离散化 T_s $x[k+1] = f(x[k], u[k], k)$

设计 u 使 $x \to x_d$

性能指标

$$J = \|x[N] - x_d[N]\|_S^2 + \sum_{k=0}^{N-1}\left(\|x[k] - x_d[k]\|_Q^2 + \|u[k]\|_R^2\right)$$

DP: 采用逆推法 $x[k+1] = Ax[k] + Bu[k]$

求 $u^*[0], u^*[1], \cdots, u^*[N-1]$ 使 J 最小

逆向分级.

$k = N-1 \to N$

$$J_{(N-1)-N} = \|x[N] - x_d[N]\|_S^2 + \|x[N-1] - x_d[N-1]\|_Q^2 + \|u[N-1]\|_R^2$$

$x[N] = Ax[N-1] + Bu[N-1]$ 代替

$$\frac{\partial J_{(N-1)-N}}{\partial u[N-1]} =$$

$= 0$

$\Rightarrow u^*[N-1] =$

对最优解求代价

$J^*_{(N-1)-N} =$

$=$

使用 $x[N-2]$ 代替

$$J_{[N-2]-N} = J_{[N-1]-N} + \|x_{[N-2]} - x_{d[N-2]}\|_Q^2 + \|u_{[N-2]}\|_R^2$$

根据最优理论，若 $J_{[N-2]-N}$ 最小，其中包含的 $J_{[N-1]-N}$ 一定是最小

$$\frac{\partial J_{[N-2]-N}}{\partial u_{[N-2]}} =$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow u^*_{[N-2]} =$$

$$x_{[N-1]} = A x_{[N-2]} + B u^*_{[N-2]}$$

$$x_{[N]} = A x_{[N-1]} + B u^*_{[N-1]}$$

$$J^*_{[N-2]-N}$$

⋮

$$J_{0\to N}, \quad u^*_{[0]}, u^*_{[1]}, \dots, u^*_{[N-1]}$$

贝尔曼动态规划方程：

$$J_{[N-k]\to N}(x_{[N-k]}) = \min_{u_{[N-k]}} \left[J^*_{N-(k-1)\to N}\left(f(x_{[N-k]}, u_{[N-k]}) + g(x_{[N-k]}, u_{[N-k]})\right)\right]$$

$\begin{cases} \text{线性} \\ \text{代价函数为二次型} \end{cases} \Rightarrow$ LQR

LQR：

$$x_{[k+1]} = A x_{[k]} + B u_{[k]}$$

代码：LQR文件夹

代价函数二次型

$$J = \frac{1}{2}\| \underbrace{X[N] - X_d[N]}_{e[N]} \|_S^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\| X[k] - X_d[k] \|_Q^2 + \| U[k] \|_R^2 \right)$$

采用逆向分级

$$x[k+1] = A X[k] + B U[k]$$

$k=0 \quad x_1 = A X_0 + B U_0$

$k=1 \quad x_2 = A X_1 + B U_1 = A(A X_0 + B U_0) + B U_1$

$k=2 \quad X_3 = A X_2 + B U_2 = A[A(A X_0 + B U_0) + B U_1] + B U_2$

$\vdots$

$k=N-1 \quad X_N = A X_{N-1} + B U_{N-1}$

$= \cdots \qquad + B U_{N-1}$

$K=N$ 时 $J^*_{N\to N} = \frac{1}{2}\| X_N - X_{dN} \|_S^2$ ，令 $S = P[0]$

$K=N-1$ 时 $J^*_{(N-1)\to N} = \underbrace{\frac{1}{2}\| X_N - X_{dN} \|_S^2}_{J^*_{N\to N}} + \frac{1}{2}\| X_{N-1} - X_{d(N-1)} \|_Q^2 + \frac{1}{2}\| U_{N-1} \|_R^2$

$K=N-2$ 时 $J^*_{(N-2)\to N} = \underbrace{\frac{1}{2}\| X_N - X_{dN} \|_S^2 + \frac{1}{2}\| X_{N-1} - X_{d(N-1)} \|_Q^2 + \frac{1}{2}\| U_{N-1} \|_R^2}_{J^*_{(N-1)\to N}} + \frac{1}{2}\| X_{N-2} - X_{d(N-2)} \|_Q^2 + \frac{1}{2}\| U_{N-2} \|_R^2$

$X_N = A X_{N-1} + B U_{N-1}$

则 $\dfrac{\partial J^*_{(N-1)\to N}}{\partial U_{N-1}} = 0$

$$\frac{\partial \frac{1}{2}(X_N - X_{dN})^T P_{[0]} (X_N - X_{dN})}{\partial u_{N-1}} = 0$$

$$X_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \frac{\partial \frac{1}{2} X_N^T P_{[0]} X_N}{\partial u_{N-1}}$$

$$= \frac{\partial X^T[N]}{\partial u_{N-1}} \cdot \frac{\partial \frac{1}{2} X_N^T P_{[0]} X_N}{\partial X_N} = 2P[0]X[N]$$

$$= B^T \cdot P[0] X_N$$

$$= B^T P_{[0]} (A X_{N-1} + B u_{N-1})$$

$$\frac{\partial X_{N-1}^T Q X_{N-1}}{\partial u_{N-1}} = 0 \qquad \frac{\partial \frac{1}{2} u_{N-1}^T R u_{N-1}}{\partial u_{N-1}} = R u_{N-1}$$

$$\frac{\partial J_{(N-1) \to N}}{\partial u_{N-1}} = B^T P_{[0]} (A X_{N-1} + B u_{N-1}) + R u_{N-1} = 0$$

$$\Rightarrow u^*_{N-1} = -\underbrace{(B^T P_{[0]} B + R)^{-1} B^T P_{[0]} A}_{= F_{N-1}} X_{N-1}$$

$$= -\underbrace{F_{N-1}}_{\text{反馈增益}} X_{N-1}$$

u^*_{N-1} 代入到 $J_{(N-1)\to N}$ 中

$$J^*_{(N-1)\to N} = \frac{1}{2}x^T_{N-1}\underbrace{\left([A-BF_{N-1}]^T P[0] [A-BF_{N-1}] + F^T_{N-1}RF_{N-1} + Q\right)}_{P[1]}x_{N-1}$$

$$= \frac{1}{2}x^T_{N-1} P[1] x_{N-1}$$

$$J_{N-k\to N} = \frac{1}{2}x^T_{N-k} P_k x_{N-k}$$

递归

$$P_k = [A-BF_{N-k}]^T P[k-1] (A-BF_{N-k}) + F^T_{N-k}RF_{N-k} + Q$$

$$F_{N-k} = (B^TP_{k-1}B + R)^{-1} B^T P_{k-1} A$$

$$u^*_{N-k} = -F_{N-k}x_{N-k}$$

$$P_{k+1}$$

$$P_0 = S \rightarrow P_1 \rightarrow P_2 \ \cdots \ P_{N-1}$$

$$u_{N-1} \rightarrow u_{N-2} \ \cdots \ u_0$$

可以离线计算的

$$x_N \leftarrow \cdots \leftarrow x_1 \leftarrow x_0$$

对于可控且稳定 sys，$N \to \infty$ 时 $F_{N-k} \to F$ → 常数 → 无需存储矩阵

路径跟踪 x_d：常值

代码：Augmented LQR-V1 文件夹

$e_k = x_k - x_{dk}$ 对 e_k 调节，$e_{dk} = 0$

LQR

增广形式

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{d\,k+1} \end{bmatrix}}_{x_{a\,k+1}} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ x_{dk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u_k$$

$$x_{a\,k+1} = A_a x_{ak} + B_a u_k$$

$$e_k = x_k - x_{dk} = \underbrace{\begin{bmatrix} I & -I \end{bmatrix}}_{C_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_k \\ x_{dk} \end{bmatrix}}_{x_{ak}} = C_a x_{ak}$$

性能指标

代价函数

$$J = \frac{1}{2}\|e_N\|_S^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\|e_k\|_Q^2 + \|u_k\|_R^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} x_{aN}^T \underbrace{C_a^T S C_a}_{S_a} x_{aN}$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(x_{ak}^T \underbrace{C_a^T Q C_a}_{Q_a} x_{ak} + u_k^T R u_k\right)$$

则 $J=\frac{1}{2}X_{aN}^T S_a X_{aN}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(X_{ak}^T Q_a X_{ak}+U_k^T R U_k)$

故：
$$\begin{cases} X_{ak+1}=A_a X_{ak}+B_a U_k \\ e_k = C_a X_{ak} \\ J=\frac{1}{2}X_{aN}^T S_a X_{aN}+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}(X_{ak}^T Q_a X_{ak}+U_k^T R U_k) \end{cases}$$

Q：存在稳态误差

系统处于稳态时，其稳态输入 U_d：

$$X_d = A X_d + B \underbrace{U_d}_{\text{稳态输入}}$$

代码：AugmentedLQR-V2 文件夹

$\Rightarrow (I-A)X_d = BU_d$

$\underline{U_d = B^{-1}(I-A)X_d}$ 不一定存在，因 B 不一定为方阵

故 用这个，求其线性方程组

定义稳态误差

$\delta U_k = U_k - U_d \Rightarrow U_k = \delta U_k + U_d$

$$x_{k+1} = A x_k + B u_k$$

$$\Rightarrow x_{k+1} = A x_k + B\delta u_k + B u_d = A x_k + B\delta u_k + (I-A)x_d$$

$$x_{a\,k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1}\\ x_d\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & I-A\\ 0 & I\end{bmatrix}}_{A_a}\begin{bmatrix}x_k\\ x_d\end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix}B\\ 0\end{bmatrix}}_{B_a}\delta u_k$$

增广形式

$$x_{a\,k+1} = A_a x_{ak} + B_a\delta u_k$$

性能指标

$$J = \frac{1}{2} e_N^T S e_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e_k^T Q e_k + \delta u_k^T R \delta u_k\right)$$

输入偏离平衡位置的距离

$$e_k = x_k - x_d = \underbrace{[I, -I]}_{C_a}\begin{bmatrix}x_k\\ x_d\end{bmatrix} = C_a x_{ak}$$

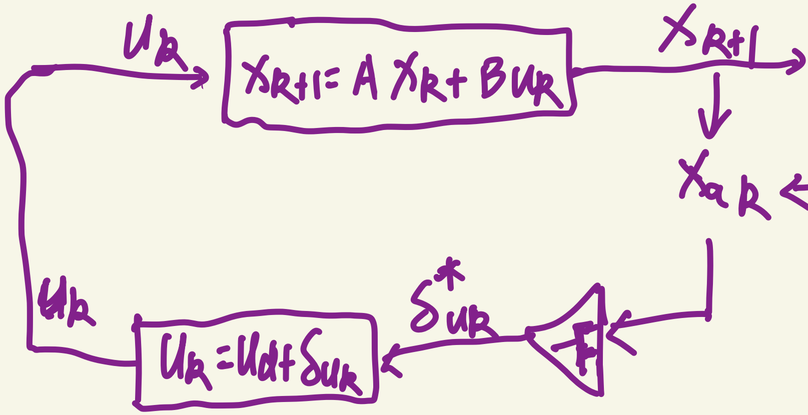
故

新LQR问题为

$$\begin{cases} x_{a\,k+1} = A_a x_{ak} + B_a\delta u_k \\ e_k = C_a x_{ak} \\ J = \frac{1}{2} e_N^T S_a e_N + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(e_k^T Q_a e_k + \delta u_k^T R \delta u_k\right) \end{cases}$$

F是对应 x_a 的反馈增益

求解出的结果是 δu_k



目标为非常值，处理方法 代码：AugmentedLQR-V3 AugmentedLQR-V4 文件夹

$x_{d(k+1)} = A_D x_{dk}$ 常值 $A_D = I$，非常值 $A_D \neq I$

定义增量 $\underbrace{\Delta u_k = u_k - u_{k-1}}_{\text{平滑输入的变化}}$ $\Rightarrow$ $u_k = \Delta u_k + u_{k-1}$

$\downarrow$

$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$

则 $x_{k+1} = Ax_k + B\Delta u_k + Bu_{k-1}$

设增广向量

$$x_{ak} = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{dk} \\ u_{k-1} \end{bmatrix}$$

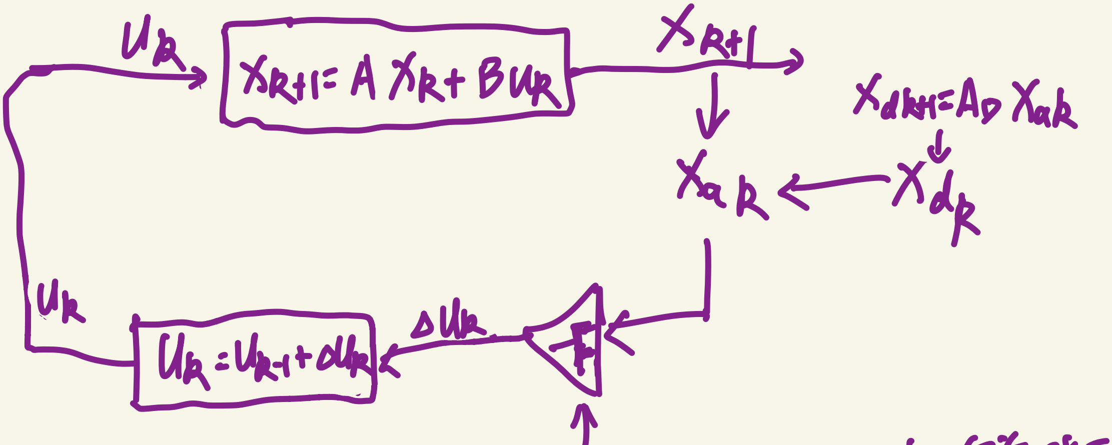
$$e_k = x_k - x_{dk} = [I, -I, 0]\begin{bmatrix} x_k \\ x_{dk} \\ u_{k-1} \end{bmatrix} = C_a x_{ak}$$

$$e_k = C_a x_{ak}$$

$$x_{ak+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ x_{dk+1} \\ u_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 & B \\ 0 & A_D & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_k \\ x_{dk} \\ u_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ I \end{bmatrix}\Delta u_k$$

A_a $\quad B_a$

则 $\begin{cases} x_{a\,k+1} = A_a x_{ak} + B_a \Delta u_k \\ e_k = C_a x_{ak} \\ J = \frac{1}{2} e_N^T S e_N + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(e_k^T Q e_k + \Delta u_k^T R \Delta u_k \right) \\ \quad = \frac{1}{2} x_{ak}^T \underbrace{C_a^T S C_a}_{S_a} x_{ak} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_{ak}^T \underbrace{C_a^T Q C_a}_{Q_a} x_{ak} + \Delta u_k^T R \Delta u_k \right) \end{cases}$



通过LQR计算得到反馈增益阵F