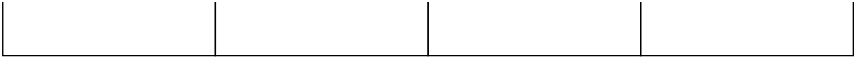
组合数、卡特兰数与斐波那契数

wycero

福建师大附中

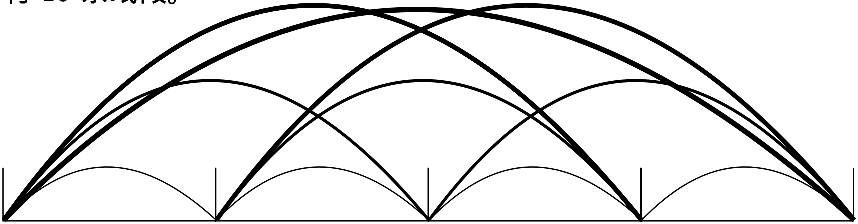
引例 1

下图中有几条线段？



暴力的做法

打枪。每个端点向右边的端点开枪，共打了 $4+3+2+1=10$ 次，所以有 10 条线段。



正解的做法

暴力枚举弱爆了，让我们用更优雅的方式解决问题吧！

正解的做法

暴力枚举弱爆了，让我们用更优雅的方式解决问题吧！
考虑选取一个端点作为起点，共 5 种选法。

正解的做法

暴力枚举弱爆了，让我们用更优雅的方式解决问题吧！
考虑选取一个端点作为起点，共 5 种选法。
选取另一个端点作为终点，共 4 种选法。

正解的做法

暴力枚举弱爆了，让我们用更优雅的方式解决问题吧！
考虑选取一个端点作为起点，共 5 种选法。
选取另一个端点作为终点，共 4 种选法。
由于 AB 和 BA 是同一条线段，所以要除以 2。

正解的做法

暴力枚举弱爆了，让我们用更优雅的方式解决问题吧！
考虑选取一个端点作为起点，共 5 种选法。
选取另一个端点作为终点，共 4 种选法。
由于 AB 和 BA 是同一条线段，所以要除以 2。
共 $5 \times 4 \div 2 = 10$ 条。

回顾我们刚才的过程，我们先从 5 个点中有序地选出 2 个不同点，共 20 种选法。

回顾我们刚才的过程，我们先从 5 个点中有序地选出 2 个不同点，共 20 种选法。
然后，从 **2** 个点中有序地选出 2 个不同点，得到了每个无序的选法对应 2 种有序的选法。

回顾我们刚才的过程，我们先从 5 个点中有序地选出 2 个不同点，共 20 种选法。
然后，从 **2** 个点中有序地选出 2 个不同点，得到了每个无序的选法对应 2 种有序的选法。
然后除一下，$20 \div 2 = 10$

排列

排列：从 $1 \cdots n$ 中有序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 A_n^m。

排列

排列：从 $1 \cdots n$ 中有序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 A_n^m。
那么刚才的计算就是 $A_5^2 = 20$，$A_2^2 = 2$，$\frac{A_5^2}{A_2^2} = 10$。

排列

排列：从 $1 \cdots n$ 中有序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 A_n^m。
那么刚才的计算就是 $A_5^2 = 20$，$A_2^2 = 2$，$\frac{A_5^2}{A_2^2} = 10$。
一般的方法计算 A_n^m：

排列

排列：从 $1 \cdots n$ 中有序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 A_n^m。
那么刚才的计算就是 $A_5^2 = 20$，$A_2^2 = 2$，$\frac{A_5^2}{A_2^2} = 10$。
一般的方法计算 A_n^m：
从 n 个数种选一个数，有 n 种选法

排列

排列：从 $1 \cdots n$ 中有序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 A_n^m。
那么刚才的计算就是 $A_5^2 = 20$，$A_2^2 = 2$，$\frac{A_5^2}{A_2^2} = 10$。
一般的方法计算 A_n^m：
从 n 个数种选一个数，有 n 种选法
再选一个数，有 $n-1$ 种选法

排列

排列：从 $1 \cdots n$ 中有序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 A_n^m。
那么刚才的计算就是 $A_5^2 = 20$，$A_2^2 = 2$，$\frac{A_5^2}{A_2^2} = 10$。
一般的方法计算 A_n^m：
从 n 个数种选一个数，有 n 种选法
再选一个数，有 $n - 1$ 种选法
…

排列

排列：从 $1 \cdots n$ 中有序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 A_n^m。
那么刚才的计算就是 $A_5^2 = 20$，$A_2^2 = 2$，$\frac{A_5^2}{A_2^2} = 10$。
一般的方法计算 A_n^m：
从 n 个数种选一个数，有 n 种选法
再选一个数，有 $n-1$ 种选法
...
选第 m 个数，有 $n-m+1$ 种选法

排列

排列：从 $1 \cdots n$ 中有序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 A_n^m。
那么刚才的计算就是 $A_5^2 = 20$，$A_2^2 = 2$，$\frac{A_5^2}{A_2^2} = 10$。
一般的方法计算 A_n^m：
从 n 个数种选一个数，有 n 种选法
再选一个数，有 $n-1$ 种选法
…
选第 m 个数，有 $n-m+1$ 种选法
根据乘法原理，全部乘起来，得 $A_m^n = n(n-1)\cdots(n-m+1)$

阶乘

特别的，我们将 A_n^n 记作 $n!$，即 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

阶乘

特别的，我们将 A_n^n 记作 $n!$，即 $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$

$\therefore A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$

组合

组合：从 $1 \ldots n$ 中无序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 C_n^m。

组合

组合：从 $1 \ldots n$ 中无序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 C_n^m。
$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$

组合

组合：从 $1 \dots n$ 中无序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 C_n^m。
$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$
又 $\because A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \therefore C_n^m = \frac{n}{m!(n-m)!}$

组合

组合：从 $1\ldots n$ 中无序地选取 m 个不同的数的方案数，记作 C_n^m。

$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!}$

又 $\because A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \therefore C_n^m = \frac{n}{m!(n-m)!}$

$C_n^m = C_n^{n-m}$

组合数与中华优秀传统文化

1261 年杨辉在《详解九章算法》中记载杨辉三角，在西方称为帕斯卡三角，领先西方约 400 年。

组合数与中华优秀传统文化

1261 年杨辉在《详解九章算法》中记载杨辉三角，在西方称为帕斯卡三角，领先西方约 400 年。

1303 年朱世杰发现 $C_{n+p}^m = C_n^0 C_p^m + C_n^1 C_p^{m-1} + \cdots + C_n^m C_p^0$，在西方称为范德蒙德卷积，领先西方约 400 年。

杨辉三角

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

我们将组合数拍成一个三角形的表，就是杨辉三角。
由杨辉三角可知，$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1}$

卡特兰数

n 个节点的二叉树有几种不同形态？

卡特兰数

n 个节点的二叉树有几种不同形态？
当 $n = 0$ 时，有 1 种（空树），$c_0 = 1$

卡特兰数

n 个节点的二叉树有几种不同形态？
当 $n=0$ 时，有 1 种（空树），$c_0=1$
当 $n=1$ 时，$c_1=1$

卡特兰数

n 个节点的二叉树有几种不同形态？
当 $n = 0$ 时，有 1 种（空树），$c_0 = 1$
当 $n = 1$ 时，$c_1 = 1$
当 $n = 2$ 时，$c_2 = 2$

卡特兰数

n 个节点的二叉树有几种不同形态？
当 $n = 0$ 时，有 1 种（空树），$c_0 = 1$
当 $n = 1$ 时，$c_1 = 1$
当 $n = 2$ 时，$c_2 = 2$
当 $n = 3$ 时，$c_3 = 5$

卡特兰数

n 个节点的二叉树有几种不同形态？
当 $n = 0$ 时，有 1 种（空树），$c_0 = 1$
当 $n = 1$ 时，$c_1 = 1$
当 $n = 2$ 时，$c_2 = 2$
当 $n = 3$ 时，$c_3 = 5$
当 $n = 4$ 时，$c_4 = 14$

卡特兰数

n 个节点的二叉树有几种不同形态？
当 $n = 0$ 时，有 1 种（空树），$c_0 = 1$
当 $n = 1$ 时，$c_1 = 1$
当 $n = 2$ 时，$c_2 = 2$
当 $n = 3$ 时，$c_3 = 5$
当 $n = 4$ 时，$c_4 = 14$
当 $n = 5$ 时，$c_5 = 42$

卡特兰数

n 个节点的二叉树有几种不同形态？
当 $n = 0$ 时，有 1 种 (空树)，$c_0 = 1$
当 $n = 1$ 时，$c_1 = 1$
当 $n = 2$ 时，$c_2 = 2$
当 $n = 3$ 时，$c_3 = 5$
当 $n = 4$ 时，$c_4 = 14$
当 $n = 5$ 时，$c_5 = 42$
一般地说，$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \cdots + c_{n-1} c_0$

卡特兰数的其他公式

$c_n = \frac{C_{2n}^{n}}{n+1}$ 证明从略

假定每对大兔每月能生产一对小兔，而每对小兔生长两个月就成为大兔。

假定每对大兔每月能生产一对小兔，而每对小兔生长两个月就成为大兔。
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 \cdots$

假定每对大兔每月能生产一对小兔，而每对小兔生长两个月就成为大兔。
$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 \cdots$
第三项开始每项等于前两项的和，即 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

给定 n, m 和 k，对于所有的 $0 \le i \le n, 0 \le j \le \min(i, m)$ 有多少对 (i, j) 满足 C_i^j 是 k 的倍数。

给定 n, m 和 k，对于所有的 $0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq \min(i, m)$ 有多少对 (i, j) 满足 C_i^j 是 k 的倍数。杨辉三角，边算边取模。

N 边形划分成 N-1 个 Δ 的方案数？

N 边形划分成 N-1 个 Δ 的方案数？卡特兰数。

走楼梯，每次走 1 或 2 级，走到第 n 级台阶的方案数？

走楼梯，每次走 1 或 2 级，走到第 n 级台阶的方案数？斐波那契数。