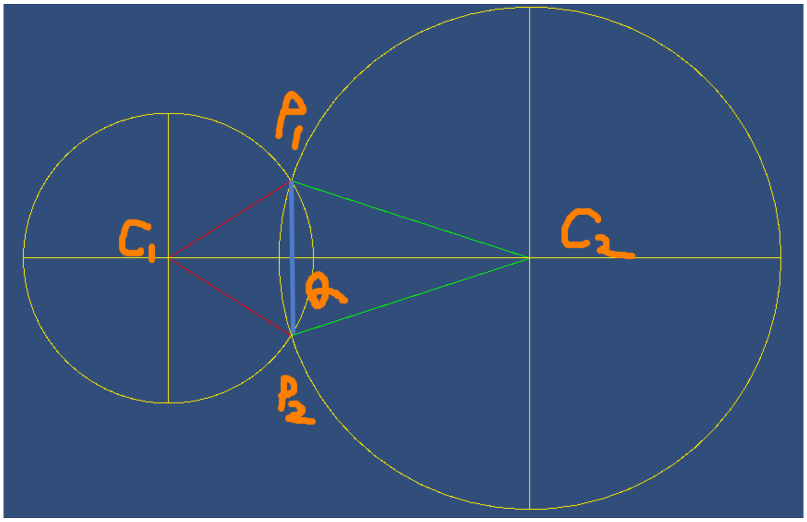

图 3:

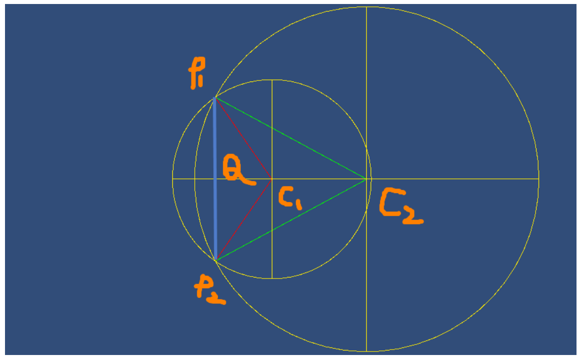

图 4:

实际上，我们只需要算P_1，P_2便同理可得，那我们就开始算P1吧，首先有方程:

$$\vec{P_1} = \vec{C_1} + \vec{C_1Q} + \vec{QP_1} \tag{1}$$

$$\vec{P_1Q} = \vec{QP_2} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

我们甚至可以证明直线C_1C_2是图形的对称轴。设$\angle P_1C_1Q$为α,我们有方程：

$$|C_1Q| = |C_1P_1| \cos\alpha \tag{4}$$

$$\cos\alpha = \frac{|C_1P_1|^2 + |C_1C_2|^2 - |P_1C_2|^2}{2 * |C_1P_1| * |C_1C_2|} \tag{5}$$

结合(4)和(5)，我们可以计算出C_1Q的长度：

$$|C_1Q| = \frac{|C_1P_1|^2 + |C_1C_2|^2 - |P_1C_2|^2}{2 * |C_1C_2|} \tag{6}$$

注意，上式C_1Q的长度有正负之分，理由看图4就知道了，接下来，我们根据毕式定理得到P_1Q的长度，然后只需求出$\vec{C_1C_2}$的normalized向量，记为$Norm(\vec{C_1C_2})$,我们有：

$$\vec{C_1Q} = \vec{C_1} + |C_1Q| * Norm(\vec{C_1C_2}) \tag{7}$$

也就是：

$$\vec{C_1Q} = \vec{C}_1 + \frac{|C_1P_1|^2 + |C_1C_2|^2 - |P_1C_2|^2}{2 * \vec{C_1C_2}^2} * \vec{C_1C_2} \tag{8}$$

方程(7)是适用于图3，图4这两种情况的，你能看出来吗？