容斥原理

wycero

福建师大附中

1. 容斥原理的介绍
2. 例题选讲

引例

OI 组中共 s 人，能 AKIOI 的有 a 人，能进北大的有 b 人，都不能的（比如我）有 c 人，既能 AKIOI 又进北大的有几人

引例

OI 组中共 s 人，能 AKIOI 的有 a 人，能进北大的有 b 人，都不能的 (比如我) 有 c 人，既能 AKIOI 又进北大的有几人

$s-a-b+c$

容斥原理

容斥原理：先不考虑重叠的情况，把所有对象的数目先计算出来，然后减掉重叠的情况

容斥原理

容斥原理：先不考虑重叠的情况，把所有对象的数目先计算出来，然后减掉重叠的情况
在以上问题中，每个同学有“AKIOI”和“进北大”两种属性，我们把这两种属性记作 a, b。

容斥原理

容斥原理：先不考虑重叠的情况，把所有对象的数目先计算出来，然后减掉重叠的情况

在以上问题中，每个同学有“AKIOI”和“进北大”两种属性，我们把这两种属性记作 a, b。

$f(S)$ 表示不具有集合 S 以外的属性（但集合 S 以内的属性不一定全有）的同学

$g(S)$ 表示具有的属性恰好为集合 S 的同学

容斥原理

容斥原理：先不考虑重叠的情况，把所有对象的数目先计算出来，然后减掉重叠的情况
在以上问题中，每个同学有“AKIOI”和“进北大”两种属性，我们把这两种属性记作 a, b。
$f(S)$ 表示不具有集合 S 以外的属性（但集合 S 以内的属性不一定全有）的同学
$g(S)$ 表示具有的属性恰好为集合 S 的同学
$g(\{a,b\}) = f(\{\}) - f(\{a\}) - f(\{b\}) + f(\{a,b\})$

容斥原理

容斥原理：先不考虑重叠的情况，把所有对象的数目先计算出来，然后减掉重叠的情况

在以上问题中，每个同学有“AKIOI”和“进北大”两种属性，我们把这两种属性记作 a, b。

$f(S)$ 表示不具有集合 S 以外的属性（但集合 S 以内的属性不一定全有）的同学

$g(S)$ 表示具有的属性恰好为集合 S 的同学

$g(\{a,b\}) = f(\{\}) - f(\{a\}) - f(\{b\}) + f(\{a,b\})$

一般的我们有 $f(S) = \sum_{T \subset S} g(T)$ 反过来 $g(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|S|-|T|} g(T)$

容斥原理

容斥原理：先不考虑重叠的情况，把所有对象的数目先计算出来，然后减掉重叠的情况

在以上问题中，每个同学有“AKIOI”和“进北大”两种属性，我们把这两种属性记作 a, b。

$f(S)$ 表示不具有集合 S 以外的属性（但集合 S 以内的属性不一定全有）的同学

$g(S)$ 表示具有的属性恰好为集合 S 的同学

$g(\{a,b\}) = f(\{\}) - f(\{a\}) - f(\{b\}) + f(\{a,b\})$

一般的我们有 $f(S) = \sum\limits_{T \subset S} g(T)$ 反过来 $g(S) = \sum\limits_{T \subset S} (-1)^{|S|-|T|} g(T)$

f, g 也可以脱掉“属性”的具体意义，对于一般的函数，都有

$$f(S) = \sum_{T \subset S} g(T) \Rightarrow g(S) = \sum_{T \subset S} (-1)^{|S|-|T|} g(T)$$

多重集合的容斥

如果把集合改成多重集合...

多重集合的容斥

如果把集合改成多重集合...

$f(S) = \sum_{T \subset S} g(T) \Rightarrow g(S) = \sum_{T \subset S} \mu(S - T) g(T)$ 其中

$\mu(S) = (S\text{包含重复元素})?0 : (-1)^|S|$

多重集合的容斥

如果把集合改成多重集合...

$f(S)=\sum_{T\subset S} g(T) \Rightarrow g(S)=\sum_{T\subset S}\mu(S-T)g(T)$ 其中

$\mu(S)=(S$包含重复元素$)?0:(-1)^|S|$ 多重集合的容斥也是常见的容斥，在数论问题中尤为重要。

1 容斥原理的介绍

2 例题选讲

LG1450 硬币购物

硬币购物一共有 4 种硬币。面值分别为 c_1, c_2, c_3, c_4。某人去商店买东西，去了 tot 次。每次带 d_i 枚 c_i 硬币，买 s_i 的价值的东西。请问每次有多少种付款方法。

$d_i, s \leq 100000, tot \leq 1000$

LG1450 硬币购物

solution

数据范围这么大，多重背包做不了

LG1450 硬币购物

solution

数据范围这么大，多重背包做不了
容斥原理来救场了

LG1450 硬币购物

solution

数据范围这么大，多重背包做不了
容斥原理来救场了
不管硬币数量的限制，就是完全背包

LG1450 硬币购物

solution

数据范围这么大，多重背包做不了
容斥原理来救场了
不管硬币数量的限制，就是完全背包
加上限制，我们就容斥掉用太多硬币的情况–枚举哪几种硬币用太多，先它们他们用完限度，然后在跑完全背包。

初赛经常讲的

错排问题

求 n 个元素的排列个数，使得每个元素都不在原来的位置。

错排问题

solution

容斥，$f(S)$ 表示 S 中的元素错排，$g(S)$ 表示 S 中的元素随意排列。

错排问题

solution

容斥，$f(S)$ 表示 S 中的元素错排，$g(S)$ 表示 S 中的元素随意排列。$F(S)=\sum\limits_{T\subset S}(-1)^{|S|-|T|}g(T)$ 其中元素个数相同的集合可以用组合数一起计算。

错排问题

solution

容斥，$f(S)$ 表示 S 中的元素错排，$g(S)$ 表示 S 中的元素随意排列。
$F(S)=\sum_{T\subset S}(-1)^{|S|-|T|}g(T)$ 其中元素个数相同的集合可以用组合数一起计算。
记合并后的函数为 F,G，则 $C_n^xF(x)=\sum_{y=0}^{x}(-1)^{x-y}C_n^yG(y)$

lg2567

若幸运数为十进制下仅含 6,8 的数，求 $a \dots b$ 中是幸运数的倍数的数的个数。$1 \le a, b \le 10^{10}$

lg2567

solution

预处理出幸运数，然后枚举每个幸运数算个数，容斥掉公倍数

lg2567

solution

预处理出幸运数，然后枚举每个幸运数算个数，容斥掉公倍数
数据范围太大了，容斥过不去咋办？

lg2567

solution

预处理出幸运数，然后枚举每个幸运数算个数，容斥掉公倍数
数据范围太大了，容斥过不去咋办？
会剪枝的大佬挥挥手，就卡进时限了。

lg2567

solution

预处理出幸运数，然后枚举每个幸运数算个数，容斥掉公倍数
数据范围太大了，容斥过不去咋办？
会剪枝的大佬挥挥手，就卡进时限了。
像我这样的蒟蒻，只能看着大佬的 AC 记录叹息。

lg2567

solution

预处理出幸运数，然后枚举每个幸运数算个数，容斥掉公倍数
数据范围太大了，容斥过不去咋办？
会剪枝的大佬挥挥手，就卡进时限了。
像我这样的蒟蒻，只能看着大佬的 AC 记录叹息。

我好菜啊