信号与系统

李建勋
Email: lijx@sjtu.edu.cn
上海交通大学电信学院

授课教材

《信号与系统》，胡光锐、徐昌庆
上海交通大学出版社，2013年版

参考书目

- 信号与系统，胡光锐，上海交通大学出版社，1995年版
- 信号与系统解题指南，胡光锐等，科学出版社，1999年版。
- 信号与系统（第二版），郑君里等，高等教育出版社，2000年出版。
- 信号与系统题解，刘泉等，华中科技大学出版社，2003年版。
- Signals and Systems, A.V. Oppenheim et al., Prentice-Hall Press, 1997.
- 《信号与系统》，刘树棠译，西安交通大学出版社

先修课	后续课程
《高等数学》	《通信原理》
《线性代数》	《数字信号处理》
《复变函数》	《自控原理》
《电路分析基础》	……

课程特点

•与《电路分析》比较，更抽象，更一般化；
•应用数学知识较多，用数学工具分析物理概念；
•常用数学工具：
微分、积分(定积分、无穷积分、变上限积分)
线性代数
微分方程、差分方程求解
傅里叶级数、傅里叶变换、拉氏变换、z 变换

学习方法

•注重物理概念与数学分析之间对照，不要盲目计算；
•注意分析结果的物理解释，各种参量变动时的物理意义及其产生的后果；
•同一问题可有多种解法，应寻找最简单、最合理的解法，比较各方法之优劣；
•在学完本课程相当长的时间内仍需要反复学习本课程的基本概念。

整体脉络

- 先连续再离散
- 先信号再系统
- 先典型再复杂
- 先时域再频域
- 先周期再非周期

- 三大变换: 傅氏变换、拉氏变换、Z变换

1.1 绪论

信号分析：研究信号的基本性能，如：信号的描述、性质等；

系统分析：给定系统，研究系统对于输入激励所产生的输出响应；

系统综合：按照给定的需求设计系统。

从系统数学模型的求解

1）时域方法：常系数微分方程或差分方程，用经典法或卷积积分或求和

2）变换域方法：

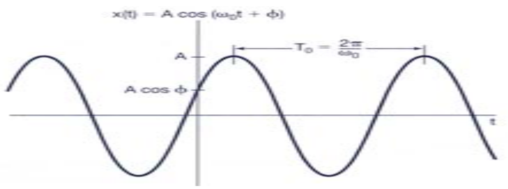
对于连续时间系统：傅里叶变换分析、拉普拉斯变换分析

对于离散时间系统：离散时间傅里叶变换、Z变换分析

信号(Signal)

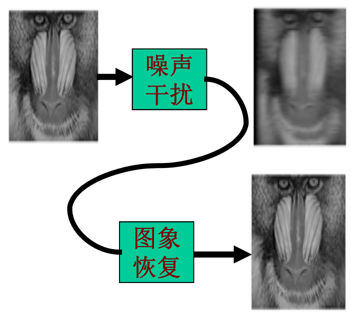
虽然在不同领域所表现出信号与系统的物理性质不同，但有两个基本点是共同的，即：

1. 信号总是作为一个或几个独立变量（自变量）的函数而出现，并携带着某些物理现象或物理性质的相关信息。



正弦波信号

2. 系统总会对给定的信号作出响应，产生另一个信号或另外的几个信号。



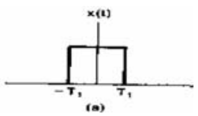
信号的特性可从两个方面来描述：

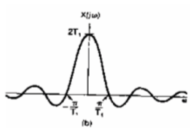
时域——自变量为：t

频域——自变量为：ω

1）时间特性——波形、幅度、相位、重复周期及信号变化的快慢等。

2）频率特性——振幅频谱和相位频谱。即从频域来研究信号的变化情况。





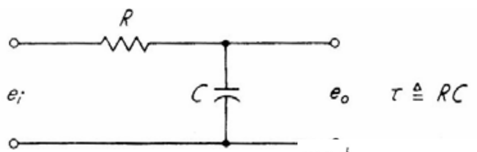
系统(System)

•系统（system）：能够对信号完成某种变换或运算的集合体称为系统。(系统可大可小）

•由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的，具有稳定功能的整体。如太阳系、通信系统、控制系统、经济系统、生态系统等。

•系统可以看作是变换器、处理器。

•电系统具有特殊的重要地位，某个电路的输入、输出是完成某种功能，如微分、积分、放大，也可称系统。



电路的微分方程为

$$RC\frac{de_o}{dt}+e_o=e_i$$

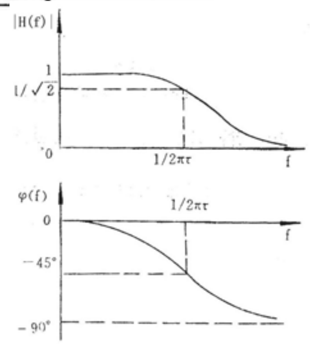
令 τ =RC，

$$H(s)=\frac{e_o}{e_i}(s)=\frac{1}{\tau s+1}$$

$$e_o=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\cdot e_i \quad t\geq 0$$

低通滤波器上截止频率

$$f=\frac{1}{2\pi RC}$$



一阶RC低通滤波器幅、相频特性

1.当$f<<\frac{1}{2\pi\tau}$时，$|H(f)|=1,\phi(f)-f$近似于一条通过原点的直线。

此时，RC低通滤波器是一个不失真传输系统。

2.当$f=\frac{1}{2\pi\tau}$时，$|H(f)|=\frac{1}{\sqrt{2}}$，表明：RC值决定着上截止频率。

低通滤波器

a. 一阶RC低通滤波器；

b. 一阶弹簧—阻尼系统；

c. 液压计(以液压手段形成的一阶低通滤波器）。

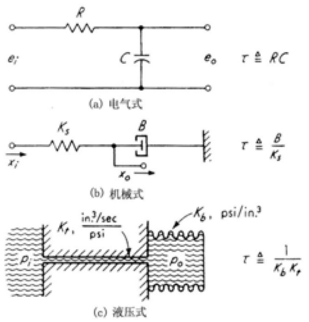
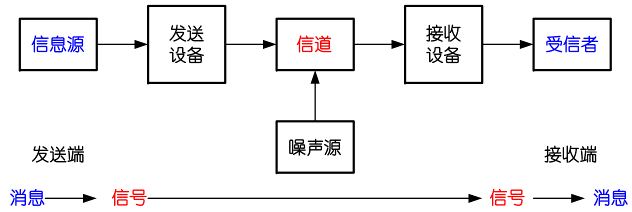


图4.40 不同类型的低通滤波器

通信系统

为传送消息而装设的全套技术设备（包括传输信道）。



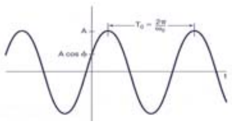
§1.2 信号的描述与分类

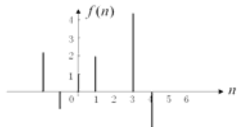
一. 信号的描述

- 信号一般用一个或多个自变量的函数来表示， 如电压信号一般是时间的函数，本课程中“信号”与“函数”这两个术语经常通用；
- 信号还可以用波形来表示；
- 对于离散信号，有时还可以用表格的形式来表示；
- 信号还可以从其他侧面来描述，比如用它的频谱、拉普拉斯变换、它的 z 变换等来表示，这些内容是信号分析的基本内容；
- 熟练掌握函数与波形间对应关系是学好信号与系统的基本技能。

信号的表示

- 函数法　　$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$
- 波形法
- 序列法（离散信号）　$x(n) = \{2.1 \quad -1 \quad \underset{\uparrow}{1} \quad 2 \quad 0 \quad 4.3 \quad 2\}$





注：信号可以是一个或多个自变量的函数；自变量不一定是时间，例如：空间变量、高度、深度等

二．信号的几种分类

- 连续信号vs离散信号（模拟信号、数字信号、采样信号）
- 一维vs高维信号
- 周期信号vs非周期信号
- 确定性信号vs随机性信号
- 能量有限信号与功率有限信号

二．信号的分类

1．确定性信号和随机信号

- 确定性信号

  对于指定的某一时刻 t，可确定一相应的函数值 $f(t)$。若干不连续点除外。

- 随机信号

  具有未可预知的不确定性。

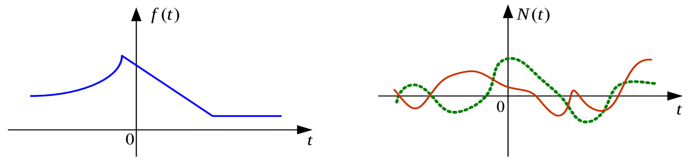
- 伪随机信号

  貌似随机而遵循严格规律产生的信号（伪随机码）。

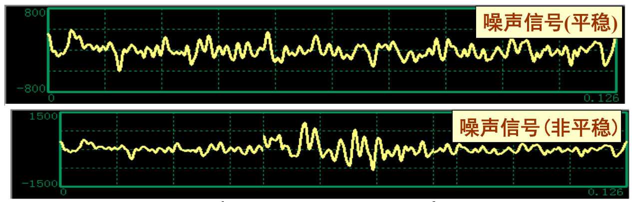
主要讨论确定性信号。

二．信号的分类

•确定性信号与随机信号



(a) 确定性信号　　(b) 随机信号



统计特性变异

二． 信号的分类

2．周期信号和非周期信号

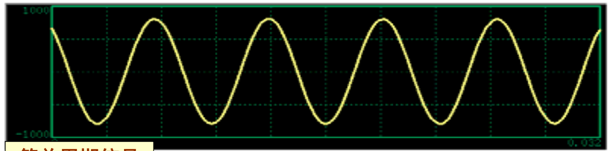
周期信号
- 正弦周期信号（简谐信号） 例如 $\sin\pi t$
- 复杂周期信号（除简谐信号外的周期信号）

$f(t)=f(t+kT),\quad k=\pm1,\pm2,\cdots$ 任意整数

非周期信号
- 准周期信号（频率之比为无理数）
- 瞬态（脉冲衰减函数）

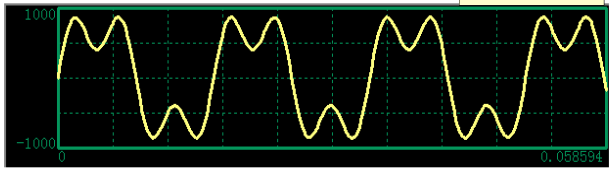
瞬态信号：除准周期信号外的一切可以用时间函数描述的非周期信号。

周期信号 **经过一定时间可以重复出现的信号**

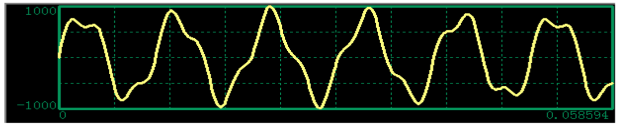


简单周期信号

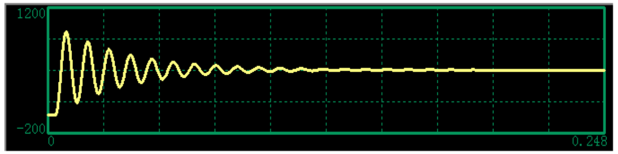
复杂周期信号



非周期信号：再不会重复出现的信号。



准周期信号：由多个周期信号合成，但各信号频率不成公倍数。如： $x(t)=\sin(t)+\sin(\sqrt{2}t)$



瞬态信号：持续时间有限的信号

如 $x(t)=e^{-\beta t}\cdot A\sin(2\pi ft)$

例1 判断下列信号是否为周期信号，若是，确定其周期。

(1) f1(t) = sin2t + cos3t (2) f2(t) = cos2t + sinπt

例1 判断下列信号是否为周期信号，若是，确定其周期。

(1) $f1(t) = \sin 2t + \cos 3t$ (2) $f2(t) = \cos 2t + \sin \pi t$

解：两个周期信号x(t)，y(t)的周期分别为T1和T2，若其周期之比T1/T2为有理数，则其和信号x(t)+y(t)仍然是周期信号，其周期为T1和T2的最小公倍数。

(1) sin2t是周期信号，其角频率和周期分别为$\omega 1= 2$ rad/s， $T1= 2\pi/\omega 1= \pi$ s
cos3t是周期信号，其角频率和周期分别为$\omega 2= 3$ rad/s， $T2= 2\pi/\omega 2= (2\pi/3)$ s

由于T1/T2= 3/2为有理数，故f1(t)为周期信号，其周期为T1和T2的最小公倍数2π。

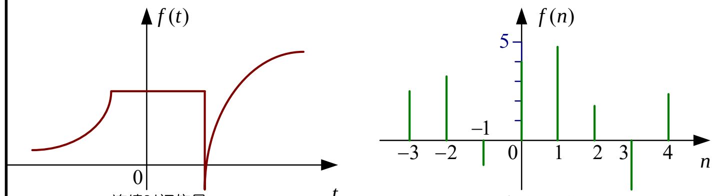
(2) cos2t 和$\sin\pi t$的周期分别为$T1= \pi$ s， T2= 2 s，由于T1/T2为无理数，故f2(t)为非周期信号。

二．信号的分类

3．连续时间信号和离散时间信号

除若干不连续点外，对于任意时间值都可以给出确定的信号值，此信号称为连续时间信号，简称为连续信号，x(t)

只在一些离散时刻有定义的信号称为离散时间信号，简称为离散信号x[n]



(a) 连续时间信号 (b) 离散时间信号

二．信号的分类

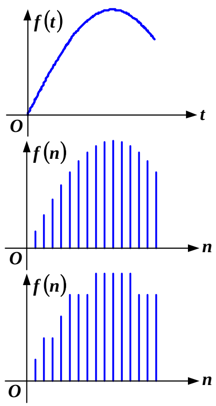
模拟信号：时间和幅值均为连续的信号

抽样

抽样信号：时间离散的，幅值连续的信号

量化

数字信号：时间和幅值均为离散的信号



主要讨论确定性信号。

先连续，后离散；先周期，后非周期。

连续时间信号与离散时间信号

时间	幅值	
	连续	离散
连续	模拟信号	量化信号
离散	被采样信号	数字信号

二．信号的分类

4．连续时间能量信号和功率信号

信号的能量定义：

$$E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\left|f(t)\right|^{2}dt$$

信号平均功率定义：

$$P=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\left|f(t)\right|^{2}dt$$

如果信号的能量有限，则称为能量信号

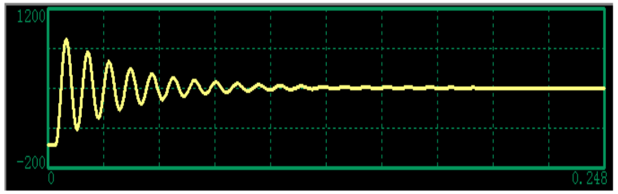
如果信号的平均功率有限，则称为功率信号

有限时间范围有定义，取值又是有限值的信号是能量信号；

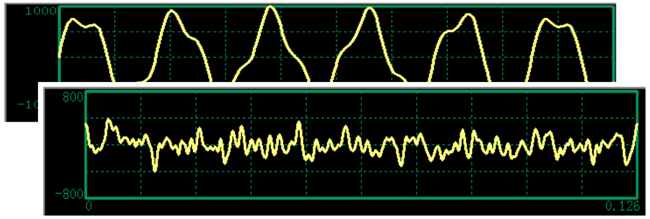
一般的非周期信号是能量信号；

一般的周期信号是功率信号。

一般持续时间有限的瞬态信号是能量信号。



一般持续时间无限的信号都属于功率信号：



离散时间能量信号和功率信号

信号的能量定义：

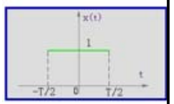
$$E=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{+N}\left|x[n]\right|^{2}$$

信号平均功率定义：

$$P=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{+N}\left|x[n]\right|^{2}$$

$$x(t)=\begin{cases}1 & |t|>\frac{T}{2}\\ 0 & |t|>\frac{T}{2}\end{cases}$$

x(t)的能量W=T



(1) E<∞, P=0　有限长信号，例如窗函数

(2) E=∞,P<∞　**x[n]=4，E= ∞，P=16**

(3) E=∞,P=∞　**x(t)=t**

二．信号的分类

5．一维信号和多维信号

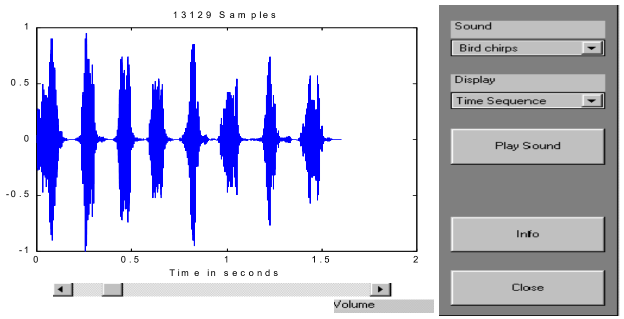
一维信号：

只由一个自变量描述的信号，如语音信号。

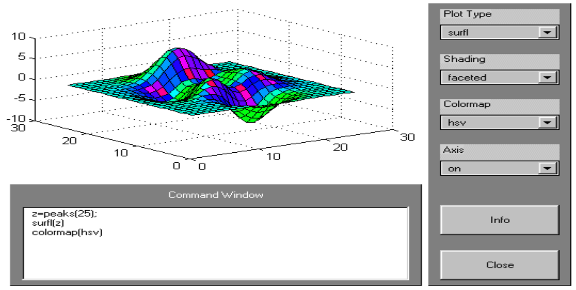
多维信号：

由多个自变量描述的信号，如图像信号。

一维信号



n维信号



混沌信号

- 1963年，E.N. Lorentz，“*Deterministic Nonperiodic Flow*”，发表在*Journal of the Atmospheric Sciences*

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta z$$

混沌信号——貌似随机却又严格遵循确定规律

§1.3 信号的运算

•信号的自变量的变换

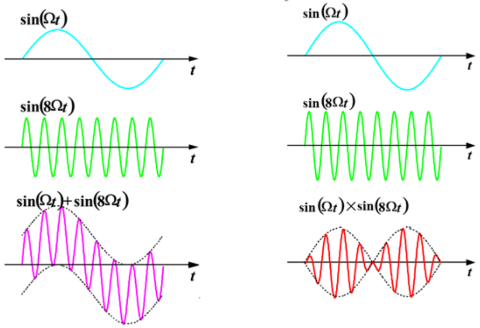
平移　反褶　尺度

1.4 信号的运算与变换

一、连续时间信号的基本运算

(1) 加法 $f_1(t)+f_2(t)$
(2) 乘法 $f_1(t)\cdot f_2(t)$

同一瞬时两信号之值相加或相乘



信号的平移

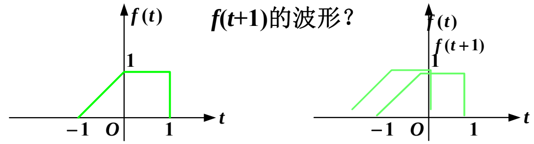
$f(t)\to f(t-\tau)$

将信号$f(t)$沿t轴平移τ即得时移信号$f(t-\tau)$，τ为常数

$\tau>0$，右移(滞后)

$\tau<0$，左移(超前)

例：



自变量相同，函数值相同，求新坐标

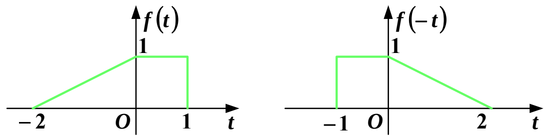
$\begin{cases} t=0 \\ f(t)=1 \end{cases}$　$\begin{cases} t+1=0 \\ f(t+1)=1 \end{cases}$　$\begin{cases} t=-1 \\ f(t+1)=1 \end{cases}$

信号的反褶

$f(t)\to f(-t)$

以纵轴为轴折叠，把信号的过去与未来对调。

例：



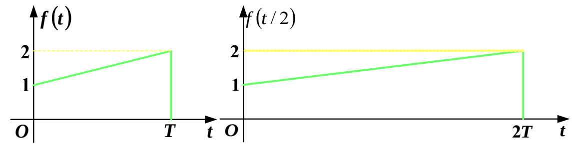
没有可实现此功能的实际器件。数字信号处理中可以实现此概念，例如堆栈中的“后进先出”。

信号的尺度变换

$f(t)\to f(at)$ 波形的压缩与扩展，标度变换

例：已知 $f(t)$，画出 $f(2t)$和 $f\left(\frac{t}{2}\right)$ 的波形。

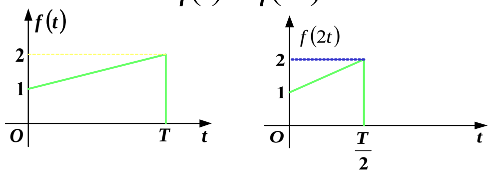
$f(t)\to f(t/2)$



自变量相同，函数值相同				求新坐标	
t	$f(t)$	$t/2$	$f(t/2)$	t	$f(t/2)$
0	1	0	1	0	1
T	2	T	2	$2T$	2

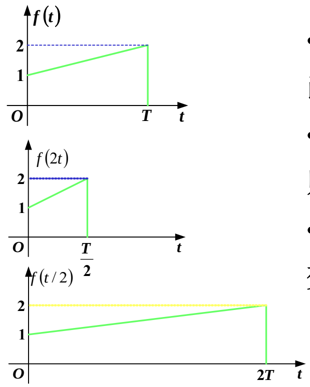
时间尺度压缩：$t\to t/2$,波形扩展

$f(t)\to f(2t)$



自变量相同，函数值相同				求新坐标	
t	$f(t)$	$2t$	$f(2t)$	t	$f(2t)$
0	1	0	1	0	1
T	2	T	2	$T/2$	2

$t\to 2t$，时间尺度增加，波形压缩。



•三个波形相似，都是t 的一次函数。

•但由于自变量t 的系数不同，则达到同样函数值2的时间不同。

•时间变量乘以一个系数等于改变观察时间的标度。

$$f(t)\to f(at)\begin{cases} a>1 & \text{压缩,保持信号的时间缩短} \\ 0<a<1 & \text{扩展,保持信号的时间增长} \end{cases}$$

一般情况

$$f(t)\to f(at\pm b)=f\left[a(t\pm b/a)\right]\quad (a>0)$$

先平移： +，左移 b 单位；−，右移 b 单位

后展缩： $a>1$，压缩 a 倍；$a<1$，扩展 $1/a$ 倍

加上倒置： $f(-at\pm b)=f\left[-a(t\mp b/a)\right]$

注意！ 一切变换都是相对t 而言

一般情况

$$f(t)\to f(at\pm b)=f\left[a(t\pm b/a)\right]\ (\text{设}a>0)$$

先展缩：$a>1$，压缩a倍； $a<1$，扩展$1/a$倍

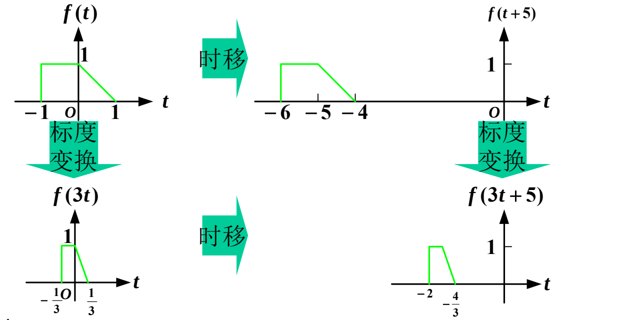
后平移：+，左移b/a单位；−，右移b/a单位

加上倒置：$f(-at\pm b)=f\left[-a(t\mp b/a)\right]$

注意！ 一切变换都是相对t 而言

例题 已知**f(t)**，求**f(3t+5)**。

解：



验证：计算特殊点

宗量t	宗量3t+5	函数值
t=-1	3t+5=-1，t=-2	1
t=0	3t+5=0，t=-5/3	1
t=1	3t+5=1，t=-4/3	0

例： $f(t) \to f(-3t+2)$

解：

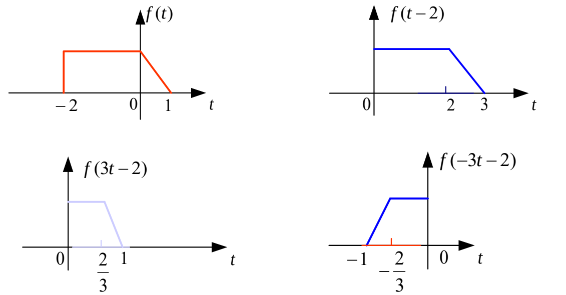
$$f(t) \xrightarrow{\text{时间超前2}} f(t+2) \xrightarrow{\text{时间压缩3倍}} f(3t+2) \xrightarrow{\text{时间反折}} f(-3t+2)$$

$$f(t) \xrightarrow{\text{时间反折}} f(-t) \xrightarrow{\text{时间压缩3倍}} f(-3t) \xrightarrow{\text{时间滞后2/3}} f[-3(t-\frac{2}{3})] = f(-3t+2)$$

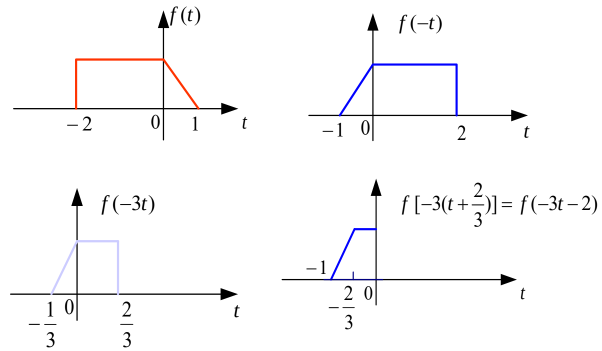
$$f(t) \xrightarrow{\text{时间压缩3倍}} f(3t) \xrightarrow{\text{时间超前2 /3}} f[3(t+\frac{2}{3})] = f(3t+2) \xrightarrow{\text{时间反折}} f(-3t+2)$$

例： 已知 **f (t)**，求 **f (-3t-2)**。

解： $f(t) \xrightarrow{\text{时间滞后2}} f(t-2) \xrightarrow{\text{时间压缩3倍}} f(3t-2) \xrightarrow{\text{时间反折}} f(-3t-2)$



或 $f(t) \xrightarrow{\text{时间反折}} f(-t) \xrightarrow{\text{时间压缩3倍}} f(-3t) \xrightarrow{\text{时间超前2/3}} f(-3t-2)$



例：判断下列关于信号波形变换的说法是否正确

(1) $f(-t+1)$ 是将 $f(-t)$ 左移一个时间单位而得 。 错

(2) $f(-t+1)$ 是将 $f(-t)$ 右移一个时间单位而得 。 对

(3) $f(2t+1)$ 是将 $f(t+1)$ 波形压缩到0.5而得 。 对

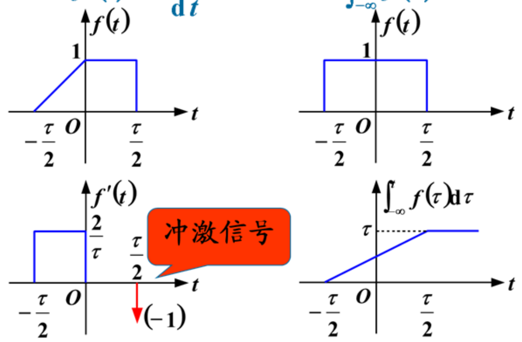
(4) $f(2t+1)$ 是将 $f(t+0.5)$波形压缩到0.5而得 。 错

(5) $f(2t+1)$ 是将 $f(2t)$ 左移一个时间单位而得 。 错

(6) $f(2t+1)$ 是将 $f(2t)$ 左移0.5个时间单位而得 。 对

(6) 微分和积分

微分：$f'(t)=\dfrac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}$， 积分：$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\mathrm{d}\tau$



§1.4 几种典型确定性信号

1. 指数信号
2. 正弦信号
3. 复指数信号(表达具有普遍意义)
4. 抽样信号(Sampling Signal)
5. 钟形脉冲函数(高斯函数)

1.3、指数信号与正弦信号

1.3.1 连续时间复指数信号与正弦信号

一、连续时间复指数信号 $x(t)=ce^{at}$

其中：c 和 a 一般为复数，即 $a=\sigma+j\omega_0$.

1、实指数信号—— c和a均为实数，即 $\omega=0, a=\sigma$，这时x(t)称为实指数信号.

1）、若a为正实数（即 $\sigma>0$ ），则x(t)随t指数增长.

2）、若a为负实数（即 $\sigma<0$ ），则x(t)随t的指数增加而指数衰减.

3）、若a=0 （即 $\sigma=0$ ），则x(t)为一常数.

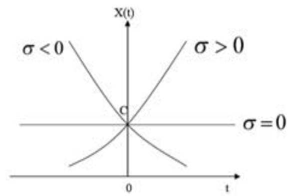


图 14

重要特性：其对时间的微分和积分仍然是指数形式。

2、周期复指数信号——当c=1，$a=j\omega_0$，为纯虚数时，即 $x(t)=e^{j\omega_0 t}$，这时 x(t) 为周期复指数信号。

证明：由周期信号定义可知，周期信号必须为：x(t)=x(t+T)，即

$$e^{j\omega_0 t}=e^{j\omega_0(t+T)}=e^{j\omega_0 t}.e^{j\omega_0 T}$$

可见，要求使 $e^{j\omega_0 T}=1$，x(t)就是周期信号。

1）若 $\omega_0=0$，x(t)=1，这时对任何T值都是周期的——但无意义；

2）若 $\omega_0\neq 0$，则必须使$\boxed{\omega_0 T=2n\pi}$，因为（据欧拉公式）有：

$$e^{j\omega_0 T}=\cos\omega_0 T+j\sin\omega_0 T=\cos 2n\pi+j\sin 2n\pi=1$$

使上式成立的最小正T值，称基波周期 T_0：$\boxed{T_0=\frac{2\pi}{|\omega_0|}}$，$\omega_0$——为基波频率。

可见，$e^{j\omega_0 t}$ 和 $e^{-j\omega_0 t}$ 都具有同一基波周期的周期信号。

同样，正弦信号也能用复指数信号来表示

$$\sin\omega_0 t=\frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t}-e^{-j\omega_0 t})\quad,\quad\cos\omega_0 t=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t}+e^{-j\omega_0 t})$$

因此：

$$A\cos(\omega_0 t+\phi)=\frac{A}{2}e^{j\phi}e^{j\omega_0 t}+\frac{A}{2}e^{-j\phi}e^{-j\omega_0 t}=A\,\mathrm{Re}\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\}$$

$$A\sin(\omega_0 t+\phi)=A\,\mathrm{Im}\{e^{j(\omega_0 t+\phi)}\}$$

[因为 $\boxed{Ae^{j(\omega_0 t+\phi)}=\underbrace{A\cos(\omega_0 t+\phi)}_{实部}+j\underbrace{A\sin(\omega_0 t+\phi)}_{虚部}}$]

以后我们会看到，**周期复指数信号是构成复杂信号的基本单元**。因此在信号或系统的分析中是十分有用的。

3、**成谐波关系的复指数信号**——即周期复指数信号的集合。该集合内的全部信号都是周期的，且有一个公共周期 T_0。

因为复指数信号 $e^{j\omega t}$要成为具有周期为T_0的周期信号的必要条件是：$e^{j\omega T_0}=1$

这意味着 $\boxed{\omega T_0=2\pi k\quad,\quad k=0,\pm1,\pm2,\cdots}$　　(1.34)

由此，若定义 $\omega_0=2\pi/T_0$，则有 $\omega=2\pi k/T_0=\omega_0 k$

从而得出：为满足(1.34)式，ω 必须是 ω_0 的整数倍。这就是说：**一个成谐波关系的复指数信号的集合**就是一组其基波频率是某一正频率ω_0的整数倍的复指数信号，即

$$\varphi_k(t)=e^{jk\omega_0 t}\qquad k=0,\pm1,\pm2,......$$

1）当 $k=0$，$\varphi_k(t)$ 是一个常数；

第k次谐波

2）当 $k\neq 0$，$\varphi_k(t)$ 是周期的，其基波频率为$|k|\omega_0$，基波周期为

$$T_k=\frac{2\pi}{|k|\omega_0}=\frac{2\pi}{|k|2\pi/T_0}=\frac{T_0}{|k|}$$

4、一般复指数信号——即当c、a均为复数时。

$$x(t)=ce^{at}$$

当C用极坐标表示，a用直角坐标表示时，有

$$c=|c|e^{j\theta}$$

$$a=r+j\omega_0$$

$$ce^{at}=|c|e^{j\theta}e^{(r+j\omega_0)t}=|c|e^{rt}e^{j(w_0 t+\theta)}$$

利用欧拉公式可进一步展开为

$$ce^{at}=|c|e^{rt}\cos(\omega_0 t+\theta)+j|c|e^{rt}\sin(\omega_0 t+\theta)$$

由此可见，若 r=0则复指数信号其实部和虚部都是正弦型的。

若 r>0,则其实部和虚部是一个振幅为指数增长的（见图 (a)）。

若 r<0,则为振幅成指数衰减的正弦信号（见图 (b)）。

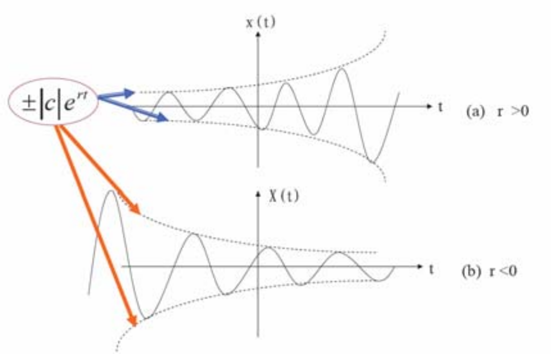
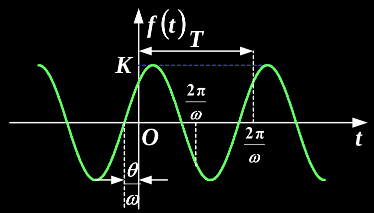


图 15

正弦信号

$f(t) = K\sin(\omega t + \theta)$



振幅：K

周期：$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$

频率：f

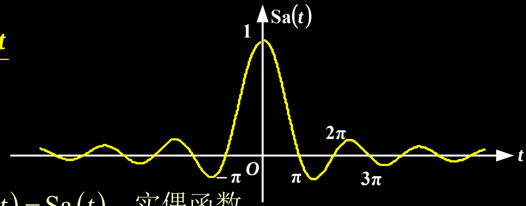
角频率：$\omega = 2\pi f$

初相：θ

重要特性： 其对时间的微分和积分仍为同频率的正弦信号

抽样信号(Sampling Signal)

$\mathrm{Sa}(t) = \dfrac{\sin t}{t}$



性质

① $\mathrm{Sa}(-t) = \mathrm{Sa}(t)$，实偶函数

② $t = 0$,$\mathrm{Sa}(t) = 1$，即$\lim\limits_{t\to 0}\mathrm{Sa}(t) = 1$,最大值

③ $\mathrm{Sa}(t) = 0,\ t = \pm n\pi,\quad n = 1,2,3\cdots$

④ $\int_0^{\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \dfrac{\pi}{2},\quad \int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \pi$

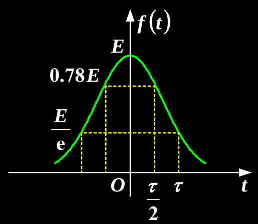
⑤ $\lim\limits_{t\to\pm\infty}\mathrm{Sa}(t) = 0$,衰减函数

⑥ $\mathrm{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$

$\int_0^{\infty} \mathrm{sinc}(t)\,\mathrm{d}t = ?$

钟形脉冲函数(高斯函数)

$f(t) = E\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}$



在随机信号分析中占有重要地位。

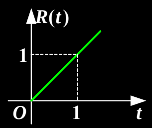
§1.5 奇异信号

函数本身有有限个不连续点，或其导数或积分有不连续点的一类函数。

一．单位斜变信号(斜坡)

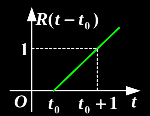
1．定义

$$R(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ t & t\ge 0\end{cases}$$



2．有延迟的单位斜变信号

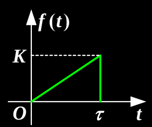
$$R(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ t-t_0 & t\ge t_0\end{cases}$$



由宗量$t-t_0=0$ 可知起始点为 t_0

3．三角形脉冲

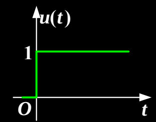
$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{K}{\tau}R(t) & 0\le t\le\tau\\ 0 & 其它\end{cases}$$



二．单位阶跃信号

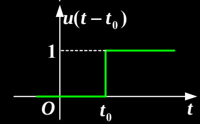
1．定义

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t>0\end{cases}\quad 0点无定义或\frac{1}{2}$$

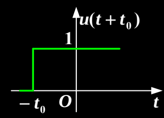


2．有延迟的单位阶跃信号

$$u(t-t_0)=\begin{cases}0 & t<t_0\\ 1 & t>t_0\end{cases},\quad t_0>0$$



$$u(t+t_0)=\begin{cases}0 & t<-t_0\\ 1 & t>-t_0\end{cases},\quad t_0>0$$



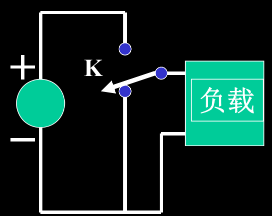
由变量 $(t\pm t_0)=0$ 可知 $t=\mp t_0$，即时间为$\mp t_0$时，函数有断点，跳变点

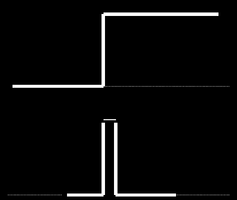
宗量>0 函数值为1 变量<0 函数值为0

单位阶跃信号的物理背景

（1）突然接入的直流电压

（2）突然接通又马上断开电源

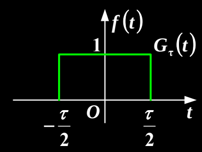




3．用单位阶跃信号描述其他信号

门函数：也称窗函数

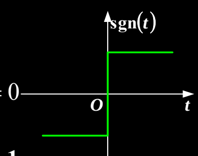
$$f(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$$



其他函数只要用门函数处理(乘以门函数)，就只剩下门内的部分。

符号函数：(Signum)

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1 & t>0\\ -1 & t<0\end{cases}\quad \operatorname{sgn}(0)=0$$



$$\operatorname{sgn}(t)=-u(-t)+u(t)=2u(t)-1\quad u(t)=\frac{1}{2}[\operatorname{sgn}(t)+1]$$

用阶跃函数表示信号的单边特性和延时特性

$x(t)=ke^{-\alpha t}u(t)$ (单边特性)

$x(t)=ke^{-\alpha t}u(t-t_0)$ (截取信号)

$x(t)=ke^{-\alpha(t-t_0)}u(t-t_0)$ (整体时移)

三．单位冲激（重点和难点）

某些物理现象需要一个时间极短，但取值极大的函数模型来描述。

---力学中瞬间作用的冲击力；

电学中的雷击电闪；

数字通信中的抽样脉冲；

概念引出 演示

定义1

定义2

冲激函数的性质

定义1：狄拉克(Dirac)函数

$$\begin{cases}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=1\\ \delta(t)=0 \quad (t\neq 0)\end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\,\mathrm{d}t$$

- 函数值只在$t=0$时不为零；其余处处为零；
- *在包含 $\delta(t)$ 出现的位置的任意区间范围内面积为1*

$$\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

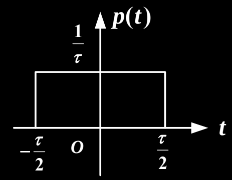
- $t=0$ 时，$\delta(t)\to\infty$，为无界函数。

定义2

$$p(t)=\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

演示

$\tau\to 0$



面积1；脉宽↓；　脉冲高度↑；

则窄脉冲集中于 $t=0$ 处。

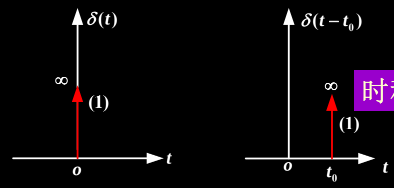
三个特点：
- ★面积为1
- ★宽度为0
- ★幅度$\begin{cases}\text{无穷} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases}$

描述

$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}p(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]$$

$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$

$u(t)$的导数定义式



时移的冲激函数

若面积为**k**，则强度为**k**。

三角形脉冲、双边指数脉冲、钟形脉冲、抽样函数取$\tau\to 0$极限，都可以认为是冲激函数。

冲激函数的性质

为了信号分析的需要，人们构造了$\delta(t)$函数，它属于广义函数。就时间t而言，$\delta(t)$可以当作时域连续信号处理，因为它符合时域连续信号运算的某些规则。但由于$\delta(t)$是一个广义函数，它有一些特殊的性质。

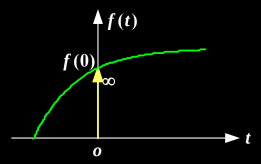
1. 抽样性
2. 奇偶性
3. 冲激偶
4. 标度变换

1. 抽样性(筛选性)

如果$f(t)$在$t=0$处连续，且处处有界，则有

$$\delta(t)f(t)=f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(t)\big|_{t=0}=f(0)$$



证明

对于移位情况：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=f(t)\big|_{t=t_0}=f(t_0)$$

$$x(t-t_0)\delta(t+t_1)=x(-t_0-t_1)\cdot\delta(t+t_1)$$

冲激函数抽样性质证明

分 $t=0$ 和 $t\neq 0$ 讨论

$t\neq 0$ $\delta(t)=0$,$f(t)\delta(t)=0$ (注意：仅当$t\neq 0$时)

积分结果为0

$t=0$ $\delta(t)\neq 0$，$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ (注意：仅当$t=0$时)

积分为 $\int_{0_-}^{0_+}f(0)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)\int_{0_-}^{0_+}\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)$

即 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=f(0)$

如 (1) $x(t-3)\cdot\delta(t+2)=x(-5)\cdot\delta(t+2)$

(2) $\int_{-5}^{5}(t^3+2t+4)\delta(t)dt=4$

2. 奇偶性

证明 $\delta(t)=\delta(-t)$

•由定义2，矩形脉冲本身是偶函数，故极限也是偶函数。

•由抽样性证明奇偶性。

证明奇偶性时，主要考察此函数的作用，即和其他函数共同作用的结果。

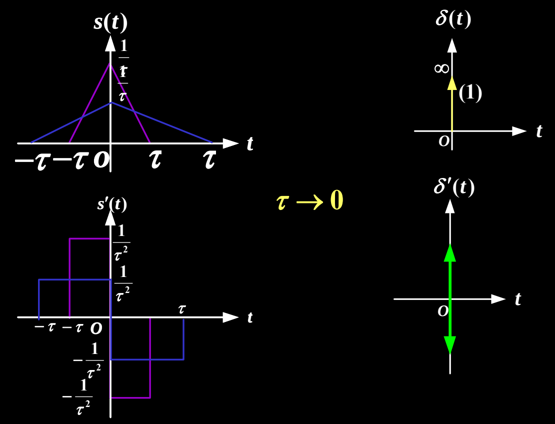
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)f(t)\,\mathrm{d}t=f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-t)f(t)\,\mathrm{d}t\overset{t=-\tau}{=}\int_{+\infty}^{-\infty}\delta(\tau)f(-\tau)\,\mathrm{d}(-\tau)$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)f(-\tau)\,\mathrm{d}\tau=f(0)$$

又因为$\delta(t)$只在$t=0$有值，故$\delta(t)=\delta(-t)$

3. 冲激偶



冲激偶函数 是由正反两个冲激信号组成的。这两个信号同时存在，但永远不能被抵消。

冲激偶的性质

① $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)f(t)\,\mathrm{d}t=-f'(0)\quad=f(t)\delta(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)\delta(t)\mathrm{d}t$

对$\delta(t)$的k阶导数：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta^{(k)}(t)f(t)\,\mathrm{d}t=(-1)^k f^{(k)}(0)$

时移，则：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t-t_0)f(t)\,\mathrm{d}t=-f'(t_0)$

② $\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\,\mathrm{d}t=0$， $\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\,\mathrm{d}\tau=\delta(t)$

③ $\delta'(-t)=-\delta'(t)$，$\delta'(t_0-t)=-\delta'(t-t_0)$

所以$\delta'(t)$是奇函数

④ $f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$，

（与 $f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$不同）

4. 对$\delta(t)$的标度变换

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

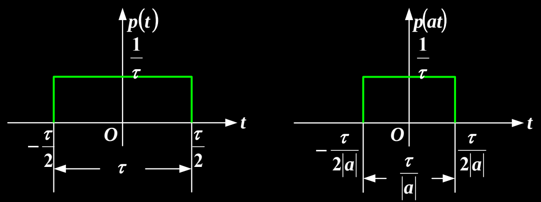
证明 **例题**

$$2\delta(3t-9)=2\delta[3(t-3)]=\frac{2}{3}\delta(t-3)$$

注意：与函数的变换有区别

冲激信号尺度变换的证明

从$\delta(t)$定义看：



$p(t)$面积为1，$\delta(t)$强度为1

$p(at)$面积为$\frac{1}{|a|}$，$\delta(at)$强度为$\frac{1}{|a|}$

$\tau \to 0$时，$p(t) \to \delta(t)$，$p(at) \to \frac{1}{|a|}\delta(t)$

分析：用两边与$f(t)$的乘积的积分值相等证明，分$a>0$、$a<0$两种情况

(1) $a>0$, 令$at=\tau$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(at)f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)f\left(\frac{\tau}{a}\right)\mathrm{d}\left(\frac{\tau}{a}\right)=\frac{1}{a}f(0)$$

而$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{a}f(0)$

∴两边相等

(2) $a<0$, 令$-|a|t=\tau$ $\begin{cases} t:-\infty \to +\infty \\ \tau:+\infty \to -\infty \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(-|a|t)f(t)\mathrm{d}t=\int_{+\infty}^{-\infty}\delta(\tau)f\left(-\frac{1}{|a|}\tau\right)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{|a|}\tau\right)$$

$$=\frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(\tau)f\left(-\frac{1}{|a|}\tau\right)\mathrm{d}\tau=\frac{1}{|a|}f(0)$$

而$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|a|}\delta(t)f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{|a|}f(0)$

3) 积分特性

$$\int_{-\infty}^{t}k\delta(t)dt=\begin{cases}k, & t>0\\ 0, & t<0\end{cases}=ku(t)$$

冲激函数的积分是阶跃函数。

4) 微分特性

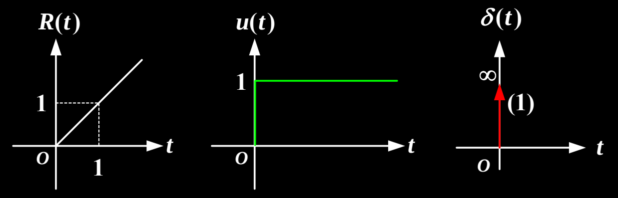
$$\frac{du(t)}{dt}=\delta(t)$$

5) 卷积特性

$$x(t)*\delta(t)=x(t)$$

$$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$$

四.总结： $R(t)$，$u(t)$， $\delta(t)$ 之间的关系



$R(t)$

求 ↓ ↑ 积　　$(-\infty<t<\infty)$

$u(t)$

导 ↓ ↑ 分

$\delta(t)$

冲激函数的性质总结

（1）抽样性

$$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)\,\mathrm{d}t=f(0)$$

（2）奇偶性

$$\delta(-t)=\delta(t)$$

（3）比例性

$$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$$

（4）微积分性质

$$\delta(t)=\frac{\mathrm{d}\,u(t)}{\mathrm{d}\,t}\qquad \int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\,\mathrm{d}\tau=u(t)$$

例1-4-1 $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(5t)f(t)\mathrm{d}t=?$　$\frac{1}{5}f(0)$

例1-4-2 已知信号$f(5-2t)$的波形，请画出$f(t)$的波形。

$$f(5-2t)=2\delta(t-3)$$

$f(5-2t)\to f(5-t)$　展宽一倍

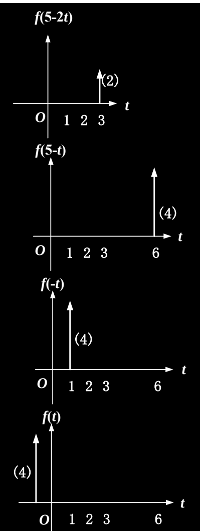
$$f(5-t)=2\delta\left(\frac{t}{2}-3\right)=4\delta(t-6)$$

$f(5-t)\to f(-t)$　左移5

$$f(-t)=f[5-(t+5)]=4\delta(t-1)$$

$f(-t)\to f(t)$　倒置

$$f(t)=4\delta(t+1)$$



平移—>缩放—>倒置

- 先平移：$f(5-2t)=f[-2(t-\frac{5}{2})]=2\delta(t-3)$

  $f(-2t)=2\delta(t-\frac{1}{2})$
- 缩放　$f(-2t)\to f(-t)$

  $f(-t)=2\delta(\frac{t}{2}-\frac{1}{2})=4\delta(t-1)$
- 倒置　$f(-t)\to f(t)$

$$f(t)=4\delta(-t-1)=4\delta(t+1)$$

$$f(5+2t)=2\delta(-t-3)=2\delta(t+3)$$

$$f(5+t)=2\delta(\frac{t}{2}+3)=4\delta(t+6)$$

$$f(t)=4\delta(t+1)$$

三．单位冲激信号

例：利用冲激函数的性质求下列积分

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{1}{4})\sin(\pi t)dt$ (2) $\int_{0_-}^{3}e^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)dt$

解：

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-\frac{1}{4})\sin(\pi t)dt=\sin(\pi t)\Big|_{t=\frac{1}{4}}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{0_-}^{3}e^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)dt=\int_{0_-}^{3}e^{-2t}[\delta(t)+\delta(t-2)]dt$$

$$=e^{-2t}\Big|_{t=0}+e^{-2t}\Big|_{t=2}=1+e^{-4}$$

三．单位冲激信号

例：利用冲激函数的性质求下列积分

(1) $\int_{0_+}^{3}e^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)dt$ (2) $\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t)\frac{\sin(\pi t)}{t}dt$

解：

$$\int_{0_+}^{3}e^{-2t}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-2k)dt=\int_{0_+}^{3}e^{-2t}\delta(t-2)dt=e^{-2t}\Big|_{t=2}=e^{-4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}2\delta(t)\frac{\sin(\pi t)}{t}dt=\lim_{t\to 0}2\frac{\sin(\pi t)}{t}=2\pi$$

三．单位冲激信号

例：化简函数 $\frac{d^2}{dt^2}[\sin(t+\frac{\pi}{4})u(t)]$

解：

$$\frac{d^2}{dt^2}[\sin(t+\frac{\pi}{4})u(t)]=\frac{d}{dt}[\cos(t+\frac{\pi}{4})u(t)+\sin(t+\frac{\pi}{4})\delta(t)]$$

$$=\frac{d}{dt}[\cos(t+\frac{\pi}{4})u(t)+\sin(\frac{\pi}{4})\delta(t)]$$

$$=\sin(\frac{\pi}{4})\delta'(t)+\cos(t+\frac{\pi}{4})\delta(t)-\sin(t+\frac{\pi}{4})u(t)$$

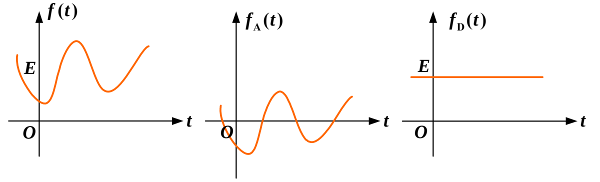
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\delta'(t)+\frac{\sqrt{2}}{2}\delta(t)-\sin(t+\frac{\pi}{4})u(t)$$

§1.6 信号的分解

为了便于研究信号的传输和处理问题，往往将信号分解为一些简单(基本)的信号之和，分解角度不同，可以分解为不同分量:

直流分量与交流分量
偶分量与奇分量
脉冲分量
实部分量与虚部分量
正交函数分量

一． 直流分量与交流分量



$f_{\rm D}(t)$ 信号的直流分量，即平均值

$$f_{\rm D}(t)=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$P=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}[f_{\rm D}(t)+f_{\rm A}(t)]^2\,\mathrm{d}t=f_{\rm D}^2(t)+\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f_{\rm A}^2(t)\,\mathrm{d}t$$

信号的平均功率＝信号的直流功率＋交流功率

直流和交流分量不相关，其交叉项为零

二． 偶分量与奇分量

对任何实信号而言：

$$f(t)=f_{\rm e}(t)+f_{\rm o}(t)\quad\begin{cases} f_{\rm e}(t) & \text{偶分量}\\ f_{\rm o}(t) & \text{奇分量}\end{cases}$$

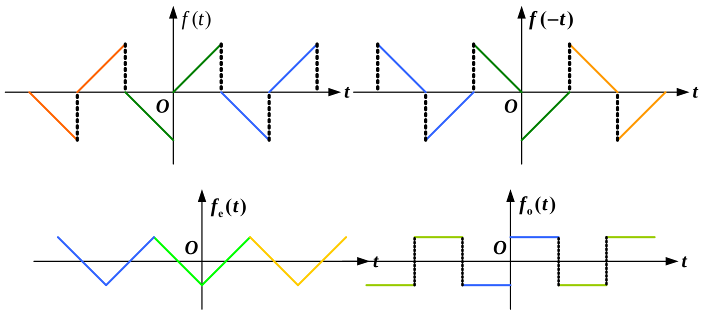
$$f_{\rm e}(t)=f_{\rm e}(-t)\quad \text{e: even}\ \Rightarrow\ f_{\rm e}(t)=\frac{1}{2}[f(t)+f(-t)]$$

$$f_{\rm o}(t)=-f_{\rm o}(-t)\quad \text{o: odd}\ \Rightarrow\ f_{\rm o}(t)=\frac{1}{2}[f(t)-f(-t)]$$

信号的平均功率＝偶分量功率＋奇分量功率

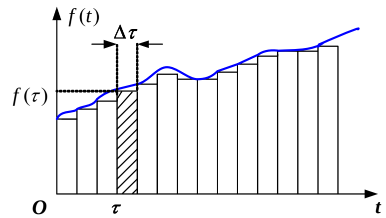
二． 偶分量与奇分量

例:求 $f(t)$的奇分量和偶分量



三． 脉冲分量

矩形窄脉冲序列



当 $t=\tau$, 脉宽：$\Delta\tau$ 存在区间：$u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)$

脉高：$f(\tau)$

此窄脉冲可表示为 $f(\tau)[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)]$

三．脉冲分量

从 $\tau=-\infty$ 到 ∞ $f(t)$ 可以表示成许多窄脉冲的叠加

$$f(t)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)]$$

$$=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)]}{\Delta\tau}\cdot\Delta\tau$$

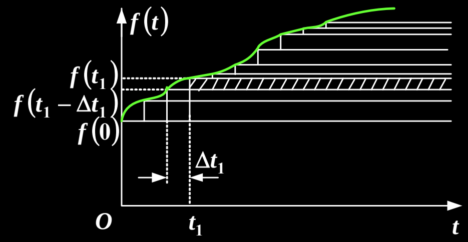
令 $\Delta\tau\to 0$

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{[u(t-\tau)-u(t-\tau-\Delta\tau)]}{\Delta\tau}=\frac{\mathrm{d}\,u(t-\tau)}{\mathrm{d}t}=\delta(t-\tau)$$

$$\Delta\tau\to \mathrm{d}\tau,\quad \sum_{\tau=-\infty}^{\infty}\ \to\int_{\tau=-\infty}^{\infty}$$

出现在不同时刻的，不同强度的冲激函数的和。

所以 $f(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau$



$$f(t)=f(0)u(t)+\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\,f(t_1)}{\mathrm{d}t_1}u(t-t_1)\,\mathrm{d}t_1$$

将信号分解为冲激信号叠加的方法应用很广，后面的卷积积分中将用到，可利用卷积积分求系统的零状态响应。

四．实部分量与虚部分量

瞬时值为复数的信号可分解为实虚部两部分之和。

$$f(t)=f_{\mathrm{r}}(t)+j\,f_{\mathrm{i}}(t)$$

共轭复函数

$$f^*(t)=f_{\mathrm{r}}(t)-jf_{\mathrm{i}}(t)$$

即

$$f_{\mathrm{r}}(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)+f^*(t)\right]\qquad jf_{\mathrm{i}}(t)=\frac{1}{2}\left[f(t)-f^*(t)\right]$$

实际中产生的信号为实信号，可以借助于复信号来研究实信号。

五．正交函数分量

完备正交函数集 $\{\varphi_i(t), i=1,2,\cdots,N\}$ 函数的正交展开

正交函数集 $\{\varphi_i(t), i=1,2,\cdots,N\}$ 外不再存在能量为非零，即 $\int_a^b |f(t)|^2 dt\neq 0$ 的函数 $f(t)$ 与函数集正交，则正交函数集 $\{\varphi_i(t), i=1,2,\cdots,N\}$ 称为完备的正交函数集。

三角函数集和复指数函数集是区间 $(t_0,t_0+T)=(t_0,t_0+\frac{2\pi}{\Omega})$ 上两个完备的正交函数集。

$$\{1,\cos(\boldsymbol{k\Omega t}),\sin(\boldsymbol{k\Omega t}),\boldsymbol{k}=1,2,\cdots\}$$

$$\{e^{jk\Omega t}, k=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$$

§1.7 系统模型及其分类

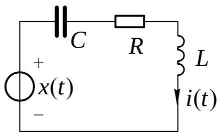
一．系统模型

系统：具有特定功能的总体，可以看作信号的变换 器、处理器。

系统模型：系统物理特性的数学抽象，一般也称为数学模型。

电路的微分方程为

$$LC\frac{d^2i(t)}{dt^2}+RC\frac{di(t)}{dt}+i(t)=C\frac{dx(t)}{dt}$$



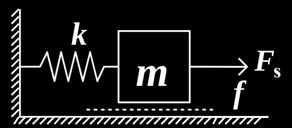
该微分方程就称为该电路的数学模型。

注意：除了用数学表达式表述系统模型外，还可以用 框图、信号流图等其他形式描述系统的数学模型，它们具有等效的功能。

对于不同的物理系统，经过抽象和近似，有可能得到完全相同的数学模型。

例2-2-2

机械位移系统，质量为m的刚体一端由弹簧



牵引，弹簧的另一端固定在壁上。刚体与地面间的摩擦力为 f，外加牵引力为 $F_S(t)$，其外加牵引力$F_S(t)$与刚体运动速度 $v(t)$间的关系可以推导出为

$$m\frac{d^2v(t)}{dt^2}+f\frac{dv(t)}{dt}+kv(t)=\frac{dF_S(t)}{dt}$$

这是一个代表机械位移系统的二阶微分方程。

两个不同性质的系统具有相同的数学模型，都是线性常系数微分方程，只是系数不同。对于复杂系统，则可以用高阶微分方程表示。

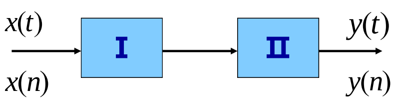
三 系统的互联 （Interconnection of Systems）

现实中的系统是各式各样的，其复杂程度也大相径庭。但许多系统都可以分解为若干个简单系统的组合。

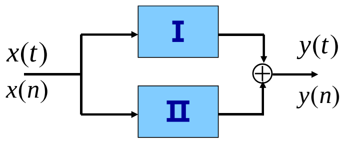
可以通过对简单系统（子系统）的分析并通过子系统互联而达到分析复杂系统的目的。

也可以通过将若干个简单子系统互联起来而实现一个相对复杂的系统。这一思想对系统分析和系统综合都是十分重要的。

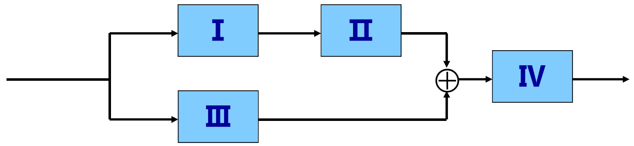
1. 级联 (cascade interconnection)



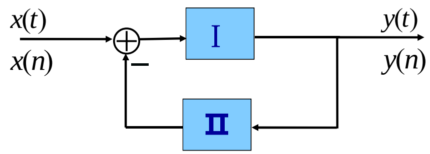
2. 并联 (parallel interconnection)



工程实际中也经常将级联、并联混合使用，如：

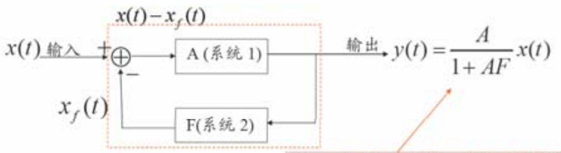


3. 反馈联结 (Feedback interconnection)



3、反馈联接

系统 1 的输出是系统 2 的输入，而系统 2 的输出又反馈回来与外加的输入信号一起组成系统 1的真正输入。如下图所示



反馈联接

$$y(t)=A[x(t)-x_f(t)]=Ax(t)-Ay(t)F$$

$$y(t)=\frac{A}{1+AF}x(t)$$

例1-6-1

请用积分器画出如下微分方程所代表的系统的系统框图。

$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}+3\frac{dr(t)}{dt}+2r(t)=\frac{de(t)}{dt}+e(t)$$

方程左端只保留输出的最高阶导数项

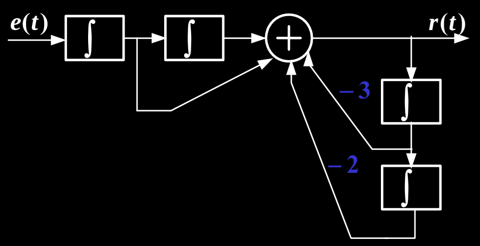
$$\frac{d^2r(t)}{dt^2}=-3\frac{dr(t)}{dt}-2r(t)+\frac{de(t)}{dt}+e(t)$$

积分 n=2 次，使方程左端只剩下$r(t)$ 项

$$r(t)=-3\int r(t)dt-2\iint r(t)dt+\int e(t)dt+\iint e(t)dt$$

系统框图

系统框图



1.6 基本系统性质

1.6.1 记忆系统与无记忆系统

1、无记忆系统——如果系统的输出仅仅决定于该时刻的输入，则这个系统就称为无记忆系统。

例如：$y[n]=(2x[n]-x^2[n])^2$ ——无记忆系统

一种特别简单的无记忆系统是恒等系统。即

y (t) = x (t) 或 y [n] = x [n]

2、记忆系统——系统的输出不仅与当前的输入有关，而且还与以前的输入有关，这样的系统称为记忆系统。

例如1：累加器(或相加器)是一个记忆系统。

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]=\sum_{k=-\infty}^{n-1}x[k]+x[n]$$

例如2：延迟单元也是一个记忆系统

y [n] = x[n-1] ——因为输出值还取决于以前的输入x[n-1]。

例如3：积分系统也是一个记忆系统 $y(t)=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau$

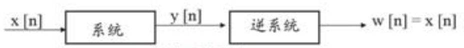
1.6.2 可逆性与可逆系统

1、一个系统如果在不同的输入下，有不同的输出，则称该系统为可逆系统。它满足一一对应关系。

如果一个系统分别对两个或两个以上不同的输入，能产生相同的输出，则这个系统是不可逆系统。

例如：$y(t)=x^2(t)$ 就是一个不可逆系统

2、如果一个系统是可逆的，那么就有一个逆系统存在，当该逆系统与原系统级联后，就会产生一个输出w[n]等于第一个系统的输入 x[n]，如下图所示



一般的可逆系统

例1：设可逆系统的输出为 y (t) = 2x(t)，则该可逆系统的逆系统是

w (t) = 1/2 y (t) = x (t)

例2：$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}x[k]$ 是可逆系统(该系统任意两个相邻的输出之差就是最后的输入值），故其逆系统为 w [n] = y [n] - y[n-1] = x [n]

系统的分类

根据系统处理的信号是连续时间信号或是离散时间信号来划分。

连续时间系统用微分方程描述

离散时间系统用差分方程描述

线性 时变

非线性 非时变 系统

因果系统 系统在 t_0 时刻的响应只与 $t=t_0$ 和 $t<t_0$ 时刻的输入有关，

非因果系统 否则，即为非因果系统。

可逆系统 系统在不同的激励信号作用下产生不同的响应（通信系统中的应用）

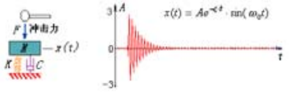
不可逆系统

重点研究：确定性信号作用下的线性时不变系统（LTI系统）。

物理可实现信号

物理可实现信号又称为单边信号，满足条件 $t<0$时，$x(t)=0$，即在时刻小于零的一侧全为零，信号完全由时刻大于零的一侧确定。

在实际中出现的信号，大量的是物理可实现信号，因为这种信号反映了物理上的因果关系。实际中所能测得的信号，许多都是由一个激发脉冲作用于一个物理系统之后所输出的信号。例如，切削过程，可以把机床、刀具、工件构成的工艺系统作为一个物理系统，把工件上的硬质点或切削刀具上积屑瘤的突变等，作为振源脉冲，仅仅在该脉冲作用于系统之后，振动传感器才有描述刀具振动的输出。



所谓物理系统，具有这样一种性质，当激发脉冲作用于系统之前，系统是不会有响应的，换句话说，在零时刻之前，没有输入脉冲，则输出为零，这种性质反映了物理上的因果关系。因此，一个信号要通过一个物理系统来实现，就必须满足 $x(t)=0\ (t<0)$，这就是把满足这一条件的信号称之为物理可实现信号的原因。同理，对于离散信号而言，满足 $x(n)=0\ (n<0)$ 条件的序列，即称为因果序列。

§1.8 线性时不变系统

- 线性系统与非线性系统
- 时变系统与时不变系统
- 线性时不变系统的微分特性
- 因果系统与非因果系统

一．线性系统与非线性系统

1. 定义

线性系统：指具有线性特性的系统。

线性：指均匀性，叠加性。

均匀性(齐次性)：

$$e(t)\rightarrow r(t)\Rightarrow ke(t)\rightarrow kr(t)$$

叠加性：

$$\left.\begin{matrix} e_1(t)\rightarrow r_1(t) \\ e_2(t)\rightarrow r_2(t) \end{matrix}\right\}\Rightarrow e_1(t)+e_2(t)\rightarrow r_1(t)+r_2(t)$$

线性特性

$$e_1(t)\longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow r_1(t)$$

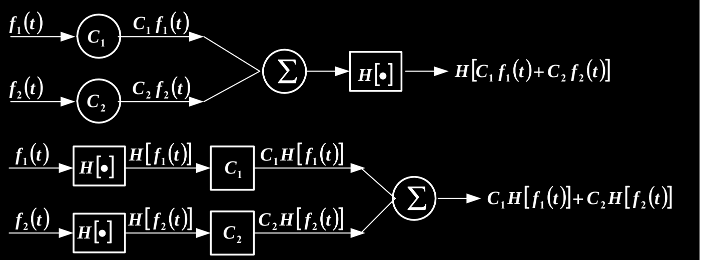
$$e_2(t)\longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow r_2(t)$$

$$\alpha_1 e_1(t)+\alpha_2 e_2(t)\longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \alpha_1 r_1(t)+\alpha_2 r_2(t)$$

$$\alpha_1 e_1(t)+\alpha_2 e_2(t)\rightarrow \alpha_1 r_1(t)+\alpha_2 r_2(t)$$

2. 判断方法

先线性运算，再经系统＝先经系统，再线性运算



若 $H[C_1f_1(t)+C_2f_2(t)]=C_1H[f_1(t)]+C_2H[f_2(t)]$

则系统 $H[\bullet]$是线性系统,否则是非线性系统。

注意：外加激励与系统非零状态单独处理。

线性（**Linearity**）

若 $x_1(t)\to y_1(t)$ $\quad x_2(t)\to y_2(t)$

$ax_1(t)+bx_2(t)\to ay_1(t)+by_2(t)$ 其中**a,b**是常数

满足此关系的系统是线性的。

例如：$y(t)=\mathrm{Re}\{x(t)\}$，满足可加性，但不满足齐次性。当 $a=j$ 时其实部变为虚部，虚部变为实部。

$y(t)=\dfrac{1}{x(t)}[x'(t)]^2$ 满足齐次性但不满足可加性。

因为，若输入为$x_1(t)+x_2(t)$则

$$y_2(t)=\frac{1}{x_1(t)+x_2(t)}[(x_1(t)+x_2(t))']^2$$

$$=\frac{[x_1'(t)+x_2'(t)]^2}{x_1(t)+x_2(t)}\neq\frac{[x_1'(t)]^2}{x_1(t)}+\frac{[x_2'(t)]^2}{x_2(t)}$$

如果一个系统是线性的，当我们能够把输入信号 $x(t)$ 分解成若干个简单信号的线性组合时，只要能得到该系统对每一个简单信号所产生的响应，就可以很方便的根据线性特性，通过线性组合而得到系统对 $x(t)$ 的输出响应。即

若 $x(t)=\sum_k a_kx_k(t)$ ，且 $x_k(t)\to y_k(t)$

则 $y(t)=\sum_k a_ky_k(t)$

这一思想是信号与系统分析理论和方法建立的基础。

在工程实际中，有一类系统并不满足线性系统的要求。但是这类系统的输出响应的增量与输入信号的增量之间满足线性特性。这类系统称为增量线性系统（**incrementally linear systems**）。

例如：$y(t)=x(t)+2$

显然有 $x_1(t)\to y_1(t)=x_1(t)+2$

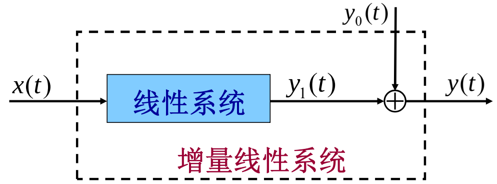
$x_2(t)\to y_2(t)=x_2(t)+2$

该系统既不满足齐次性，也不满足可加性，但当考查输入的增量与输出的增量之间的关系时，

有 $x_1(t)-x_2(t)\to y_1(t)-y_2(t)=x_1(t)-x_2(t)$

可见输入的增量与输出的增量之间是满足线性关系的，它是一个增量线性系统。

任何增量线性系统都可以等效为一个线性系统再加上一部分与输入无关的响应。



当增量线性系统的 $y_0(t)=0$ 时，$y(t)=y_1(t)$。此时系统的输出响应完全由 $y_1(t)$ 决定。此时系统处于零初始状态，故将 $y_1(t)$ 称为系统的零状态响应。

根据线性系统的齐次性，可得出：线性系统当输入为零（即根本没有输入）时，系统的输出响应为零（即没有输出响应）。这就是所谓线性系统的零输入—零输出特性。

增量线性系统当 $x(t)=0$ 时，有 $y_1(t)=0,\quad y(t)=y_0(t)$，因此将 $y_0(t)$ 称为系统的零输入响应。

可见，增量线性系统的响应包括零输入响应和零状态响应两部分。

“系统处于静止状态”指系统的初始状态为零；在激励加入之前没有任何储能，也称：初始松弛系统

例：判断下述微分方程所对应的系统是否为线性系统?

$$\frac{\mathrm{d}\,r(t)}{\mathrm{d}\,t}+10r(t)+5=e(t)\qquad t>0$$

解：设信号 **e(t)** 作用于系统，响应为 **r(t)**

当**Ae(t)**作用于系统时，若此系统具有线性，则

$$\frac{\mathrm{d}\,Ar(t)}{\mathrm{d}\,t}+10Ar(t)+5=Ae(t)\qquad t>0\qquad (1)$$

原方程两端乘**A**：

$$A\left[\frac{\mathrm{d}\,r(t)}{\mathrm{d}\,t}+10r(t)+5\right]=Ae(t)\qquad t>0\qquad (2)$$

(1),(2)两式矛盾。故此系统不满足均匀性

假设有两个输入信号 $e_1(t)$　$e_2(t)$ 分别激励系统，
则由所给微分方程式分别有：

$$\frac{\mathrm{d}\,r_1(t)}{\mathrm{d}\,t}+10r_1(t)+5=e_1(t)\qquad t>0\qquad(3)$$

$$\frac{\mathrm{d}\,r_2(t)}{\mathrm{d}\,t}+10r_2(t)+5=e_2(t)\qquad t>0\qquad(4)$$

当 $e_1(t)+e_2(t)$ 同时作用于系统时，若该系统为线性系统，应有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\left[r_1(t)+r_2(t)\right]+10\left[r_1(t)+r_2(t)\right]+5=e_1(t)+e_2(t)\qquad t>0\qquad(5)$$

(3)+(4)显然不等于(5)

所以该系统为不具有叠加性

二．时变系统与时不变系统

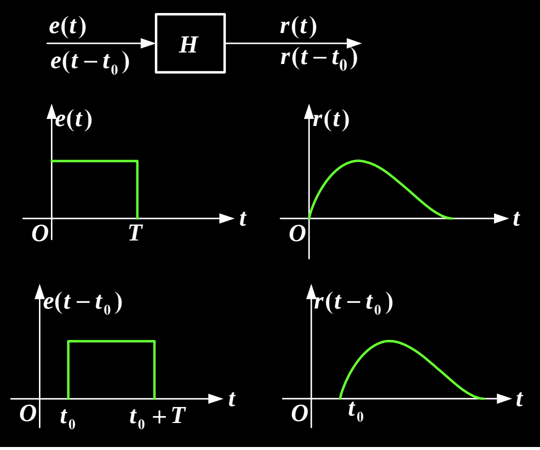
1. 定义

一个系统，在零初始条件下，其输出响应与输入信号施加于系统的时间起点无关，称为非时变系统，否则称为时变系统。

认识：

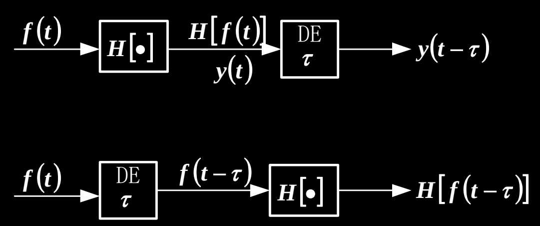
- 电路分析上看：元件的参数值是否随时间而变
- 从方程看：系数是否随时间而变
- 从输入输出关系看：

时不变性



2. 判断方法

先时移，再经系统＝先经系统，再时移



若 $H[f(t-\tau)]=y(t-\tau)$
则系统 $H[\bullet]$是非时变系统，否则是时变系统。

例： 判断下列两个系统是否为非时变系统。

系统1： $r(t)=\cos\left[e(t)\right] \qquad t>0$

系统2： $r(t)=e(t)\cdot\cos t \qquad t>0$

解： 系统1的作用是对输入信号作余弦运算。

$$e(t)\xrightarrow{\text{时移 } t_0} e(t-t_0)\xrightarrow{\text{经过系统}} r_{11}(t)=\cos e(t-t_0) \qquad t>0$$

$$e(t)\xrightarrow{\text{经过系统}} \cos e(t) \xrightarrow{\text{时移 } t_0} r_{12}(t)=\cos e(t-t_0) \quad t>0$$

$$r_{11}(t)=r_{12}(t)$$

所以此系统为时不变系统。

系统2作用：输入信号乘cost

$$e(t)\xrightarrow{\text{时移 } t_0} e(t-t_0)\xrightarrow{\text{经过系统}} r_{21}(t)=e(t-t_0)\cos t \qquad t>0$$

$$e(t)\xrightarrow{\text{经过系统}} e(t)\cos t\xrightarrow{\text{时移 } t_0} r_{22}(t)=e(t-t_0)\cos(t-t_0) \qquad t>0$$

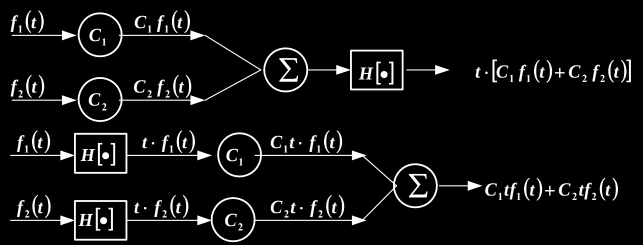
$$r_{21}(t)\neq r_{22}(t)$$

此系统为时变系统。

例1-7-3

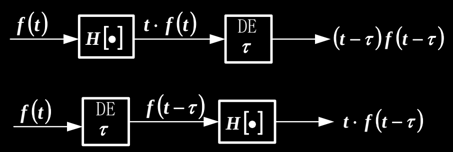
$y(t)=t\cdot f(t)$ 判断系统是否为线性非时变系统。

解答 是否为线性系统？



可见，先线性运算，再经系统＝先经系统，再线性运算，所以此系统是线性系统。

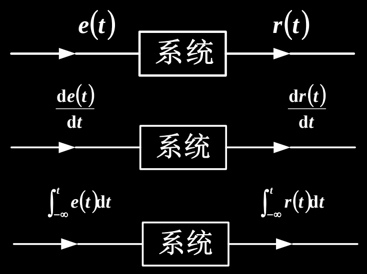
是否为时不变系统？



可见，时移、再经系统 ≠ 经系统、再时移，所以此系统是时变系统。

三．线性时不变系统的微分特性

线性时不变系统满足微分特性、积分特性



利用线性证明，可推广至高阶。

四. 因果系统与非因果系统

1. 定义

因果系统是指当且仅当输入信号激励系统时，才会出现输出（响应）的系统。也就是说，因果系统的输出（响应）不会出现在输入信号激励系统以前的时刻。

系统的这种特性称为因果特性。

符合因果性的系统称为因果系统(非超前系统)。

2. 判断方法

输出不超前于输入

3. 实际的物理可实现系统均为因果系统

非因果系统的概念与特性也有实际的意义，如信号的压缩、扩展，语音信号处理等。

若信号的自变量不是时间，如位移、距离、亮度等为变量的物理系统中研究因果性显得不很重要。

4. 因果信号

$t=0$接入系统的信号称为因果信号。

表示为：

$e(t)=e(t)u(t)$ 相当于$t<0, e(t)=0$

一般说来，非因果系统是物理不可实现的。这体现了因果性对系统实现的重要性。但对非实时处理信号的离散时间系统，或信号的自变量并不具有时间概念的情况，因果性并不一定成为系统能否物理实现的先决条件。
例如在图像处理中，自变量是图像中各点的坐标位置，而并非代表时间。对某些数据处理系统，如股市分析、经济预测等，实际上是以足够的延时来换取非因果性的实现。

$y(n)=x(-n)$ $\because n<0$ 时$y(n)$决定于以后时刻的输入。

$y(n)=x(n)-x(n+1)$; $y(t)=x(2t)$ 是非因果系统。

RLC电路，$y(n)=x(n)-x(n-1)$，$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$

都是因果系统。

五.因果性

例：微分方程 $r(t)=e(t)+e(t-2)$所代表的系统是否是因果系统

解： $t=0 \quad r(0)=e(0)+e(-2)$

现在的响应=现在的激励+以前的激励

所以该系统为因果系统。

例：微分方程 $r(t)=e(t)+e(t+2)$所代表的系统是否是因果系统

解： $t=0 \quad r(0)=e(0)+e(2)$

未来的激励

所以该系统为非因果系统。

五. 系统稳定性

定义:系统的稳定性是指在有界输入下，所产生的输出也是有界的，通常称为BIBO稳定。一个正常工作的系统都必须是稳定的。

例如：单摆、**RC**电路都是稳定系统；$y(n)=x(n-1)$ 也是稳定系统。

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}x(k),\quad y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau,\quad y(t)=tx(t)$$

都是不稳定系统。

工程实际中总希望所设计的系统是稳定的。因此稳定性对系统来说是非常重要的。

例题

对于下述的连续信号，输入为 $e(t)$,输出为 $r(t)$ $T[e(t)]$ 表示系统对$e(t)$ 的响应，试判定下述系统是否为(1)线性系统(2)非时变系统(3)因果系统(4)稳定系统

$(a)\quad r(t)=T[e(t)]=e(t-2)$

$(b)\quad r(t)=T[e(t)]=e(-t)$

$(c)\quad r(t)=T[e(t)]=e(t)\cos t$

$(d)\quad r(t)=T[e(t)]=a^{e(t)}$

解

(1) 线性性判定公式: $T[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]=a_1r_1(t)+a_2r_2(t)$

(2) 非时变判定公式: $T[e(t-t_0)]=r(t-t_0)$

(3) 对于一般系统，判断是否为因果系统，则按其输出变化不发生在输入变化之前的系统为因果系统，否则为非因果系统；对于线性非时变系统，如满足t<0时，系统的冲激响应h(t)=0的系统为因果系统，否则为非因果系统。

(4)对于一般系统，判断是否为稳定系统按BIBO准则。输入有界，则输出有界系统为稳定系统，否则为非稳定系统。对于线性非时变系统，如满足

$$\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$$

则系统为稳定系统，否则为非稳定系统。

$(a) \quad r(t)=T[e(t)]=e(t-2)$

由于

$$T[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]=a_1e_1(t-2)+a_2e_2(t-2)=a_1r_1(t)+a_2r_2(t)$$

故此系统为线性系统，而且由于

$$T[e(t-t_0)]=e(t-t_0-2)$$

$$r(t-t_0)=e(t-t_0-2)$$

故

$$T[e(t-t_0)]=r(t-t_0)$$

该系统为非时变系统，且输出变化t发生在输入变化（t-2）之后，故该系统为因果系统，由于该系统满足BIBO准则，故该系统为稳定系统。

$(b) \quad r(t)=T[e(t)]=e(-t)$

由于

$$T[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]=a_1e_1(-t)+a_2e_2(-t)=a_1r_1(t)+a_2r_2(t)$$

故次系统为线性系统，而且由于

$$T[e(t-t_0)]=e(-t-t_0)$$

$$r(t-t_0)=e(-t+t_0)$$

故

$$T[e(t-t_0)]\neq r(t-t_0)$$

该系统为时变系统，且当t>0时，输出变化t发生在输入变化（-t）之后，该系统为因果系统。而当t<0时，输出变化发生在输入变化之前，该系统为非因果系统。该系统满足BIBO准则，故该系统为稳定系统。

$(c) \quad r(t)=T[e(t)]=e(t)\cos t$

由于

$$T[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]=a_1e_1(t)\cos t+a_2e_2(t)\cos t=a_1r_1(t)+a_2r_2(t)$$

故该系统为线性系统，且由于

$$T[e(t-t_0)]=e(t-t_0)\cos t$$

而

$$r(t-t_0)=e(t-t_0)\cos(t-t_0)$$

故该系统为时变系统。该系统输出变化与输入变化同时发生，故该系统为因果系统。该系统满足BIBO准则，故该系统为稳定系统。

$(d) \quad r(t)=T[e(t)]=a^{e(t)}$

由于

$$T[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]=a^{a_1e_1(t)+a_2e_2(t)}$$

而

$$a_1r_1(t)+a_2r_2(t)=a_1a^{e_1(t)}+a_2a^{e_2(t)}$$

故

$$T[a_1e_1(t)+a_2e_2(t)]\neq a_1r_1(t)+a_2r_2(t)$$

该系统为非线性系统。而由于

$$T[e(t-t_0)]=a^{e(t-t_0)}=r(t-t_0)$$

故该系统为非时变系统。该系统输出变化和输入变化同时发生，故该系统为因果系统。该系统满足BIBO准则，故该系统为稳定系统。

§1.9 信号与系统分析方法

一. 信号分析与信号处理

信号分析：

信号分析是把信号分解成它的各个组成部分或成分的概念、理论和方法，例如，信号空间表示法或其各种线性组合表示法、信号谱分析、信号的时域分析和多尺度分析等

信号处理：

信号处理则指按某种需要或目的，对信号进行特定的加工、操作或修改。

二. 系统分析与系统综合

系统分析：

系统分析就是在给定系统的情况下，研究系统对输入信号所产生的响应，并由此获得对系统功能和特性的认识。一般来说，系统分析包括以下三个步骤：系统建模，求解系统，结果解释

系统综合：

系统综合又可叫做系统的设计或实现，它指在给定了系统功能或特性的情况下，或者已知系统在什么样的输入时有什么样的输出，设计并实现该系统

三. 两种系统描述方法

输入——输出描述法：

- 着眼于激励与响应的关系，而不考虑系统内部变量情况；
- 单输入/单输出系统；
- 列写一元 n 阶微分方程。

状态变量分析法：

- 不仅可以给出系统的响应，还可以描述内部变量，如电容电 或电感电流的变化情况。
- 研究多输入/多输出系统；
- 列写多个一阶微分方程。

四. 两类分析方法

1.时域分析

经典求解法：
- 连续系统：微分方程
- 离散系统：差分方程

卷积积分（或卷积和）法

2.变换域分析

- 傅里叶变换——FT
- 拉普拉斯变换——LT
- z 变换——ZT
- 离散傅里叶变换——DFT

本章要点

1)信号的描述与分类

✓掌握信号的基本描述方法：函数法、波形法和序列法（对于离散序列）

✓信号的分类：连续时间信号与离散时间信号；因果信号与非因果信号；确定信号与随机信号；

2) 信号的运算与变换

✓信号的运算：相加、相减与相乘、差分与累加；

✓信号的变换：时移（位移）、反褶、压缩与扩展；

本章要点（续）

3) 常用信号

✓单边指数信号与双边指数信号；

✓正弦信号

✓抽样信号

✓阶跃信号与单位冲激信号（单位样值序列）；

✓冲激函数的性质；

✓符号函数

✓斜变函数

本章要点（续）

4) 系统的描述与分类

✓连续系统的微分方程及离散系统的差分方程描述；

✓系统的系统框图及信号流图表示；

✓系统的分类：连续时间系统与离散时间系统；因果系统与非因果系统；时变（移变）系统与非时变（非移变）系统；稳定系统与不稳定系统；线性系统与非线性系统；