基于 DA 的 8 位 FFT 仿真报告

吴彦成

2023 年 4 月 6 日

1 概述

本次仿真使用了 Distributed Arithmetic 方法，使用了查找表代替了传统的向量点乘。输入数据类型为 8 位向量，数据类型为浮点数，输出数据 8 位向量，数据类型为浮点数。

2 原理

8 位 FFT 的数学公式如下：

$$F(k)=\sum_{n=0}^{7}x(n)W^{nk},$$

其中，$x(n)$ 为输入向量的第 n 位，$F(k)$ 为输出向量的第 k 位，$W=e^{-2\pi i/8}$。从上一阶段的仿真中，我们知道还可以对其进行进一步化简：

$$\sum_{n=0}^{7}x(n)W^{nk}=\sum_{n=0}^{3}(x(n)+(-1)^k x(4+n))W^{nk}.$$

更进一步，我们可以将 $x(n)+(-1)^k x(4+n)$ 写为 16 位二进制的形式：

$$x(n)+(-1)^k x(4+n)=-b_{(n,15)}2^{15}+\sum_{k=0}^{14}b_{(n,k)}2^k,$$

其中，$b_{(n,k)}$ 为 0 或 1。由此可知：

$$F(k)=-(\sum_{n=0}^{3}b_{(n,15)}W^{n15})2^{15}+\sum_{k=0}^{14}(\sum_{n=0}^{3}b_{(n,k)}W^{nk})2^k,$$

我们注意到，形如：

$$\sum_{n=0}^{3} b_{(n,k)} W^{nk}$$

的取值是有限的，即 $2^4 = 16$ 种。我们将其依次存入 LUT 中，这样一来我们便不用在对上述公式进行计算，而是通过一个 $b_{(0,k)}b_{(1,k)}b_{(2,k)}b_{(3,k)}$ 序列直接对应相应的结果。于是在整个 8 位 FFT 的计算中，我们只需要用到加法器、$\times 2$、$\times(-1)$，而避免了传统乘法器的使用。

3 仿真流程

虽然说 LUT 的使用 matlab 生成 LUTs 比较繁琐，但这并不是该算法的核心部分，故我们不在此赘述，以下假设我们已经生成好了每一个 k 对应的 LUT。

首先我们对数据进行预处理，16 位的字长允许我们的数据在 -2^{15} 至 $2^{15}-1$ 的范围内。我们取修正因数为 $(2^{15}-1)/max(abs(x))$，然后将 x 中的数据分别点乘修正因子即可。

然后我们将预处理后的数据转化为二进制，便得到了 8 个 16 位二进制数码。根据 DA 方法，我们依次遍历第 1 至 16 位，每一次会得到一个 8 位的二进制码。其中高 4 位对应原始数据的第 1 至 4 位的某一个二进制数位，而低四位则对应 5 至 8 位。我们分别按高四位和低四位进行寻址累加即可，值得注意的是低四位需要乘上 $(-1)^k$。再根据情况对总和进行 $\times(-2)$(最高位)、$\times 1$(最低位)、$\times 2$(其他位)，最后便可以得到 $F(k)$。

4 查找表

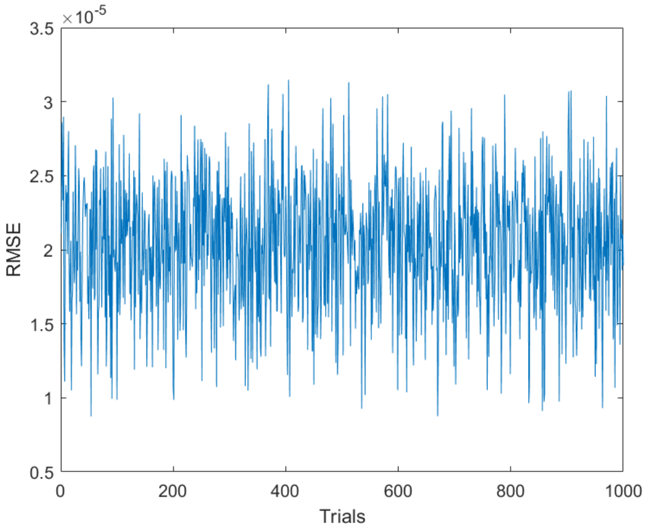
为了实现 8 点 FFT，仿真算法中一共使用了 8 个查找表，每个查找表包含 16 个数据。其中第 k 个查找表存贮的数据如下:

0
w^{3k}
w^{2k}
$w^{2k}+w^{3k}$
w^{k}
$w^{k}+w^{3k}$
$w^{k}+w^{2k}$
$w^{k}+w^{2k}+w^{3k}$
1
$1+w^{3k}$
$1+w^{2k}$
$1+w^{2k}+w^{3k}$
$1+w^{k}$
$1+w^{k}+w^{3k}$
$1+w^{k}+w^{2k}$
$1+w^{k}+w^{2k}+w^{3k}$

5 误差

在 1000 组 8 位随机数数据中，仿真结果与 matlab 内置 fft 均方根误差如下如所示：

而这 8000 个数据总共的均方根误差为 2.0871×10^{-5}，误差可接受。


×10^-5
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
RMSE
0
200
400
600
800
1000
Trials