第六章 离散时间信号与系统的傅里叶分析

缩写注释

- CFS(The continuous Fourier series):连续时间傅立叶级数
- DFS(The discrete Fourier series):离散时间傅立叶级数
- CTFT(The continuous time Fourier transforms): 连续时间傅立叶变换
- DTFT(The discrete time Fourier transforms): 离散时间傅立叶变换
- DFT(Discrete Fourier transforms):离散傅立叶变换---FFT

6.1 引言

- 本章将采用与讨论CTFT完全相同的思想方法，来研究离散时间非周期信号的频域分解问题。
- 相应的DTFT与CTFT既有许多相类似的地方，也同时存在一些重要区别

DFS与CFS之间既有许多类似之处，也有一些重大差别：主要是DFS是一个有限项级数,具有周期性。

连续时间傅里叶级数（CFS）

周期信号 $x(t)$ 可以表示为傅里叶级数

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \qquad \omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad a_0=\frac{1}{T}\int_T x(t)dt$$

离散时间傅里叶级数（DFS）

考察成谐波关系的复指数信号集: $\Phi_k(n)=\{e^{j\frac{2\pi}{N}kn}\}$

该信号集中每一个信号都以 N 为周期，且该集合中只有 N 个信号是彼此独立的。

将这 N 个独立的信号线性组合起来，一定能表示一个以 N 为周期的序列。即：

$$x(n)=\sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$ 其中 k 为 N 个相连的整数

这个级数就称为离散时间傅里叶级数（DFS），其中 a_k 也称为周期信号 $x(n)$ 的频谱。

二．傅里叶级数系数的确定

给 $x(n)=\sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ 两边同乘以 $e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$ ，得

$$x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=\sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

显然 $x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$ 仍是以 N 为周期的

$$\sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=\sum_{n=<N>}\sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\sum_{k=<N>} a_k \sum_{n=<N>} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}$$

而 $\sum_{n=<N>} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-r)n}=\dfrac{1-e^{j(k-r)\cdot 2\pi}}{1-e^{j(k-r)\frac{2\pi}{N}}}=\begin{cases}0, & k\neq r\\ N, & k=r\end{cases}$

$$\therefore \sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}=Na_r$$

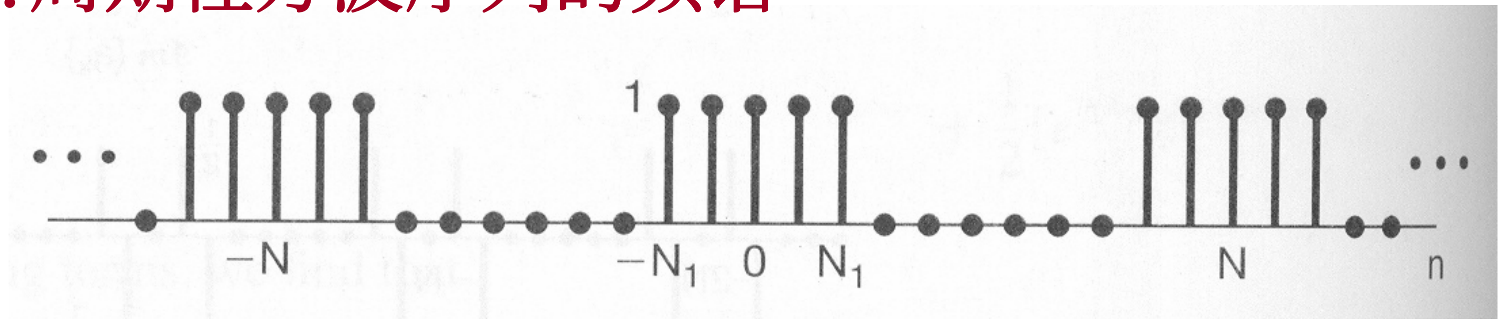
即 $$a_r = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}rn}$$

或 $$a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

显然上式满足$a_{k+N} = a_k$即a_k 也是以N为周期的，或者说a_k中只有N个是独立的。

DFS
$$\begin{cases} x(n) = \sum_{k=<N>} a_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \\ a_k = \frac{1}{N}\sum_{n=<N>} x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \end{cases}$$

三.周期性方波序列的频谱



$$a_k=\frac{1}{N}\sum_{n=-N_1}^{N_1}e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}=\frac{1}{N}\frac{e^{j\frac{2\pi}{N}kN_1}-e^{-j\frac{2\pi}{N}(N_1+1)k}}{1-e^{-j\frac{2\pi}{N}k}}$$

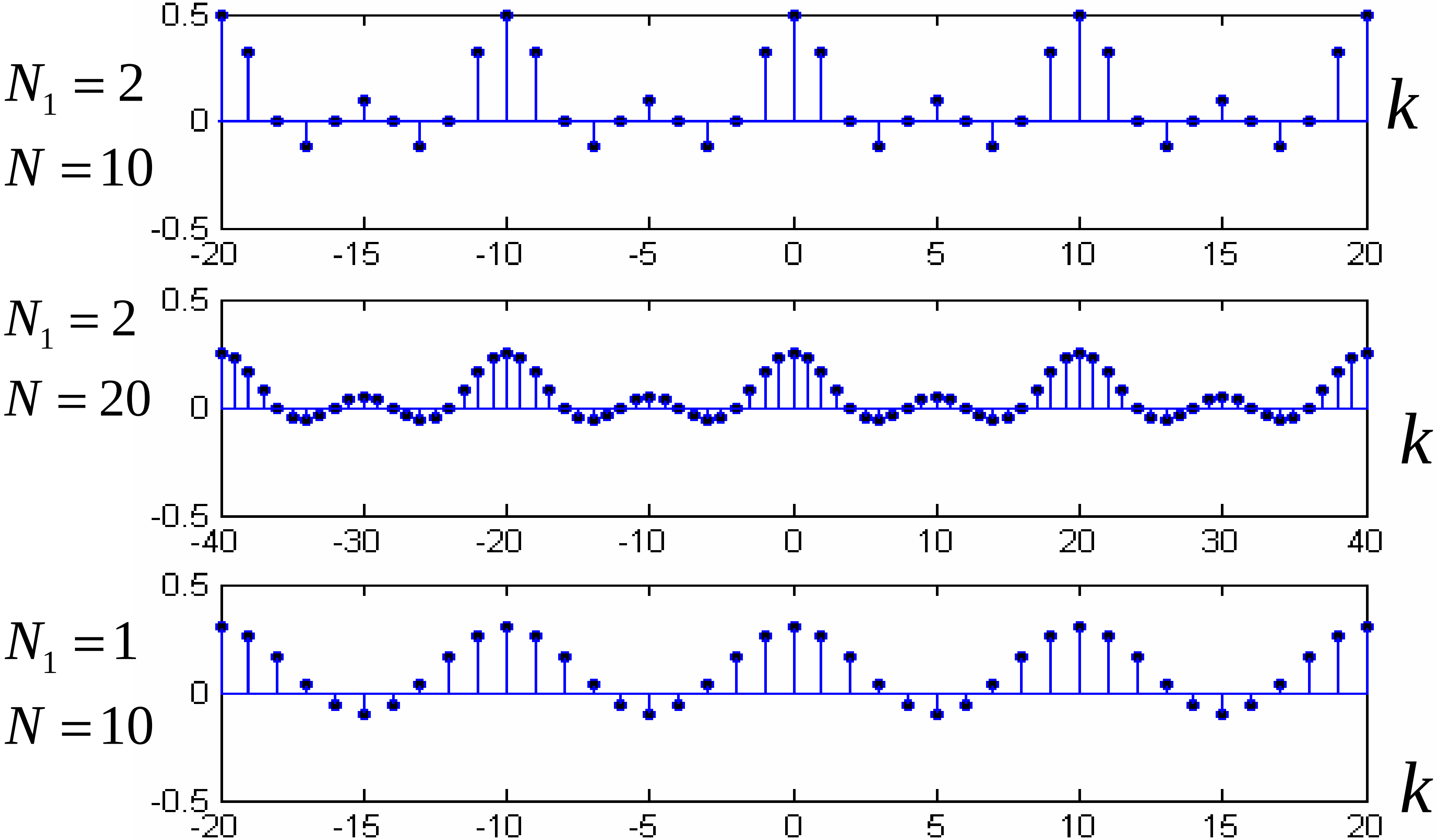
$$=\frac{1}{N}\frac{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left[e^{j\frac{2\pi}{N}k(N_1+\frac{1}{2})}-e^{-j\frac{2\pi}{N}k(N_1+\frac{1}{2})}\right]}{e^{-j\frac{\pi}{N}k}\left[e^{j\frac{\pi}{N}k}-e^{-j\frac{\pi}{N}k}\right]}$$

$$= \frac{1}{N} \frac{\sin \frac{\pi}{N} k(2N_1+1)}{\sin \frac{\pi}{N} k} \qquad k \neq 0, \pm N, \pm 2N, \cdots$$

$$a_k = \frac{2N_1+1}{N} \qquad k = rN \text{时}$$

显然 a_k 的包络具有 $\dfrac{\sin \beta x}{\sin x}$ 的形状。

周期性方波序列的频谱



$N_1 = 2$
$N = 10$
0.5
0
-0.5
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
k
$N_1 = 2$
$N = 20$
0.5
0
-0.5
-40
-30
-20
-10
0
10
20
30
40
k
$N_1 = 1$
$N = 10$
0.5
0
-0.5
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
k

- 当 N_1 不变、 $N\uparrow$时，频谱的包络形状不变，只是幅度减小，谱线间隔变小。

- 当 N_1 改变、 N不变时，由于a_k 的包络具有 $\dfrac{\sin \beta x}{\sin x}$ 的形状，而 $\beta=2N_1+1$ ，可知其包络形状一定发生变化。当$N_1\downarrow$时，包络的第一个零点会远离原点从而使频谱主瓣变宽。这一点也与连续时间周期矩形脉冲的情况类似。

周期序列的频谱也具有离散性、谐波性，当在区间 $-\pi \sim \pi$ 考查时，也具有收敛性。不同的是，离散时间周期信号的频谱具有周期性。

6.2 离散时间傅里叶变换

一. 从DFS到DTFT:

让我们先来观察周期性矩形脉冲信号，取其周期N=10、20与40时，其频谱的变化情况如下图所示。

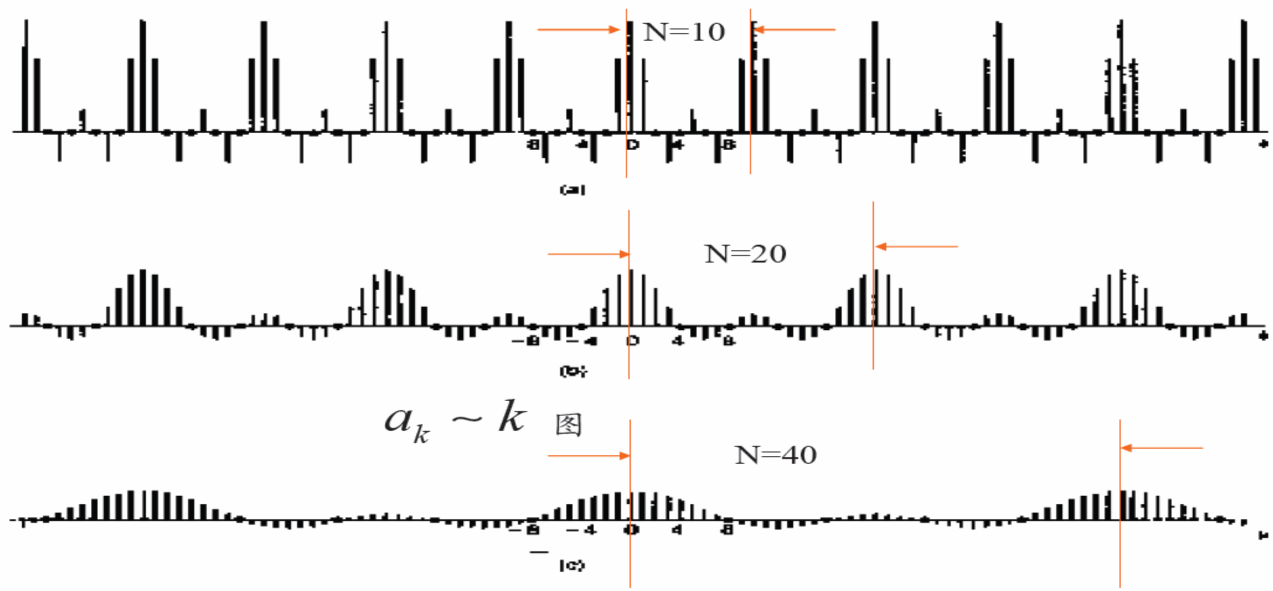


图 3.17 例 3.12 周期方波序列的傅里叶级数系数。图中 Na_k 是在 $2N_1+1=5$ 和分别对三种 N 值下画出的：(a) $N=10$；(b) $N=20$；(c) $N=40$

在讨论离散时间周期性矩形脉冲信号的频谱时，我们看到：当信号周期N增大时，频谱的包络形状不变，幅度减小，而频谱的谱线变密。

当$N\to\infty$时，有$\omega_0=(2\pi/N)\to 0$，而从时域看，当周期信号的周期$N\to\infty$时，就变成了一个非周期的序列。

回顾：连续时间信号

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$a_k=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$T_0 a_k=\int_{-T_0/2}^{T_0/2}\tilde{x}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

对周期信号 $\tilde{x}(n)$ 由DFS有

$$\tilde{x}(n) = \sum_{n=<k>} a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n} \qquad a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} \tilde{x}(n) e^{-jk(\frac{2\pi}{N})n}$$

即

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N/2}^{N/2} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

当 $N \to \infty$ 时 $\frac{2\pi}{N}k \to \omega$，令 $\lim_{N\to\infty} N a_k \triangleq X(e^{j\omega})$

有：

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}} \text{ —— DTFT}$$

说明：显然 $X(e^{j\omega})$ 对 ω 是以 2π 为周期的。

将其与 a_k 表达式比较有

$$a_k = \frac{1}{N} X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$

于是： $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{N}$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=<N>} X(e^{jk\omega_0}) \cdot e^{jk\omega_0 n} \cdot \omega_0$$

当 $N \to \infty$ 时，$\tilde{x}(n) \to x(n), \quad k\omega_0 \to \omega, \quad \omega_0 \to d\omega, \quad \sum \to \int,$

当 k 在一个周期范围内变化时，$k\omega_0$ 在 2π 范围变化，所以积分区间是 2π。

$$\therefore\ x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

表明:离散时间序列可以分解为频率在2π区间上分布的、幅度为 $\frac{1}{2\pi}X(e^{j\omega})d\omega$ **的复指数分量的线性组合。**

结论：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}$$

DTFT对

二. DTFT的收敛问题

当$x(n)$是无限长序列时，由于$X(e^{j\omega})$的表达式是无穷项级数，当然会存在收敛问题。

收敛条件有两组：

1. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|^2<\infty$，则级数以均方误差最小的准则收敛于$X(e^{j\omega})$。

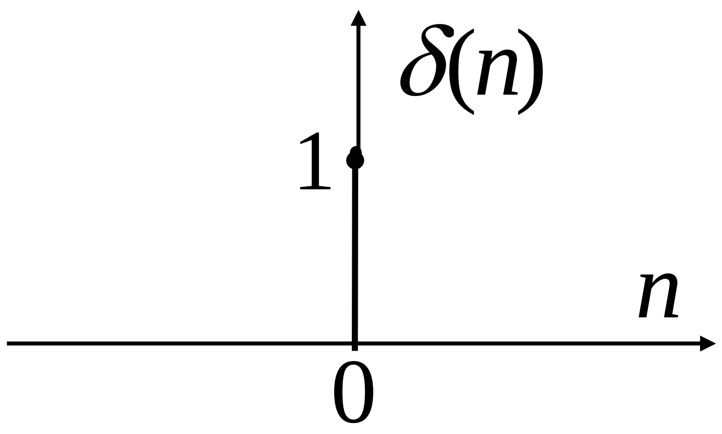
2. $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|x(n)\right|<\infty$，则 $X(e^{j\omega})$存在，且级数一致收敛于$X(e^{j\omega})$ 。

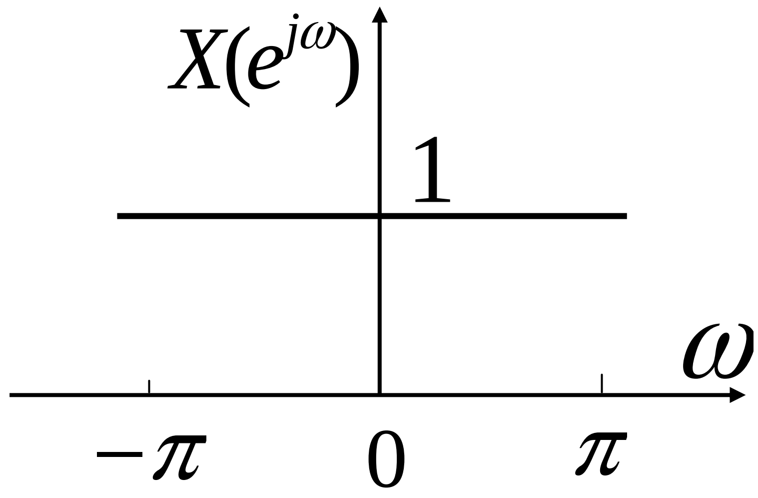
三.常用信号的离散时间傅立叶变换

1. $x(n)=\delta(n)$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)e^{-j\omega n}=1$$

如图所示:





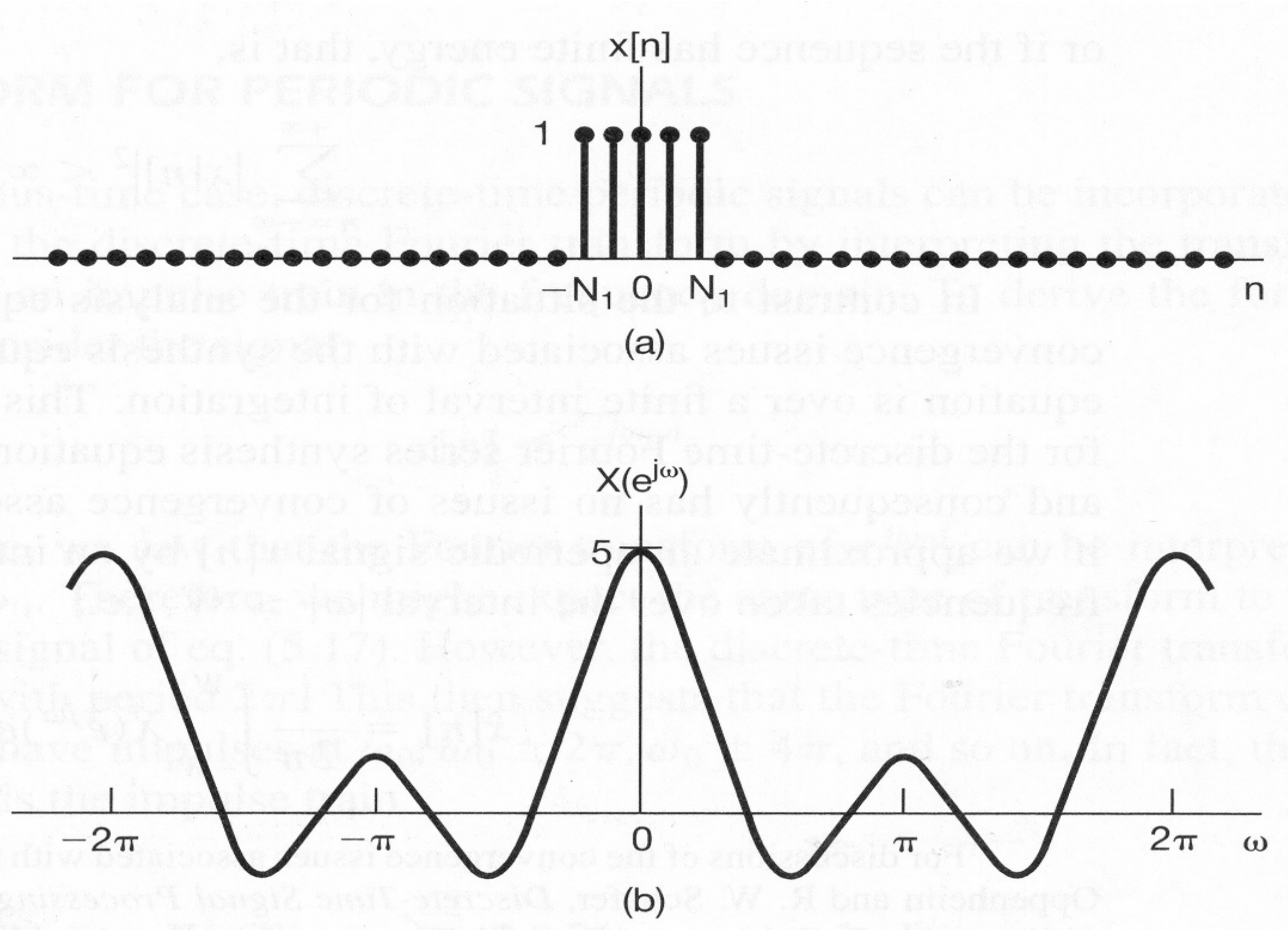
$$DTFT[\delta(n-n_0)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-n_0)e^{-j\omega n}=e^{-j\omega n_0}$$

2.矩形脉冲:

$$x(n)=\begin{cases}1, & |n|\le N_1\\ 0, & |n|>N_1\end{cases}$$

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n}=\frac{\sin(2N_1+1)\dfrac{\omega}{2}}{\sin\dfrac{\omega}{2}}$$

当 $N_1 = 2$ 时，可得到：



两点比较:

1.与对应的周期信号比较

$$X(e^{j\omega}) = \frac{\sin(2N_1+1)\frac{\omega}{2}}{\sin\frac{\omega}{2}}$$

$$a_k = \frac{1}{N}\frac{\sin\frac{\pi}{N}k(2N_1+1)}{\sin\frac{\pi}{N}k},$$ 显然有

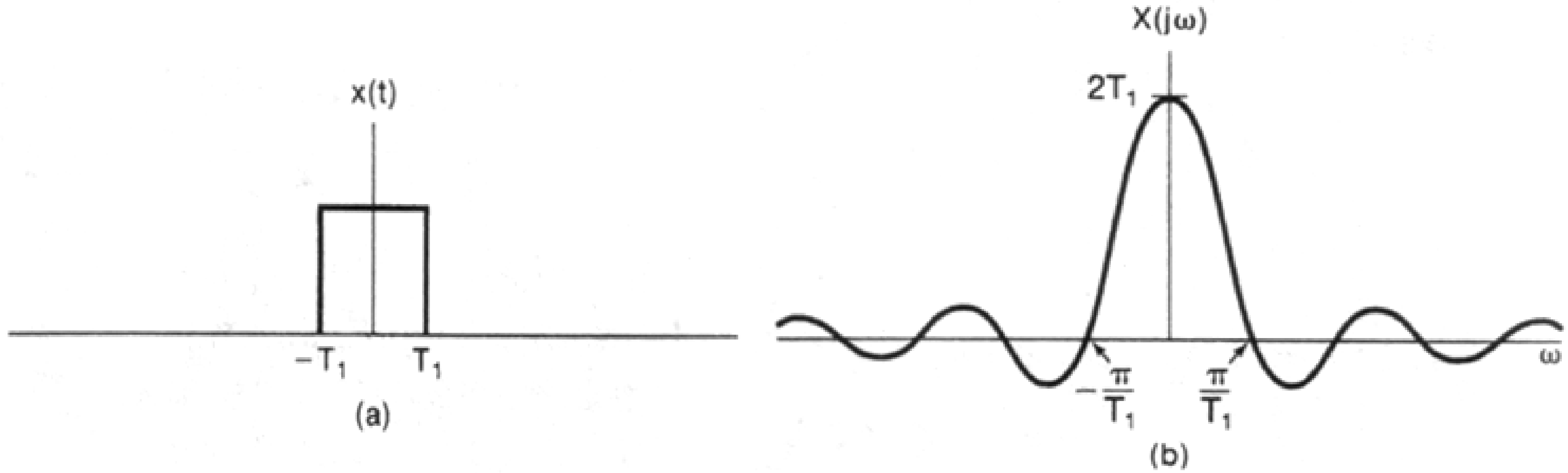
$$a_k = \frac{1}{N}X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=\frac{2\pi}{N}k}$$ 关系成立

周期信号的频谱是对应的非周期信号频谱上的采样；

2.与对应的连续时间信号比较

$$x(t)=\begin{cases}1, & |t|<T_1 \\ 0, & |t|>T_1\end{cases} \qquad X(j\omega)=\frac{2T_1\sin\omega T_1}{\omega T_1}$$

如图所示:



连续非周期信号的频谱是非周期性的,
而离散非周期信号的频谱是周期的

3.实指数序列

$$x(n) = a^n u(n), \quad |a| < 1$$

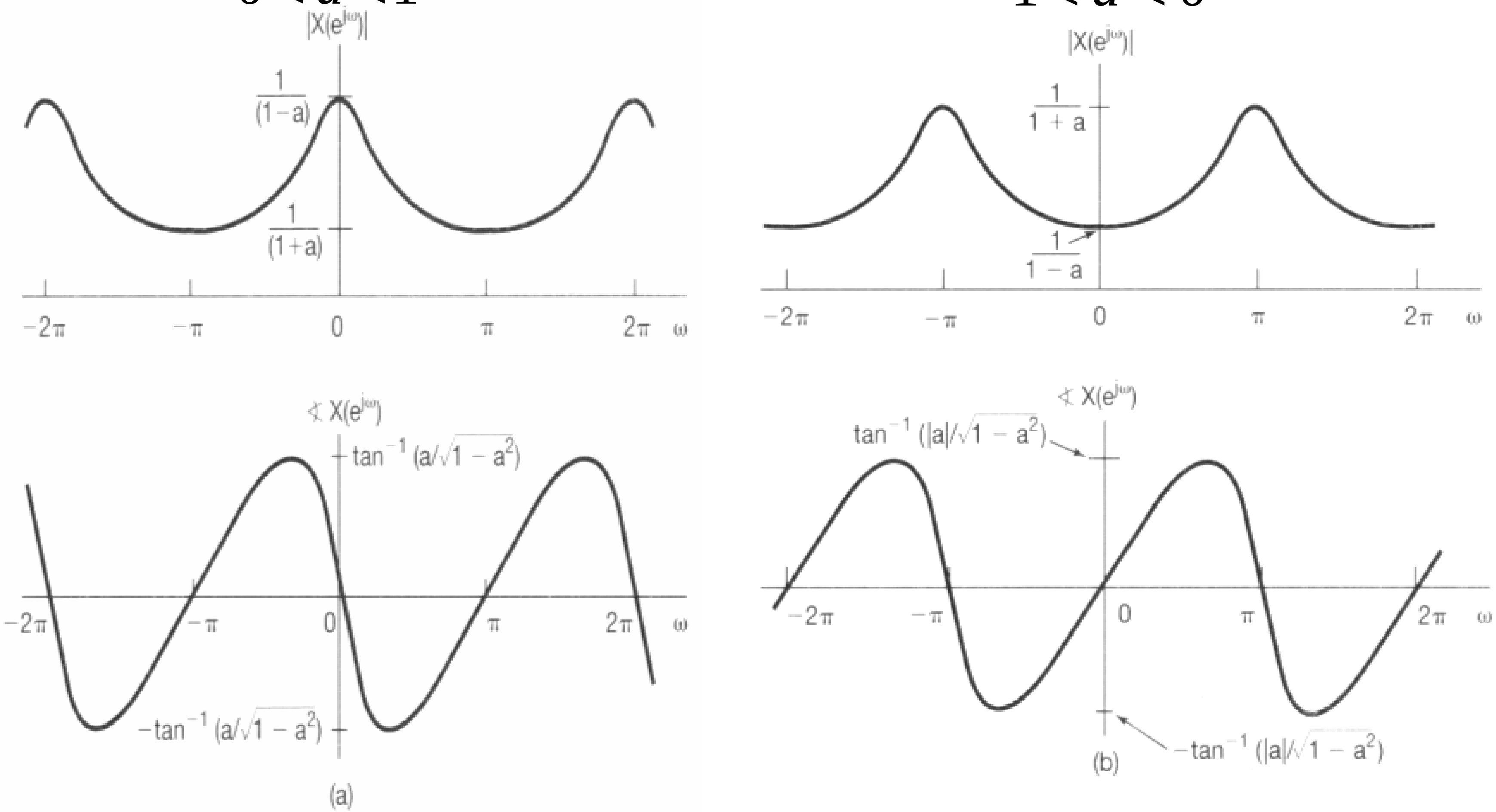
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

通常$X(e^{j\omega})$是复函数，用它的模和相位表示：

$$\left|X(e^{j\omega})\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega}}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) = -\mathrm{tg}^{-1}\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}$$

$0 < a < 1$ $\qquad\qquad$ $-1 < a < 0$



由图可以得到：

$0 < a < 1$ 时，低通特性， $x(n)$ 单调指数衰减

$-1 < a < 0$ 时，高通特性， $x(n)$ 摆动指数衰减

4.非因果实指数序列

$$x(n) = a^n u(-n), \quad |a| > 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{0} a^n e^{-j\omega n}$$

令$n' = -n$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n'=0}^{\infty} a^{-n'} e^{j\omega n'} = \frac{1}{1 - a^{-1} e^{j\omega}}$$

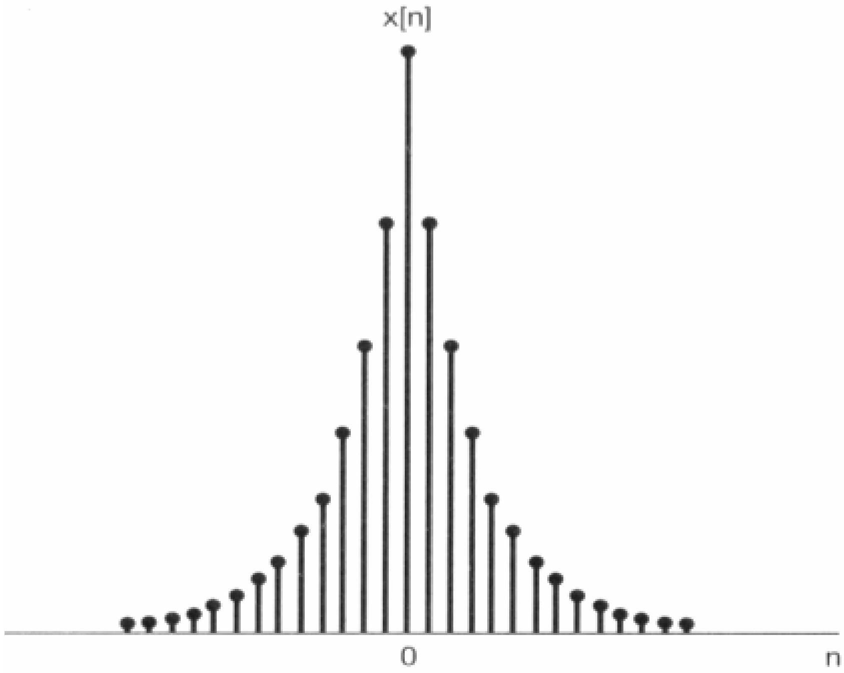
5.双边指数序列

$$x(n) = a^{|n|}, \quad |a| < 1$$

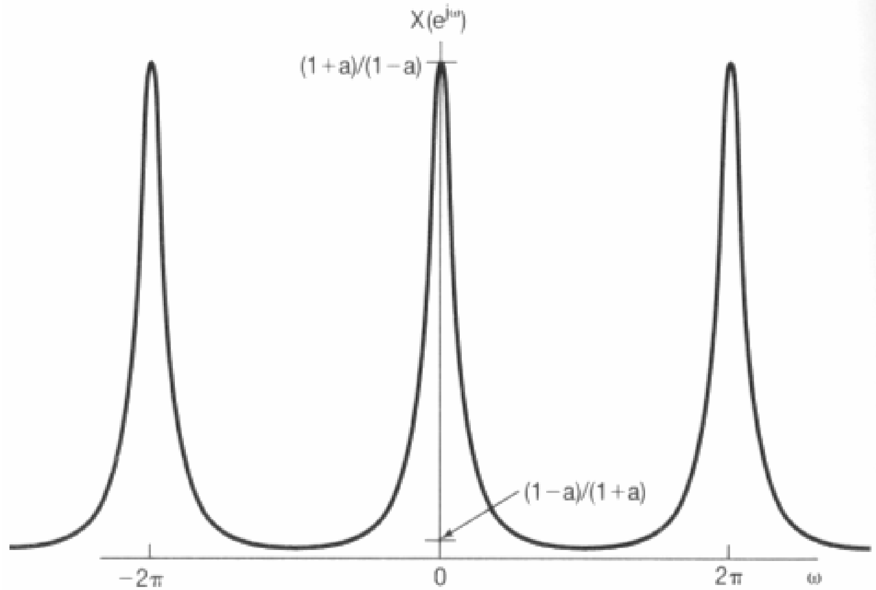
$$x(n) = a^{-n}u(-n) + a^{n}u(n)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^{-n}e^{-j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n}e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{\infty} a^{n}e^{j\omega n} + \sum_{n=0}^{\infty} a^{n}e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{ae^{j\omega}}{1-ae^{j\omega}} + \frac{1}{1-ae^{-j\omega}} = \frac{1-a^{2}}{1+a^{2}-2a\cos\omega}$$



(a)



(b)

6.常数序列

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

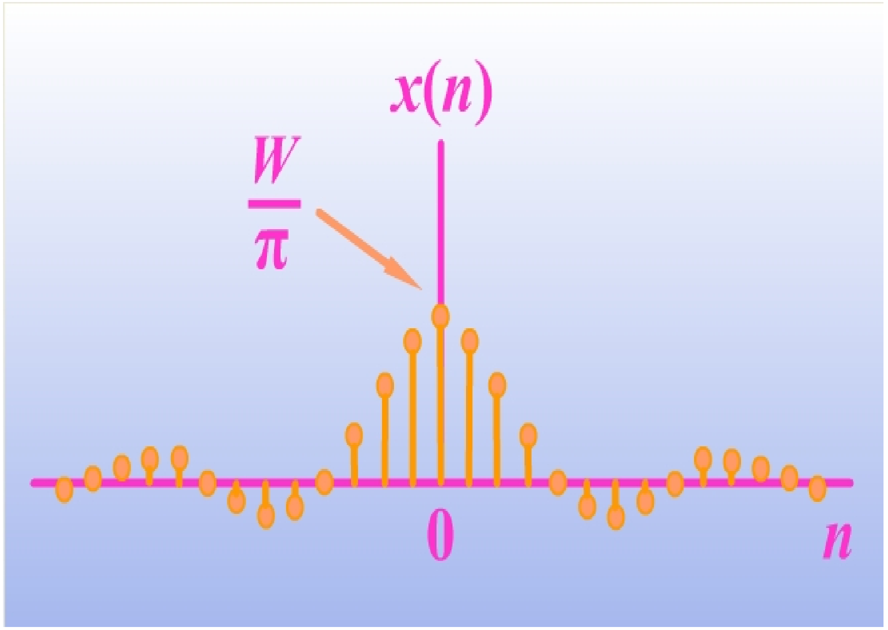
$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega = \frac{1}{2\pi}$$

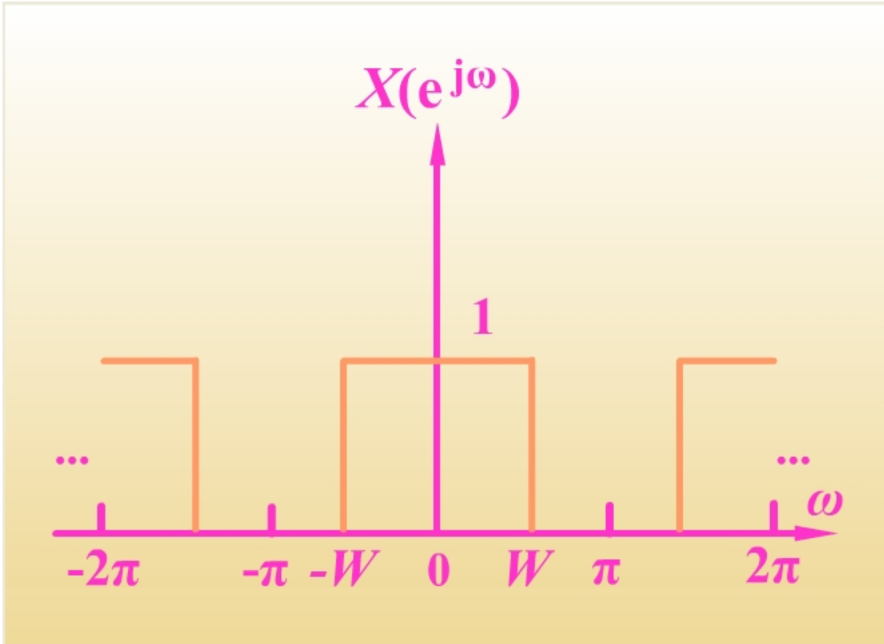
$$x(n) = 1 \longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega}) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$

7.频域矩形序列

$$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & |\omega| < W \\ 0 & W < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$x(n) = \frac{\sin Wn}{\pi n}$$





四.周期信号的DTFT

对连续时间信号，有 $2\pi\delta(\omega-\omega_0) \leftrightarrow e^{j\omega_0 t}$，由此推断，对离散时间信号或许有相似的情况。但由于**DTFT**一定是以 2π 为周期的，因此，频域的冲激应该是周期性的冲激串，即

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)$$

对其作反变换有：

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

$$=\int_{0}^{2\pi}\delta(\omega-\omega_0)e^{j\omega n}d\omega=e^{j\omega_0 n}$$

可见，$\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)\leftrightarrow e^{j\omega_0 n}$

由**DFS**有 $\tilde{x}(n)=\sum_{n=<k>}a_k e^{jk(\frac{2\pi}{N})n}$ $\qquad \omega_0=k\frac{2\pi}{N}$

因此，周期信号$\tilde{x}(n)$可用**DTFT**表示为

$$\tilde{x}(n)\leftrightarrow X(e^{j\omega})=\sum_{k=<N>}a_k\sum_{l=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi l)$$

$$= \cdots + \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 2\pi)$$

$$+ \sum_{k=<N>} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k - 4\pi) + \cdots$$

$$= \cdots + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k+N)\right]$$

$$+ \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta\left[\omega - \frac{2\pi}{N}(k+2N)\right] + \cdots$$

$$= \cdots + \sum_{k=0}^{N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=N}^{2N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \sum_{k=2N}^{3N-1} 2\pi a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k) + \cdots$$

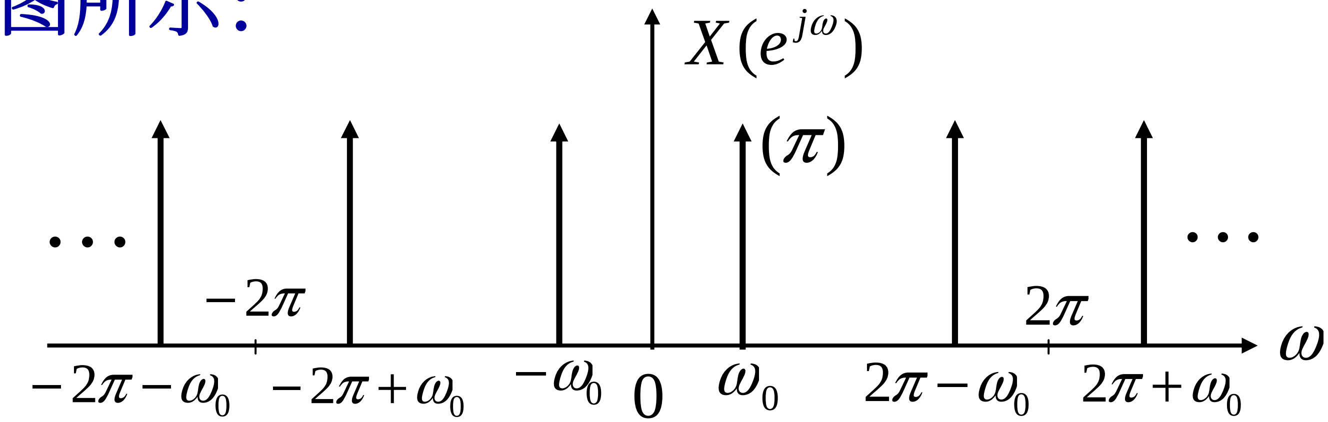
$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - \frac{2\pi}{N}k)$$

上式与连续时间傅立叶变换中的形式是完全一致的.

例1. $x(n)=\cos\omega_0 n=\frac{1}{2}(e^{j\omega_0 n}+e^{-j\omega_0 n})$, 它不一定是周期的. 当 $\omega_0=\frac{2\pi}{N}k$ 时才具有周期性。

$$X(e^{j\omega})=\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[\delta(\omega-\omega_0-2\pi k)+\delta(\omega+\omega_0-2\pi k)\right]$$

如图所示:

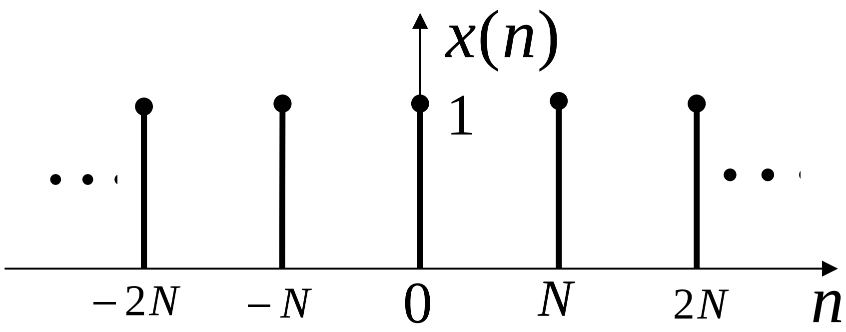


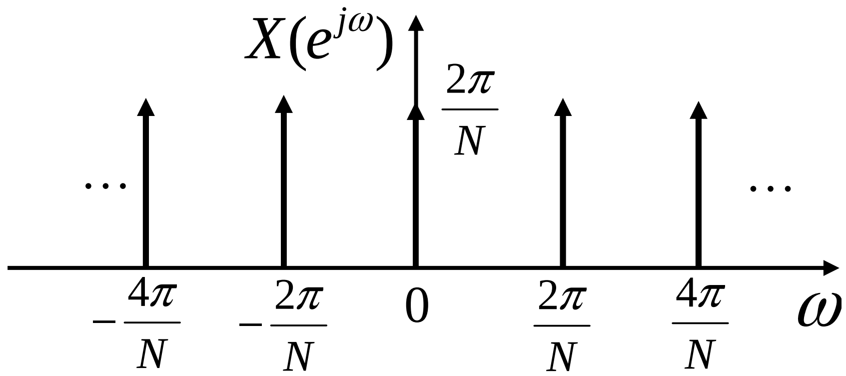
例2. $x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(n-kN)$ —— 均匀脉冲串

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \delta(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N}$$

$$X(e^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \frac{2\pi}{N} k)$$

比较:与连续时间情况下对应的一致。





离散时间傅立叶变换对:

$$x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

因为在一个有限的积分区间上进行，因此不存在收敛问题

$$X(e^{j\omega})=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]e^{-j\omega n}$$

$\because\ e^{-j\omega n}$ 以 2π 为周期

$\therefore\ x(e^{j\omega})$ 也是周期的

$$a^n u[n]\stackrel{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

周期信号的傅立叶变换:

$$1\stackrel{F}{\longleftrightarrow}2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

$$e^{j\omega_0 n}\stackrel{F}{\longleftrightarrow}2\pi\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\omega_0-2\pi l)$$

$$x[n]=\sum_{k=\langle N\rangle}a_k e^{j\omega_0 k}\stackrel{F}{\longleftrightarrow}\sum_{k=(N)}2\pi a_k\sum_{l=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_0-2\pi l)$$

$$X(e^{j\omega})=2\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k\delta(\omega-k\omega_0)$$

6.3 离散时间傅立叶变换的性质

DTFT也有很多与**CTFT**类似的性质，当然也有某些明显的差别。

通过对**DTFT**性质的讨论，目的在于揭示信号时域和频域特性之间的关系。

一、周期性

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$，则 $X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(e^{j\omega})$

比较：这是与**CTFT**不同的。

二. 线性:

$$ax_1(n)+bx_2(n)\leftrightarrow aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

三. 时移与频移：

若 $x(n)\leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则

$$x(n-n_0)\leftrightarrow X(e^{j\omega})e^{-j\omega n_0}$$ ——时移特性

$$x(n)e^{j\omega_0 n}\leftrightarrow X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$ ——频移特性

四. 时间反转:

若 $x(n)\leftrightarrow X(e^{j\omega})$, 则 $x(-n)\leftrightarrow X(e^{-j\omega})$

五．共轭对称性

若 $x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$， 则 $x^*(n) \leftrightarrow X^*(e^{-j\omega})$

由此可进一步得到以下结论：

1. 若 $x(n)$ 是实信号,则 $x^*(n)=x(n)$

$\therefore$ $X^*(e^{-j\omega})=X(e^{j\omega})$ ， 即 $X^*(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})$ ， 因此：

$$\begin{cases} \left|X(e^{j\omega})\right| = \left|X(e^{-j\omega})\right| \\ \angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega}) \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] = \mathrm{Re}\left[X(e^{-j\omega})\right] \\ \mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right] = -\mathrm{Im}\left[X(e^{-j\omega})\right] \end{cases}$$

2. 若 $x(n)$ 是实偶信号,

则 $x(n)=x(-n)$ ， $x^*(n)=x(n)$ ， $x(-n)\leftrightarrow X(e^{j\omega})$

于是有：$X^*(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})=X(e^{j\omega})$

即 $X(e^{j\omega})$ 是实偶函数。

3. 若 $x(n)$ 是实奇信号,则 $x(n)=-x(-n)$ $x^*(n)=x(n)$ 。

于是有：$X^*(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})=-X(e^{j\omega})$，表明 $X(e^{j\omega})$ 是虚奇函数。

4. 若 $x(n)=x_e(n)+x_o(n)$,则

$$x_e(n)\leftrightarrow \mathrm{Re}\left[X(e^{j\omega})\right] \quad x_o(n)\leftrightarrow j\mathrm{Im}\left[X(e^{j\omega})\right]$$

这些结论与连续时间情况下完全一致。

表6.1 离散时间傅里叶变换的对称性

序列	傅里叶变换
$x(n)$	$X(e^{j\omega})$
$x^*(n)$	$X^*(e^{-j\omega})$
$x(-n)$	$X(e^{-j\omega})$
$x^*(-n)$	$X^*(e^{j\omega})$
$\mathrm{Re}[x(n)]$	$X_e(e^{j\omega})$
$j\,\mathrm{Im}[x(n)]$	$X_o(e^{j\omega})$
$x_e(n)$	$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})]$
$x_o(n)$	$j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$

六. 差分与求和:

$$x(n)-x(n-1)\leftrightarrow(1-e^{-j\omega})X(e^{j\omega})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-j\omega}}X(e^{j\omega})+\pi X(e^{j0})\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

说明:在DTFT中$(1-e^{-j\omega})$对应于CTFT中的 $j\omega$。

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k) \qquad \delta(n)\leftrightarrow 1 \qquad u(n)\leftrightarrow\frac{1}{1-e^{-j\omega}}+\pi\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-2\pi k)$$

说明:利用差分特性求序列x(n)的傅里叶变换是有条件的,即需要首先将直流分量提出,分开处理。

七. 频域微分:

$$nx(n) \leftrightarrow j\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$$

八. Parseval定理:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$|X(e^{j\omega})|^2$称为 $x(n)$ 的能量谱密度函数。

比较:在DFS中,有 $\frac{1}{N}\sum_{n=<N>}|x(n)|^2 = \sum_{k=<N>}|a_k|^2$

$|a_k|^2$称为周期信号的功率谱。

6.4 卷积定理及其应用

若 $y(n) = x(n) * h(n)$,

则 $Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$,

$H(e^{j\omega})$ 即是系统的频率特性。

说明：该特性提供了对LTI系统进行频域分析的理论基础。

相乘性质

如果 $y(n)=x_1(n)\cdot x_2(n)$,

则 $Y(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

$$=\frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega})\otimes X_2(e^{j\omega})$$

由于$X_1(e^{j\omega})$和 $X_2(e^{j\omega})$ 都是以 2π 为周期的,

因此上述卷积称为周期卷积。

$$x(n) = [\frac{\sin(\pi n / 2)}{\pi n}][\frac{\sin(\pi n / 4)}{\pi n}]$$

6.5 离散时间系统的频率响应

对于时间离散的线性非移变（LSI）系统，假设输入序列

$$x(n) = e^{jwn}, -\infty < n < \infty$$

输出序列为角频率w的一个复指数

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{jw(n-k)} = e^{jwn} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jwk}$$

$$H(e^{jw}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) e^{-jwk}$$

$H(e^{jw})$给出了LSI系统对于每个w值得传输性能，因此称其为系统的频率响应。

$$y(n) = e^{jwn} \bullet H(e^{jw})$$

如果把$x(n) = e^{jwn}, -\infty < n < \infty$看成是LSI系统的特征输入，

那么$H(e^{jw})$则可看成是特征值，系统的输出即是特征输入被特征值加权所得的结果。

由于$H(e^{jw})$为复数，则可以分解为实部和虚部。

$$H(e^{jw}) = H_R(e^{jw}) + jH_I(e^{jw})$$

或者用振幅和相位表示，即

$$H(e^{jw}) = \left|H(e^{jw})\right| e^{j\varphi(w)}$$

$$\varphi(w) = \arg[H(e^{jw})]$$

显然，LSI系统对特征输入的加权分别表现在

幅度$\left|H(e^{jw})\right|$与相位$\varphi(w)$上，两者都随频率w的变化而变化。

若系统的输入为

$$x(n) = A\cos(w_0 n + \theta) = \frac{A}{2} e^{j\theta} e^{jw_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\theta} e^{-jw_0 n}$$

则

$$y(n) = \frac{A}{2}[H(e^{jw_0}) e^{j\theta} e^{jw_0 n} + H(e^{-jw_0}) e^{-j\theta} e^{-jw_0 n}] = A\left|H(e^{jw_0})\right| \cos[w_0 n + \theta + \varphi(w)]$$

系统输出仍为余弦，但幅度被振幅响应加权，相位也受相位响应的影响。

6.6 离散时间系统的频域分析

$$y_{zs}(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

$$y_{zs}(n)=IDTFT[H(e^{jw})X(e^{jw})]$$

例5.13 一LTI系统，其单位脉冲响应为

$$h[n] = a^n u[n] \qquad ,|a| < 1$$

假设该系统的输入是

$$x[n] = \beta^n u[n] \qquad ,|\beta| < 1$$

求 y [n]

解： 1、先求 $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$

$$\because \quad H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n]e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

同样可得 $$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n e^{-j\omega n} = \frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

则有 $$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-\beta e^{-j\omega})}$$

2、求y[n]最容易的做法是用部分分式将 $Y(e^{j\omega})$展开。

1） 若$a \neq \beta$（即无重根）时，有

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-\beta e^{-j\omega})}=\frac{A}{1-ae^{-j\omega}}+\frac{B}{1-\beta e^{-j\omega}}$$

等式两边同乘 $(1-ae^{-j\omega})$，并令 $e^{-j\omega}=\frac{1}{a}$，得 $A=\frac{a}{a-\beta}$

同样若等式两边同乘$(1-\beta e^{-j\omega})$，并令 $e^{-j\omega}=\frac{1}{\beta}$ ，得 $B=\frac{\beta}{\beta-a}$

因为， $a^n u[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$ ， $\beta^n u[n]\overset{F}{\longleftrightarrow}\frac{1}{1-\beta e^{-j\omega}}$

由此可得， $$y[n]=\frac{a}{a-\beta}a^n u[n]-\frac{\beta}{a-\beta}\beta^n u[n]$$

$$=\frac{1}{a-\beta}[a^{n+1}u[n]-\beta^{n+1}u[n]]$$

2）若 $a=\beta$ ，这时有重根，即

$$Y(e^{j\omega})=\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}=\frac{A_{11}}{(1-ae^{-j\omega})^2}+\frac{A_{12}}{1-ae^{-j\omega}}$$

等式两边同乘 $(1-ae^{-j\omega})^2$ ，并令 $e^{-j\omega}=1/a$ ，

$$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}(1-ae^{-j\omega})^2\Big|_{e^{-j\omega}=1/a}=A_{11}+A_{12}(1-ae^{-j\omega})\Big|_{e^{-j\omega}=1/a}$$

得 $A_{11}=1$ 。为了求 A_{12} ，可将上式对$e^{-j\omega}$求一阶导数，即得 $A_{12}=0$

则有 $(n+1)a^n u[n]\xleftrightarrow{F}Y(e^{j\omega})=\dfrac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$

也可用**频域微分性来求**。即

$$\because\quad \frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)=\frac{ae^{-j\omega}(-j)}{(1-ae^{-j\omega})^2}$$

得 $$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}=\frac{1}{ae^{-j\omega}(-j)}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)=\frac{j}{a}e^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)$$

其中 $a^n u[n] \xleftrightarrow{F} \dfrac{1}{1-ae^{-j\omega}}$

利用微分性可得

$$na^n u[n] \xleftrightarrow{F} j\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)$$

应用时移性质,可得

$$(n+1)a^{n+1}u[n+1] \xleftrightarrow{F} je^{j\omega}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)$$

考虑到还有 1/a因子后,得

$$(n+1)\frac{a^{n+1}}{a}u[n+1] \xleftrightarrow{F} j\frac{e^{j\omega}}{a}\frac{d}{d\omega}\left(\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}\right)$$

$$\therefore \quad y[n] = (n+1)a^n u[n+1]$$

注意到:虽然上式右边乘了一个起始于 n = - 1的阶跃，但在n = - 1时,(n+1)=0即 y [n] = 0 ,所以上式最后可写为 $y[n] = (n+1)a^n u[n]$ 可见结果相同

6.7 对偶性

可以看出：信号在时域的特性和在频域的特性之间存在以下对应关系：

时域的周期性 ⟷ 频域的离散性

时域的离散性 ⟷ 频域的周期性

时域的非周期性 ⟷ 频域的连续性

时域的连续性 ⟷ 频域的非周期性

对偶性

连续时间周期信号

$$\tilde{x}(t) \leftrightarrow a_k$$

时域采样 ↔

离散时间周期信号

$$\tilde{x}(n) \leftrightarrow a_k$$

频域采样 $a_k = \frac{1}{T} X(k\frac{2\pi}{T})$

对偶性

频域采样 $a_k = \frac{1}{N} X(k\frac{2\pi}{N})$

连续时间非周期信号

$$x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$$

时域采样 ↔

离散时间非周期信号

$$x(n) \leftrightarrow X(e^{j\omega})$$

对偶性

本章要点

- 离散时间非周期序列的傅立叶变换（DTFT）与反变换
- 离散时间系统的频域分析

作业

- Problems： 6.3(a);6.4(a,b);6.6;6.7(a,c,d)
-