第二章 二维图形

利用计算机绘制的图形与我们日常见到的图片、照片是有相似之处。除图片、照片等图形外，自然界中还存在丰富多彩的有形物体。一般，根据图形所在空间的不同，可将图形分为：三维图形和二维图形。图片、照片属二维图形，自然界中形形色色的物体属于三维图形。在计算机绘图的过程中，二维图形的绘制是绘制三维图形的基础，研究计算机图形的生成必须从研究

二维图形开始。计算机绘制图形时，无论图形多么复杂，都是利用一些相应图形基元经过图形变换组成的。在计算机绘图中，经常用到图形变换，图形变换是指图形信息经过几何变换后产生新的图形。基本的几何变换研究物体坐标在直角坐标系内的平移、旋转和变比等规则。下面介绍二维图形的这些基本变换规则。

2.1 用户坐标到屏幕坐标的变换

实际图纸上坐标系是实数域中的直角坐标系或极坐标系，统称为用户坐标系；计算机设备（如屏幕）上采用的坐标系为整数域（如屏幕一般为直角左手系），称为设备坐标系。因此用户坐标系中图形需经过变换才能绘制在

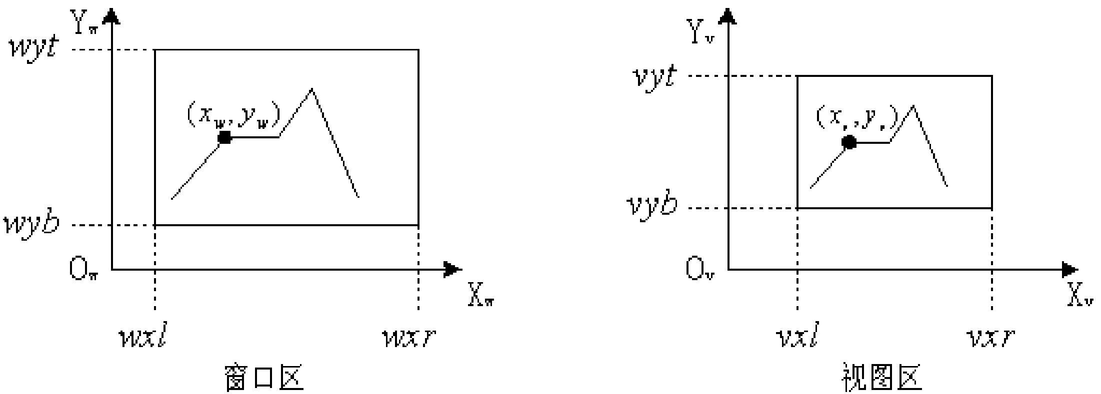


图 2-1 窗口区和视口区示意图

设备（如屏幕）上。用户坐标系中图形一般只有部分图形需要在设备上显示（或绘制），用户坐标中需要显示的图形（矩形区域）称为窗口，在设备（屏幕）上，显示（或绘制）图形的区域（矩形区域）称为视口。在计算机上绘制图形时，实际的窗口区与视图区往往不一样大小，要在视图区正确地显示形体的，必须将其从窗口区变换到视图区

2.1.1 窗口到视口的变换内容

图形从窗口到视口的变换亦称为数据规格化。窗口到视口变换包括以下内容：

（1）窗口逻辑坐标与设备坐标的转换，当把用户坐标系（逻辑单位）中

的图形变换到视口中，视口中的坐标单位不再为逻辑单位，而是设备坐标（以像素为单位），根据设备的无关性，图形映射在视口上的图形大小应是不变的，这要求有像素与逻辑单位的转换比例（这一比例的大小随屏幕的大小和分辨率的高低有关）。

（2）用户坐标系所选区域内图形的坐标转换到屏幕上坐标不一定为整数，对转换后坐标值取整。可通过四舍五入的方法将实型值的绝对值圆整化，最简单的方法是用赋值的类型转化规则来实现实型到整型的变换。

（3）用户坐标系到设备（屏幕）坐标系，坐标轴方向变换。

（4）屏幕坐标系水平方向与垂直方向刻度若不等（即像素间距不等）时，为保证图形不走样，还要进行比例变换。

2.1.2 窗口区到视图区的坐标变换

如图 **2-1** 所示，根据图中比例关系，窗口区到视图区的坐标变换公式可写为：

$$x_v - vxl = \frac{vxr - vxl}{wxr - wxl}(x_w - wxl)$$

$$y_v - vyb = \frac{vyt - vyb}{wyt - wyb}(y_w - wyb)$$

其中：

$$x_v = a \cdot x_w + b$$

$$y_v = c \cdot y_w + d$$

$$a = \frac{vxr - vxl}{wxr - wxl}$$

$$b = vxl - \frac{vxr - vxl}{wxr - wxl} \cdot wxl$$

$$c = \frac{vyt - vyb}{wyt - wyb}$$

$$d = vyb - \frac{vyt - vyb}{wyt - wyb} \cdot wyb$$

总之，用矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} x_v \\ y_v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & c & d \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_w \\ y_w \\ 1 \end{bmatrix}$$

2.2 二维几何变换

图形基本变换是指图形的比例变换、对称变换、旋转变换、错切变换、平移变换等。通过对原图形上二维向量引进第三个坐标即三维点向量（又称齐次坐标点），简称齐次坐标，在三维齐次坐标下，二维几何变换都可统一用矩阵表示。

所谓齐次坐标就是将一个原本是 **n** 维的向量用一个 **n+1** 维向量来表示。如向量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的齐次坐标表示为$(hx_1, hx_2, \cdots, hx_n, h)$，其中 **h** 是一个实数。显然一个向量的齐次表示是不唯一的，齐次坐标的 **h** 取不同的值都表示的是同一个点，比如齐次坐标**[8,4,2]**、**[4,2,1]**表示的都是二维点**[2,1]**。

引进齐次坐标的优点：

A. 提供了用矩阵运算把二维、三维甚至高维空间中的一个点集从一个坐标系变换到另一个坐标系的有效方法。

B. 可以表示无穷远的点。**n+1** 维的齐次坐标中如果 **h=0**，实际上就表示了 **n** 维空间的一个无穷远点。对于齐次坐标 **[a,b,h]**，保持 **a,b** 不变，$|V_1|=(x_1*x_1,y_1*y_1,z_1*z_1)^{1/2}$ 的过程就表示了在二维坐标系中的一个点沿直线 **ax+by=0** 逐渐走向无穷远处的过程。

2.2.1 基本变换 1.平移变换

若图形上任意一点的坐标为 (x,y)，通过沿 x 和 y 轴分别平移 T_x 和 T_y 后成为新图形上的一点 (x',y')，坐标变换：$x'=x+T_x$　　$y'=y+T_y$

用齐次坐标表示的平移变换为：

$$[x' \;\; y' \;\; 1] = [x \;\; y \;\; 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$$

其中平移变换矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ T_x & T_y & 1 \end{bmatrix}$

2. 比例变换

若图形上任意一点的坐标为 (x, y)，通过沿 x和y 轴分别变比变换 S_x和S_y 后成为新图形上的一点 (x', y')，坐标变换：

$$x' = S_x \cdot x \qquad S_x > 1 \quad \text{放大}$$
$$y' = S_y \cdot y \qquad 0 < S_y < 1 \quad \text{缩小}$$

用齐次坐标表示的比例变换为：

$$[x' \ \ y' \ \ 1] = [x \ \ y \ \ 1]\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中比例变换矩阵为 $\begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 旋转变换

若图形上任意一点的坐标为 (x, y)，通过将对象上的各点 **(*x*, *y*)** 围绕原点逆时针转动一个角度 q， 后成为新图形上的一点 (x', y')，

坐标变换：

$$x' = x \cdot \cos\theta - y \cdot \sin\theta \qquad \theta > 0 \text{ 逆时针}$$
$$y' = x \cdot \sin\theta + y \cdot \cos\theta \qquad \theta < 0 \text{ 顺时针}$$

用齐次坐标表示的旋转变换为：

$$[x', y', 1] = [x, y, 1]\begin{bmatrix} \cos q & \sin q & 0 \\ -\sin q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中旋转变换矩阵为$\begin{bmatrix} \cos q & \sin q & 0 \\ -\sin q & \cos q & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

4. 对称变换

若图形上任意一点的坐标为(x, y)，关于x、y和原点分别作对称变换后成为新图形上的一点(x', y')，对称变换可分别表示为：

关于x坐标对称变换 $x' = x \quad y' = -y$

用齐次矩阵表示的对称变换：$[x', y', 1] = [x, y, 1]\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

其中关于 x 作对称变换矩阵为 $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

关于 y 坐标对称变换 $x' = -x \quad y' = y$

用齐次矩阵表示的对称变换： $[x', y', 1] = [x, y, 1]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

其中关于 y 作对称变换矩阵为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

关于原点坐标对称变换： $x'=-x \quad y'=-y$

用齐次矩阵表示的对称变换： $[x', y', 1]=[x, y, 1]\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

其中关于原点作对称变换矩阵为 $\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$

5 .错切

1． 沿 x 方向错切：

沿 ＋x 方向错切，坐标变换 $\begin{matrix}x'=cy+x\\ y'=y\end{matrix}$ $\mathbf{c>0}$

沿$-x$ 方向错切，坐标变换 $\begin{matrix} x' = -cy + x \\ y' = y \end{matrix}$ $c > 0$

用齐次矩阵表示的对称变换：$[x' \quad y'] = [x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \pm c & 1 \end{bmatrix}$

2．沿 x 方向错切：

向 $+y$ 方向错切，坐标变换 $\begin{matrix} x' = x \\ y' = bx + y \end{matrix}$ $b > 0$

沿$-y$ 方向错切，坐标变换 $\begin{matrix} x' = x \\ y' = -bx + y \end{matrix}$ $b > 0$ 用齐次矩阵表示的对称

变换： $[x' \quad y'] = [x \quad y]\begin{bmatrix} 1 & \pm b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2.2.2 二维几何变换的级联

（1）实际中的几何变换一次有若干个；（2）**基本形式有局限性**。图形的级联变换是指图形作一次以上的基本变换，变换结果为每次基本变换矩阵乘积。

设图形经过 n 次基本几何变换，其变换矩阵分别为 $T_1, T_2, \ldots, T_n$

则： 经 T_1 后： $[x' \quad y' \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot T_1$

经 T_2 后： $[x'' \quad y'' \quad 1] = [x' \quad y' \quad 1] \cdot T_2 = [x \quad y \quad 1] \cdot T_1 \cdot T_2$

经 T_n 后： $[x* \quad y* \quad 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot T_1 \cdot T_2 \ldots T_n = T$ 称 $T = T_1 \cdot T_2 \ldots T_n$ 为级联变换的变换矩阵。下面介绍几种常见级联变换。

1．复合平移

若对图形首先做平移变换T_1，然后再做平移变换T_2，相应的平移变换矩阵分别为：

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & m_1 & 1 \end{bmatrix} \qquad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_2 & m_2 & 1 \end{bmatrix}$$

变换结果为复合平移变换T，其复合平移变换矩阵为：

$$\begin{aligned} T &= T_1 \cdot T_2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & m_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_2 & m_2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 + l_2 & m_1 + m_2 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2．复合比例

设比例变换T_1矩阵为：

$$T_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

设比例变换T_2矩阵为：

$$T_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

则复合比例变换T矩阵为：

$$T = T_1 \cdot T_2$$

$$= \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 & 0 \\ 0 & d_1 \cdot d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. 复合旋转

设比例变换T_1矩阵为： $T_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & \sin q_1 & 0 \\ -\sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

设比例变换T_2矩阵为： $T_2 = \begin{bmatrix} \cos q_2 & \sin q_2 & 0 \\ -\sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

则复合比例变换T矩阵为：

$$T = T_1 \cdot T_2$$
$$= \begin{bmatrix} \cos q_1 & \sin q_1 & 0 \\ -\sin q_1 & \cos q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos q_2 & \sin q_2 & 0 \\ -\sin q_2 & \cos q_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(q_1+q_2) & \sin(q_1+q_2) & 0 \\ -\sin(q_1+q_2) & \cos(q_1+q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

旋转变换合比例变换都与参考点有关，上面的旋转变换和比例变换均是相对与原点的。如果相对于某一参考点(x_0, y_0)作比例和旋转变换，则其变换过程是先将坐标原点平移到(x_0, y_0)，在再新的坐标系下作比例、旋转变换，然后将坐标原点平移回去，即复合变换。

4．相对于点(x_0, y_0)的比例变换

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -x_0 & -y_0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & d & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x_0 & y_0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ (1-a)x_0 & (1-d)y_0 & 1\end{bmatrix}$$

5．相对于点(x_0, y_0)的旋转变换

$$T=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -x_0 & -y_0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos q & \sin q & 0\\ -\sin q & \cos q & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ x_0 & y_0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos q & \sin q & 0\\ -\sin q & \cos q & 0\\ (1-\cos q)\cdot x_0 - y_0\cdot\sin q & (1-\cos q)\cdot y_0 + x_0\cdot\sin q & 1\end{bmatrix}$$

对于复合变换问题，关键是将其分解为一定顺序的基本变换，然后逐一进行这些基本变换，最终得到复合变换结果；或者求出这些基本变换矩阵连乘积，亦可得到复合变换。

综上所述，可以证明利用齐次坐标表示方法，二维图形几何变换矩阵的一般变换过程为：

$[x' \; y' \; 1] = [x \quad y \quad 1] \cdot T_{2D} = [x \quad y \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} a & b & p \\ c & d & q \\ l & m & s \end{bmatrix}$，其中 T_{2D} 称为二维几何变换得一般表达时，进一步可分为以下四个矩阵：

$T_1=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$对图形进行比例、旋转、对称等变换；

$T_2=\begin{bmatrix} l & m \end{bmatrix}$对图形进行平移变换；

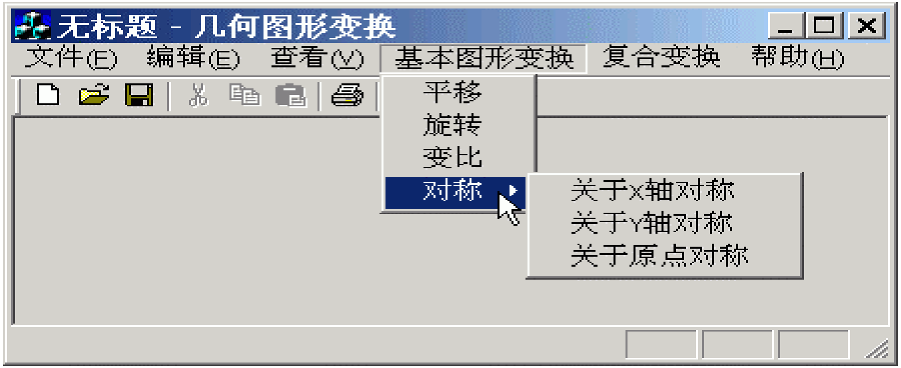
$T_3=\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$对图形做投影变换。

$T_4=[s]$产生整体比例变换。

2.2.3 几何变换程序设计案例

1、程序设计功能说明

程序为二维几何变换的应用程序，实现以上介绍的各种二维几何图形的变换。如图 2-2 所示为程序运行时的主界面，通过单击菜单中【几何变换】与【复合变换】及下拉菜单的各功能项完成分别各种几何变换。



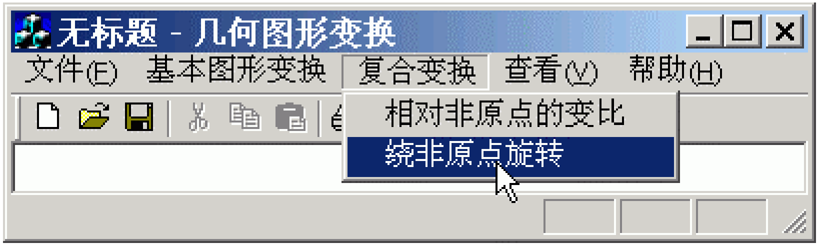


图 2-2

2． 程序设计步骤

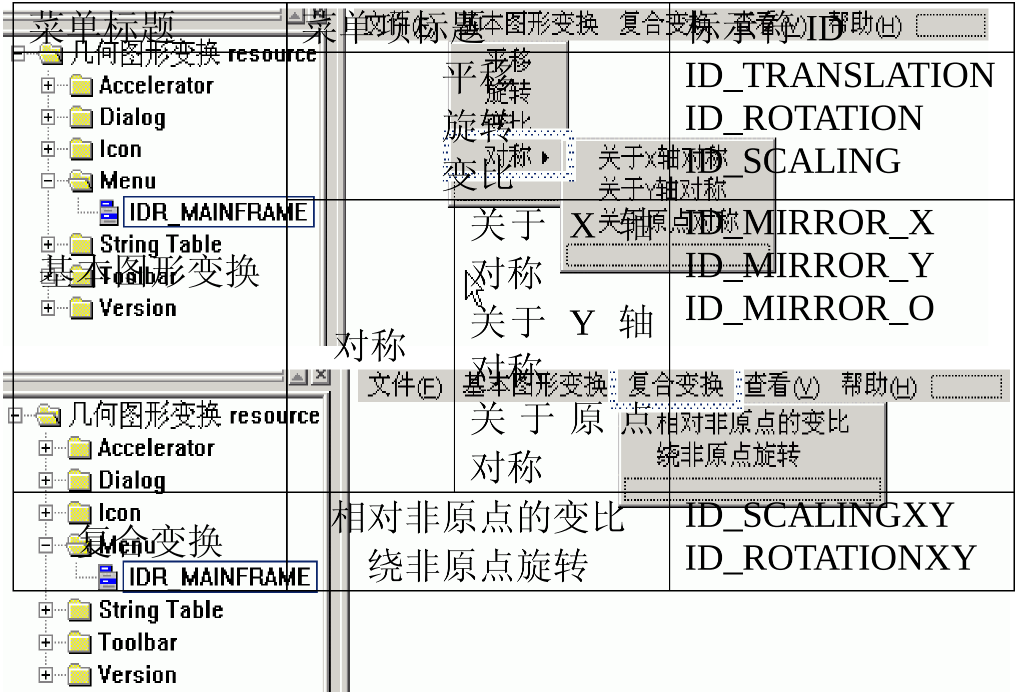
（1）创建工程名称为“几何图形变换”的单文档应用程序框架（详细过程请参见第二章有关内容）

（2）编辑菜单资源

设计如图 3-1 所示的菜单项。在工作区的【ResourceView】标签中，

单击 Menu 项左边“+”，然后双击其子项 IDR_MAINFRAME，并根据 2.1 表中的定义编辑菜单资源。创建如图 2-3 所示的程序框架。

表 2.1 菜单资源表



菜单标题	菜单项标题	标准ID
基本图形变换	平移 旋转 变比	ID_TRANSLATION ID_ROTATION ID_SCALING
对称	关于X轴对称 关于Y轴对称 关于原点对称	ID_MIRROR_X ID_MIRROR_Y ID_MIRROR_O
复合变换	相对非原点的变比 绕非原点旋转	ID_SCALINGXY ID_ROTATIONXY

图 2-3

（3）添加消息处理函数

利用 ClassWizard（建立类向导）为应用程序添加与菜单项相关的消息处理函数，ClassName 栏中选择 CMyView，根据表 2.2 建立如下的消息映射函数，完成有关的函数声明。

表 2.2 菜单项的消息处理函数

菜单项 ID	消息	消息处理函数
ID_TRANSLATION	CONMMAN	OnIDTRANSLATION
ID_ROTATION	CONMMAN	OnIDROTATION
ID_SCALING	CONMMAN	OnIDROTATION
D_MIRROR_X	CONMMAN	OnIDMIRRORX
ID_MIRROR_Y	CONMMAN	OnIDMIRRORY

ID_MIRROR_O	CONMMAN	OnIDMIRRORO
ID_SCALINGXY	CONMMAN	OnIDSCALINGXY
ID_ROTATIONXY	CONMMAN	OnIDROTATIONXY

（4）手工添加几何变换绘图基类

为程序模块化，我们对绘制几何图形变换编制了基类 MyClass 类。在工程中单击【文件】|【新建】，在弹出的新建对话框中，选择 C/C++ Header File，在【文件】名称输入栏中输入“MyClass”；同样，在工程中单击【文件】|【新建】，在弹出的新建对话框中，选择 C++ Source File，在【文件】名称输入栏中输入“MyClass”。在工作区中系统自动创建的相应的空文件

中，分别添加以下此基类的头文件（.h 文件）和应用文件(.cpp 文件)。

程序代码见纸书

提示:

在以上 CMyClass 基类中，绘制了字符 M，本例的几何图形]变换应用案例，即对此字符进行各种几何变换，读者可在此基类基础上，对一些函数如 ReadWorkpiece()、DrawViewV()、Calculate()中的部分代码稍加修改，即可绘制各种二维图形，并进一步对所绘制图形进行各种几何变换。

（5） 在几何图形变换 View.h、几何图形变换 View.cpp 添加完成各个菜单消息处理函数，实现既定功能，

说明：下面仅列出几何图形变换 View.h、几何图形变换 View.cpp 的全部代码，其它文件代码全部为系统维自动建立，无需改正，为节省篇幅此处省略，详见光盘。下面代码中黑体部分为手工输入，其它代码为系统生成。

// 几何图形变换 View.cpp : implementation of the CMyView class

程序代码见纸书}

2.4 平面曲线图

无论在美术中还是在工程设计中，利用基本图形变换方式绘制的二维图形和工程图都被广泛应用。日常生活中的美术图案（如纺织品图案、装饰图案等）大多是将一个图案单元或几个图案单元经过图形变换、组合排列从而形成一幅美丽的艺术图案。图形或称图案设计在现代生产和生活中也越来越受到人们的重视，其应用范围也越来越广。尤其利用计算机进行图案设计前景更广，计算机绘制图案速度快、线条清晰，也可绘制很复杂的图案，如函数曲线图，随机图、各种简单图形经二维几何变换后的美丽图案等。下面我们详细介绍用 Visual C++绘制几种图形或称为图案的程序设计实例

2.4.1 正叶线

正叶线是一种类似植物叶子形状的曲线，数学表达式：

$$
\begin{aligned}
r &= a\sin(n\times theta) \\
x &= r\cos(theta) \qquad (a>0, n=2,3,45,\ldots) \\
y &= r\sin(theta)
\end{aligned}
$$

程序经过下面通过修改数学表达式，绘制由二重、三重的正叶线组成的美丽图形。

2.4.2 正叶线蝴蝶结

蝴蝶结故名词义即类似蝴蝶结的图案。是经过设置二维坐标 x,y 函数以及利用旋转变换绘制的图案。画线点的 x 坐标、y 坐标移下列函数规律变化，即：

```
d=80;
for(a=0;a<=2*pi;a+=pi/360) {
e=d*(1+0.25*sin(4*a));
e=e*(1+sin(8*a));
x2=int(320+e*cos(a+pi/8));
x1=int(320+e*cos(a));
```

```
y1=int(200+e*sin(a));
y2=int(200+e*sin(a+pi/8));
}
```

2.5 平面曲线程序设计案例

一、程序设计步骤

1． 创建工程名称为“平面曲线”的单文档应用程序框架（详细过程请参见第二章有关内容）。

2． 菜单资源

设计如图 2-4 所示的菜单项，根据 2.3 表中的定义编辑菜单资源。

表 2.3 菜单资源表

菜单标题	菜单项标题	标示符 ID
函数曲线	正叶线	ID_DRAW_LEAF
	蝴蝶结	ID_DRAW_ROSE
工程曲线	三次贝塞尔曲线	ID_DRAW_BEZIERNE
	三次 B 样条曲线	ID_DRAW_BSPLINE

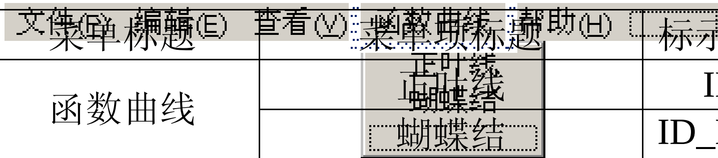


图 2-4

3． 添加消息处理函数

利用 ClassWizard（建立类向导）为应用程序添加与菜单项相关的消息处理函数，ClassName 栏中选择 CMyView，根据表 3.2 建立如下的消息映射函

数，ClassWizard 会自动完成有关的函数声明。

表 3.2 菜单项的消息处理函数

菜单项 ID	消息	消息处理函数
ID_DRAW_LEAF	CONMMAN	OnDrawLeaf()
ID_DRAW_ROSE	CONMMAN	OnDrawRose()

4. 在 View.h、View.cpp 添加完成各个菜单消息处理函数，实现既定功能。

说明：下面仅列出 View.h、View.cpp 中需要手工添加代码的部分（黑体部分），其它文件代码全部为系统自动建立，无需改正，为节省篇幅此处省略，详见光盘。

```
// 平面曲线图 View.h : interface of the CMyView class
/////////////////////////////////////////////////////////////////////////////
class CMyView : public CView
{
```

2.5 课后练习

1．请写出二维图形几何变换矩阵的一般表达式，并说明其中各个子矩阵的变换功能。

2．已知四边形各顶点坐标分别为（0，0）、（20，0）、（20，15）、（0，

15）对此图形编程分别实现如下比例变换：

(1) 使长度方向延长一倍，高度方向缩小一倍；

(2) 整个图形放大两倍；

3．已知三角形各顶点坐标分别为（10，10）、（10，30）、（30，15）对此图形分别进行如下比例变换，写出变换矩阵，并画出变换后图形。

(1) 沿 x 正向平移 20，沿 y 正向平移 10，再绕原点旋转 90 度；

(2) 绕原点旋转 90 度，再沿 x 正向平移 20，沿 y 正向平移 10；