

第六章 曲线和曲面

6.1 曲线曲面参数表示的基础知识

工程设计中经常绘制各种曲线和曲面，曲线分为规则曲线与不规则曲线，曲面也相应分为规则曲面与不规则曲面。规则曲线有圆锥曲线、圆柱曲线、渐开线等，这些曲线都可用函数或参数方程表示；不规则曲线则是根据给定的离散数据点用曲线拟合逼近得到，常见的有参数样条曲线、

Bezier 曲线、B 样条曲线等，这些曲线采取分段的参数方程来表示。规则曲面常见的有柱面、锥面、球面、环面、双曲面、抛物面等，这些曲面都可用函数或参数方程表示；常见的不规则曲面有 Bezier 曲面、B 样条曲面等，这些曲面采取分片的参数方程来表示。数学上曲线和曲面的表示有多种形式。曲线和曲面的表示方程有参数表示和非参数表示之分。由于参数表示的曲线、曲面具有几何不变性等优点，计算机图形学中通常用参数形式描述曲线、曲面。

6.1.1 非参数表示和参数表示

非参数表示又分为显式和隐式两种表示方式。对于一个平面曲线，显式表示一般形式是： $y=f(x)$ 。在此方程中，一个 x 值与一个 y 值对应，所以显式方程不能表示封闭或多值曲线，例如，不能用显式方程表示一个圆。

如果一个平面曲线方程，表示成 $f(x, y)=0$ 的形式，我们称之为隐式表示。隐式表示的优点是易于判断函数 $f(x, y)$ 是否大于、小于或等于零，也就易于判断点是落在所表示曲线上或在曲线的哪一侧。

对于非参数表示形式方程（无论是显式还是隐式）存在下述问题：

1. 与坐标轴相关；
2. 会出现斜率为无穷大的情形（如垂线）；
3. 对于非平面曲线、曲面，难以用常系数的非参数化函数表示；
4. 不便于计算机编程。

在几何造型系统中，曲线曲面方程通常表示成参数的形式，即曲线上任一点的坐标均表示成给定参数的函数。假定用 t 表示参数，平面曲线上任一点 P 可表示为： $P(t)=[x(t), y(t)]$ ；

空间曲线上任一三维点 P 可表示为： $P(t)=[x(t), y(t), z(t)]$ ；最简单的参数曲线是直线段，端点为 P_1 、 P_2 的直线段参数方程可表示为：

$$P(t)=P_1+(P_2-P_1)t \quad t \in [0, 1];$$

圆在计算机图形学中应用十分广泛, 其在第一象限内的单位圆弧的非参数显式表示为:

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

其参数形式可表示为:

$$P(t) = \left[\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right] \quad t \in [0, 1]$$

在曲线、曲面的表示上, 参数方程比非参数方程有更多的优越性, 主要表现在:

(1) 可以满足几何不变性的要求。

(2) 有更大的自由度来控制曲线、曲面的形状。如一条二维三次曲线的显式表示为:

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

只有四个系数控制曲线的形状。而二维三次曲线的参数表达式为:

$$P(t) = \begin{bmatrix} a_1t^3 + a_2t^2 + a_3t + a_4 \\ b_1t^3 + b_2t^2 + b_3t + b_4 \end{bmatrix} \quad t \in [0,1]$$

有 8 个系数可用来控制此曲线的形状。

(3) 对非参数方程表示的曲线、曲面进行变换，必须对曲线、曲面上的每个型值点进行几何变换；而对参数表示的曲线、曲面可对其参数方程直接进行几何变换。

(4) 便于处理斜率为无穷大的情形，不会因此而中断计算。

(5) 参数方程中, 代数、几何相关和无关的变量是完全分离的, 而且对变量个数不限, 从而便于用户把低维空间中曲线、曲面扩展到高维空间去。

这种变量分离的特点使我们可以用数学公式处理几何分量。

(6) 规格化的参数变量 $t \in [0, 1]$, 使其相应的几何分量是有界的, 而不必用另外的参数去定义边界。

(7) 易于用矢量和矩阵表示几何分量, 简化了计算。

6.1.2 参数表示的基本特征

参数表示的基本形式有：代数形势和几何形式

1. 代数形式

一条曲线段 $Q(t) = [x(t) \ y(t) \ z(t)]^T$, 其中 $0 \leq t \leq 1$, 若表示成 t 的三次多项式,

曲线的代数形式是:

$$\begin{cases} x(t) = a_{3x}t^3 + a_{2x}t^2 + a_{1x}t + a_{0x} \\ y(t) = a_{3y}t^3 + a_{2y}t^2 + a_{1y}t + a_{0y} \\ z(t) = a_{3z}t^3 + a_{2z}t^2 + a_{1z}t + a_{0z} \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

方程组中 12 个系数唯一地确定了一条 3 次参数曲线的位置与形状。上述代数式写成矢量式是:

$$P(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \quad t \in [0,1] \quad (6.1)$$

其中 a_0, a_1, a_2, a_3 是代数系数矢量, $P(t)$ 是三次参数曲线上任一点的位置矢量。

2. 几何形式

描述参数曲线的条件有：端点位矢、端点切矢、曲率等。对三次参数曲线，若用其端点位矢 $P(0)$ 、 $P(1)$ 和切矢 $P'(0)$ 、 $P'(1)$ 描述，并将 $P(0)$ 、 $P(1)$ 、 $P'(0)$ 、 $P'(1)$ 简记为 P_0 、 P_1 、 P'_0 、 P'_1 ，代入(6.1)式得（如图 6-1 所示）：

$$\begin{cases} a_0 = P_0 \\ a_1 = P'_0 \\ a_2 = -3P_0 + 3P_1 - 2P'_0 - P'_1 \\ a_3 = 2P_0 - 2P_1 + P'_0 + P'_1 \end{cases} \quad (6.2)$$

将(6.2)代入(6.1)整理后得:

$$P(t) = (2t^3 - 3t^2 + 1)P_0 + (-2t^3 + 3t^2)P_1 + (t^3 - 2t^2 + t)P_0' + (t^3 - t^2)P_1' \quad t \in [0,1] \quad (6.3)$$

$$\text{令: } F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1, \quad F_1(t) = -2t^3 + 3t^2, \quad G_0(t) = t^3 - 2t^2 + t, \quad G_1(t) = t^3 - t^2$$

将 F_0, F_1, G_0, G_1 代入(3.1.3)式, 可将其简化为:

$$P(t) = F_0P_0 + F_1P_1 + G_0P_0' + G_1P_1' \quad t \in [0,1] \quad (6.4)$$

(6.4)式是三次

Hermite(Ferguson)曲线的几何

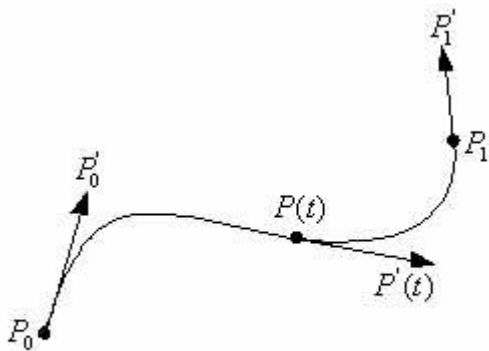


图 6-1 Ferguson 曲线端点位矢和切矢

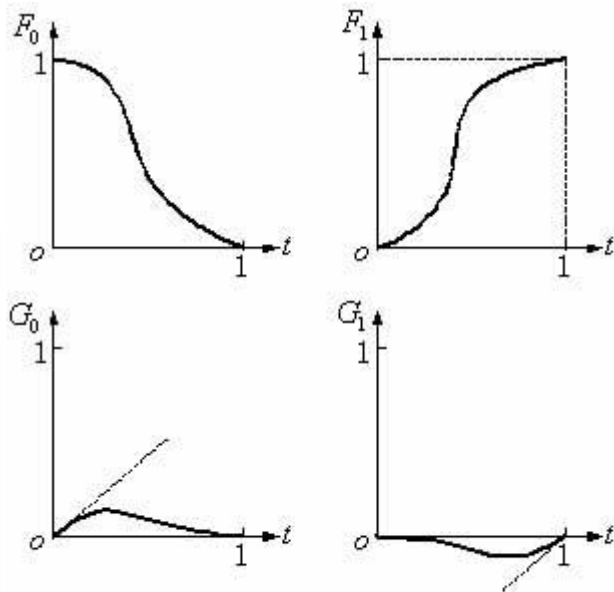


图 6-2 三次调和函数

形式, 几何系数是 $P(0)$ 、 $P(1)$ 、 $P'(0)$ 、 $P'(1)$

F_0, F_1, G_0, G_1 称为调和函数(或混合函数), 即该形式下的三次 Hermite 基。

它们具有如下的性质:

$$F_i(j) = G_i(j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(6.5)

图 7-1-1 Ferguson 曲线端点位矢和切矢

$$F_i(j) = G_i(j) = 0, \quad i, j = 0, 1$$

F_0 和 F_1 控制端点的函数值对曲线的影响, 而同端点的导数值无关; G_0 和 G_1 则控制端点的一阶导数值对曲线形状的影响, 同端点的函数值无关。或者说, F_0 和 G_0 控制左端点的影响, F_1 和 G_1 控制右端点的影响。图 6-2 给出了这四个调和函数的图形。

调和函数不是唯一的, 任何满足(3.1.5)式 C^1 类多项式函数都可以作为调和函数使用, 其中 F_0 和 F_1 必须是单调连续函数。 $F_0(t)=1-t, F_1(t)=t$ 是一次多项式调和函数。

6.1.3 曲线段之间的连续性

设计一条复杂曲线时，常常通过多段曲线组合而成，这需要解决曲线段之间光滑连接的问题。

曲线间连接的光滑度的度量有两种：一种是函数的可微性，把组合参数曲线构造成在连接处具有直到 n 阶连续导矢，即 n 阶连续可微，这类光滑度称之为 C^n 或 n 阶参数连续性。另一种称为几何连续性，组合曲线在连接

处满足不同于 C^n 的某一组约束条件, 称为具有 n 阶几何连续性, 简记为 G^n 。曲线光滑度的两种度量方法并不矛盾, C^n 连续包含在 G^n 连续之中。下面我们来讨论两条曲线的连续问题。如图 6-3 所示, 二条曲线 $P(t)$ 和 $Q(t)$, 参数 $t \in [0,1]$ 的连续性

C^0 连续 (0 阶参数连续) ——前一段曲线的终点与后一段曲线的起点相同。

若要求在结合处达到 G^0 连续或 C^0 连续, 即两曲线在结合处位置连续:

$P(1)=Q(0)$ C^1 连续 (一阶参数连续) —— 两相邻曲线段的连接点处有相同的一阶导数。若要求在结合处达到 G^1 连续, 就是说两条曲线在结合处在满足 G^0 连续的条件下, 并有公共的切矢:

$$Q'(0) = \alpha P'(1) \quad (\alpha > 0) \quad (6.6)$$

当 $\alpha = 1$ 时, G^1 连续就成为 C^1 连续。 C^2 连续 (二阶参数连续) —— 两相邻曲线段的连接点处有相同的一阶导数和二阶导数。

若要求在结合处达到 G^2 连续, 就是说两条曲线在结合处在满足 G^1 连续的条件下, 并有公共的曲率矢:

$$\frac{P'(1) \times P''(1)}{|P'(1)|^3} = \frac{Q'(0) \times Q''(0)}{|Q'(0)|^3} \quad (6.7)$$

代入(6.6)得:

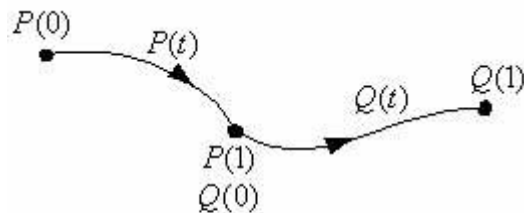
$$P'(1) \times Q''(0) = \alpha^2 P'(1) \times P''(1)$$

这个关系为:

$$Q''(0) = \alpha^2 P''(1) + \beta P'(1) \quad (6.8)$$

β 为任意常数。当 $\alpha = 1$, $\beta = 0$

连续就成为 C^2 连续。



时, G^2

我们看到, C^1 连续保证 G^2 连

连续能保证 G^2 连续, 但反过来

也就是说 C^n 连续的条件比 G^n 连续的条件要苛刻。

图 6-3 两条曲线的连续性

续, C^1

不行。

6.1.4 曲线曲面设计中的几个概念：型值点：是指通过测量或计算得到的曲线或曲面上少量描述其几何形状的数据点。

控制点：是指用来控制或调整曲线曲面形状的特殊点，曲线曲面本身不一定通过控制点。

插值和逼近：这是曲线曲面设计中的两种不同方法。插值设计方法要求建立的曲线曲面数学模型，严格通过已知的每一个型值点。而逼近设计方法建立的曲线曲面数学模型只是近似地接近已知的型值点。

拟合：是指在曲线曲面的设计过程中，用插值或逼近的方法使生成的曲线曲面达到某些设计要求。

6.2 常用参数曲线

6.2.1 一般规则空间曲线

若一条规则空间曲线的函数式以给出，则曲线上一系列点的位置可求出。

1. 球面三叶玫瑰线

极坐标方程为 $r = a \sin(3q)$, 将此已知的平面曲线映射到半球面上, 且半球面的半径为 a , 即可得到空间三叶玫瑰线。

$$X = a \sin(3q) \cos q$$

参数方程为: $Y = a \sin(3q) \sin q$ 令参数 θ 在给定范围内连续取值, 即可求

$$Z = a |\cos(3q)|$$

得空间曲线上的一系列点。

$$X = a \cos q$$

2. 圆柱螺线参数方程为: $Y = a \sin q$

$$Z = kq$$

$$\begin{aligned} X &= q \cos q \\ 3. \quad \text{圆锥螺线参数方程为: } Y &= q \sin q \\ Z &= kq \end{aligned}$$

6.2.2 Bezier 曲线

一. Bezier 曲线定义

贝塞尔曲线是不规则曲线，需要在起点和终点之间构建插值多项式的混合函数，通常由 $n+1$ 个顶点定义一个 n 次多项式。在给定空间 $n+1$ 个点的

位置矢量 P_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$)，则 Bezier 参数曲线上各点坐标的插值公式是：

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), \quad t \in [0,1]$$

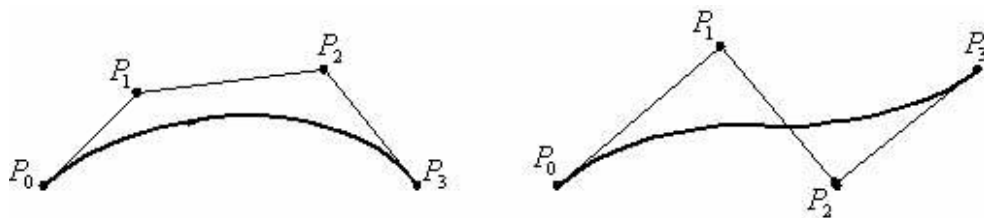


图 6-4 三次 Bezier 曲线

其中, P_i 构成该 Bezier 曲线的特征多边形, $B_{i,n}(t)$ 是 n 次 Bernstein 基函数:

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i \cdot (1-t)^{n-i} \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Bezier 曲线实例如图 6-4 所示。

二. Bezier 曲线的性质

(1) 端点性质

a. 曲线端点位置矢量

当 $t=0$ 时, $P(0)=P_0$; 当 $t=1$ 时, $P(1)=P_n$ 。由此可见, Bezier 曲线的起点、终点与相应的特征多边形的起点、终点重合。

b. 端点处的 r 阶导数

$$\text{起点处: } P_{(0)}^r = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} B_r^i P_i \quad 0 \leq t \leq 1 \quad i = 0, 1, \dots, n$$

$$\text{终点处: } P_{(1)}^r = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{i=0}^r (-1)^i B_r^i P_{n-i} \quad 0 \leq t \leq 1 \quad i = 0, 1, \dots, n$$

一阶导数:

$$t=0 \text{ 时, } P'_{(0)} = n(P_1 - P_0)$$

$$\text{当 } t=1 \text{ 时, } P'_{(1)} = n(P_n - P_{n-1}),$$

说明: Bezier 曲线的起点和终点处的切线方向和特征多边形的第一条边及最后一条边的走向一致。

二阶导矢:

$$\text{当 } t=0 \text{ 时, } P''(0) = n(n-1)(P_2 - 2P_1 + P_0)$$

$$\text{当 } t=1 \text{ 时, } P''(1) = n(n-1)(P_n - 2P_{n-1} + P_{n-2})$$

上式表明：2 阶导矢只与相邻的 3 个顶点有关，事实上， r 阶导矢只与 $(r+1)$ 个相邻点有关，与更远点无关。

(2) 对称性。由控制顶点 $P_i^* = P_{n-i}$, $(i = 0, 1, \dots, n)$, 构造出的新 Bezier 曲线，与原 Bezier 曲线形状相同，走向相反。因为：

$$C^*(t) = \sum_{i=0}^n P_i^* B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i} B_{i,n}(t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i} B_{n-i,n}(1-t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(1-t), \quad t \in [0, 1]$$

这个性质说明 Bezier 曲线在起点处有什么几何性质，在终点处也有相同的性质。

(3) 凸包性

由于 $\sum_{i=0}^n B_{i,n}(t) \equiv 1$,

$0 \leq B_{i,n}(t) \leq 1 (0 \leq t \leq 1, i = 0, 1, \dots, n)$, 所以

在 $[0, 1]$ 区间变化时, 对某一个 t

$P(t)$ 是特征多边形各顶点 P_i 的加权

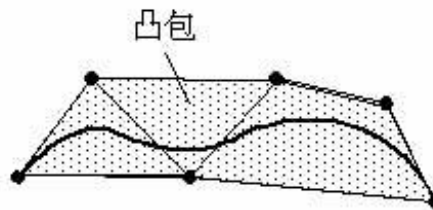


图 6-5 Bezier 曲线的凸包性

当 t
值,
平均,

权因子依次是 $B_{i,x}(t)$ 。在几何图形上, 意味着 **Bezier** 曲线 $P(t)$ 在 $t \in [0,1]$ 中各点是控制点 P_i 的凸线性组合, 即曲线落在 P_i 构成的凸包之中, 如图 6-5 所示。

三. 常用 **Bezier** 曲线的矩阵表示由 **Bezier** 曲线 $C(u)$ 的定义, 可推出常用的一次、二次、三次 **Bezier** 曲线矩阵表示

1) 一次 Bezier 曲线

$$C(u) = (1-u)P_0 + uP_1 \text{ 矩阵表示为 } C(u) = [u, 1] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \end{bmatrix}$$

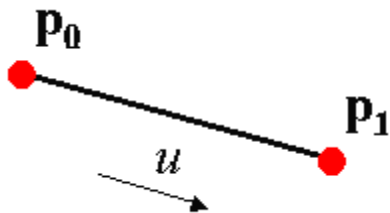


图 6-6 一次 Bezier 曲线

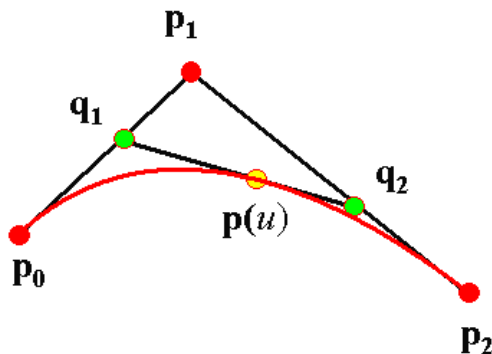


图 6-7 二次 Bezier 曲线

这是一条从 P_0 到 P_1 的直线段，如图 6-6 所示。

2) 二次 Bezier 曲线，如图 6-7 所示。

$C(u) = (1-u)^2 P_0 + 2u(1-u)P_1 + u^2 P_2$ 矩阵表示为

$$C(u) = \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

将 P_0 、 P_1 、 P_2 分解为二维平面上的 X、Y 分量，则：

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_0 - 2(X_0 - X_1)t + (X_0 - 2X_1 + X_2)t^2$$
$$Y(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} = Y_0 - 2(Y_0 - Y_1)t + (Y_0 - 2Y_1 + Y_2)t^2$$

展开为:

$$X(t) = A_0 - 2A_1 + A_2 t^2$$

$$Y(t) = B_0 - 2B_1 + B_2 t^2$$

式中

$$A_0 = X_0$$

$$A_1 = 2(X_0 - X_1)$$

$$A_3 = X_0 - 2X_1 + X_2$$

3) 三次 Bezier 曲线

$$B_0 = Y_0$$

$$B_1 = 2(Y_0 - Y_1)$$

$$B_3 = Y_0 - 2Y_1 + Y_2$$

$C(u) = (1-u)^3 P_0 + 3u(1-u)^2 P_1 + 3u^2(1-u)P_2 + u^3 P_3$ 矩阵表示为 :

$$C(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix}$$

将 P_0 、 P_1 、 P_2 、 P_3 分解为二维平面上的 X 、 Y 分量，则：

$$X(t) = [t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_0 \\ X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = X_0 - 2(X_0 - X_1)t + (X_0 - 2X_1 + X_2)t^2$$
$$Y(t) = 1/6[t^3 \quad t^2 \quad t \quad 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix} = Y_0 - 2(Y_0 - Y_1)t + (Y_0 - 2Y_1 + Y_2)t^2$$

展开为：

$$X(t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + A_3t^3$$

$$Y(t) = B_0 + B_1t + B_2t^2 + B_3t^3$$

式中

$$A_0 = X_0$$

$$A_1 = -3(X_0 - X_1)$$

$$A_2 = -X_0 - 6X_1 + 3X_2$$

$$A_3 = -X_0 + 3X_1 - 3X_2 + X_3$$

$$B_0 = Y_0$$

$$B_1 = -3(Y_0 - Y_1)$$

$$B_2 = -Y_0 - 6Y_1 + 3Y_2$$

$$B_3 = -Y_0 + 3Y_1 - 3Y_2 + Y_3$$

四. Bezier 曲线的递推性(de Casteljau 算法)

如图 6-8 所示, 设 P_0 、 P_0^2 、 P_2 是一条抛物线上顺序三个不同的点。过 P_0 和 P_2 点的两切线交于 P_1 点, 在 P_0^2 点的切线交 $P_0 P_1$ 和 $P_2 P_1$ 于 P_0^1 和 P_1^1 , 则如下比例成立:

$$\frac{P_0 P_0^1}{P_0^1 P_1} = \frac{P_1 P_1^1}{P_1^1 P_2} = \frac{P_0^1 P_0^2}{P_0^2 P_1^1}$$

这是所谓抛物线的三切线定理。

当 P_0 、 P_2 固定, 引入参数 t ,

令上

述比值为 $t:(1-t)$, 即有:

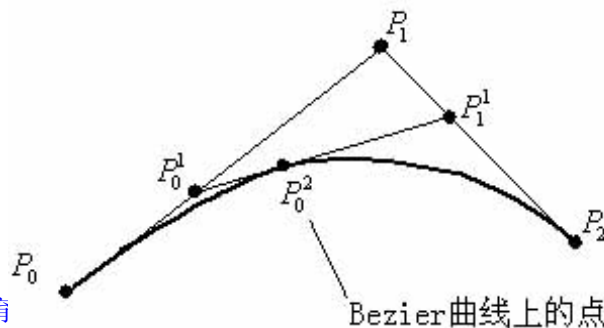


图 6-8 抛物线三切线图示

$$P_0^1 = (1 - t) P_0 + t P_1$$

$$P_1^1 = (1 - t) P_1 + t P_2$$

$$P_0^2 = (1 - t) P_0^1 + t P_1^1$$

t 从 0 变到 1, 第一、二式就分别表示控制二边形的第一、二条边, 它们是两条一次 Bezier 曲线。将一、二式代入第三式得:

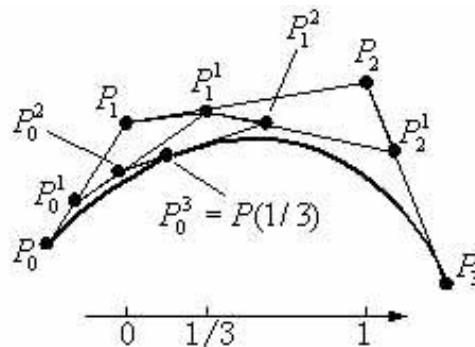
$$P_0^2 = (1 - t)^2 P_0 + 2t(1 - t) P_1 + t^2 P_2$$

当 t 从 0 变到 1 时, 它表示了由三顶点 P_0 、 P_1 、 P_2 三点定义的一条二次 Bezier 曲线。并且表明: 这二次 Bezier 曲线 P_0^2 可以定义为分别由前两个

顶点 (P_0, P_1) 和后两个顶点 (P_1, P_2) 决定的一次 Bezier 曲线的线性组合。依次类推, 由四个控制点定义的三次 Bezier 曲线 P^3_0 可被定义为分别由 (P_0, P_1, P_2) 和 (P_1, P_2, P_3) 确定的二条二次 Bezier 曲线的线性组合, 由 $(n+1)$ 个控制点 $P_i (i=0, 1, \dots, n)$ 定义的 n 次 Bezier 曲线 P^n_0 可被定义为分别由前、后 n 个控制点定义的两条 $(n-1)$ 次 Bezier 曲线 P^{n-1}_0 与 P^{n-1}_1 的线性组合:

$$P_0^* = (1-t)P_0^{n-1} + tP_1^{n-1} \quad t \in [0,1]$$

由此得到 Bezier 曲线的递推计
公式:



算

图 6-9 几何作图求 Bizier 曲线上
一点 ($n=3$, $t=1/4$)

$$P_i^k = \begin{cases} P_i & k = 0 \\ (1-t)P_i^{k-1} + tP_{i+1}^{k-1} & k = 1, 2, \dots, n, i = 0, 1, \dots, n-k \end{cases} \quad \text{即 de Casteljau 算法。}$$

利用以上递推公式, 在给定参数下, 可求得 Bezier 曲线上一点 $P(t)$ 。上式中: $P_i^0 = P_i$ 是定义 Bezier 曲线的控制点, P_0^n 即为曲线 $P(t)$ 上具有参数 t 的点。de Casteljau 算法稳定可靠, 直观简便, 是计算 Bezier 曲线的基本算法和标准算法。

这一算法可用简单的几何作图来实现。给定参数 $t \in [0,1]$ ，就把定义域成长度为 $t:(1-t)$ 的两段。依次对原始控制多边形每一边执行同样的定比分割，所得分点就是第一级递推生成的中间顶点 $P_i^1 (i = 0,1,\dots,n-1)$ ，对这些中间顶点构成的控制多边形再执行同样的定比分割，得第二级中间顶点 $P_i^2 (i = 0,1,\dots,n-2)$ 。重复进行下去，直到 n 级递推得到一个中间顶点 P_0^n 即为所求曲线上的点 $P(t)$ ，如图 6-9 所示。

五. Bezier 曲线的升阶

所谓升阶是指保持 **Bezier** 曲线的形状与定向不变，增加定义它的控制顶点数，也即是提高该 **Bezier** 曲线的次数。增加了控制顶点数，不仅能增加了对曲线进行形状控制的灵活性，还在构造曲面方面有着重要的应用。对于一些由曲线生成曲面的算法，要求那些曲线必须是同次的。应用升阶的方法，我们可以把低于最高次数的曲线提升到最高次数，而获得同一的次数。曲线升阶后，原控制顶点会发生变化。

设给定原始控制顶点 P_0, P_1, \dots, P_n ，定义了一条 n 次 Bezier 曲线，曲线提升一阶后的新的控制顶点。

$$P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t) \quad t \in [0,1]$$

增加一个顶点后，仍定义同一条曲线的新控制顶点为 $P_0^*, P_1^*, \dots, P_{n+1}^*$ ，则有：

$$\sum_{i=0}^n C_n^i P_i t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n+1} C_{n+1}^i P_i^* t^i (1-t)^{n-i}$$

对上式左边乘以 $(t + (1-t))$ ，得到：

$$\sum_{i=0}^n C_n^i P_i t^i (1-t)^{n+1-i} + t^{i+1} (1-t)^{n-i} = \sum C_{n+1}^i P_i^* t^i (1-t)^{n+1-i}$$

比较等式两边 $t^i (1-t)^{n+1-i}$

系数，得到：

化简即得：

项的

$$P_i^* C_{n+1}^i = P_i C_n^i + P_{i-1}$$

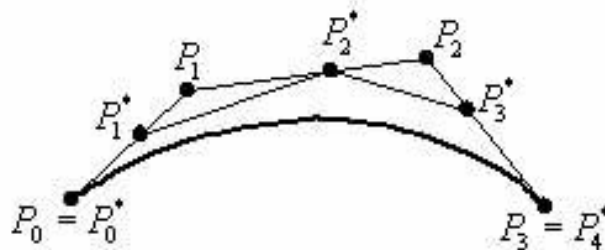


图 6-10 Bezier 曲线升阶

$$P_i^* = \frac{i}{n+1} P_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right) P_i \quad (i = 0, 1, \dots, n+1) \quad \text{其中 } P_{-1} = P_{n+1} = 0。$$

此式说明:

- 新的控制顶点 P_i^* 是以参数值 $\frac{i}{n+1}$ 按分段线性插值从原始特征多边形得出的。
- 升阶后的新的特征多边形在原始特征多边形的凸包内。

- 特征多边形更靠近曲线。

三次 Bezier 曲线的升例，如图 6-10 所示。

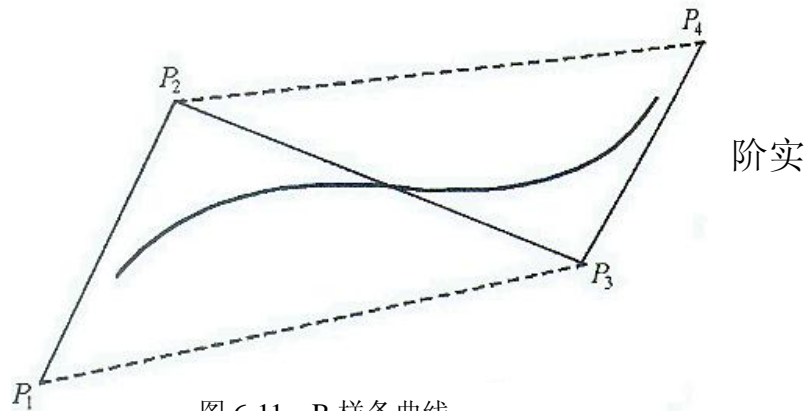


图 6-11 B 样条曲线

6.2.3 B 样条曲线

以 Bernstein 基函

阶实

数构

造的 Bezier 曲线或曲面有许多优越性, 但有也有许多 Bezier 曲线或曲面不能作局部修改等不足。1972 年, Gordon、Riesenfeld 等人提出了 B 样条方法, 在保留 Bezier 方法全部优点的同时, 克服了 Bezier 方法的弱点。

一. B 样条曲线定义

设 P_0, P_1, \dots, P_n 为给定空间的 $n+1$ 个控制顶点, $U = \{u_0, u_1, \dots, u_m\}$ 是

$m+1$ 个节点矢量: 称下列参数曲线 $C(u) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,p}(u) \quad a \leq u \leq b$ 为 p 次的 B 样

条曲线, 折线 P_0, P_1, \dots, P_n 为 B 样条曲线的控制多边形。次数 p ,

顶点个数 $n+1$ ，节点

个数 $m+1$ 具有如下关

系： $m = n + p + 1$ 。二. **B**

样条曲线的性质：1.

严格的凸包性：曲线严

格位于控制多边的凸

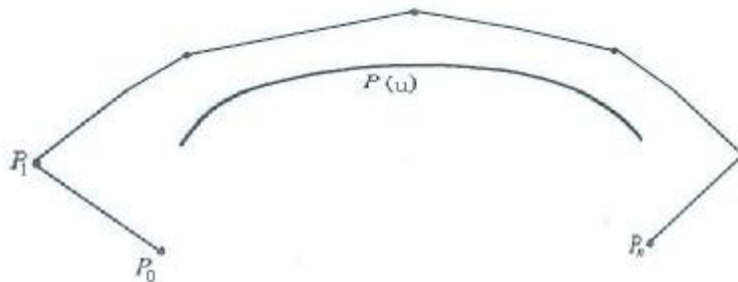


图6-12 **B** 样条曲线凸包性

包内；如果 $u \in [u_i, u_{i+1})$ $p \leq i < m - p - 1$ $C(u)$

位于控制顶点 P_{i-p}, \dots, P_i 所建立的凸包内，如图 6-12 所示。

2.分段参数多项式： $C(u)$ 在每一区间 $u \in [u_i, u_{i+1})$ 上都是次数不高于 p 的多项式；

3.可微性或连续性： $C(u)$ 在每一曲线段内部是无限次可微的，在定义域内重复度为 k 的节点处则使 $p - k$ 次可微或具有 $p - k$ 阶参数连续性；

4.几何不变性: B样条曲线的形状和位置与坐标系的选取无关。

5.局部可调性:

因为 $N_{i,p}(u)$ 只在区间 $[u_i, u_{i+p+1})$ 中为正, 在其它地方均取零值, 所以 p 次的B样条曲线在修改时只被相邻的 $p+1$ 个顶点控制, 而与其它顶点无关。当移动其中的一个顶点 p_i 时, 只影响到定义在区间 $[u_i, u_{i+p+1})$ 上那部分曲线, 并不对整条曲线产生影响。

6.近似性:

控制多边形是 B 样条曲线的线性近似，若进行节点插入或升阶会更加近似；次数越低，B 样条曲线越逼近控制顶点；

7.变差缩减性:

如图 6-13 所示，设 P_0, P_1, \dots, P_n 为 B 样条曲线的控制多边形，某平面与 B 样



条曲线
的交点
个数不

图 6-13 B 样条曲线的变差缩减性

多于该平面与其控制多边形的交点个数。

例子：给定控制顶点 $P_i (i=0, \dots, 8)$ ，定义一条三次B样条曲线。这说明 $n=8$ ， $p=3$ ，各种关系如下确定：

1. 节点矢量 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{n+p+1}] = [u_0, u_1, \dots, u_{12}]$ 2. 曲线定义域 $u \in [u_p, u_{n+1}) = [u_3, u_9)$ 3.

当定义域 $[u_3, u_9)$ 内不含重节点时，曲线段数 $= n - p + 1$

$= 6$; 4. 当由 $[P_{i-p}, \dots, P_i] = [P_3, \dots, P_6]$ 四个控制顶点定义，与其他顶点无关

5. 移动 p_3 时将至多影响到定义在 $[u_i, u_{i+p+1}) = [u_3, u_7)$ 区间上那些曲线段的形状

6. 在 $[u_6, u_7)$ 上的三次 B 样条基及计算定义在上那段三次 B 样条曲线将涉及 $u_{i-p+1} = u_4, \dots, u_{i+p} = u_9$ 共 6 个节点。三. 重节点对 B 样条曲线的影响节点的非均匀或非等距分布包含两层含义:

(1) 节点区间长度不等;

(2) 重节点, 即节点区间长度为零。 1) 重节点的重复度每增加 1, 曲线段数就减 1, 同时样条曲线

在该重节点处的可微性或参数连续阶降 1;

- 2)当定义域端点节点重复度为 p 时, p 次B样条曲线的端点将与相应的控制多边形的端顶点重合, 并在端点处与控制多边形相切;
- 3)当在曲线定义域内有重复度为 p 的节点时, p 次 B 样条曲线插值于相应的 控制多边顶点;
- 4)当端节点重复度为 $p+1$ 时, p 次B样条曲线就具有和次Bezier曲线相同的端点几何性质;
- 5) p 次B样条曲线若在定义域内相邻两节点都具有重复度 p , 可以生成定义在该节点区间上那段B样条曲线的Bezier点;

6)当端节点重复度为 $p+1$ 时, p 次B样条曲线的定义域仅有一个非零节点区间, 则所定义的该 p 次B样条曲线就是 p 次Bezier曲线;

四. B样条曲线类型的划分

曲线按其首末端点是否重合, 区分为闭曲线和开曲线。闭曲线又区分为周期和非周期两种情形, 周期闭曲线与非周期闭曲线的区别是: 前者在首末端点是 C^2 连续的, 而后者一般是 C^0 连续的。非周期闭曲线可以认为是开曲线的特例, 按开曲线处理。

B 样条曲线按其节点
节点的分布情况, 可划分
类型。假定控制多边形的
 $P_i (i = 0, 1, \dots, n)$, 阶数为
为 $k-1$), 则节点矢量是
 $T = [t_0, t_1, \dots, t_{n+k}]$ 。

(1) 均匀 B 样条曲线

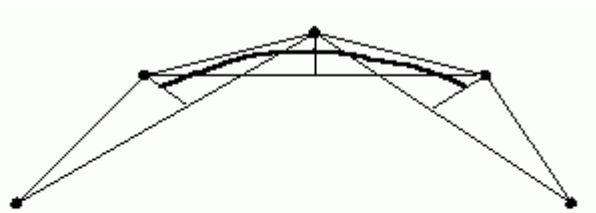


图 6-14 三次均匀 B 样条曲线

矢量中
为四种
顶点为
k (次数

节点矢量中节点为沿参数轴均匀或等距分布，所有节点区间长度
 $\Delta_i = t_{i+1} - t_i = \text{常数} > 0 (i = 0, 1, \dots, n+k-1)$ ，这样的节点矢量定义了均匀的
B 样条基。图 6-14 为均匀 B 样条曲线实例。

（2）准均匀的 B 样条曲线

与均匀 B 样条曲线的差别
于两端节点具有重复度 k ，这样

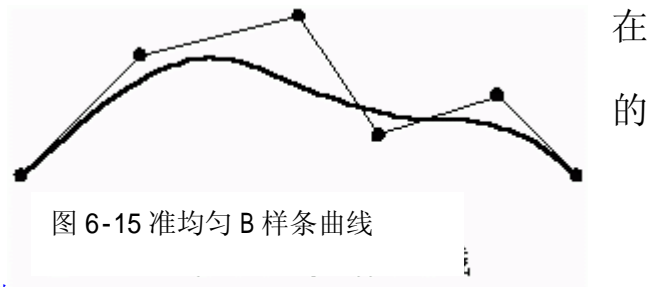


图 6-15 准均匀 B 样条曲线

节点矢量定义了准均匀的 B 样条基。

均匀 B 样条曲线在曲线定义域内各节点区间上具有用局部参数表示的统一的表达式，使得计算与处理简单方便。但用它定义的均匀 B 样条曲线没有保留 Bezier 曲线端点的几何性质，即样条曲线的首末端点不再是控制多边形的首末端点。采用准均匀的 B 样条曲线就是为了解决这个问题，使曲线在端点的行为有较好的控制，如图 6-15 所示。

（3）分段 Bezier 曲线

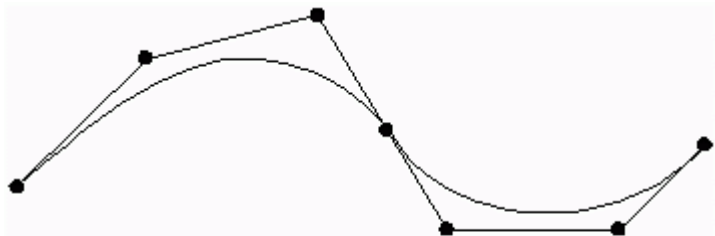
节点矢量中两端节点具有重复度 k ，所有内节点重复度为 $k-1$ ，这样的节点矢量定义了分段的 **Bernstein** 基。

B 样条曲线用分段 **Bezier** 曲线表示后，各曲线段就具有了相对的独立性，移动曲线段内的一个控制顶点只影响该曲线段的形状，对其它曲线段的形状没有影响。并且 **Bezier** 曲线一整套简单有效的算法都可以原封不动地采用。其它三种类型的 B 样条曲线可通过插入节点的方法转换成分段

Bezier 曲线类型，缺点是增加了定义曲线的数据，控制顶点数及节点数都将增加，至多增加将近 $k-1$ 倍。分段 Bezier 曲线实例如图 6-16 所示。

(4) 非均匀 B 样条曲线

在这种类型里，任意分布的节点矢量



条曲线
意分

图 6-16 三次分段 Bizier 曲线

$T = [t_1, t_2, \dots, t_{n+k}]$, 只要在数学上成立 (节点序列非递减, 两端节点重复度 $\leq k$, 内节点重复度 $\leq k-1$) 都可选取。这样的节点矢量定义了非均匀 B 样条基。

五. 均匀 B 样条曲线 这里我们重点讲解均匀 B 样条曲线。在节点矢量中节点为沿参数轴均匀等距分布, 所有节点区间长度 $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$ 为大于零的常数; 可将定义在每个节点区间 $[u_i, u_{i+1})$ 上用整体参数 u 表示的 B 样条基变

换成用局部参数 $t \in [0,1]$ 表示, 只需做参数变换:

$u = u(t) = (1-t)u_i + tu_{i+1}, \quad t \in [0,1], i = p, p+1, \dots, n$ 则 **B** 样条曲线可改写为矩阵形

式: $C_i(t) = C(u(t)) = \sum_{j=i-k}^i P_j N_{j,p}(u(t)), \quad t \in [0,1], i = p, p+1, \dots, n$

将上式改写为矩阵形式:

$$C_i(t) = [1 \quad t \quad t^2 \quad \dots \quad t^p] M_p \begin{bmatrix} P_{i-p} \\ P_{i-p+1} \\ \mathbf{M} \\ P_i \end{bmatrix}, \quad t \in [0,1], i = p, p+1, \dots, n$$

其中 1-3 次系数矩阵 $M_p (p=1,2,3)$ 分别为:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ 则可以很容易写出}$$

$$\text{三次均匀 B 样条曲线的方程: } C_3(t) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{i-3} \\ P_{i-2} \\ P_{i-1} \\ P_i \end{bmatrix}$$

六. de Boor 算法

给定控制顶点 $P_i (i = 0, 1, \dots, n)$ 及节点矢量 $T = [t_0, t_1, \dots, t_{n+k}]$ 后, 就定义了 k 阶 ($k-1$ 次) B 样条曲线。计算 B 样条曲线上对应一点 $P(t)$, 可利用 B 样条曲线方程。采用 de Boor 算法, 计算更加快捷。

1. de Boor 算法的导出

先将 t 固定在区间 $[t_j, t_{j+1}] (k-1 \leq j \leq n)$, 由 de Boor-Cox 公式有:

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t) = \sum_{i=j-k+1}^j P_i N_{i,k}(t) \\ &= \sum_{i=j-k+1}^j P_i \left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} N_{i,k-1}(t) + \frac{t_{i+k}-t}{t_{i+k}-t_{i+1}} N_{i+1,k-1}(t) \right] \quad (6.9) \\ &= \sum_{i=j-k+1}^j \left[\frac{t-t_i}{t_{i+k-1}-t_i} P_i + \frac{t_{i+k-1}-t}{t_{i+k-1}-t_i} P_{i-1} \right] N_{i,k-1}(t) \quad t \in [t_j, t_{j+1}] \end{aligned}$$

令

$$P_i^{[r]}(t) = \begin{cases} P_i, r = 0; j = j - k + 1, j - k + 2, \cdots, j \\ \frac{t - t_i}{t_{i+k-r} - t_i} P_i^{[r-1]}(t) + \frac{t_{i+k-r} - t}{t_{i+k-r} - t_i} P_{i-1}^{[r-1]}(t), \\ r = 1, 2, \cdots, k - 1; i = j - k + r + 1, j - k + r + 2, \cdots, j \end{cases} \quad (6.10)$$

$P(t)$ 的值可以通过递推关系式 (6.10) 求得。这就是著名的 de Boor 算法，则 (6.9) 式可表示为

$$P(t) = \sum_{i=j-k+1}^j P_i N_{i,k}(t) = \sum_{i=j-k+2}^j P_i^{[1]}(t) N_{i,k-1}(t)$$

上式是同一条曲线 $P(t)$ 从 k 阶 B 样条表示到 $k-1$ 阶 B 样条表示的递推公式, 反复应用此公式, 得到: $P(t) = P_j^{[k-1]}(t)$

de Boor 算法的递推关系如图 6-17 所示。

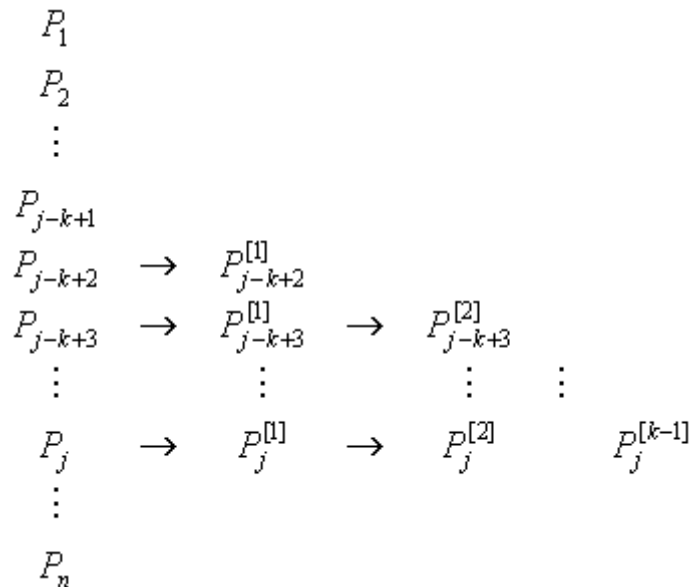


图 6-17 de Boor 算法的递推关系

2. De Boor 算法的几何意义

de Boor 算法有着直观的几何意义 $\frac{3}{4}$ 割角, 即以线段 $P_i^{[r]} P_{i+1}^{[r]}$ 割去角 $P_i^{[r-1]}$ 。从多边形 $P_{j-k+1} P_{j-k+2} \cdots P_j$ 开始, 经过 $k-1$ 层割角, 最后得到 $P(t)$ 上的点 $P_j^{[r-1]}(t)$, 如图 6-18 所示。

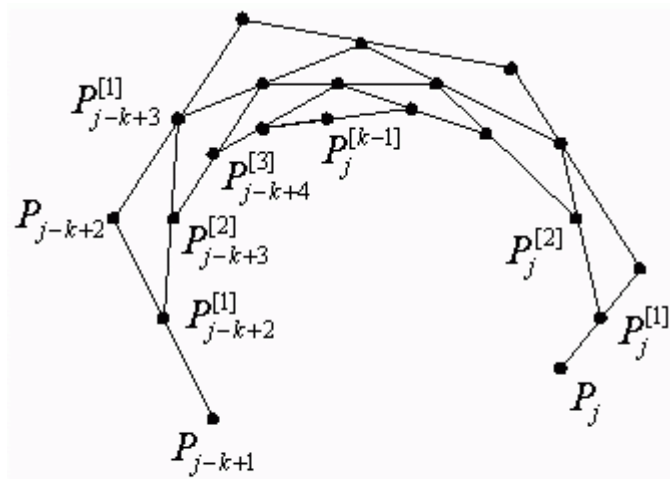


图 6-18 B 样条曲线 de Boor 算法
的几何意义

3. 由 de Boor 算法导出三次 B 样条的 Bezier 表示

在使用时，为了减少计算量，希望曲线次数越低越好，但二次曲线是一条抛物线，不能反应曲线的拐点；所以一般使用三次（四阶）样条曲线。下面来讨论三次(四阶)样条曲线与 Bezier 曲线的关系。由 de Boor 算法，知下列公式成立：

$$P(t_j) = P_j^{[3]}(t_j) = P_{j-1}^{[2]}(t_j)$$

$$P(t_{j+1}) = P_{j+1}^{[3]}(t_{j+1}) = P_j^{[2]}(t_{j+1})$$

$$P'(t_j) = 3(P_{j-1}^{[1]}(t_j) - P_{j-1}^{[2]}(t_j))$$

$$P'(t_{j+1}) = 3(P_j^{[2]}(t_{j+1}) - P_{j-1}^{[1]}(t_{j+1}))$$

由于 $P(t)$ 在区间 $t_j \leq t \leq t_{j+1}$ 上是三次多项式, 故以上两个性质表明:

这段曲线表示成三次 Bezier 曲线, 则其控制顶点为:

$P_{j-1}^{[2]}(t_j), P_{j-1}^{[1]}(t_j), P_{j-1}^{[1]}(t_{j+1}), P_j^{[2]}(t_{j+1})$, 如图 6-16 所示, 即 $P(t)$ 可表示为:

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{i=j-3}^j P_i N_{i,4}(t) \\ &= P_{j-1}^{[2]}(t_j) B_{0,3} \left[\frac{t-t_j}{\Delta t_j} \right] + P_{j-1}^{[1]}(t_j) B_{1,3} \left[\frac{t-t_j}{\Delta t_j} \right] \\ &\quad + P_{j-1}^{[1]}(t_{j+1}) B_{2,3} \left[\frac{t-t_j}{\Delta t_j} \right] + P_j^{[2]}(t_{j+1}) B_{3,3} \left[\frac{t-t_j}{\Delta t_j} \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

其中, $t_j \leq t \leq t_{j+1}, \Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ 。(6.11) 式表明: 对四阶 B 样条曲线 $P(t)$ 而言, de Boor 算法不仅是求 $P(t)$ 的方法, 也是把 $P(t)$ 转化为一段段 Bezier 曲线的工具。

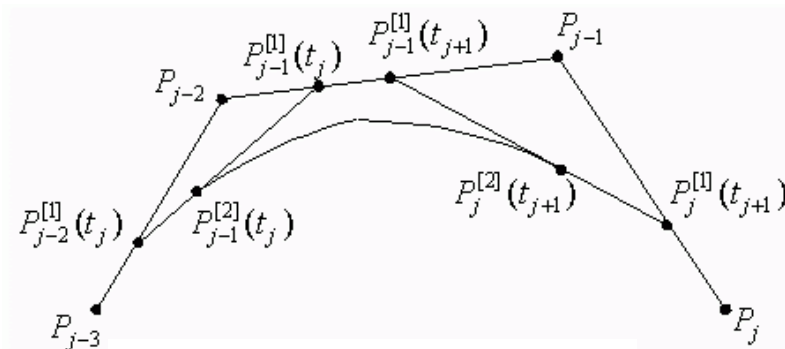


图 6-19 四阶 B 样条曲线转化成 Bezier 曲线

6.3 参数曲面

空间曲面常采用双参数表示,

$$S = S(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)] \quad (a \leq u \leq b, c \leq v \leq d)$$

其中 a 、 b 、 c 、 d 定义参数 u, v 的变化域, 即曲面的定义域。当 u, v 在定义域中变化时, $S(u, v)$ 在空间坐标系中变化, 即 $O-UW$ 坐标系中的任一点均与 $O-XYZ$ 坐标系中的点成一一映射关系。曲面定义域中的一对参数 u, v 确定曲面上的一个点, 如果令 v 参数不变而变动 u 则可得到 u 线, 反之, 固定 u 而变化 v 求得一条 v 线, 所有的 u 线和 v 线形成一个网, 称为参数曲线网。

当平面域为正方形时, 即 $(0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1)$, 则 u, v 平面上的四条线:

$u = 0, v = 0, u = 1, v = 1$ 对应空间的四条边界线, 此时 $P(0,0)$ 、 $P(1,0)$ 、 $P(1,1)$ 、 $P(0,1)$ 是曲面的四个角点, $P(u,0)$ 、 $P(1,v)$ 、 $P(u,1)$ 、 $P(0,v)$ 称为曲线的四条边界线。

6.3.1 函数式曲面

对于非参数式曲面方程一般先转化成参数式曲面方程再进行绘制。这里给出几个常见曲面的参数方程

1. 球面

球坐标系下, 球心在 (x_0, y_0, z_0) 的球面参数方程为:

$$X = x_0 + R \cos u \cos v$$

$$Y = y_0 + R \cos u \sin v \quad u \in [-p/2, p/2], v \in [-p, p]$$

$$Z = z_0 + R \sin u$$

计算机编程绘制原理, 现任取一个 $u_0 \in [-p/2, p/2]$ 在平面上绘制一个圆, 再使 $u \in [-p/2, p/2]$ 以一定步长变化, 参数 v 对每一个 u 都从 $-p$ 变到 p 得到一系列的圆, 这里由 u 的变化得到的一系列平行的圆和由 v 的变化得到的一组圆相交, 将球面分成一片片小曲面片, 所有小曲面片组成球面。若希望曲

面相对光滑, 则可以将小曲面片分的更细, 即所取步长值更小, 当然曲面的光滑程度还与所使用计算机的分辨率有关, 屏幕绘制时在不考虑消隐的情况下, 一般立体效果不明显。

2. 椭球面

广义坐标系下椭球心位于 (x_0, y_0, z_0) 的椭球面参数方程为:

$$X = x_0 + a \cos u \cos v$$

$$Y = y_0 + b \cos u \sin v \quad u \in [-p/2, p/2], v \in [-p, p]$$

$$Z = z_0 + c \sin u$$

其中 a , b , c 分别为椭球面的长、中和短半轴。

6.3.2 旋转曲面

若空间曲面为一旋转曲面, 则可通过先将旋转母线表示成参数形式, 再将该参数母线绕一轴旋转的悼词旋转参数时表示的旋转参数曲面。平面曲线绕所在平面内的直线旋转生成的曲面称为旋转曲面

1. 圆锥面。圆锥面可看成 ZOX 平面上一条过原点的直线绕 Z 轴旋转一圈得到, 设此直线与 Z 轴夹角为 α , 该直线的参数方程为:

$$\begin{aligned} X &= t \sin \alpha \\ Z &= t \cos \alpha \end{aligned} \quad (0 < t)$$

将此参数圆绕 Z 轴旋转, 得到一个旋转参数曲面, 即圆锥面, 圆锥曲面方程为

$$\begin{aligned} X &= t \sin \alpha \cos q \\ Y &= t \sin \alpha \sin q \\ Z &= t \cos \alpha \end{aligned} \quad (0 \leq q \leq 2\pi)$$

3. 环面。圆环面可看成 ZOX 平面上圆心在 (z_0, x_0) 半径为 R 的圆绕 Z 轴旋转一圈得到, 设在 ZOX 平面上, 该圆的参数式为:

$$\begin{aligned} X &= z_0 + R \cos u \\ Z &= x_0 + R \sin u \end{aligned} \quad (0 \leq u \leq 2\pi)$$

将此参数圆绕 Z 轴旋转, 得到一个旋转参数曲面, 即圆环, 曲面方程为

$$\begin{aligned} X &= (x_0 + R \sin u) \cos v \\ Y &= (x_0 + R \sin u) \sin v \\ Z &= z_0 + R \cos u \end{aligned}$$

2. 回转曲面。在 XOY 平面上有抛物线

$$\begin{aligned} X &= PT^2 \\ Y &= 2PT \end{aligned} \quad (0 < T < Y_{\max} / 2P)$$

Y 的最大值为 Y_{\max} 绕 X 轴旋转生成的回转曲面方程为:

$$r(T, q) = \{PT^2, 2PT \times \cos q, 2PT \times \sin q\}$$

6.4 常用曲面

6.4.1 双曲线曲面

双曲线曲面也是简单曲面之一。设曲面的四个角点在 UV 面中由单位正方形的角点 $P(0,0)$ 、 $P(1,0)$ 、 $P(1,1)$ 、 $P(0,1)$ 给定, 要构成一个双曲面 $P(u,v)$ 其中 $(0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1)$ 并允许对曲面上任意点作线性插值, $P(u,v)$ 可表示为:

$$P(u,v) = P(0,0)(1-u)(1-v) + P(0,1)(1-u)v + P(1,0)u(1-v) + P(1,1)vu$$

或者:
$$P(u,v) = [(1-u)u] \begin{vmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1-v) \\ v \end{vmatrix}$$

6.4.2 Bezier 曲面

基于上面 Bezier 曲线的讨论, 我们可以方便地给出 Bezier 曲面的定义和性质, Bezier 曲线的一些算法也可以很容易扩展到 Bezier 曲面的情况。

一. 定义

设 $P_{ij}(0,1,\dots,n, j=0,1,\dots,m)$ 为 $(n+1) \times (m+1)$ 个空间点列, 则 $m \times n$ 次张量积形式的 Bezier 曲面定义为:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} B_{i,m}(u) B_{j,n}(v) \quad u, v \in [0,1]$$

其中 $B_{i,m}(u) = C_m^i u^i (1-u)^{m-i}$, $B_{j,n}(v) = C_n^j v^j (1-v)^{n-j}$ 是 Bernstein 基函数。依次用线段连接点列 $P_{ij}(0,1,\dots,n, j=0,1,\dots,m)$ 中相邻两点所形成的空间网格, 称之为特征网格。Bezier 曲面的矩阵表示式是:

$$P(u, v) = \begin{bmatrix} B_{0,n}(u) & B_{1,n}(u) & \dots & B_{n,n}(u) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & \dots & P_{0m} \\ P_{10} & P_{11} & \dots & P_{1m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n0} & P_{n1} & \dots & P_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0,m}(v) \\ B_{1,m}(v) \\ \dots \\ B_{n,m}(v) \end{bmatrix}$$

在一般实际应用中, n, m 不大于 4。二. **Bezier** 曲面的几种表达形式

1) 双一次 Bezier 曲面: 当 $n=m=1$ 时称为双一次 Bezier 曲面

$P(u, v) = (1-u)(1-v)P_{00} + (1-u)vP_{01} + u(1-v)P_{10} + uvP_{11}$ 这是一双曲抛物面 (马鞍面);

2)双二次 Bezier 曲面: 当 $n=m=2$ 时称为双二次 Bezier 曲面

$P(u, v) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 P_{ij} B_{i,2}(u) B_{j,2}(v)$ 该曲面的四条边界是抛物线

3)双三次 Bezier 曲面: 当 $n=m=3$ 时称为双三次 Bezier 曲面, 如图 6-20 所示。

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 P_{ij} B_{i,3}(u) B_{j,3}(v)$$

该曲面的四条边界都是三次 Bezier 曲线; 可通过控制内部的四个控制顶点 $P_{11}, P_{12}, P_{21}, P_{22}$ 来控制曲面内部的形

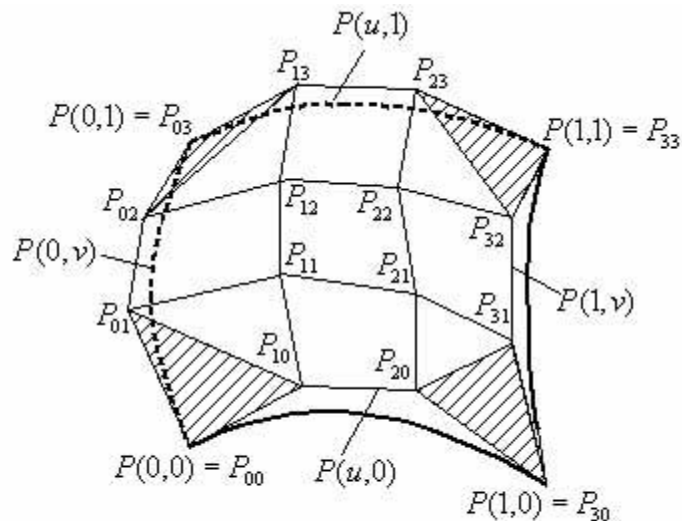


图 6-20 双三次 Bezier 曲面及边界信息

根据图中特征网格的 16 个顶点，可导出特征矩阵：

$$[P] = \begin{vmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & P(0,3) \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & P(1,3) \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & P(2,3) \\ P(3,0) & P(3,1) & P(3,2) & P(3,3) \end{vmatrix}$$

双三次贝塞尔曲面的数学表达式为：

$$P(u,v) = [(1-u)^3 3u(1-u)^2 3u^2(1-u)u^3] \times [P] \times \begin{vmatrix} (1-v) \\ 3v(1-v)^2 \\ 3v^2(1-v) \\ v^3 \end{vmatrix}$$

$$= [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & P(0,3) \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & P(1,3) \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & P(2,3) \\ P(3,0) & P(3,1) & P(3,2) & P(3,3) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{vmatrix} \quad \text{其中,}$$

$$\text{令 } [N] = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad [V] = [v^3 \ v^2 \ v \ 1], \quad [U] = [u^3 \ u^2 \ u \ 1]$$

则 $P(u,v)=[U][N][P][N]'[V]'$ ，其中 $[P]$ 为双三次贝赛尔特征网格矩阵，矩阵周围 12 个控制点定义了 4 条三次贝塞尔曲线，中间 4 个控制点控制曲面形状，4 个角点位于曲面上。

三. 性质

除变差减小性质外，Bezier 曲线的其它性质可推广到 Bezier 曲面：

(1) Bezier 曲面特征网格的四个角点正好是 Bezier 曲面的四个角点，即

$$P(0,0) = P_{00}, \quad P(1,0) = P_{m0}, \quad P(0,1) = P_{0n}, \quad P(1,1) = P_{mn}。$$

- (2) Bezier 曲面特征网格最外一圈顶点定义 Bezier 曲面的四条边界;
- Bezier 曲面边界的跨界切矢只与定义该边界的顶点及相邻一排顶点有关, 且 $P_{00}P_{10}P_{20}$ 、 $P_{0n}P_{1n}P_{2n}$ 、 $P_{m0}P_{m-1,0}P_{m-2,0}$ 和 $P_{m0}P_{m-1,0}P_{m-2,0}$ (图 6-20 打上斜线的三角形); 其跨界二阶导矢只与定义该边界的及相邻两排顶点有关。
- (3) 几何不变性。
- (4) 对称性。
- (5) 凸包性。

6.4.3 B 样条曲面

给定参数轴 u 和 v 的节点矢量 $U = [u_0, u_1, \dots, u_{m+p}]$ 和 $V = [v_0, v_1, \dots, v_{n+q}]$, $p \times q$ 阶 B 样条曲面定义如下:

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n P_{ij} N_{i,p}(u) N_{j,q}(v)$$

$P_{ij} (i = 0, 1, \dots, m; j = 0, 1, \dots, n)$ 是给定的空间 $(m+1)(n+1)$ 个点列, 构成一张控制网格, 称为 B 样条曲面的特征网格。 $N_{i,p}(u)$ 和 $N_{j,q}(v)$ 是 B 样条基, 分别由节点矢量 U 和 V 按 deBoor-Cox 递推公式决定。

7. B 样条曲面的几种表达形式

1) 双一次 B 样条曲面: 当 $n=m=1$ 时为双一次 B 样条曲面

$$P(u, v) = [(1-u)u] \begin{vmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1-v) \\ v \end{vmatrix} \quad \text{这是一双曲抛物面 (马鞍面);}$$

2) 双二次 B 样条曲面: 当 $n=m=2$ 时为双二次 B 样条曲面

$$P(u, v) = 1/4 [u^2 \ u \ 1] \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

该曲面的四条边界是抛物线

3) 双三次 B 样条曲面：当 $n=m=3$ 时为双三次 B 样条曲面

$P(u, v)$

$$= 1/36 [u^3 \ u^2 \ u \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & P(0,3) \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & P(1,3) \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & P(2,3) \\ P(3,0) & P(3,1) & P(3,2) & P(3,3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{其中, 令 } [F] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [V] = [v^3 \ v^2 \ v \ 1], \quad [U] = [u^3 \ u^2 \ u \ 1]$$

则 $P(u, v) = 1/36[U][F][P][F]^t[V]$, 其中 $[P]$ 为 B 特征矩阵且为 16 个网格点的角点信息。

B 样条曲线的一些几何性质可以推广到 B 样条曲面, 图 6-21 是一张双三次 B 样条曲面片实例。

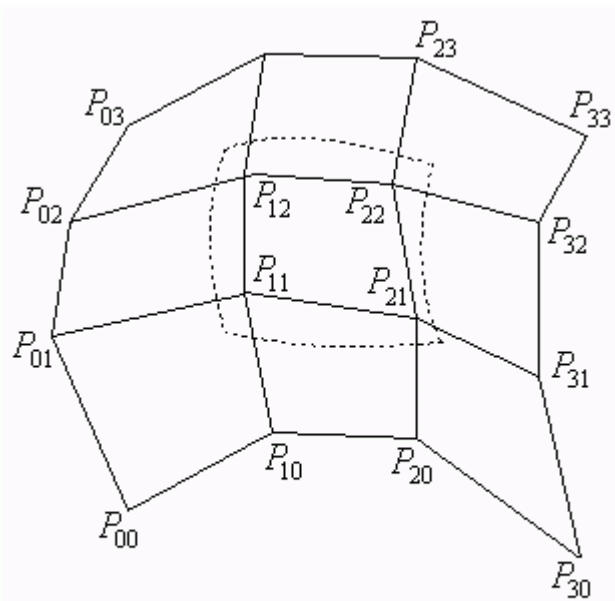


图 6-21 双三次 B 样条曲面片

面片

6.5 曲面与曲线编程案例

一、程序设计功能说明

程序为演示本章讲解的各种曲线曲面算法生成的实用程序。如图 6-22 所示为本例程序运行时的主界面，通过单击菜单中及下拉菜单的各功能项分别完成各种曲线曲面生成。



图 6-22

二、程序设计步骤

1. 创建工程名称为“曲线和曲面”单文档应用程序框架

2. 编辑菜单资源

设计根据 6.1 表中的定义编辑菜单资源如图 6-11 所示的菜单项。

表 6.1 菜单资源表

菜单标 题	菜单项标题	标示符 ID
《计算机图形学原理及算法教程》(Visual C++版) 和青芳 清华大学出版社出版 		
曲线	三叶梅花线	ID_DRAW_ROSE
	圆柱螺线	ID_DRAW_CYLINDER
	圆锥螺线	ID_DRAW_CYLINDER_CONE
	三次贝塞尔曲线	ID_DRAW_3BEZIER
	三次 B 样条曲线	ID_DRAW_3BSPLINE
曲面	环形面	ID_AREA_RING
	锥面	ID_AREA_CONE
	双线性曲面	ID_AREA_LINE
	旋转曲面	ID_AREA_ROTATION
	贝塞尔曲面	ID_AREA_BEZIER
www.yeaso.com www.cadedu.com CAD 教育网制作		

3. 添加函数

在工程中添加应用函数的方法，这里我们先在“**View.h**”中声明需要使用的函数名称，然后再在“**View.cpp**”中定义此函数。

// 曲线和曲面[程序代码见纸书](#)

4. 添加消息处理函数

利用 ClassWizard（建立类向导）为应用程序添加与菜单项相关的消息处理函数，ClassName 栏中选择 CMyView，根据表 7.2 建立如下的消息映射函数，ClassWizard 会自动完成有关的函数声明。

表 7.2 菜单项的消息处理函数

菜单项 ID	消息	消息处理函数
--------	----	--------

ID_DRAW_ROSE	CONMMAN	OnDrawRose()
ID_DRAW_CYLINDER		OnDrawCylinder()
ID_DRAW_CYLINDER_CONE		OnDrawCylinder()
ID_DRAW_3BEZIER		OnDraw3bezier()
ID_DRAW_3BSPLINE		OnDraw3bspline()
ID_AREA_RING	CONMMAN	OnAreaRing()
ID_AREA_CONE		OnAreaCone()

ID_AREA_LINE		OnAreaLine()
ID_AREA_ROTATION		OnAreaRotation()
ID_AREA_BEZIER		OnAreaBezier()
ID_AREA_BSPLINE		OnAreaBspline()

5. View.cpp 添加完成各个菜单消息处理函数，实现既定功能，

```
// CMyView message handlers
```

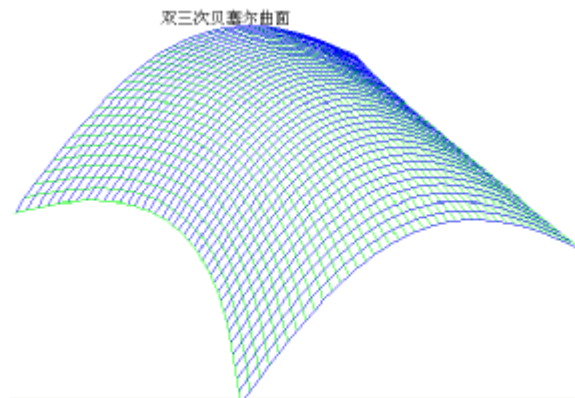
```
void CMyView::OnAreaBezier()
```

```
{//Bezier 曲面
```

```
member=3;
```

```
beier_draw();
```

```
}
```



```
void CMyView::OnAreaBspline()
```

```
{//B 样条曲面
```

[程序代码见纸书](#)

```
}
```

说明：

1. 为了能够让读者清楚曲面的生成过程，我们在程序中用键盘上
“上”、“下”、“左”、“右”箭头改变参数变量的大小，动态观看

参数大小对生成曲面的影响。

2. 以上仅列出 View.h、View.cpp 中的部分代码，其它文件代码全部为系统自动建立，无需改正，为节省篇幅此处省略，详见光盘。
代码中黑体部分为手工输入。

6.6 课后练习

1. 已知 4 个点型直点：(1.0, 2.0)、(2.5, 2.5)、(4.0, 4.5)、(5.0, 4.0)，

求三次样条曲线。

2. 编程绘制一条二次 Bezier 曲线；
3. 编程绘制一条二次 B 样条曲线；