

## 第七章 几何造型技术

一般说, 几何造型技术研究在计算机中如何表达物体模型形状的技术。在几何造型系统中, 描述物体的三维模型有三种, 即线框模型、表面模型和实体模型。线框模型用顶点和棱边来表示物体, 由于没有面的信息, 所以不能表示表面含有曲面的物体; 另外, 它不能明确地定义给定点与物体之间的关系(点在物体内部、外部或表面上), 所以线框模型不能处理许多问题, 如不能生成剖切图、消隐图、明暗色彩图, 不能用于数控加工等, 应用范围受到了很大的限制。

表面模型用面的集合来表示物体, 而用环来定义面的边界。表面模型扩大了线框模型的应用范围, 能够满足面面求交、线面消隐、明暗色彩图、数控加工等需要。但在该模型中, 只有一张面的信息, 物体究竟存在于表面的哪一侧, 并没有给出明确的定义, 无法计算和分析物体的整

体性质，如物体的表面积、体积、重心等，也不能将这个物体作为一个整体去考察它与其它物体相互关联的性质，如是否相交等。

实体模型是最高级的模型，它能完整表示物体的所有形状信息，可以无歧义地确定一个点是在物体外部、内部或表面上，这种模型能够进一步满足物体计算、有限元分析等应用的要求。本章我们主要介绍实体造型技术的有关问题，并简单介绍最近发展起来的分形造型技术。

## 7.1 实体的表示模型

早期实体造型系统一个共同的特点是用多面体表示形体，不支持精确的曲面表示，优点是数据结构相对简单，集合运算、明暗图的生成和显示速度快；缺点是同一系统表示不唯一，违背了几何定义唯一性原则，而且只是近似表示，存在误差，若要提高表示精度就要增加离散平面片的数量，庞大数据量影响计算速度和计算机的存储管理。早期的几何造型系统还有一个特点，就是

只支持正则的形体造型。正则形体集 (R-Set) 的概念为几何造型奠定了初步的理论基础。对于任一形体, 具有 3 维欧氏空间  $R^3$  中非空、有界的封闭子集, 且其边界是二维流形 (即该形体是连通的), 我们称该形体为正则形体, 否则称为非正则形体。图 7-1 给出了一些非正则形体的实例。所谓二维流形 (2-manifold) 是指这样一些面, 其上任一点都存在一个充分小的邻域, 该邻域与平面上的圆盘是同构的, 即在该邻域与圆盘之间存在连续的一一映射。

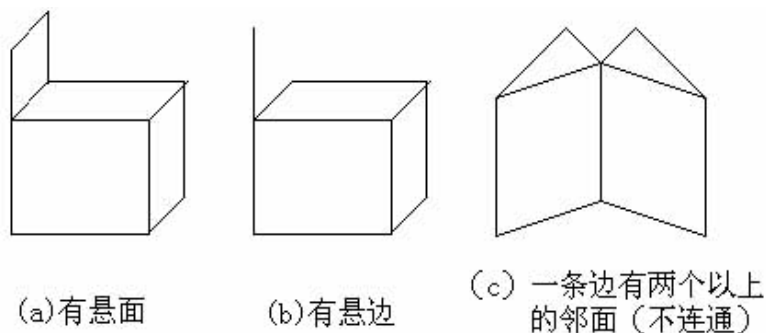


图 7-1 非正则形体

对实体模型的表示基本上可以分为分解表示、构造表示和边界表示三大类。

### 7.1.1 分解表示

分解表示是将形体按某种规则分解为小的更易于描述的部分。分解表示的一种特殊形式是每一小的部分都是一种固定形状(正方形、立方体等)的单元,形体被分解成这些分布在空间网格位置上的具有邻接关系的固定形状单元的集合,单元的大小决定了单元分解形式的精度。根据基本单元的不同形状,常用四叉树、八叉树和多叉树等表示方法。

分解表示中常见的表示方法是将形体空间细分为小的立方体单元,在计算机内存中对应开辟一个三维数组。形体占有的空间,存储单元中为 1; 否则空间为 0。这种表示方法简单,容易实现形体的交、并、差计算,但是占用的存储量太大,物体的边界面没有显式的解析表达式,不便于运算,实际应用中一般不采用。

图 7-2 是八叉树表示形体的一个实例。八叉树法表示形体的过程是这样的，首先对形体定义一个外接立方体，再把它分解成八个子立方体，并对立方体依次编号为 0, 1, 2, ..., 7。如果子立方体单元已经一致，即为满（该立方体充满形体）或为空（没有形体在其中），

则该子立方体可停止分解；否则，需要对该立方体作进一步分解，再一分为八个子立方体。在八叉树中，非叶结点的每个结点都有八个分支。八叉树表示法有一些优点，近年来受到人们的注意。这些优点主要是：

单。  
  
对  
  
需  
  
相  
  
交  
  
  
  
的  
  
体

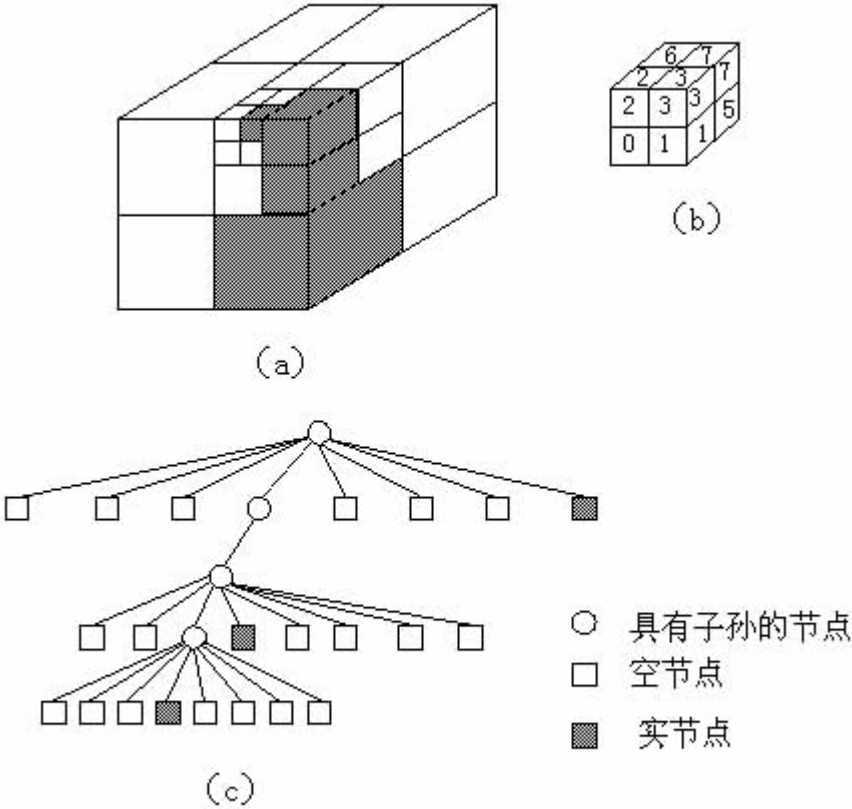


图 7-2 八叉树表示的形体

(1) 形体表示的数据结构简

(2) 简化了形体的集合运算。

形体执行交、并、差运算时，只同时遍历参加集合运算的两形体应的八叉树，无需进行复杂的求运算。

(3) 简化了隐藏线（或面）

消除，因为在八叉树表示中，形上各元素已按空间位置排成了一

定的顺序。

(4) 分析算法适合于并行处理。

八叉树表示的缺点也是明显的，主要是占用的存储多，只能近似表示形体，以及不易获取形体的边界信息等。

### 7.1.2 构造表示

构造表示是按照生成过程来定义形体的方法，构造表示通常有扫描表示、构造实体几何表示和特征表示三种。

- 扫描表示

扫描表示是基于一个基体(一般是一路径运动而产生形体。可见,扫描表示动的基体,另一个是基体运动的路径;给出截面的变化规律。图 7-3 给出了变体的扫描路径是曲线。

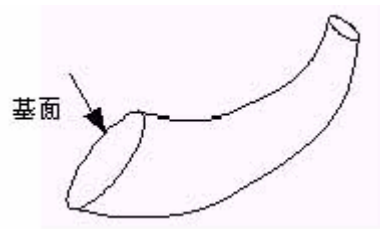


图 7-3 变截面扫描

个封闭的平面轮廓)沿某一需要两个分量,一个是被运如果是变截面的扫描,还要截面扫描表示的例子,扫描

扫描是生成三维形体的有效方法,但是,用扫描变换产生的形体可能出现维数不一致的问题。另外,扫描方法不能直接获取形体的边界信息,表示形体的覆盖域非常有限。

- 结构体元表示

结构体元(CSG)表示是通过对体元定义、运算得到新形体的表示方法,体元可以是立方体、圆柱、圆锥等,也可以是半空间,其运算为变换或正则集合运算并、交、差。



CSG 表示可以看成是一棵有序的二叉树，终节点为体元或是形体变换参数。非终结点或为正则的集合运算或是变换（平移和/或旋转）操作，这种运算或变换只对其直接的子结点（子形体）起作用。每棵子树（非变换叶子结点）表示其下两个节点组合及变换的结果，几何变换并不限定为刚体变换，也可以是任意范围的比例变换和对称变换。

CSG 树无二义性，但不是唯一的，它的定义域取决于其所用体元以及所允许的几何变换和正则集合运算算子。若体元是正则集，只要体元叶子是合法的，就保证了任何 CSG 树都是合法的正则集。

CSG 表示的优点：

- 1) 数据结构比较简单，数据量比较小，内部数据的管理比较容易；
- 2) CSG 表示可方便地转换成边界（Brep）表示；

3) CSG 方法表示的形体的形状, 比较容易修改。

CSG 表示的缺点:

1) 对形体的表示受体素的种类和对体素操作的种类的限制, 也就是说, CSG 方法表示形体的覆盖域有较大的局限性。

2) 对形体的局部操作不易实现, 例如, 不能对基本体元的交线倒圆角;

3) 由于形体的边界几何元素(点、边、面)是隐含地表示在 CSG 中, 故显示与绘制 CSG 表示的形体需要较长的时间。

- 特征表示

以 Pro/Engineering 为代表的参数化、变量化的特征造型技术，在几何造型领域产生了深远的影响。特征技术产生是在以 CSG 和 Brep 为代表的几何造型技术已较为成熟，实际应用中，几何建模的效率不仅较低，而且需要用户懂得几何造型的一些基本理论的事实上，同时，实体造型系统需要与应用系统集成在一起，用户对实体模型又提出了更高的要求，推动特征建模的出现。

以机械设计  
中设计完成以  
析，工艺设计、  
工艺设计时，并  
面这些几何和拓  
械加工特征信

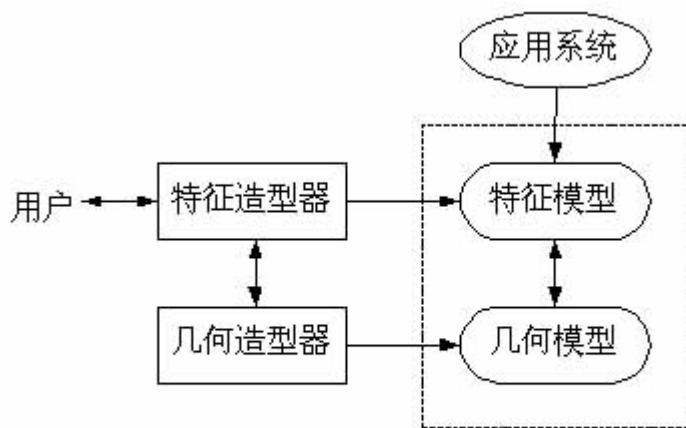


图 7-4 基于特征的造型系统

为例，机械零件在实体系统后，需要进行结构、应力分析、加工和检验等。而用户进行不需要构成形体的点、线、面信息，而是需要高层的信息，诸如光孔、螺孔、环形

槽、键槽、滚花等，并根据零件的材料特性，加工特征的形状、精度要求、表面粗糙度要求等，以确定所需要的机床、刀具、加工方法、加工用量等，传统的几何造型系统远不能提供这些信息，以至 CAD 与 CAPP（计算机辅助工艺过程设计）成为世界性的难题。

由此可以看出，特征是面向应用、面向用户的。基于特征的造型系统，如图 7-4 所示。特征模型的表示仍然要通过传统的几何造型系统来实现。不同的应用领域，具有不同的应用特征。一些著名的特征造型系统（如 Pro/Engineering）除提供了一个很大的面向应用的设计特征库外，还允许用户自己定义自己的特征，加入到特征库中，为用户进行产品设计和使 CAD 与其它应用系统的集成提供了极大的方便。

所以，在几何造型系统中，不同应用领域的特征都有其特定的含义，例如机械加工中，提到孔，我们会想到，是光孔，还是螺孔，孔径有多大，孔有多深，孔的精度是多少等。特征的形

状常用若干个参数来定义, 根据特征的参数我们并不能直接得到特征的几何元素信息, 而在对特征及在特征之间进行操作时需要这些信息。特征方法表示形体的覆盖域受限于特征的种类。

### 7.1.3. 边界表示

以上介绍的构造表示通常具有不便于直接获取形体几何元素的信息、覆盖域有限等缺点。边界表示 (Boundary Representation) 也称为 BR 表示或 BRep 表示, 它是几何造型中最成熟、无二义的代表法。实体的边界通常是由面的并集来表示, 而每个面又由它所在的曲面的定义加上其边界来表示, 面的边界是边的并集, 而边又是由点来表示的。边界表示的一个重要特点是在该表示法中, 描述形体的信息包括几何信息 (Geometry) 和拓扑信息 (Topology) 两个方面, 拓扑信息描述形体上的顶点、边、面的连接关系, 拓扑信息形成物体边界表示的“骨架”, 形体的几何信息犹如附着在“骨架”上的肌肉。例如形体的某个表面位于某一个曲面上, 定义这一曲面方程

的数据就是几何信息。此外，边的形状、顶点在三维空间中的位置（点的坐标）等都是几何信息，一般说来，几何信息描述形体的大小、尺寸、位置、形状等。

在边界表示法中，边界表示就按照体一面一环一边一点的层次，详细记录了构成形体的所有几何元素的几何信息及其相互连接的拓扑关系。在进行各种运算和操作中，就可以直接取得这些信息。

**Brep** 表示的优点是：

- （1）表示形体的点、边、面等几何元素是显式表示的，使得绘制 **Brep** 表示的形体的速度较快，而且比较容易确定几何元素间的连接关系；
- （2）容易支持对物体的各种局部操作；
- （3）便于在数据结构上附加各种非几何信息，如精度、表面粗糙度等。

Brep 表示的缺点是:

(1) 数据结构复杂, 需要大量的存储空间, 维护内部数据结构的程序比较复杂;

(2) Brep 表示不一定对应一个有效形体, 通常运用欧拉操作来保证 Brep 表示形体的有效性、正则性等。

由于 Brep 表示覆盖域大, 原则上能表示所有的形体, 而且易于支持形体的特征表示等, Brep 表示已成为当前 CAD/CAM 系统的主要表示方法。

### 7.1.2 形体的边界表示模型

用边界表示法建立三维形体时, 经常用到欧拉操作与集合运算, 本小节我们对边界表示的数据结构、欧拉操作及集合运算作一个简单的介绍。

我们已经知道，边界模型由几何信息和拓扑信息两部分组成，表达形体的基本拓扑实体 (Entity) 包括：

### 1. 顶点

顶点 (Vertex) 的位置用 (几何) 点 (Point) 来表示。点是几何造型中的最基本的元素，自由曲线、曲面或其它形体均可用有序的点集表示。用计算机存储、管理、输出形体的实质就是对点集及其连接关系的处理。

### 2. 边

边 (Edge) 是两个邻面 (对正则形体而言)、或多个邻面 (对非正则形体而言) 的交集，边有方向，它由起始顶点和终止顶点来界定。边的形状 (Curve) 由边的几何信息来表示，可以是直线或曲线，曲线边可用一系列控制点或型值点来描述，也可用显式、隐式或参数方程来描述。



### 3. 环

环 (Loop) 是有序、有向边 (Edge) 组成的封闭边界。环中的边不能相交, 相邻两条边共享一个端点。环有方向、内外之分, 外环边通常按逆时针方向排序, 内环边通常按顺时针方向排序。

### 4. 面

面 (Face) 由一个外环和若干个内环 (可以没有内环) 来表示, 内环完全在外环之内。根据环的定义, 在面上沿环的方向前进, 左侧总在面内, 右侧总在面外。面有方向性, 一般用其外法矢方向作为该面的正向。若一个面的外法矢向外, 称为正向面; 反之, 称为反向面。面的形状

(Surface) 由面的几何信息来表示, 可以是平面或曲面, 平面可用平面方程来描述, 曲面可用控制多边形或型值点来描述, 也可用曲面方程 (隐式、显式或参数形式) 来描述。对于参数曲面,

通常在其二维参数域上定义环，这样就可由一些二维的有向边来表示环，集合运算中对面的分割也可在二维参数域上进行。

## 5. 体

体(Body)是面的并集。在正则几何造型系统中，要求体是正则的，非正则形体的造型技术将线框、表面和实体模型统一起来，可以存取维数不一致的几何元素，并可对维数不一致的几何元素进行求交分类，从而扩大了几何造型的形体覆盖域。

### 7.1.3.1 欧拉操作

欧拉公式表达为对于任意的简单多面体，其面( $f$ )、边( $e$ )、顶点( $v$ )的数目满足公式  $v + e + f = 2$ 。

对于任意的正则形体，引入形体的其它几个参数：形体所有面上的内孔总数( $r$ )、穿透形体的孔洞数( $h$ )和形体非连通部分总数( $s$ )，则形体满足公式： $v + e + f = 2(s - h) + r$ 。

欧拉公式给出了形体的点、边、面、体、孔、洞数目之间的关系，在对形体的结构进行修改时，必须要保证这个公式成立，才能够保证形体的有效性。由此而构造出一套操作，称为欧拉操作，完成对形体部分几何元素的修改，修改过程中保证各几何元素的数目保持这个关系式不变。

### 7.1.3.2 集合运算

集合运算是实体造型系统中是一种非常有效的构造形体的方法。从一维几何元素到三维几何元素，正则形体和非正则形体，针对不同的情况和应用要求，有许多集合运算算法。

#### 1. 集合运算算法

正则集合运算与非正则形体运算的区别在于增加了正则化处理步骤。集合运算算法包括以下几部分：

(1)求交：参与运算的一个形体的各拓扑元素求交，求交的顺序采用低维元素向高维元素进行。用求交结果产生的新元素（维数低于参与求交的元素）对求交元素进行划分，形成一些子元素。这种经过求交步骤之后，每一形体产生的子拓扑元素的整体相对于另一形体有外部、内部、边界上的分类关系。

(2)成环：由求交得到的交线将原形体的面进行分割，形成一些新的面环。再加上原形体的悬边、悬点经求交后得到的各子拓扑元素，形成一拓扑元素生成集。

(3)分类：对形成的拓扑元素生成集中的每一拓扑元素，取其上的一个代表点，根据点/体分类的原则，决定该点相对于另一形体的位置关系，同时考虑该点代表的拓扑元素的类型（即其维数），来决定该拓扑元素相对于另一形体的分类关系。

(4)取舍：根据拓扑元素的类型及其相对另一形体的分类关系，按照集合运算的运算符要求，要决定拓扑元素是保留还是舍去；保留的拓扑元素形成一个保留集。

(5)合并：对保留集中同类型可合并的拓扑元素进行合并，包括面环的合并和边的合并。

(6)拼接：以拓扑元素的共享边界作为其连接标志，按照从高维到低维的顺序，收集分类后保留的拓扑元素，形成结果形体的边界表示数据结构。

## 7.2 求交分类

在几何造型中，通常利用集合运算（并、交、差运算）实现复杂形体的构造，而集合运算需要大量的求交运算。如何提高求交的实用性、稳定性、速度、精度等，对几何造型系统至关重要。

当前几何造型系统，大多采用精确的边界表示模型。在这种表示法中，形体的边界元素和某类几何元素相对应，它们可以是直线、圆（圆弧）、二次曲线、**Bezier** 曲线、**B** 样条曲线等，也可以是平面、球面、二次曲面、**Bezier** 曲面、**B** 样条曲面等，求交情况十分复杂。，二次曲面与各种自由曲面并存的混合表示模型，逐渐为人们所接受。

### 7.2.1 求交分类

在几何造型系统中，用到的几何元素主要有以下 25 种，这些几何元素可以按照其维数分为三大类：点、线、面。

点：三维点。

线：三维直线段、二次曲线(包括圆弧和整圆、椭圆弧和椭圆、抛物线段、双曲线段)、Bezier 曲线 (有理和非有理)、B 样条曲线、NURBS 曲线。

面：平面、二次曲面(包括球面、圆柱面、圆锥/台面、双曲面、抛物面、椭球面和椭圆柱面)、Bezier 曲面 (有理和非有理)、B 样条曲面、NURBS 曲面。

求交方法分为点点、点线、点面、线线、线面六种。点只有三维点一种，比较简单。线和面又可分别归为二次曲线、自由曲线和二次曲面、自由曲面两类。

### 7.2.2 基本的求交算法

计算机内浮点数的误差，求交计算引进容差。假定容差为  $e$ ，则点被看成是半径为  $e$  的球，线被看成是半径为  $e$  的圆管，面被看成是厚度为  $2e$  的薄板。

点与其它几何元素的求交比较简单，计算两个点是否相交，实际上是判断两个点是否重合，判断点和线（或面）是否相交，实际上是判断点是否在线（或面）上。

我们重点讨论线与线的求交及线与面的求交。根据前面的分类方法，线与线的求交有二次曲线与二次曲线、二次曲线与自由曲线及自由曲线与自由曲线求交三种。线与面的求交有二次曲线与二次曲面、二次曲线与自由曲面、自由曲线与二次曲面及自由曲线与自由曲面求交四种。

### 7.2.2.1 线与线的求交计算

#### 1. 二次曲线与二次曲线的求交

二次曲线在非退化的情况下，也称为圆锥曲线（椭圆、双曲线和抛物线）。由于圆锥曲线在其标准（局部）坐标系下具有标准的隐式方程和参数方程的形式，因而，这种求交策略是将坐标系变换到该圆锥曲线的局部坐标系下，一个圆锥曲线用隐式方程的形式表示，而另一圆锥曲线采



用参数方程的形式, 代入即可获得有关参数的四次方程, 四次代数方程具有精确的求根公式, 因而可计算出二者的交点。

## 2. 二次曲线与 NURBS 曲线求交

自由曲线 (Bezier 曲线、B 样条曲线和 NURBS 曲线) 可用 NURBS 方法统一表示。二次将 NURBS 曲线的参数方程代入参数的一元高次方程, 然后, 法解出交点参数, 或把圆锥曲线解出交点参数, 或把圆锥曲线为两个 NURBS 曲线的求交问

## 3. NURBS 曲线与 NURBS 曲线求交

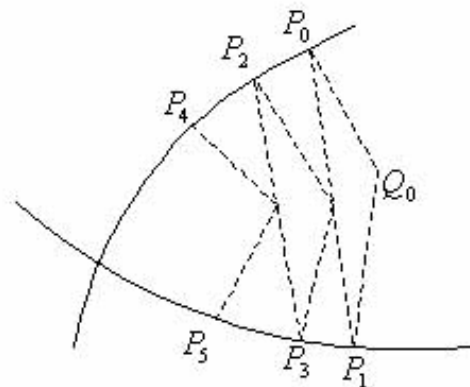


图 7-5 NURBS 曲线与 NURBS 曲线迭代求交

样条曲线和 NURBS 曲线) 可曲线与 NURBS 曲线求交, 可圆锥曲线的隐式方程, 得到使用一元高次方程的求根方程也表示为参数形式, 转化题。线求交

解决这类求交问题，通常采用离散法求初始交点，迭代求精确解的办法，具体求解步骤如下：

(1) 初始化。依据离散精度，将 NURBS 曲线形成对应的二叉树表示，叶子结点是对应于该曲线的某一离散子线段及其包围盒，非叶子结点是对应于该段 NURBS 曲线的包围盒。

(2) 求初始交点。遍历两曲线的二叉树，若其叶子结点的包围盒相交，则将两者的数据（曲线段中点的参数值，二者坐标的平均值）存入初始交点队列。

(3) 将初始交点迭代求精确交点。迭代方程可形象地用图 7-5 表示。

计算过程为：设初始交点为  $(Q_0, s_0, t_0)$ ，其中  $Q_0$  是初始点的空间坐标， $s_0, t_0$  则分别为两 NURBS 曲线的初始交点参数值，将  $Q_0$  投影至两曲线上，得两点  $(P_0, s_1), (P_1, t_1)$ ，，可得另一更精确初始点  $(\frac{P_0 + P_1}{2}, s_1, t_1)$ ，依次可得  $P_0, \dots, P_{2n}, \dots$  和  $P_1, P_3, \dots, P_{2n+1}, \dots$ ，直至  $P_{2n}$  与  $P_{2n+1}$  两点间的距离小于  $\epsilon$  为止。

### 7.2.2.2 线与面的求交计算

与自由曲线的表示类似, 自由曲面 (Bezier 曲面、B 样条曲面和 NURBS 曲面) 可用 NURBS 方法统一表示。二次曲线与 NURBS 曲面的求交计算通常转化为 NURBS 曲线与 NURBS 曲面的求交计算的问题。

二次曲线与二次曲面的求交的求交计算, 可以把二次曲线的参数形式代入二次曲面的隐式方程, 得到关于参数的四次方程, 然后用四次方程的求根公式, 计算出交点的参数。

NURBS 曲线与二次曲面的求交计算, 可以把 NURBS 曲线的参数形式代入二次曲面的隐式方程, 得到关于参数的高次方程, 然后, 用高次方程的求根方法求解。

下面重点介绍 NURBS 曲线与 NURBS 曲面的求交计算, 计算过程叙述如下:

#### 1. 初始化。

依据离散精度，将 NURBS 曲线离散成二叉树的形式，将 NURBS 曲面离散成四叉树的形式。四叉树的叶子结点是 NURBS 曲面的子曲面片，并存储其包围盒的坐标，非叶子结点记录对应子面片的包围盒。

## 2. 求初始交点。

遍历该二叉树和四叉树，如果曲线二叉树叶子结点的包围盒与曲面四叉树的叶子结点的包围盒有交点，则将子曲线段中点的参数值、子曲面片的中心点的坐标值与参数值作为初始交点，记录入初始交点点列中去。

## 3. 对初始交点进行迭代，形成精确交点。

可用牛顿迭代法求解精确交点。设 NURBS 曲线为  $C(t)$ ，NURBS 曲面为  $S(u,v)$ ，则在交点处应满足：

$$C(t) - S(u, v) = 0$$

设  $f(u, v, t) = C(t) - S(u, v)$ ，则问题转化为求函数  $f(u, v, t)$  的根。

$$\because df = \frac{dC(t)}{dt} dt - \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} du + \frac{\partial S(u, v)}{\partial v} dv$$

两边同时叉积  $\frac{\partial S}{\partial u}$ ，并考虑到  $\frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial u} = 0$ ，得到：

$$\frac{\partial S}{\partial u} \times df = \left( \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{dC}{dt} \right) dt - \left( \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right) dv$$

两边再点积  $\frac{dC}{dt}$ ，并考虑到  $\frac{dC}{dt} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{dC}{dt} \right) = 0$ ，得到：

$$\frac{dC}{dt} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial u} \times df \right) = - \frac{dC}{dt} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right) dv$$

类似可得到：

$$\frac{dC}{dt} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial v} \times df \right) = \frac{dC}{dt} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right) du$$

$$\frac{\partial S}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial v} \times df \right) = \frac{\partial S}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{dC}{dt} \right) dt$$

令  $D = \frac{dC}{dt} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial u} \times \frac{\partial S}{\partial v} \right)$ ，则可建立迭代方程：

$$\begin{aligned} t_{i+1} &= t_i + \left[ \frac{\partial S}{\partial u} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial v} \times dr \right) \right] / D|_{(t_i, u_i, v_i)} \\ u_{i+1} &= u_i + \left[ \frac{dC}{dt} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial v} \times dr \right) \right] / D|_{(t_i, u_i, v_i)} \\ v_{i+1} &= v_i - \left[ \frac{dC}{dt} \cdot \left( \frac{\partial S}{\partial u} \times dr \right) \right] / D|_{(t_i, u_i, v_i)} \end{aligned}$$

设初值为  $(t_0, u_0, v_0)$ ，一般迭代 3 至 5 次，便可达到要求的精度。

### 7.2.2.3 曲面与曲面的求交

在几何元素之间的求交算法中，曲面与曲面之间的求交是最为复杂的一种。曲面与曲面求交的基本方法主要有代数方法、几何方法、离散方法和跟踪方法四种，下面分别作一个简单的介绍。

## 1. 代数方法

代数方法是利用求解代数方程的方法求出曲面的交线。对于一些简单的曲面求交，如平面和平面，平面和二次曲面，可以直接通过曲面方程求解计算交线，对于某些复杂的情况，则需要进行分析 and 化简的运算后求解。

根据表示曲面的方程的形式可以将曲面分为隐式表示和参数表示两种类型。隐式表示的曲面为  $f(x,y,z)=0$ ，参数表示的曲面为  $r = r(u,v)$ 。所以，根据参与求交的两曲面的表示形式的不同，可以把求交分为三种情况。

(1) 隐式表示和参数表示的情形，把参数方程代入隐式方程的方法，将交线表示为  $g(u,v)=0$  的形式，得到的交线方程是平面代数曲线方程，根据平面代数曲线理论的方法求解交线。求解的

过程是先构造特征初始点(边界点、转折点和奇异点),这可用数值方法求解方程组得到,特征电把交线分成若干单调段,从特征初始点出发可求出每一单调段。

(2) 两个曲面都是参数表示的情形,只需要将其中之一隐式化,然后用前面的方法求解。而参数多项式或有理多项式曲面的隐式化通过消元来实现。

(3) 两个曲面都是隐式曲面的情形,一种方法是将其中一个曲面参数化,也可用第一种情况来求解。但是,一般情况下这种参数化很困难,对于某些情况可以采用另外的方法计算参数化的曲面。

代数法还有一个严重的弱点是对误差很敏感,这是因为代数法经常需要判别某些量是否大于零、等于零或小于零,而在计算机中的浮点数近似表示的误差常常会使这种判别出现错误,而且这种误差会随着运算步骤的增多而不断扩大。



## 2. 几何方法

几何方法求交是利用几何的方法, 对参与求交曲面的形状大小、相互位置以及方向等进行计算和判断, 识别出交线的形状和类型, 从而可精确求出交线。对于一些交线退化或相切的情形, 交线往往是点、直线或圆锥曲线, 用几何方法求交可以更加迅速和可靠。几何求交适应性不是很广, 一般仅用于平面以及二次曲面等简单曲面的求交。

## 3. 离散方法

离散方法求交是利用分割的方法, 将曲面不断离散成较小的曲面片, 直到每一子曲面片均可用比较简单的面片, 如四边形或三角形平面片来逼近, 然后用这些简单面片求交得一系列交线段, 连接这些交线段即得到精确交线的近似结果。离散求交一般包括下面的过程: 用包围盒作分离性检查排除无交区域; 根据平坦性检查判断是否终止离散过程; 连接求出的交线段作为求交结果。

由于 Bezier 曲面, B 样条曲面具有离散性质, 使得它们最适合于离散法求交。离散法求出的交线逼近精度不高。如果要求的精度较高, 需要增加离散层数。

#### 4. 跟踪方法

跟踪方法求交是通过先求出初始交点, 然后从已知的初始交点出发, 相继跟踪计算出下一交点, 从而求出整条交线的方法。

跟踪法的本质是构造交线满足的微分方程组, 先求出满足方程组的某个初值解, 通过数值求解微分方程组的方法来计算整个交线。

跟踪方法在计算相继交点的时候, 利用了曲面的局部微分性质, 一般采用数值迭代的方法求解, 使得计算效率较高。

跟踪法求交中要考虑的主要问题包括：如何求出初始交点并保证每一交线分支都有初始交点被求出；如何计算奇异情况下的跟踪方向以及合理选取跟踪的前进步长；如何处理相切的情况。

以上几种方法是曲面求交中常采用的几种基本方法。在实际应用中，往往根据具体应用的需要，采用这些方法的结合来实现求交，如在跟踪法中的初始交点常采用离散法求得。

### 7.3 图形相交-相切程序设计案例

#### 一、程序功能说明

求交在实体造型中有着重要的地位，实际设计图形软件系统相切也很重要，这里我们设计几种典型二维、三维图形相交或相切的程序实例。如图 7-6 所示为本例程序运行时的主界面，通过单击菜单中及下拉菜单的各功能项。

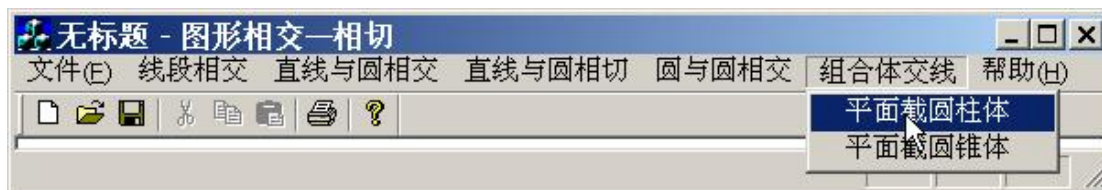


图 7-6

## 二、程序设计步骤

1. 创建工程名称为“图形相交-相切”单文档应用程序框架
2. 编辑菜单资源

设计根据 7.1 表中的定义编辑菜单资源如图 7-3-1 所示的菜单项。

表 7.1 菜单资源表

3. 添加函数  
在工程中  
方法，这里我  
中声明需要  
称，然后再在  
义此函数。

菜单标题	菜单项标题	标示符 ID
线段相交		ID_LINE_LINE
直线与圆相		ID_LINE_CIERCLE1
交		ID_LINE_CIRCLE
直线与圆相		ID_CIRCLE_CIRCLE
切		
圆与圆相交		
组合体交线	平面截圆柱体	ID_PLANE_CYLINDER
	平面截圆锥体	ID_PLANE_CONE

和变量  
添加应用函数的  
们先在“View.h”  
使用的函数名  
“View.cpp”中定

```
// 曲线和曲面 View.h : interface of the CMyView class
```

```
////////////////////////////////////
```

[程序代码见纸书](#)

```
}
```

```
.
```

```
.
```

```
.
```

#### 4. 添加消息映射

利用 ClassWizard（建立类向导）为应用程序添加与菜单项相关的消息处理函数，ClassName 栏中选择 CMyView，根据表 7.2 建立如下的消息映射函数，ClassWizard 会自动完成有关的函数

声明。

表 7.2 菜单项的消息处理函数

菜单项 ID	消息	消息处理函数
ID_LINE_LINE	CONMMAN	OnLineLine()
ID_LINE_CIERCLE1		OnLineCiercle1()
ID_LINE_CIRCLE		OnLineCircle()
ID_CIRCLE_CIRCLE		OnCircleCircle()
ID_PLANE_CYLINDER	CONMMAN	OnPlaneCylinder()
ID_PLANE_CONE		OnPlaneCone()

5. View.cpp 添加完成各个菜单消息处理函数，实现既定功能

```
void CMyView::OnLineLine()
{
    RedrawWindow();

    PushNum=1;

    CDC*pDC=GetDC(); //获得绘图类指针

    pDC->TextOut(0,5,"用鼠标右键在窗口取选取四个点,当鼠标右键按下第 5 次求交点");

    ReleaseDC(pDC);
}
```

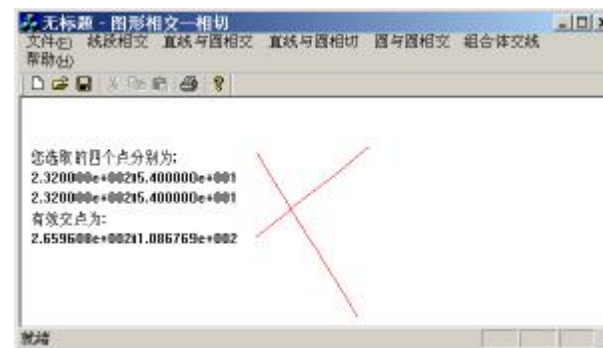


```
void CMyView::OnLineCiercle1()
```

```
{
```

[程序代码见纸书](#)

```
}
```



## 7.4 非传统造型技术上面介绍的基于欧氏几何的传统实体

造型技术的主要描述工具是直线、平滑的曲线、平面及边界整齐的平滑曲面，这些工具在描述一些抽象图形或人造物体的形态时是非常有力的，但对于一些复杂的自然景象形态就显得无能为力

了, 诸如山、树、草、火、云、波浪等。这是由于从欧氏几何来看, 它们是极端无规则的。为了解决复杂图形生成问题, 分形(Fractal)造型应运而生。

### 7.4.1 基本概念

1904 年, 由 Helge Von Koch 研究了一种称为雪花的图案, 他将一个等变三角形的三条边三等分, 中间的一段隆起另一个小三角形, 这小三角形依照上面的操作, 如此一直下去, 理论上可证明能够构成一个面积有限, 而边长为无穷长的雪花, 这与传统数学上的观点不相符, 成为一种新的造型技术。

假设用一只 1 000m 的尺子测量不列颠的海岸线, 可得到一个长度值  $L_1$ , 若要考虑更多细节, 可用更短的尺子, 例如 1m 的尺子测量, 同时得到另一个长度  $L_2$ , 显然  $L_2 > L_1$ , 一般, 尺子长度为  $r$ , 测量结果为  $L(r)$ , 若  $r \rightarrow 0$ , 则有  $L(r) \rightarrow \infty$ , 也就是说, 不列颠的海岸线长度与测量的

尺子有关，为不确定数。Mandelbort 正是通过上述实例向人们展示细节的无穷回归和测量尺度的减小都会得到更多的细节，既复杂现象的自相似性，并提出分形（Fractal）概念。

设每一步细分的数目为  $N$ ，细分放大（缩小）倍数为  $S$ ，则分数维  $D$  定义为：

$$D = (\log N) / \log(1/S)$$

对于上述 Koch 雪花， $N=4$ ， $S=1/3$ ，雪花边数的分数维  $D=1.2619$ 。

一般二维空间中的一个分数维曲线的维数介于 1 和 2 之间；三维空间的一个分数维曲线维数在 2、3 之间，分数维概念的提出为研究复杂性体提供了新的视角，使人们从无序中发现了有序，为许多科学领域提供新的应用工具。

**7.4.2 分形造型对模型的基本要求** 分数维图形是由一片陌生而美妙的画面组成的,不是由画家精心创造的,而是由数学家探索绘制出来的,可用计算机停在屏幕上用明暗点绘图来遨游这一世界。生成图形的关键是要有合适的模型来描述图案。分形造型对模型的基本要求:

1. 分形造型技术能逼真地“再现”自然景象。所谓逼真是指从视觉效果上逼真,“再现”即不求完全一致。
2. 模型不依赖于观察距离。即距离远时可给出大致轮廓和一般细节,距离近时能给出更丰富细节。
3. 模型说明应尽量简单,模型应具有数据放大能力。
4. 模型应便于交互地修改。
5. 图形生成的效率要高。

6. 模型适用范围应尽可能地宽。

### 7.4.3 分形造型的常用模型

为有效模拟海岸线和山等自然景象，引进随机插值模型。

传统的绘制图形模型都与观察距离有关，随机插值模型部实现规定各种图素和尺度大小、数

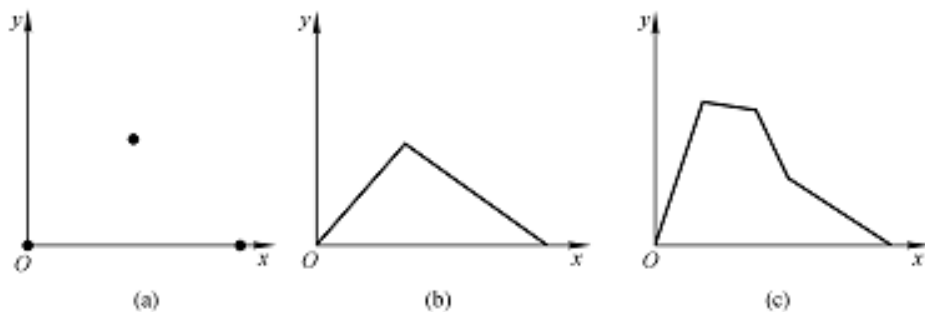


图 7-7 用随机模型构造海岸线的例子

量，用一个随机过程的采样路径作为模型的方法，避免了观察距离的局限性。例如，构建二维海岸线的模型，如图首先选择控制大致形状的若干初始点，然后取相邻两点连线的中垂线上随机偏移一段距离，再将偏移后的点与两端点分别连成两条线段，这样一直画下去，可得到一条曲折的有无穷细节回归的海岸线，其曲折程度由随机偏移量控制，同时决定了分数维的大小。在三维坐标系中，同样道理可构造山的模型，如图 7-8 所示。

## 2. 粒子系统模型

粒子系统模型是 1983 年为模拟火焰由 W.T.Reeves 提出的。粒子系统模型用大量粒子图元来描述景物，粒子的位置和形状随时间变化，并由随机数决定。火焰可被看成是喷出的许多粒子，众多粒子运动轨迹构造了火焰的模型，用随机数决定每个粒子的属性（如初始位置、初始速度、颜色、大小等）。现在该模型由用来描述草丛、森林等景象。

## 7. 5 分形造型应用

在日常生活中，花瓶、茶具等器皿以及商品的包装等表面大多都有魅力的花纹图案。分形图的特点就是“奇”、“美”，用分形图作为器皿的花纹图案，即把分形图映射到器皿表面称为一种图案设计，会产生很好的设计效果，称为分形图映射。

纹理图案及映射是计算机绘图的热点，纹理图案是指物体的表面细节。通常考虑两种类型的纹理图案。第一种是在光滑表面上描绘纹理图案，第二种是使表面呈现出凹凸不平的形状。映射中的关键技术是映射后图形不能失真。映射出现的失真简单说包括两个方面：表面展开程度和映射函数，前者属于图形的内在特性，不可改变。这样要减小失真只有选择合适的映射函数。映射函数即被映射的纹理图案和映射物体表面纹理图案间的一一对应关系。一般映射前的纹理图案在

一个二维坐标系中，映射后的图案绘制在三维坐标系中，因此映射前后对应关系应为二维点与三维点之间的对应关系。

例如，对于圆柱面和圆锥面两种映射物体表面，虽然二者使可展开面，但是对于圆柱体表面，在直角坐标系中，通过线性映射或三角函数映射可将一个二维图不失真产生的映射到表面上，但用同样方法映射到圆锥体表面要产生很大失真，我们可把圆锥体切分成许许多多多个近似圆柱体来进行映射，这样产生的失真将大大减小。对于一个不可展开面，一般很难找到不失真的映射函数。

根据上述理论，将一些分型图映射到正方体、圆柱体和球的表面上可产生漂亮的美术图案。分型图映射的过程实质上就是图形（或图案）得分块、旋转、平移等变换形成的。



## 7.6 分形造型程序设计

### 一、程序功能说明

分数分图形的许多领域还未开发,而且富于幻想色彩,引人入胜,可以模拟天际的积云,空中的闪电、地上的森林、海里的浪花、燃烧的火焰等,特别是近年来在分形图中的应用,可以设计地板、壁纸等。我们这里根据上述分形造型及分形图映射理论设计如下“分形图”应用程序,如图 7-9 所示,点击【分形图】菜单绘制龙状曲线,又称龙图,它由一条直线段开始,然后隆起变成等腰直角三角形的两腰,其斜边为该直线长,在对两腰分别做和直线段同样的变化,如此动态进行数此,得到一条龙状曲线。在【球体映射】中把上述龙形图案映射到球表面,形成纹理贴图。



图 7-9

## 二、程序设计步骤

1. 建工程名称为“分形图”单文档应用程序框架。
2. 根据 7.3 表中的定义编辑菜单资源，添加消息映射，建立消息映射函数完成有关的函数声明。

表 7.3 菜单资源表

3.

4.

5.

菜单标题	子菜单项标题	标示符 ID	相应处理函数
分形图	绘制龙图	ID_DRAW_DRAGON	OnDrawDragon()
分形图应用	球体映射	ID_SPHERE_ DRAGON	OnSphereDragon()

### 3 工添加绘图基类

添加基类方法请参见第一章手工添加绘图基类。这里添加两个基类：**BaseDraw** 和 **Dragon**。并在工作区中系统自动创建的相应的空文件中，分别添加以下基类的头文件（.h 文件）和应用文件（.cpp 文件）

// BaseDraw.h: interface for the CBaseDraw class.// BaseDraw 头文件

#if !defined(AFX\_BASEDRAW\_H\_\_CB43CA20\_175A\_11D4\_81FF\_94DCC6655E1C\_\_INCLUD

ED\_)

```
#define AFX_BASEDRAW_H__CB43CA20_175A_11D4_81FF_94DCC6655E1C__INCLUDED_
```

```
#if _MSC_VER > 1000
```

```
#pragma once
```

```
#endif // _MSC_VER > 1000
```

```
#define pi 3.141592654
```

```
class CBaseDraw
```

```
{
```

程序代码见纸书

}

## 7. 6 课 后 练 习

1. 什么叫几何造型？有那三种模式？各有什么特点？
2. 比较 CSG 域 B-rep 方法的优缺点？
3. 分形造型对模型的基本要求？分形造型的常用模型？

4. 根据分形造型原理, 自己设置或上网查找一些分形图案设计, 加深对分形造型的理解。
5. 利用 BaseDraw 基类设计圆柱体上的龙的贴图。