

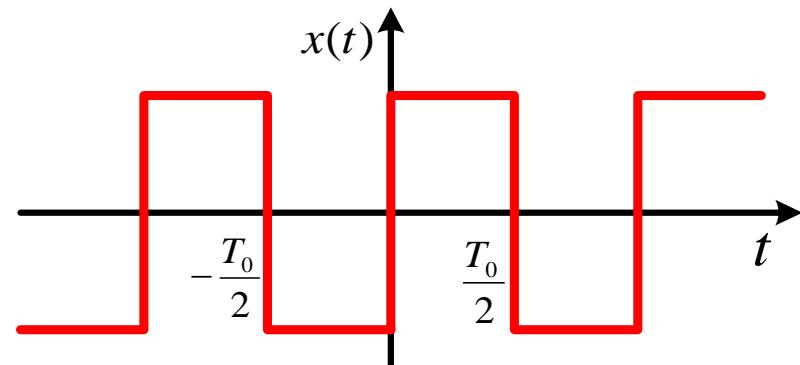
第4章 连续信号的傅里叶分析

频域变换

时域描述与频域描述

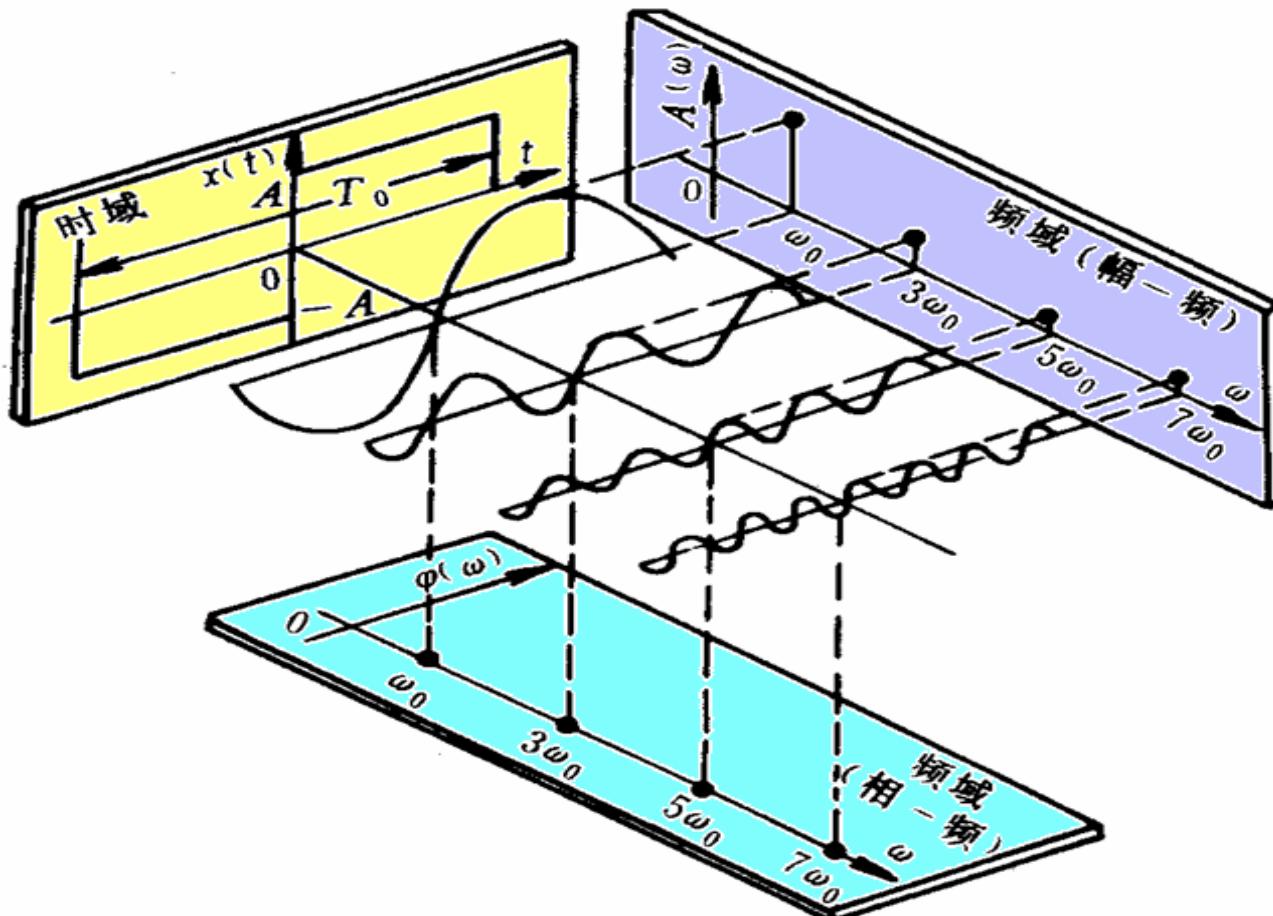
时域描述：直接观测或记录到的信号，以时间为独立变量的，称其为信号的时域描述。

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x(t + nT_0) \\ x(t) = \begin{cases} A & 0 < t < \frac{T_0}{2} \\ -A & -\frac{T_0}{2} < t < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$



时域描述与频域描述

频域描述：以频率作为变量的，称其为信号的频域描述。

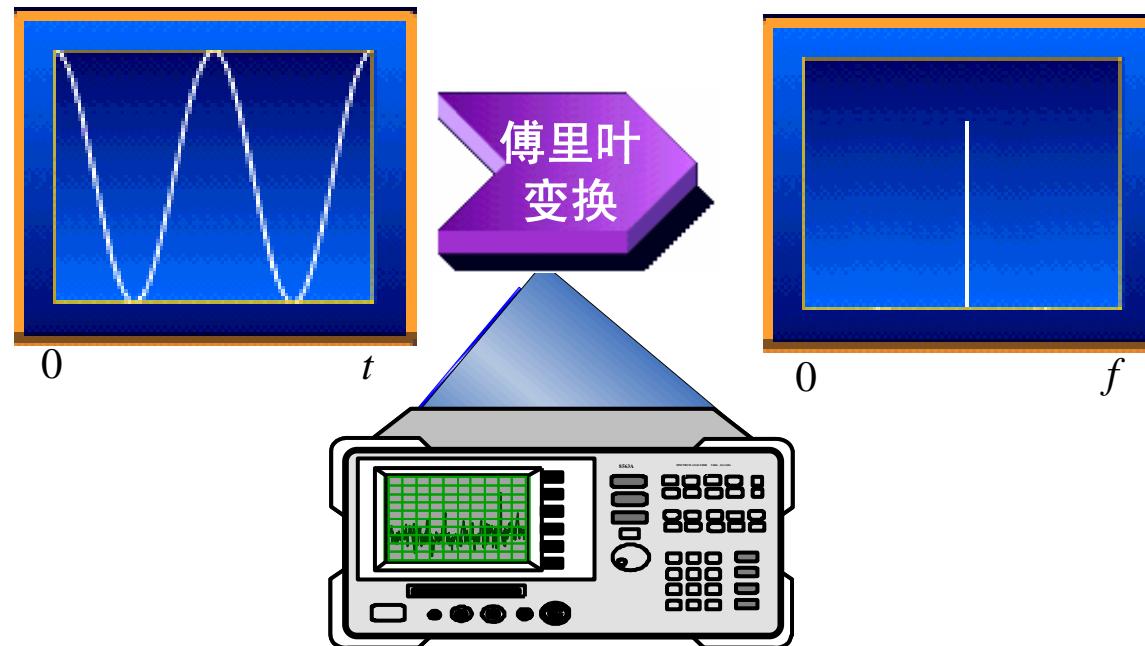


周期信号的频域描述

时域描述与频域描述

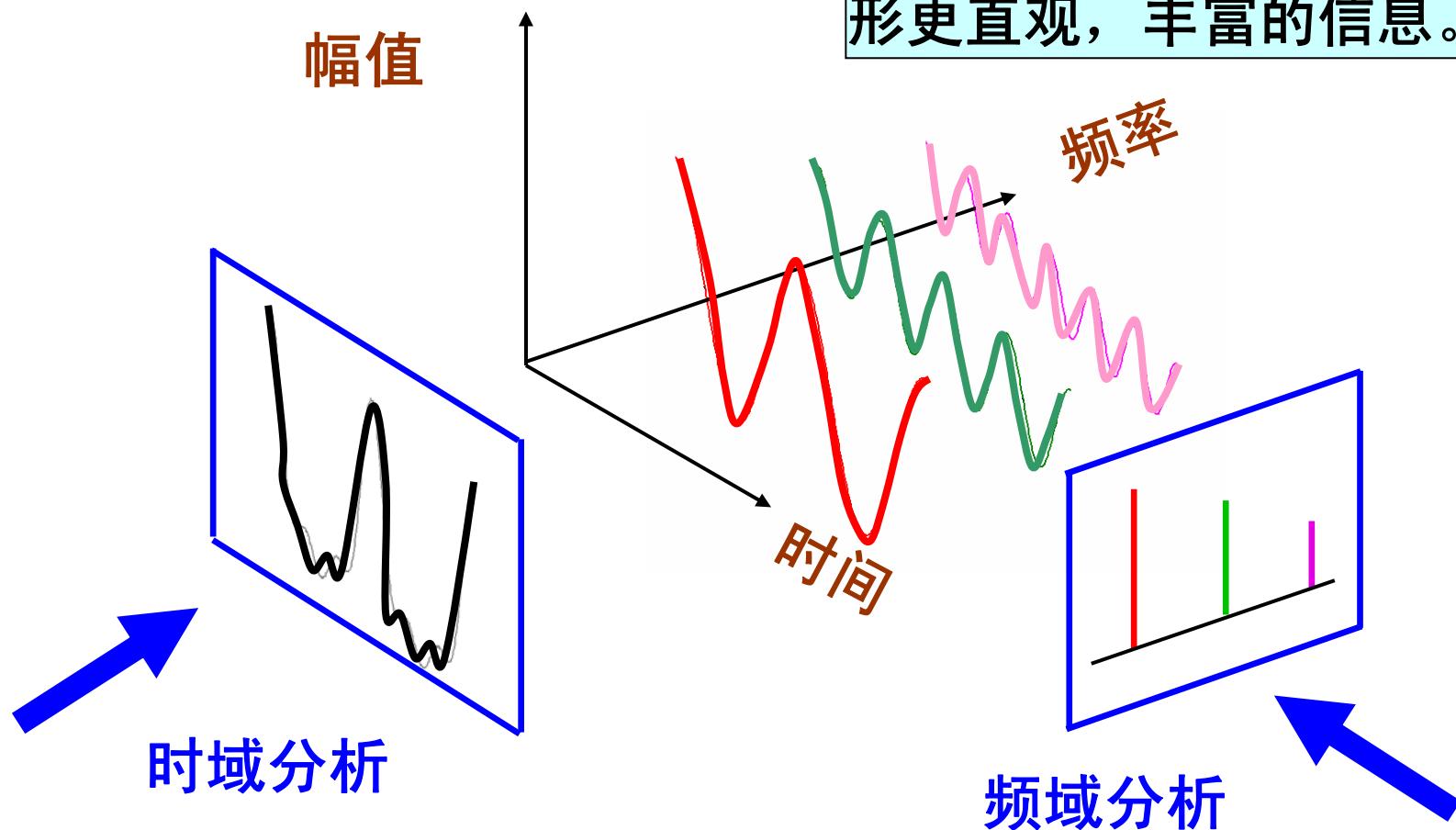
信号频域分析是采用傅立叶变换等方法将时域信号 $x(t)$ 变换为频域信号 $X(f)$ ，从而帮助人们从另一个角度来了解信号的特征。

$$x(t) = \sin(2\pi n f t)$$



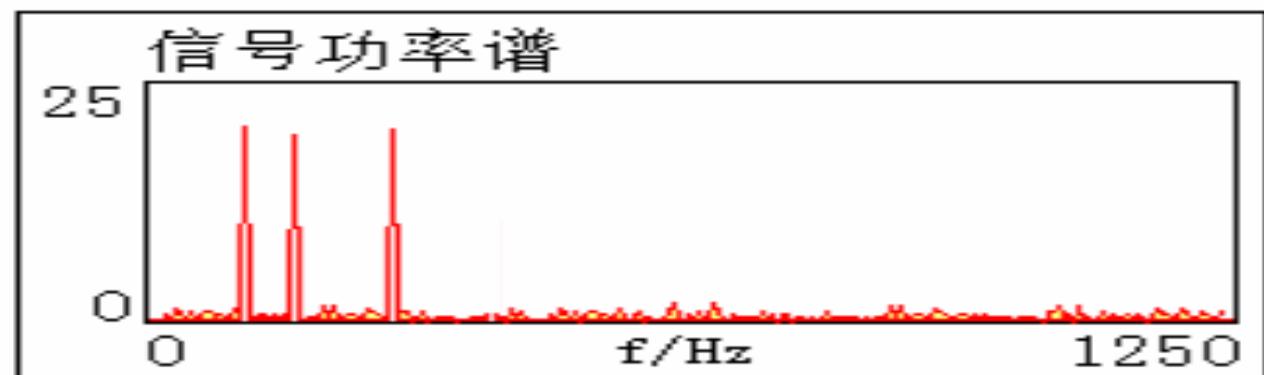
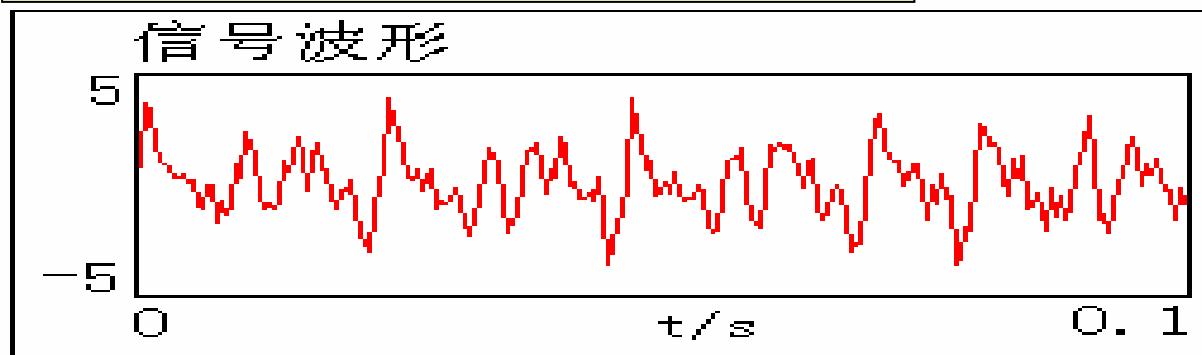
时域分析与频域分析的关系

信号频谱 $X(f)$ 代表了信号在不同频率分量成分的大小，能够提供比时域信号波形更直观，丰富的信息。

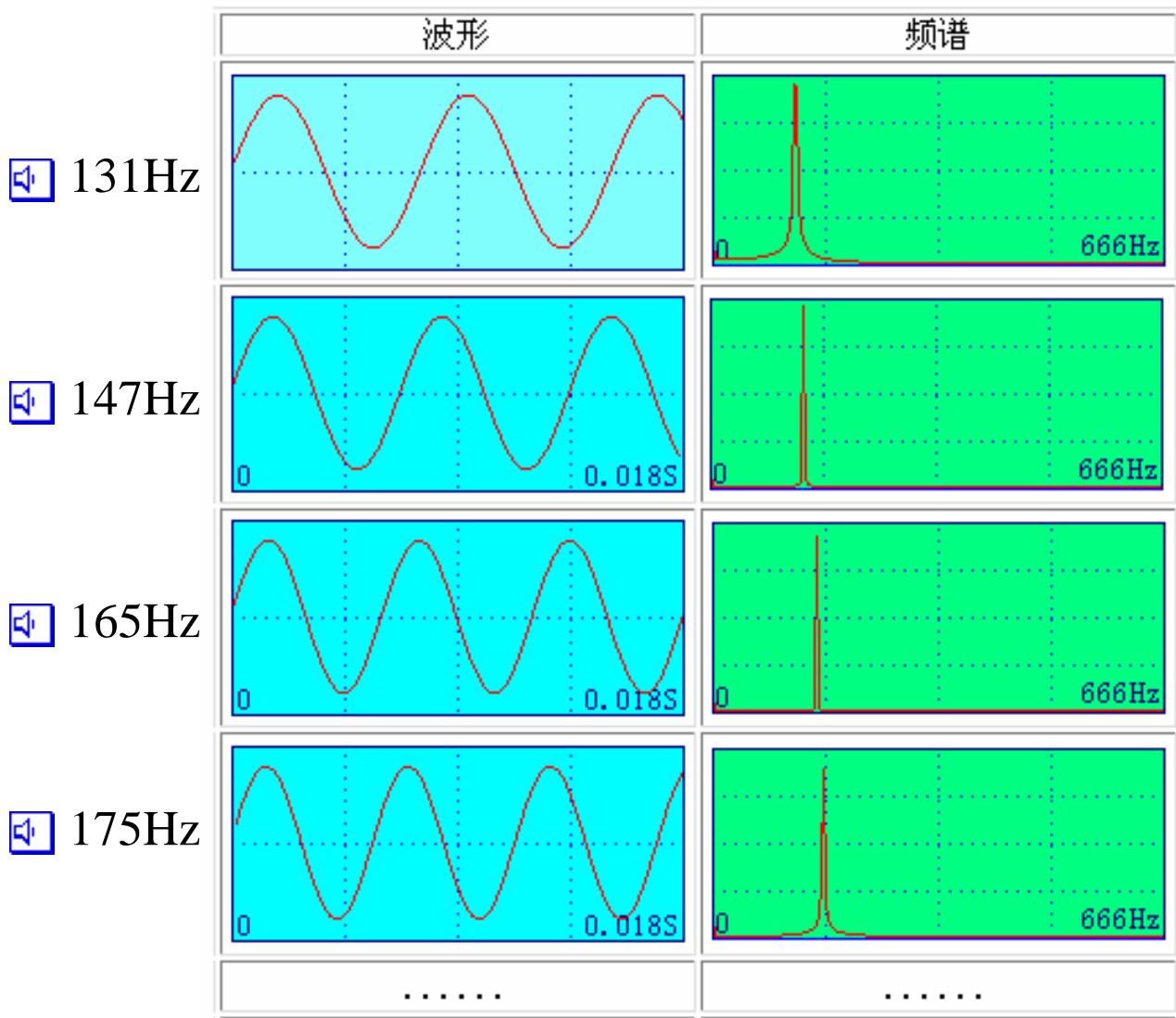


时域分析只能反映信号的幅值随时间的变化情况，除单频率分量的简谐波外，很难明确揭示信号的频率组成和各频率分量大小。

图例：受噪声干扰的多频率成分信号



时域和频域的对应关系



频域参数对应于设备转速、固有频率等参数，物理意义更明确。



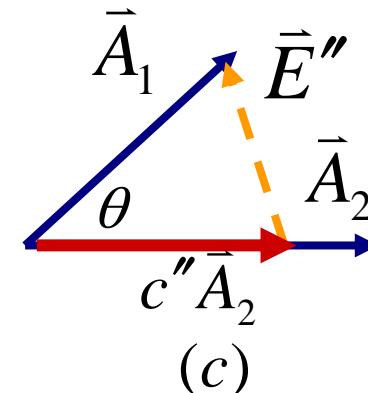
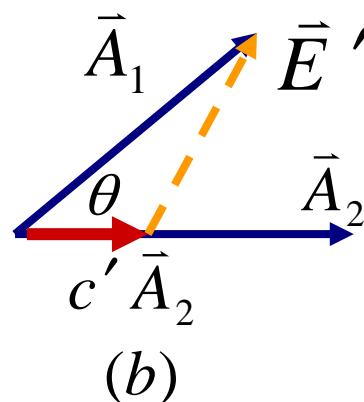
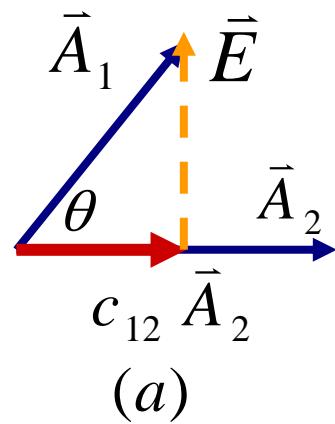
变换域分析——就是选取完备的正交函数集来最佳逼近信号 $f(t)$ ，或者说，信号 $f(t)$ 用完备的正交函数集来展开，其展开系数就是信号的变换表示。不同的变换域的区别就在于选取不同的正交完备集。

采用变换域分析的目的：主要是简化分析。这章付里叶变换主要从信号分量的组成情况去考察信号的特性。从而便于研究信号的传输和处理问题。

信号表示为正交函数分量的原理与矢量分解为正交矢量的概念类似。

一、矢量的分量和矢量的分解

图(a)中 $\vec{E} = \vec{A}_1 - C_{12}\vec{A}_2$



矢量 \vec{A}_1 在矢量 \vec{A}_2 上的分量示意图

图(a)中 $\vec{E} = \vec{A}_1 - C_{12}\vec{A}_2$

\vec{E} ——用分量 $C_{12}\vec{A}_2$ 来近似代表原矢量 \vec{A}_1 的误差矢量。

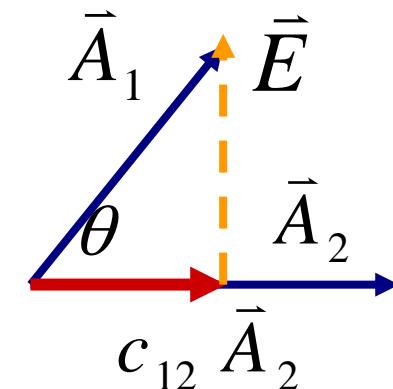
图(b)、(c)中 $c'\vec{A}_2, c''\vec{A}_2$ 为 \vec{A}_1 在 \vec{A}_2 上的斜投影，可有无穷多个斜投影，用斜投影近似代表原矢量 \vec{A}_1 时， \vec{E}', \vec{E}'' 都大于 \vec{E} 。

结论：若用一矢量的分量去代表原矢量而误差矢量最小，则这个分量只能是原矢量的垂直投影。

从几何图上可得：

$$C_{12}A_2 = A_1 \cos \theta = \frac{A_1 A_2 \cos \theta}{A_2} = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{A_2}$$

$$C_{12} = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{\vec{A}_2 \cdot \vec{A}_2} = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{A_2^2}$$



(a)

从解析角度：

$$|\vec{E}|^2 = |\vec{A}_1 - C_{12}\vec{A}_2|^2$$

则令 $\frac{\partial}{\partial C_{12}} |\vec{A}_1 - C_{12}\vec{A}_2|^2 = 0$ 也可导出 $C_{12} = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{A_2^2}$

C_{12} ——是在最小平方误差的意义上标志着 \vec{A}_1 和 \vec{A}_2 相互近似程度。

例如：

\vec{A}_1 和 \vec{A}_2 相同时, $C_{12} = 1$

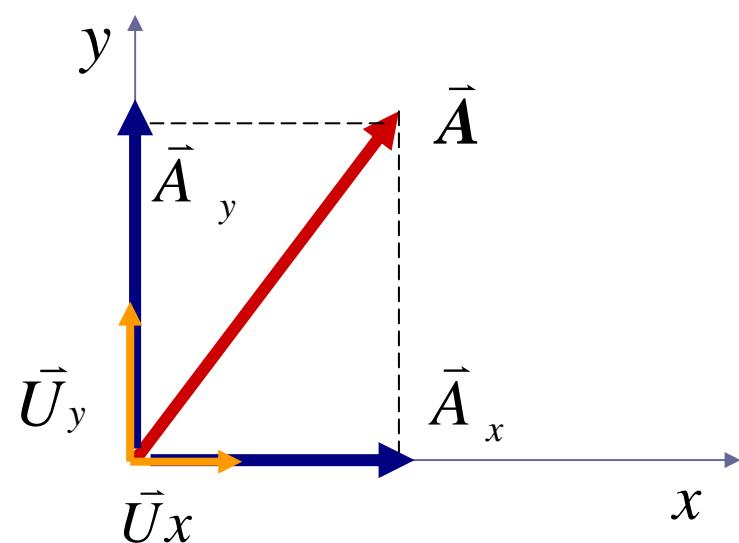
$$\vec{A}_1 \perp \vec{A}_2 \text{ 时, } C_{12} = \frac{A_1 \cdot A_2 \cos \frac{\pi}{2}}{A_2^2} = 0$$

由图 (a) 还可看出,

$$\vec{A}_1 = C_{12} \vec{A}_2 + \vec{E}$$

其中 $\vec{A}_2 \perp \vec{E}$, \vec{A}_2 与 \vec{E} 组成一正交矢量。

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$



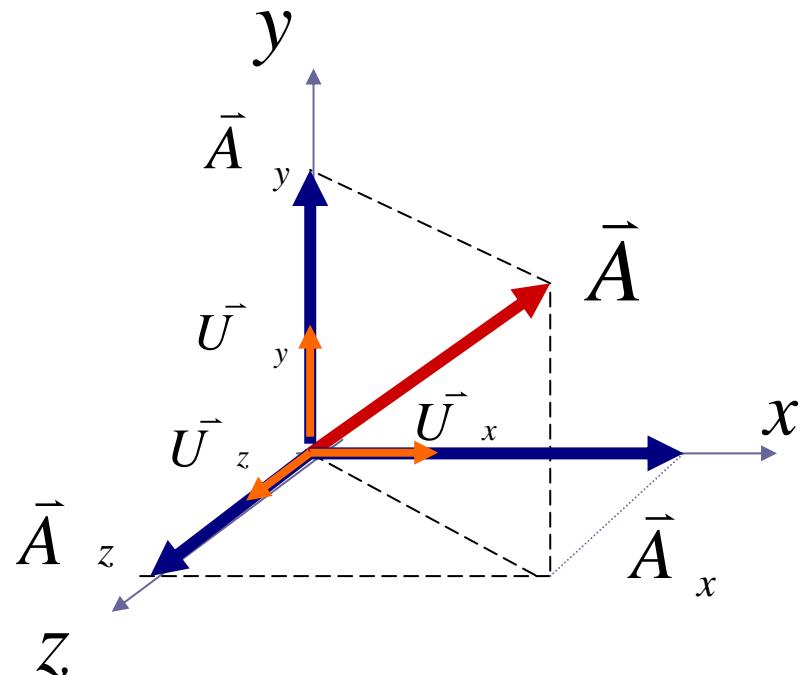
平面矢量分解图

$$\begin{cases} |\vec{A}_x| = \vec{A} \cdot \vec{U}_x \\ |\vec{A}_y| = \vec{A} \cdot \vec{U}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{U}_x \cdot \vec{U}_x = \vec{U}_y \cdot \vec{U}_y = 1 \\ \vec{U}_x \cdot \vec{U}_y = 0 \end{cases}$$

\vec{U}_x 和 \vec{U}_y 是一组模为1的正交矢量

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$



空间中的矢量分解图

$$\begin{cases} A_x = \vec{A} \cdot \vec{U}_x \\ A_y = \vec{A} \cdot \vec{U}_y \\ A_z = \vec{A} \cdot \vec{U}_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{U}_x \cdot \vec{U}_x = \vec{U}_y \cdot \vec{U}_y = \vec{U}_z \cdot \vec{U}_z = 1 \\ \vec{U}_x \cdot \vec{U}_y = \vec{U}_y \cdot \vec{U}_z = \vec{U}_z \cdot \vec{U}_x = 0 \end{cases}$$

矢量空间的概念可以引申到n维。设n维正交矢量集为

$$\left\{ \vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3, \dots, \vec{V}_n \right\}$$

即 $\vec{V}_m \cdot \vec{V}_m = K_m$ (V_m 不为单位矢量)

$$\vec{V}_l \cdot \vec{V}_m = 0 \quad (l \neq m)$$

则 $A = C_1 \vec{V}_1 + C_2 \vec{V}_2 + \dots + C_r \vec{V}_r + \dots + C_n \vec{V}_n$

$$C_r = \frac{\vec{A} \cdot \vec{V}_r}{K_r} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{V}_r}{\vec{V}_r \cdot \vec{V}_r}$$

二. 信号的分量和信号的分解

信号常以时间函数表示，所以信号的分解指的就是函数的分解。

1、函数的分量

设在区间 $t_1 < t < t_2$ 内，用函数 $f_1(t)$ 在另一函数 $f_2(t)$ 中的分量 $C_{12}f_2(t)$ 来近似的代表原函数 $f_1(t)$ 。

$$f_1(t) \approx C_{12}f_2(t) \quad t_1 < t < t_2$$

C_{12} 取何值时，得到最佳近似？



选择误差函数 $\varepsilon_\Delta(t)$ 的均方值为最小。

即 $\varepsilon_\Delta(t) = f_1(t) - c_{12}f_2(t)$

均方值为

$$\overline{\varepsilon_\Delta^2} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \varepsilon_\Delta^2(t) dt$$

求此值最小时的 C_{12}

令

$$\frac{\partial}{\partial c_{12}} \int_{t_1}^{t_2} [f_1(t) - c_{12} f_2(t)]^2 dt = 0$$

解得

$$c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2^2(t) dt}$$

矢量分解

$$C_{12} = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{|\vec{A}_2|^2}$$

c_{12} ——是在最小方均误差的意义上代表二函数 $f_1(t)$

和 $f_2(t)$ 间的相关联的程度。

$$C_{12} = 0 \quad \int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2(t) dt = 0$$

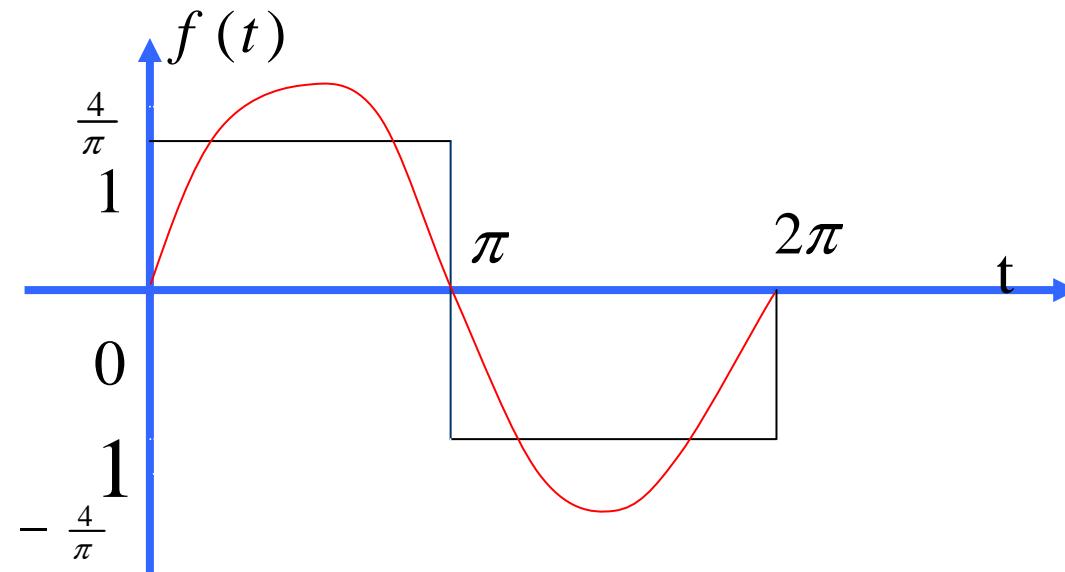
称 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内为正交，构成
了一个正交函数集。

$$C_{12} = 0 \quad \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = 0 \Rightarrow \vec{A}_1 \perp \vec{A}_2$$

称 \vec{A}_1 与 \vec{A}_2 正交，组成正交矢量。

例1：设矩形脉冲 $f(t) = \begin{cases} +1 & (0 < t < \pi) \\ -1 & (\pi < t < 2\pi) \end{cases}$

试用正弦函数 $\sin t$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内来近似表示此函数，使均方误差最小。



解: $f(t)$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内近似为 $f(t) \approx c_{12} \sin t$

$$\begin{aligned}
 c_{12} &= \frac{\int_0^{2\pi} f(t) \sin t dt}{\int_0^{2\pi} \sin^2 t dt} \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^\pi \sin t dt + \int_\pi^{2\pi} (-\sin t) dt \right] \\
 &= \frac{4}{\pi}
 \end{aligned}$$

所以 $f(t) \approx \frac{4}{\pi} \sin t$

例2：试用函数 $f_1(t) = \sin t$ 在区间 $(0, 2\pi)$

内近似表示 $f_2(t) = \cos t$

解: $\because \int_0^{2\pi} \cos t \cdot \sin t dt = 0$

$$\therefore C_{12} = 0$$

也即 $\cos t$ 不包含 $\sin t$ 分量，或者说 $\cos t$ 与 $\sin t$ 正交。

2、正交信号空间

设n个函数 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ 构成一函数集，如在区间 (t_1, t_2) 内满足下列正交特性：

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t)g_j(t)dt = 0 \quad (i \neq j)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} |g_i(t)|^2 dt = K_i \quad \text{——常数}$$

则称此函数集为正交函数集，这n个 $g_i(t)$ 构成一个n维正交信号空间。任意一个代表信号的函数f(t)，在区间 (t_1, t_2) 内可以用组成信号空间的n个正交函数的线性组合来近似。

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^n C_i g_i(t)$$

$$\text{理论上讲 } f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n C_i g_i(t)$$

在使近似式的均方误差最小条件下，可求得

$$C_i = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_i(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) dt}$$

均方误差

$$\overline{\epsilon^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)]^2 dt$$



3、用完备正交函数集表示信号

定义1：

- 如果用正交函数集 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 近似表示函数 $f(t) \approx \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)$
- 均方误差为 $\overline{\varepsilon_\Delta^2(t)} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - \sum_{r=1}^n c_r g_r(t)]^2 dt$
- 若令 n 趋于无限大, $\overline{\varepsilon_\Delta^2(t)}$ 的极限等于零 $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\varepsilon_\Delta^2(t)} = 0$
- 则此函数集称为完备正交函数集

定义2:

如果在正交函数集 $g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t)$ 之外,
不存在函数 $x(t)$

$$0 < \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt < \infty$$

满足等式 $\int_{t_1}^{t_2} x(t) g_i(t) dt = 0$ i为任意整数

则此函数集称为完备正交函数集。



这有两层意思：

1, 如果 $x(t)$ 在区间内与 $g_i(t)$ 正交，则 $x(t)$ 必属于这个正交集。

2, 若 $x(t)$ 与 $g_i(t)$ 正交，但 $g_i(t)$ 中不包含 $x(t)$ ，则此集不完备。

4、复变函数的正交特性。

若 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 是 t 的复变函数，则有关正交特性的描述如下：

若 $f_1(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内可由 $C_{12}f_2(t)$ 来近似，使均方误差幅度最小的 C_{12} 之最佳值是

$$C_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t) dt}$$

f_2^* 为 f_2 的复共轭

两个复变函数 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 在区间 (t_1, t_2) 内互相正交的条件是：

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t) f_2(t) dt = 0$$

如果在区间 (t_1, t_2) 内，复变函数集 $\{g_i(t)\}$,

$$i = 1, 2, \dots, n$$

满足

$$\begin{cases} \int_{t_1}^{t_2} g_m(t) {g_m}^*(t) dt = k_m \\ \int_{t_1}^{t_2} g_l(t) {g_m}^*(t) dt = 0 \quad l \neq m \end{cases}$$

则称此为正交函数集

例: (1) 三角函数集为完备正交函数集。

$$\left\{ 1, \cos \omega_1 t, \cos 2\omega_1 t, \dots \cos n\omega_1 t, \dots, \sin \omega_1 t, \sin 2\omega_1 t, \dots \sin n\omega_1 t, \dots \right\}$$

例: (2) 复指数函数集

$$\left\{ e^{jn\omega_1 t} \right\} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

是一个复变函数集，也是完备正交函数集。

主要内容

- 周期信号的傅里叶级数表示
- 常用周期信号的频谱
- 非周期信号的频谱---傅里叶变换
- 傅里叶变换的性质
- 抽样定理

3.0 引言

第二章是在时域中对信号和系统进行了分析。

- 1、将离散时间信号分解成移位单位脉冲的加权和；
- 2、将连续时间信号分解成移位单位冲激的加权积分。
- 3、利用LTI系统的线性与时不变特性，导出了卷积和与卷积积分。

从而解决了LTI系统在时域进行分析的方法问题。

这种方法的好处是：

- 1、使我们在已知系统单位冲激响应和给定系统输入的条件下，计算LTI系统的响应时变得十分方便。
- 2、揭示了LTI系统对任意输入信号的响应是由系统对构成输入信号的基本信号单元的响应组合而成的。

$$y[n] = x[n] * h[n] \quad y(t) = x(t) * h(t)$$

因此，我们可以把系统的性质与单位冲激响应的特性相联系，并通过对单位冲激响应的研究来详细分析LTI系统的特性。

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n-k]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$$

4.0 引言 Introduction

时域分析方法的基础：

- 1) 信号在时域的分解。
- 2) LTI系统满足线性、时不变性。

从分解信号的角度出发，基本信号单元必须满足两个要求：

1. 本身简单，且LTI系统对它的响应能简便得到。
2. 具有普遍性，能够用以构成相当广泛的信号。

下面将讨论信号与系统的另一种分析方法——频域分析法。

频域分析法的基本思想：

设法将信号分解成一组基本信号单元的加权和或加权积分，进而利用LTI系统的线性和时不变性解决系统分析问题。

与时域分析所不同的是：

频域分析法中利用复指数信号作为分解信号的基本单元。

信号的这种表示就是连续时间和离散时间傅里叶级数与傅里叶变换。因此频域分析又称为傅里叶分析。

将会看到，这些表示法能用来构成范围相当广泛而有用的一类信号。

4.1历史的回顾 (A Historical Perspective)



1768—1830

- 1768年生于法国
- 1807年提出“任何周期信号都可以用正弦函数的级数来表示”
- 拉格朗日反对发表
- 1822年首次发表“热的分析理论”
- 1829年狄里赫利第一个给出收敛条件

傅里叶的两个最重要的贡献——

- “周期信号都可以表示为成谐波关系的正弦信号的加权和”
—傅里叶的第一个主要论点
- “非周期信号都可以用正弦信号的加权积分来表示”
—傅里叶的第二个主要论点

3.2 LTI系统对复指数信号的响应

在研究LTI系统时,将信号表示成基本信号的线性组合是很有利的,但这些基本信号应具有以下两个性质:

- 1、由这些基本信号能够构成相当广泛的一类有用信号;
- 2、LTI系统对每一个基本信号的响应该十分简单,使得系统对任意输入信号的响应有一个很方便的表示式。

连续和离散时间复指数信号集都具有上述两个性质。 (e^{st}, z^n) 其中: s 和 z 都是复数) $x(t) = ce^{at}$ $x[n] = Ca^n$

- 一个LTI系统对复指数信号的响应也同样是一个复指数信号,不同的只是在幅度上的变化;也就是说:

连续时间: $e^{st} \rightarrow H(s)e^{st}$

离散时间: $z^n \rightarrow H(z)z^n$

其中: $H(s)$ 或 $H(z)$ 是一个复振幅因子——称特征值。

特征函数——若系统对一个信号的输出响应仅是一个常数(可能是复数)乘以输入,则该信号称为系统的**特征函数**。

为了证明复指数 e^{st} 确实是LTI系统的特征函数,设输入信号为 $x(t) = e^{st}$, 系统的单位冲激响应为 $h(t)$,
 则有

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau = e^{st} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau \\ &= H(s)e^{st} \end{aligned}$$

其中假设 $H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$ ——若积分收敛, 其值即是一个由S确定的复常数.

这表明LTI系统对复指数信号的响应仍然是同样的复指数信号,系统所起的作用只是改变了复指数的幅度。

从而证明了复指数 e^{st} 是LTI系统的特征函数。

用同样的方法证明：复指数序列也是离散时间LTI系统的特征函数；

设LTI系统的单位脉冲响应为 $h[n]$, 输入序列为 $x[n] = z^n$ ，式中 z 为某一复数。则系统的输出为

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k} = H(z)z^n$$

其中: $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$ ——其值由 z 决定。

假设上式右边的求和收敛，则系统输出就是同一复指数乘以一个常数。所以，输入的复指数信号就是离散时间LTI系统的特征函数；

- 如果令 $x(t)$ 是三个复指数信号的线性组合，即

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + a_3 e^{s_3 t}$$

根据特征函数的性质，系统对每一个分量的响应分别是 $a_1 e^{s_1 t} \rightarrow a_1 H(s_1) e^{s_1 t}$

$$a_2 e^{s_2 t} \rightarrow a_2 H(s_2) e^{s_2 t}$$
$$a_3 e^{s_3 t} \rightarrow a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

再根据叠加性质，系统的总响应就是各分量响应的和，因而

$$y(t) = a_1 H(s_1) e^{s_1 t} + a_2 H(s_2) e^{s_2 t} + a_3 H(s_3) e^{s_3 t}$$

结论：1、在连续时间情况下，若系统的输入可表示为复指数的线性组合，即

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t}$$

那么输出就一定是

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}$$

2、在离散时间情况下，若系统的输入可表示为复指数的线性组合，即

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n$$

那么输出就一定是

$$y[n] = \sum_k a_k H(z_k) z_k^n$$

***问题：究竟有多大范围的信号可以用复指数信号的线性组合来表示？下面先看周期信号**

4.3 连续时间周期信号的傅里叶级数表示

一. 连续时间傅里叶级数

成谐波关系的复指数信号集: $\Phi_k(t) = \{e^{jk\omega_0 t}\}$

其中每个信号都是以 $\frac{2\pi}{|k\omega_0|}$ 为周期的，它们的公共周期为 $\frac{2\pi}{|\omega_0|}$ ，且该集合中所有的信号都是彼此独立的。

如果将该信号集中所有的信号线性组合起来，有

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

显然 $x(t)$ 也是以 $\frac{2\pi}{|\omega_0|}$ 为周期的。该级数就是傅里叶级数， a_k 为傅立叶级数的系数。

若 $x(t)$ 是一个实信号， $a_k^* = a_{-k}$

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k e^{jk\omega_0 t} + a_k^* e^{-jk\omega_0 t}]$$

这表明用傅里叶级数可以表示连续时间周期信号，即：连续时间周期信号可以分解成无数多个复指数谐波分量。

例1: $x(t) = \cos \omega_0 t = \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} e^{-j\omega_0 t}$

显然该信号中，有两个谐波分量， $a_{\pm 1} = \frac{1}{2}$ 为相应分量的加权因子。

例2: $x(t) = \cos \omega_0 t + 2 \cos 3\omega_0 t$

$$= \frac{1}{2} [e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}] + e^{j3\omega_0 t} + e^{-j3\omega_0 t}$$

在该信号中，有四个谐波分量，即 $k = \pm 1, \pm 3$ ，时对应的谐波分量。

傅里叶级数表明：连续时间周期信号可以按傅立叶级数被分解成无数多个复指数谐波分量的线性组合。

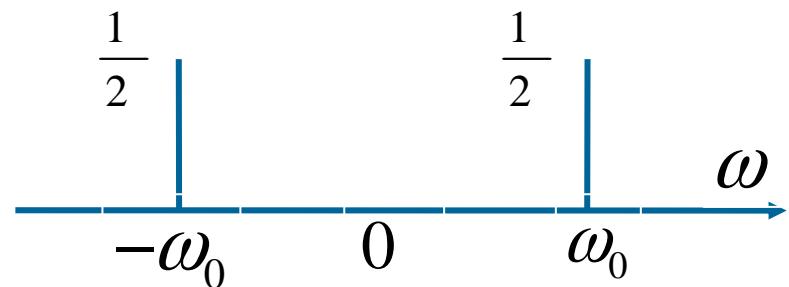
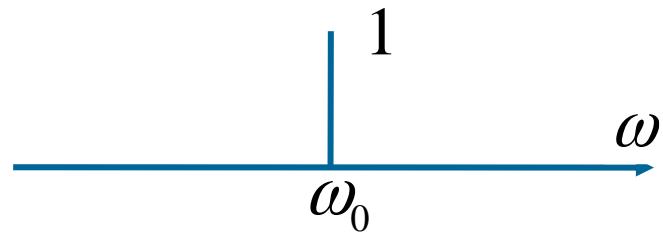
二. 频谱 (Spectral) 的概念

信号集 $\Phi_k(t)$ 中的每一个信号，除了成谐波关系外，每个信号随时间 t 的变化规律都是一样的，差别仅仅是频率不同。

在傅里叶级数中，各个信号分量（谐波分量）间的区别也仅仅是幅度（可以是复数）和频率不同。因此，可以用一根线段来表示某个分量的幅度，用线段的位置表示相应的频率。

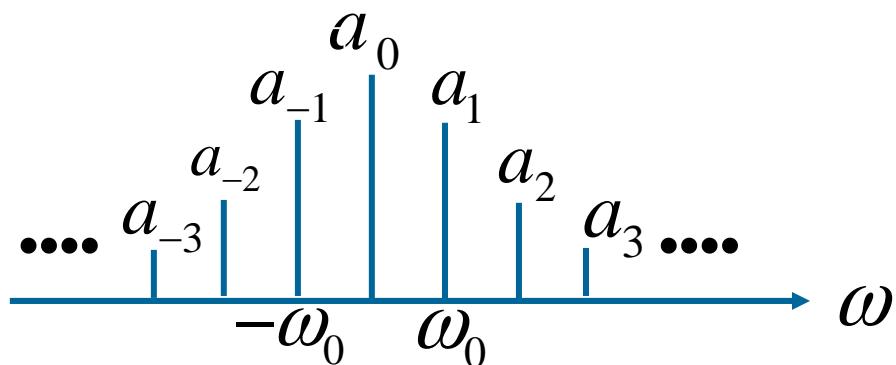
分量 $e^{j\omega_0 t}$ 可表示为

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$



因此，当把周期信号 $x(t)$ 表示为傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}$$
 时，就可以将 $x(t)$ 表示为



这样绘出的图
称为频谱图

重点内容

- 三角函数形式的傅氏级数
- 指数函数形式的傅氏级数
- 两种傅氏级数的关系
- 频谱图
- 函数的对称性与傅里叶级数的关系

一. 三角函数形式的傅里叶级数

1. 三角函数集

$\{\cos(n\omega_0 t), \sin(n\omega_0 t)\}$ 是一个完备的正交函数集

t 在一个周期内 , $n=0,1,\dots,\infty$

由积分可知

但 $\sin 0^\circ = 0$ 不记在三角函数集中

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = 0$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \cos(n\omega_0 t) \cdot \cos(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin(n\omega_0 t) \cdot \sin(m\omega_0 t) dt = \begin{cases} \frac{T}{2}, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

2. 级数形式

周期信号 $f(t)$, 周期为 T_0 , 基波角频率为 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

在满足狄氏条件时, 可展成

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (1)$$

称为三角形式的傅里叶级数, 其系数

直流分量

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) dt$$

余弦分量的幅度

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

正弦分量的幅度

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

例1

求周期锯齿波的三角函数形式的傅里叶级数展开式。

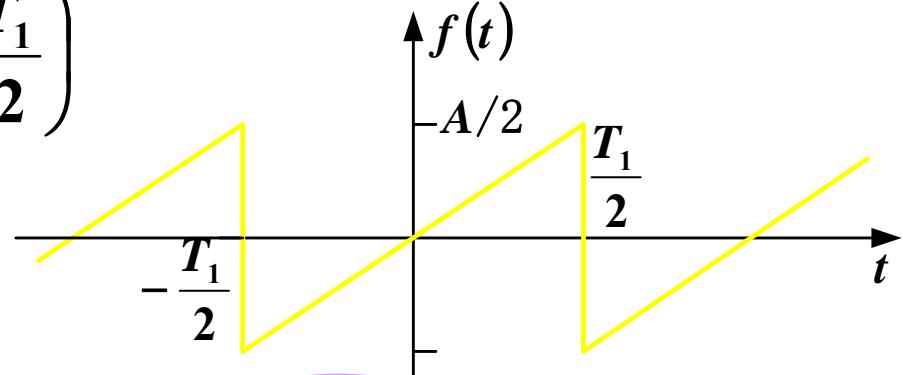
解答

$$f(t) = \frac{A}{T_1} t \quad \left(-\frac{T_1}{2} \leq t \leq \frac{T_1}{2} \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \frac{A}{T_1} t dt = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \frac{A}{T_1} t \cos(n\omega_1 t) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} \frac{A}{T_1} t \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{A}{n\pi} (-1)^{n+1} \quad n = 1, 2, 3 \dots$$



$$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

周期锯齿波的傅里叶级数展开式为

$$f(t) = 0 + \frac{A}{\pi} \sin \omega_1 t - \frac{A}{2\pi} \sin 2\omega_1 t - \dots$$

直流

基波

谐波

其他形式

余弦形式

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) \quad (2)$$

$$c_0 = a_0$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

$$a_n = c_n \cos \varphi_n \quad b_n = -c_n \sin \varphi_n$$

正弦形式

$$f(t) = d_0 + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin(n\omega_0 t + \theta_n)$$

$$d_0 = a_0$$

$$d_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

$$a_n = d_n \sin \theta_n \quad b_n = d_n \cos \theta_n$$

幅度频率特性和相位频率特性

周期信号可分解为直流，基波（ ω_0 ）和各次谐波（ $n\omega_0$: 基波角频率的整数倍）的线性组合。

$c_n \sim \omega$ 关系曲线称为幅度频谱图；

$\varphi_n \sim \omega$ 关系曲线称为相位频谱图。

可画出频谱图。

周期信号频谱具有离散性、谐波性、收敛性。

二. 指数函数形式的傅里叶级数

1. 复指数正交函数集 $\{e^{jn\omega_0 t}\} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

2. 级数形式 $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (4)$

3. 系数

利用复变函数的正交特性

$$\begin{aligned} F(n\omega_0) &= \frac{\int_0^{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt}{\int_0^{T_0} e^{jn\omega_0 t} e^{-jn\omega_0 t} dt} \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5) \end{aligned}$$

也可写为
 F_n

说明

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t} \quad (4)$$

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (5)$$

•周期信号可分解为 $(-\infty, \infty)$ 区间上的指数信号 $e^{jn\omega_0 t}$ 的线性组合。

•如给出 $F(n\omega_0)$, 则 $f(t)$ 惟一确定,(4)、(5)式是一对变换对。

三. 两种系数之间的关系及频谱图

$$F(n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

利用欧拉公式

$$= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt - j \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{2} (a_n - jb_n)$$

$$F(-n\omega_0) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt + j \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$= \frac{1}{2} (a_n + jb_n)$$

$F(n\omega_0), F(-n\omega_0)$ 是复数

$$F(n\omega_0) = |F(n\omega_0)| e^{j\varphi_n}$$

幅频特性和相频特性

幅频特性

$$|F(n\omega_0)| = \frac{1}{2} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{1}{2} c_n$$

相频特性

$$\varphi_n = \arctan\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

a_n

关于 ω 的偶函数 (实际 n 取正值)

b_n

关于 ω 的奇函数 (实际 n 取正值)

$|F(n\omega_0)|$

关于 ω 的偶函数

$\varphi(n\omega_0)$

关于 ω 的奇函数

频谱图

幅度频谱

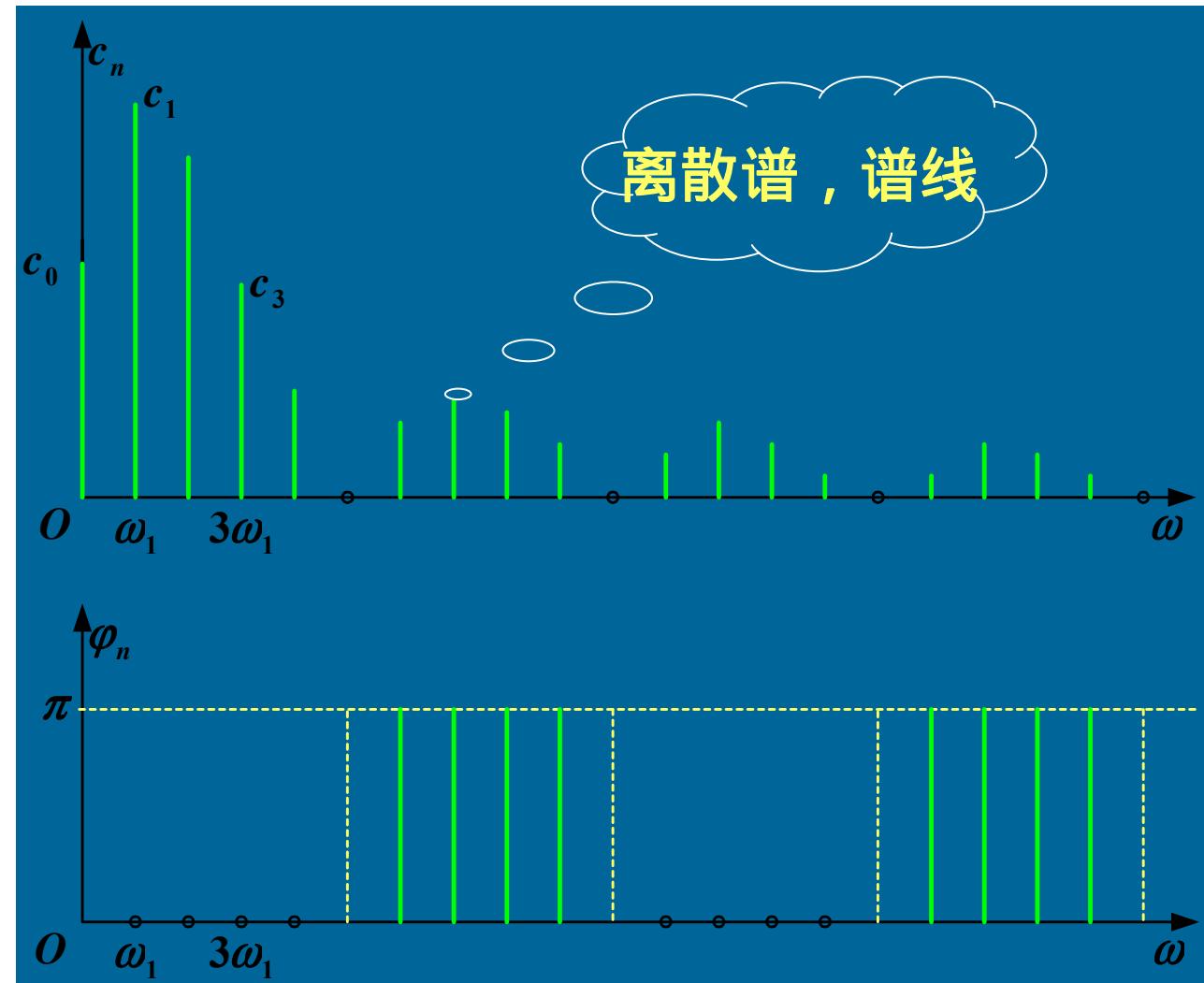
$$c_n \sim \omega$$

或

$$|F_n| \sim \omega \text{ 曲线}$$

相位频谱

$$\varphi_n \sim \omega \text{ 曲线}$$



总结

(1) 周期信号 $f(t)$ 的傅里叶级数有两种形式

三角形式
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)]$$
$$= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

指数形式
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_0) e^{jn\omega_0 t}$$

(2) 两种频谱图的关系

- 三角函数形式： $c_n \sim \omega$, $\varphi_n \sim \omega$ **单边频谱**

指数函数形式 $|F_n| \sim \omega$, $\varphi_n \sim \omega$ **双边频谱**

关系 $|F(n\omega_0)| = \frac{1}{2}c_n (n \neq 0)$ $F_0 = c_0 = a_0$

- 指数形式的幅度频谱为偶函数

$$|F(n\omega_0)| = |F(-n\omega_0)|$$

- 相位频谱为奇函数

$$\varphi(n\omega_0) = -\varphi(-n\omega_0)$$

例2

已知 $f(t) = 1 + \sin \omega_1 t + 2 \cos \omega_1 t + \cos\left(2\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right)$,

请画出其幅度谱和相位谱。

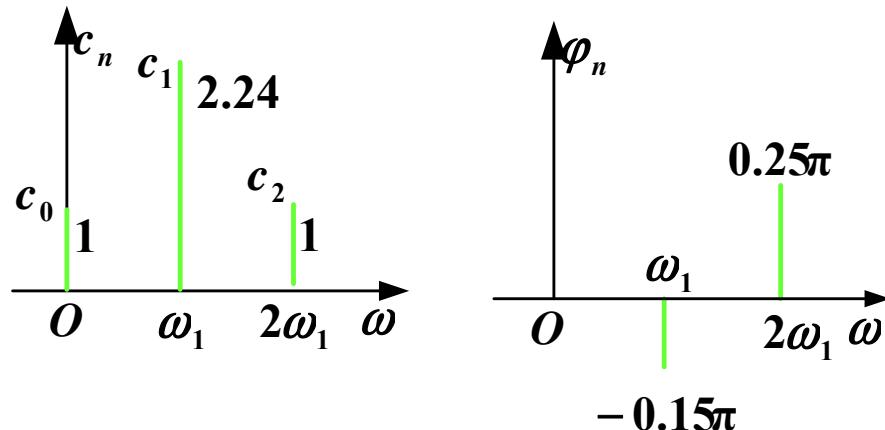
解答

化为余弦形式

$$f(t) = 1 + \sqrt{5} \cos(\omega_1 t - 0.15\pi) + \cos\left(2\omega_1 t + \frac{\pi}{4}\right)$$

三角函数形式的傅里叶级数的谱系数

三角函数形式的频谱图



$$c_0 = 1$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$c_1 = \sqrt{5} = 2.236 \quad \varphi_1 = -0.15\pi$$

$$c_2 = 1$$

$$\varphi_2 = 0.25\pi$$

化为指数形式

整理

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 + \frac{1}{2j} \left(e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t} \right) \\ &\quad + \frac{2}{2} \left(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t} \right) + \frac{1}{2} \left[e^{\left(2j\omega_1 t + \frac{\pi}{4} \right)} + e^{-\left(2j\omega_1 t + \frac{\pi}{4} \right)} \right] \\ f(t) &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2j} \right) e^{j\omega_1 t} + \left(1 - \frac{1}{2j} \right) e^{-j\omega_1 t} + \frac{1}{2} e^{\frac{j\pi}{4}} e^{j2\omega_1 t} + \frac{1}{2} e^{-\frac{j\pi}{4}} e^{-j2\omega_1 t} \\ &= \sum_{n=-2}^2 F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \end{aligned}$$

指数形式的傅里叶级数的系数

$$\begin{array}{lll} F(0) = 1 & F(\omega_1) = \left(1 + \frac{1}{2j} \right) = 1.12 e^{-j0.15\pi} & F(2\omega_1) = \frac{1}{2} e^{\frac{j\pi}{4}} \\ F(-\omega_1) = \left(1 - \frac{1}{2j} \right) = 1.12 e^{j0.15\pi} & & F(-2\omega_1) = \frac{1}{2} e^{-\frac{j\pi}{4}} \end{array}$$

谱线

$$F_0 = |F(0)| = 1$$

$$\varphi_0 = 0$$

$$F_1 = |F(\omega_1)| = 1.12$$

$$\varphi_1 = -0.15\pi$$

$$F_{-1} = |F(-\omega_1)| = 1.12$$

$$\varphi_{-1} = 0.15\pi$$

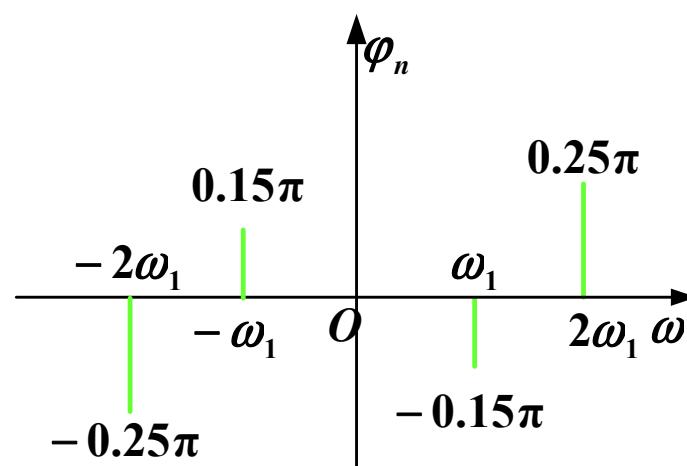
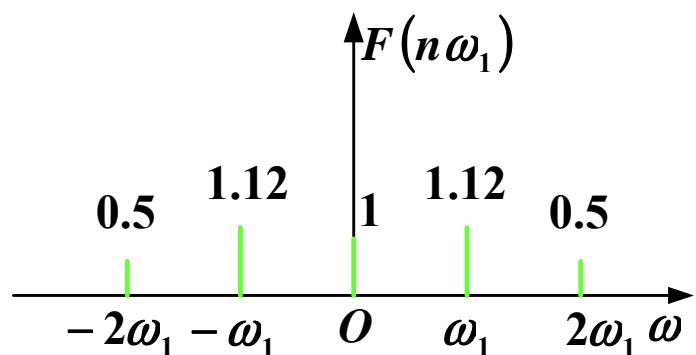
$$F_2 = |F(2\omega_1)| = 0.5$$

$$\varphi_2 = 0.25\pi$$

$$F_{-2} = |F(-2\omega_1)| = 0.5$$

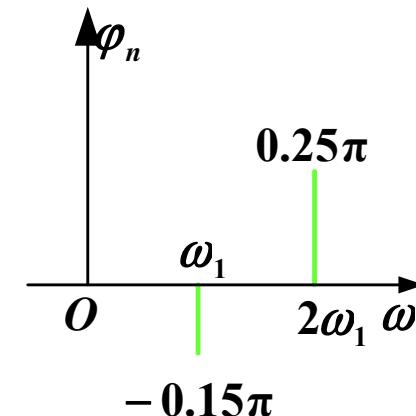
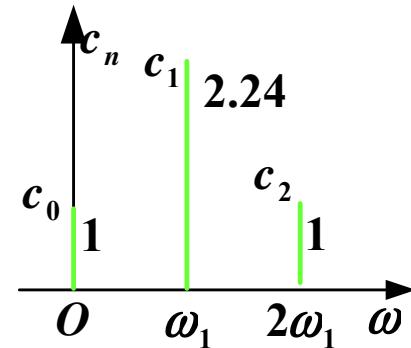
$$\varphi_{-2} = -0.25\pi$$

指数形式的频谱图

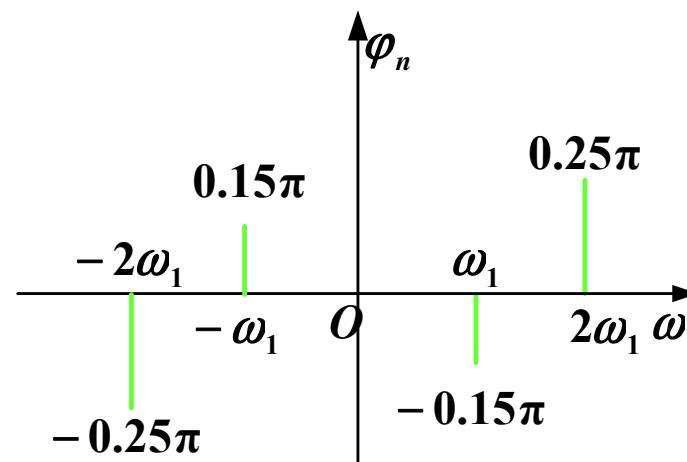
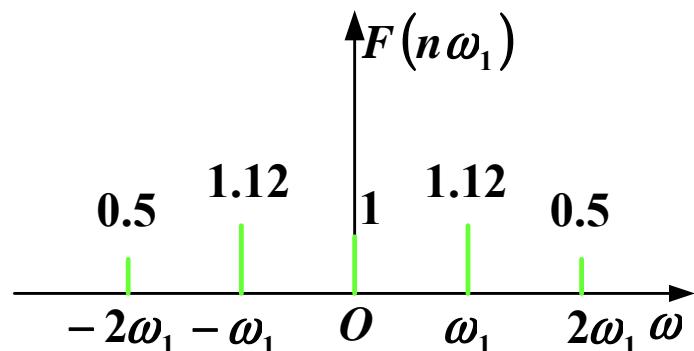


三角形式与指数形式的频谱图对比

三角函数形式的频谱图



指数形式的频谱图



(3) 三个性质

收敛性: $n \uparrow, |F(n\omega_0)| \downarrow$

谐波性: (离散性), 频率只出现在 $n\omega_0$ 处

惟一性: $f(t)$ 的谱线唯一

注意: 冲激函数序列的频谱不满足收敛性

(4) 引入负频率

对于双边频谱, 负频率 $(n\omega_0)$, 只有数学意义, 而无物理意义。为什么引入负频率?

$f(t)$ 是实函数, 分解成虚指数, 必须有共轭对
 $e^{jn\omega_0}$ 和 $e^{-jn\omega_0}$, 才能保证 $f(t)$ 的实函数的性质不变。

四. 连续时间傅里叶级数的系数确定

如果周期信号 $x(t)$ 可以表示为傅里叶级数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

则有

$$x(t)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{j(k-n)\omega_0 t}$$

对两边同时在一个周期内积分，有

$$\int_0^{T_0} x(t)e^{-jn\omega_0 t} dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt$$

$$\int_0^{T_0} e^{j(k-n)\omega_0 t} dt = \int_0^{T_0} \cos(k-n)\omega_0 t dt + j \int_0^{T_0} \sin(k-n)\omega_0 t dt$$

$$= \begin{cases} 0, & k \neq n \\ T_0, & k = n \end{cases}$$

$$\therefore \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = a_n T_0 \quad \text{即} \quad a_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

在确定此积分时，只要积分区间是一个周期即可，
对积分区间的起止并无特别要求，因此可表示为

$$a_k = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad a_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

a_0 是信号在一个周期的平均值，通常称直流分量。

五、函数的对称性与傅里叶级数的关系

1.偶函数

2.奇函数

3.奇谐函数

4.偶谐函数

注：指交流分量

1. 偶函数

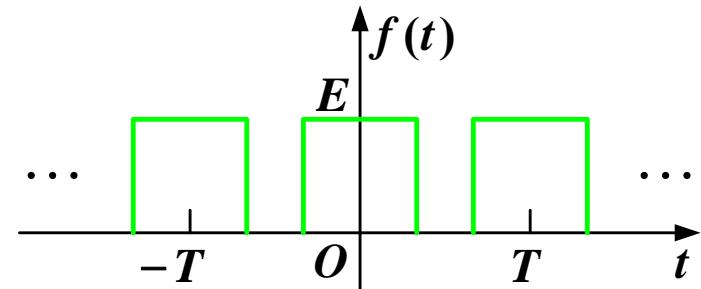
信号波形相对于纵轴是对称的

$$f(t) = f(-t)$$

$$b_n = 0$$

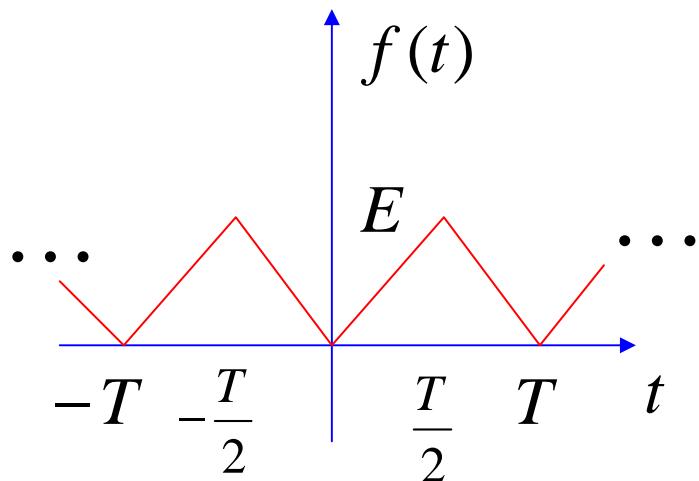
$$a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt \neq 0$$

$$F_n = F(n\omega_1) = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) = \frac{1}{2} a_n \quad \varphi_n = 0$$



傅里叶级数中不含正弦项，只含直流项和余弦项。

$F(n\omega_1)$ 为实函数。



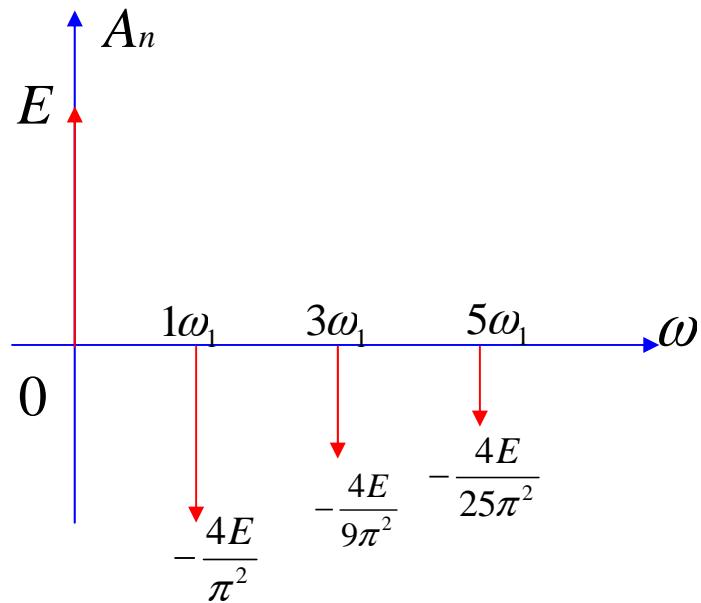
例1，有一偶函数，其波形如图所示，求其傅立叶展开式并画出其频谱图.

$f(t)$ 在一个周期内可写为如下形式

$$f(t) = \begin{cases} \frac{2E}{T}t & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -\frac{2E}{T}t & -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \end{cases}$$

$f(t)$ 是偶函数，故 $b_n = 0$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2E}{T} t dt - \int_{-\frac{T}{2}}^0 \frac{2E}{T} t dt \right] = \frac{E}{2}$$



$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2E}{T} t \cdot \cos n\omega_1 t dt \quad (\omega_1 = \frac{2\pi}{T}) \\
 &= \frac{8E}{T^2} \left[\frac{t}{n\omega_1} \sin n\omega_1 t \Big|_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{1}{n\omega_1} \sin n\omega_1 t dt \right] \\
 &= \frac{2E}{(n\pi)^2} [(-1)^n - 1] \\
 &= \begin{cases} -\frac{4E}{(n\pi)^2} & (n \text{ 为奇数}) \\ 0 & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{E}{2} - \frac{4E}{\pi^2} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{2n\pi}{T} t$$

2. 奇函数

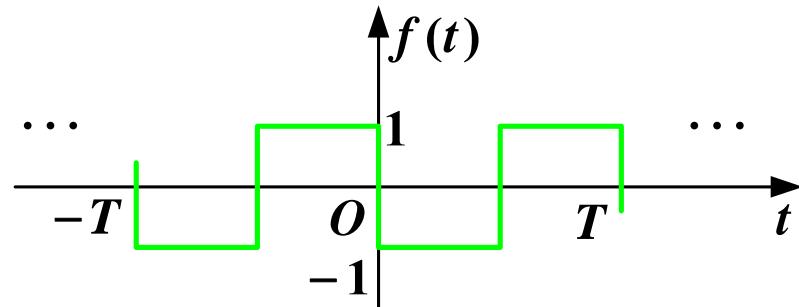
波形相对于纵坐标是反对称的： $f(t) = -f(-t)$

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = 0$$

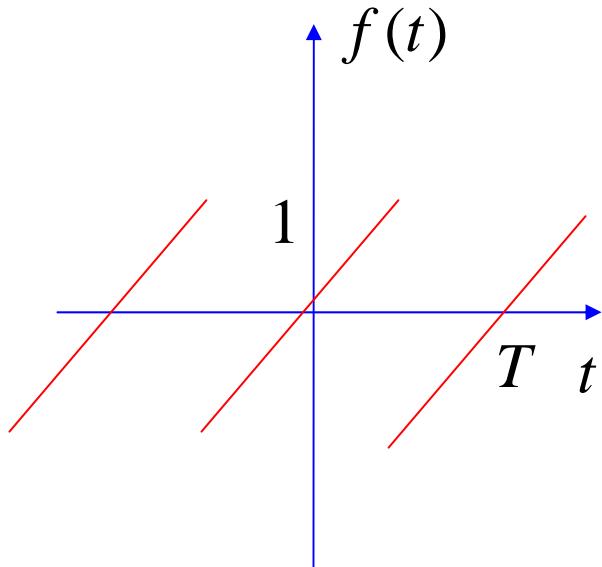
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega_1 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt \neq 0$$

$$F_n = F(n\omega_1) = \frac{1}{2} (a_n - jb_n) = -\frac{1}{2} jb_n$$



傅里叶级数中无余弦分量， $F(n\omega_1)$ 为虚函数。



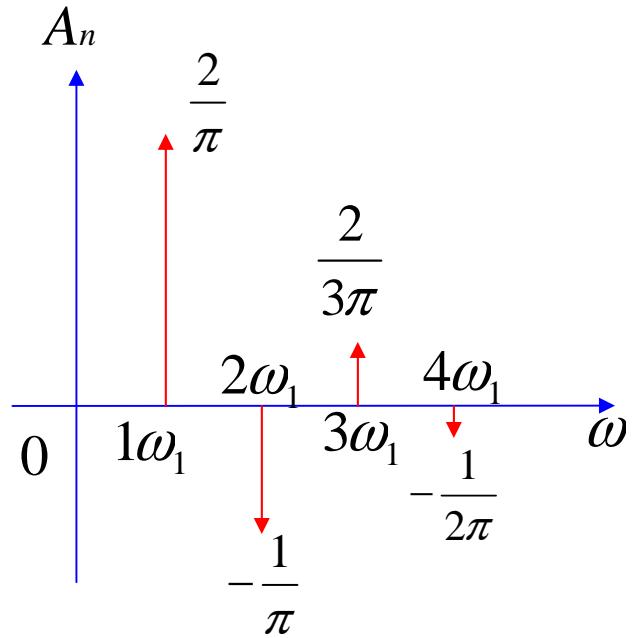
例2，有一奇函数，其波形如图所示，
求其傅立叶展开式并画出其频谱图

解：

$f(t)$ 在一个周期内可写为如下形式

$$f(t) = \frac{2}{T}t \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}$$

$f(t)$ 是奇函数，故 $a_n = 0$



$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (\omega_1 = \frac{2\pi}{T})$$

$$= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{2}{T} t \sin n\omega_1 t dt$$

$$= \frac{8}{T^2} \left(-\frac{t}{n\omega_1} \cos n\omega_1 t + \frac{1}{(n\omega_1)^2} \sin n\omega_1 t \right) \Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

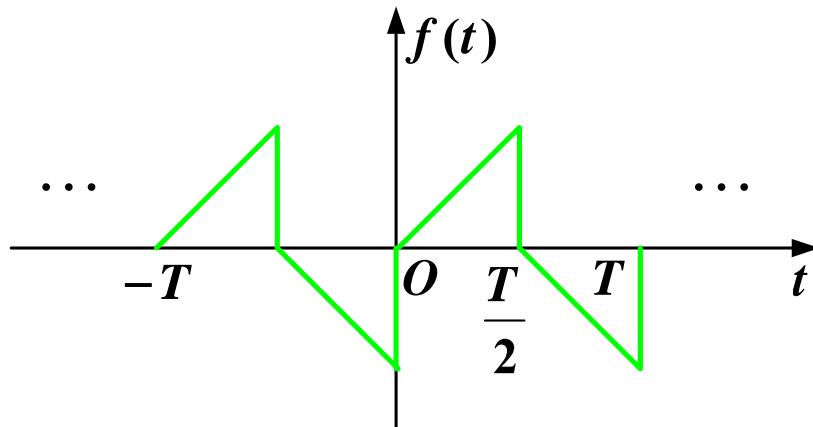
$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{T} t$$

3. 奇谐函数



若波形沿时间轴平移半个周期并相对于该轴上下反转，此时波形并不发生变化：

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right)$$



$f(t)$ 的傅氏级数偶次谐波为零，即

$$a_0 = 0$$

$$n = 2, 4, 6 \dots \text{时} \quad a_n = b_n = 0$$

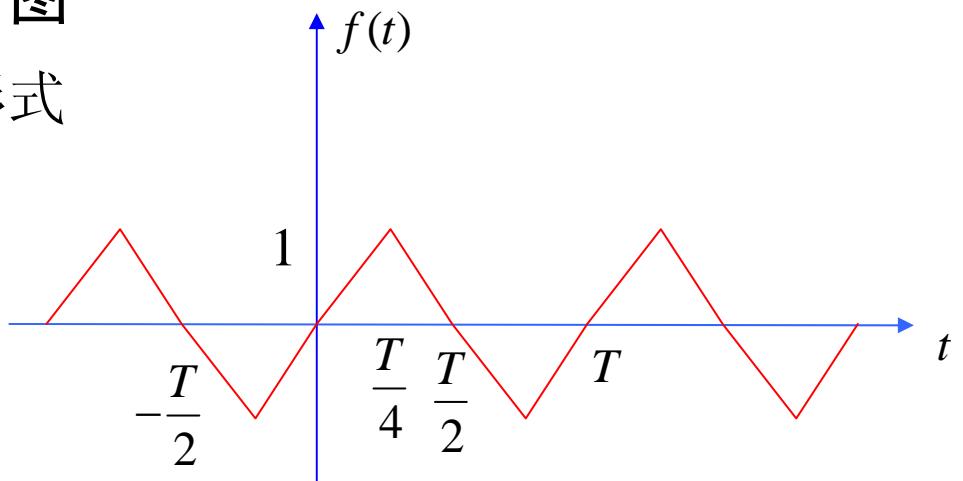
$$n = 1, 3, 5 \dots \text{时} \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$$

例3，有一奇谐函数，其波形如图所示，
求其傅立叶展开式并画出其频谱图

$f(t)$ 在一个周期内可写为如下形式

$$f(t) = \begin{cases} 2 - \frac{4}{T}t & \frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ \frac{4}{T}t & -\frac{T}{4} \leq t \leq \frac{T}{4} \\ -2 - \frac{4}{T}t & -\frac{T}{2} \leq t \leq -\frac{T}{4} \end{cases}$$

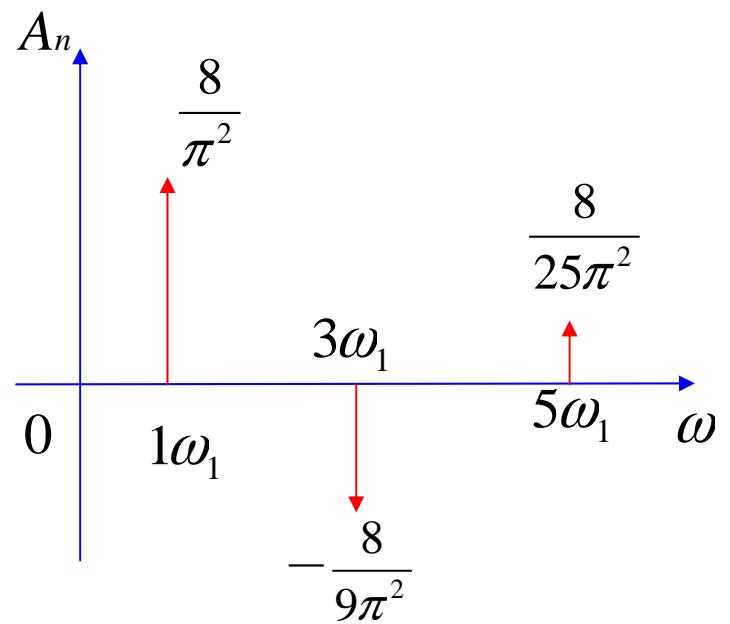


$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cdot \cos n\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \left[\int_{-\frac{T}{2}}^{-\frac{T}{4}} \left(-2 - \frac{4}{T}t \right) \cos n\omega_1 t dt + \right.$$

$$\left. \int_{-\frac{T}{4}}^{\frac{T}{4}} \frac{4}{T}t \cos n\omega_1 t dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(2 - \frac{4}{T}t \right) \cos n\omega_1 t dt \right] = 0$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt \quad (\omega_1 = \frac{2\pi}{T}) \\
&= \frac{4}{T} \left[\int_0^{\frac{T}{4}} \frac{4}{T} t \sin n\omega_1 t dt + \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \left(2 - \frac{4}{T} t\right) \sin n\omega_1 t dt \right] \\
&= \frac{16}{T^2} \left[\left(-\frac{t}{n\omega_1} \cos n\omega_1 t + \frac{1}{(n\omega_1)^2} \sin n\omega_1 t \right) \Big|_0^{\frac{T}{4}} \right. \\
&\quad \left. - \left(-\frac{t}{n\omega_1} \cos n\omega_1 t + \frac{1}{(n\omega_1)^2} \sin n\omega_1 t \right) \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \right] - \frac{4}{Tn\omega_1} \cos n\omega_1 t \Big|_{\frac{T}{4}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{8}{n^2\pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{8}{\pi^2 n^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} & n \text{ 为奇数} \\ 0 & n \text{ 为偶数} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$f(t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=2j-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} \sin \frac{2n\pi}{T} t \quad j = 1, 2, \dots$$

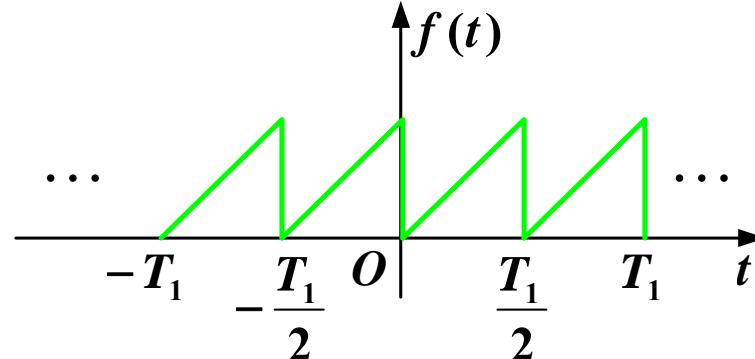


4. 偶谐函数



波形移动 $\pm\frac{T_1}{2}$ 与原波形重合，
称为偶谐函数。

$$f(t) = f\left(t \pm \frac{T_1}{2}\right) \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$$

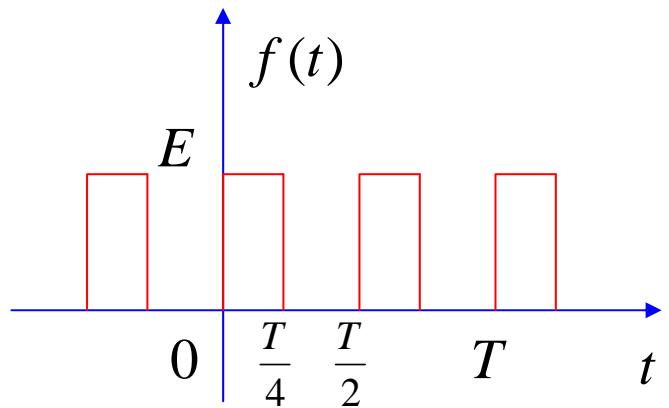


$f(t)$ 的傅氏级数奇次谐波为零，只有偶次谐波分量

当 $n = 1, 3, 5 \dots$ 时 $a_n = b_n = 0$

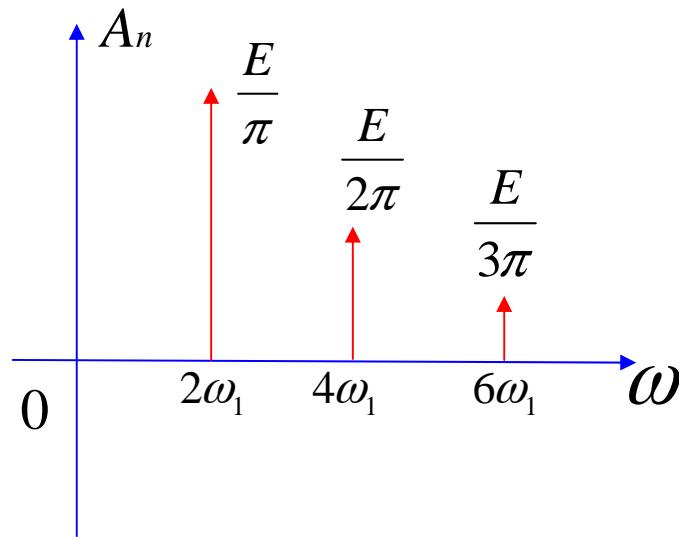
当 $n = 2, 4, 6 \dots$ 时 $a_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos(n\omega_1 t) dt$

$b_n = \frac{4}{T_1} \int_0^{\frac{T_1}{2}} f(t) \sin(n\omega_1 t) dt$



例4，有一偶谐函数，其波形如图所示，
求其傅立叶展开式并画出其频谱图

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{4}} E \cos n\omega_1 t dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} E \cos n\omega_1 t dt \right) \\
 &= \frac{2E}{T} \left(\frac{1}{n\omega_1} \sin n\omega_1 \cdot \frac{T}{4} + \frac{1}{n\omega_1} \sin n\omega_1 \cdot \frac{3T}{4} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{n\omega_1} \sin n\omega_1 \cdot \frac{T}{2} \right) \\
 &= \frac{E}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{3n\pi}{2} \right) = 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{2}{T} \left(\int_0^{\frac{T}{4}} E \sin n\omega_1 t dt + \int_{\frac{T}{2}}^{\frac{3T}{4}} E \sin n\omega_1 t dt \right) \\
 &= -\frac{E}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi}{2} - 1 + \cos \frac{3n\pi}{2} - \cos n\pi \right) \\
 &= \frac{E}{n\pi} (1 + \cos n\pi) = \begin{cases} 0 & n \text{ 为奇数} \\ \frac{2E}{n\pi} & n \text{ 为偶数} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\therefore f(t) = \frac{2E}{\pi} \sum_{n=2j}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{T} t \quad j = 1, 2, \dots$$

周期信号的对称性与付立叶系数的关系

$f(t)$ 的对称条件	展开式中系数特点
$f(t) = f(-t)$, 纵轴对称 (偶函数)	$b_n = 0, a_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt$
$f(t) = -f(-t)$, 原点对称 (奇函数)	$a_n = 0, b_n = \frac{4}{T} \int_{t_0}^{t_0 + \frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega_1 t dt$
$f(t) = f(t + \frac{T}{2})$, 半周重叠 (偶谐函数)	无奇次谐波, 只有直流 和 偶次谐波
$-f(t) = f(t + \frac{T}{2})$, 半周镜像 (奇谐函数)	无偶次谐波, 只有奇次 谐波分量

5. 周期信号的功率特性

周期信号的平均功率P为

$$P = \overline{f^2(t)} = \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} f^2(t) dt$$

符合帕斯瓦尔定理

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T_1} \int_{t_0}^{t_0+T_1} [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_1 t) + b_n \sin(n\omega_1 t)]^2 dt \\ &= a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \\ &= c_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2 \end{aligned}$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

这是帕塞瓦尔定理在傅里叶级数情况下的具体体现；
表明：

周期信号平均功率=直流、基波及各次谐波分量有效值的平方和；

也就是说，时域和频域的能量是守恒的。

$|F_n|^2 \sim \omega$ 绘成的线状图形，表示 各次谐波的平均功率随频率分布的情况，称为功率谱系数。

六. 典型周期信号的傅里叶级数

本节以周期矩形脉冲信号为例进行分析

主要讨论：频谱的特点，频谱结构，

频带宽度，能量分布。

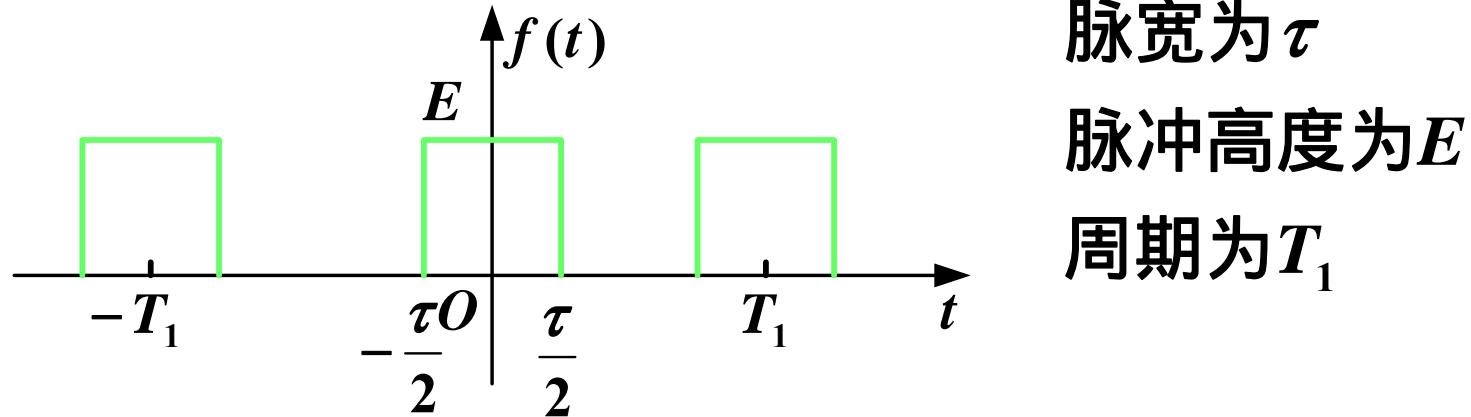
其他信号，如周期锯齿脉冲信号

周期三角脉冲信号

周期半波余弦信号

周期全波余弦信号请自学。

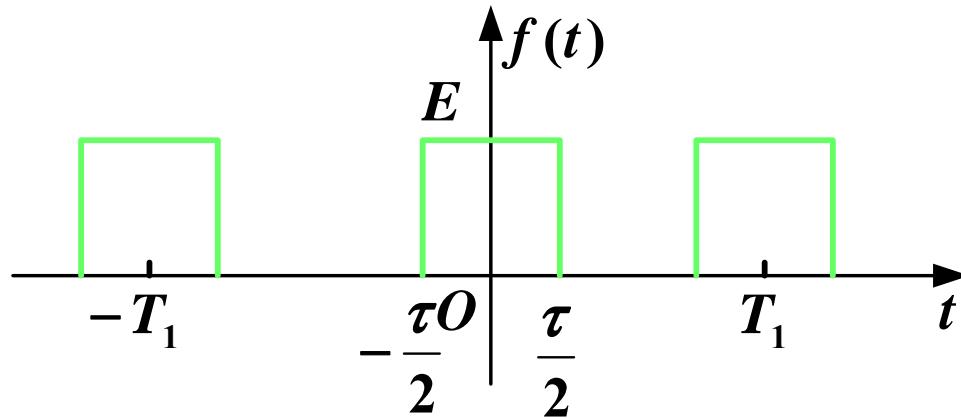
一. 频谱结构



脉宽为 τ
脉冲高度为 E
周期为 T_1

1. 三角函数形式的谱系数
2. 指数函数形式的谱系数
3. 频谱特点

1. 三角形式的谱系数



$f(t)$ 是个偶函数

$b_n = 0$, 只有 a_0, a_n

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) dt = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E dt = \frac{E\tau}{T_1}$$

$$a_n = \frac{2}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) \cos n\omega_1 t dt = \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\pi\tau}{T_1} = \frac{2E\tau}{T_1} \times \frac{\sin \frac{n\pi\tau}{T_1}}{\frac{n\pi\tau}{T_1}} = \frac{2E\tau}{T_1} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right)$$

$$f(t) = \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T_1}\right) \cos(n\omega_1 t) \quad T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} : \text{公共周期}$$

$$= \frac{E\tau}{T_1} + \frac{2E\tau}{T_1} \sum_{n=1}^{\infty} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \cos(n\omega_1 t)$$

2. 指数形式的谱系数

$$\begin{aligned}
 F(n\omega_1) &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\
 &= \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{E}{T_1 - jn\omega_1} e^{-jn\omega_1 t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= \frac{-E}{jn\omega_1 T_1} \left[e^{-jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_1 \frac{\tau}{2}} \right] = \frac{2E}{n\omega_1 T_1} \sin\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) \\
 &= \frac{E\tau}{T_1} \frac{\sin\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_1 \frac{\tau}{2}} = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right) \\
 f(t) &= \frac{E\tau}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1 \tau}{2}\right) e^{jn\omega_1 t}
 \end{aligned}$$

$-jn\omega_1 t$

第三步：频谱分析

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |a_n| = \frac{2E\tau}{T} \left| Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \right| = \frac{2E\tau}{T} \left| Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) \right|$$

$$F_n = \frac{E\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) = \frac{E\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$$

A_n 与 $\frac{\tau}{T}$ 之比值有关，取 $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{5}$

A_n 与 F_n 包络线均为 $Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right)$ $n\omega_1$ 为离散频率

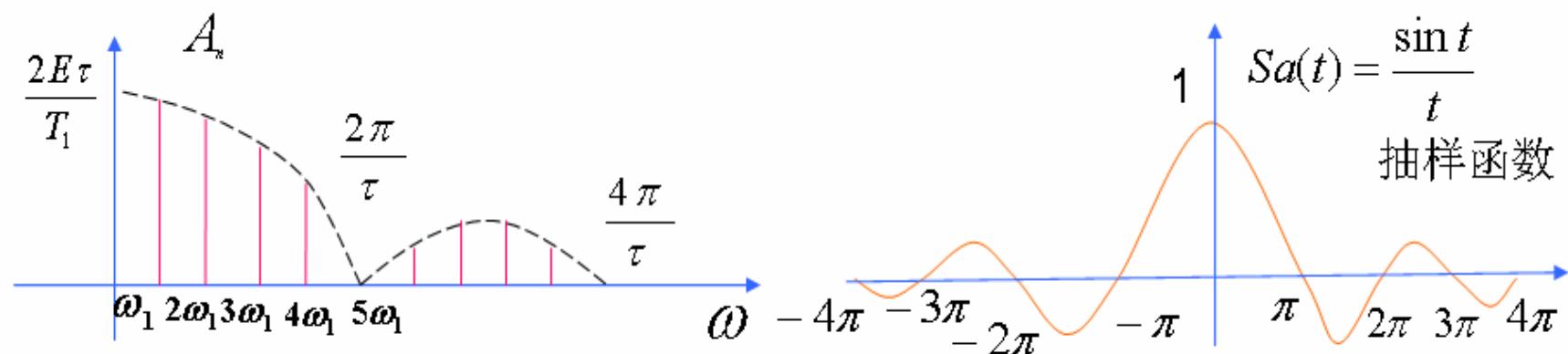
当 $\frac{\omega\tau}{2} = \pm\pi, \pm 2\pi, \dots, \pm n\pi$ 时 $Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 0$

即 $\omega = \pm\frac{2\pi}{\tau}, \pm\frac{4\pi}{\tau}, \dots, \pm\frac{2n\pi}{\tau}$ $Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 0$

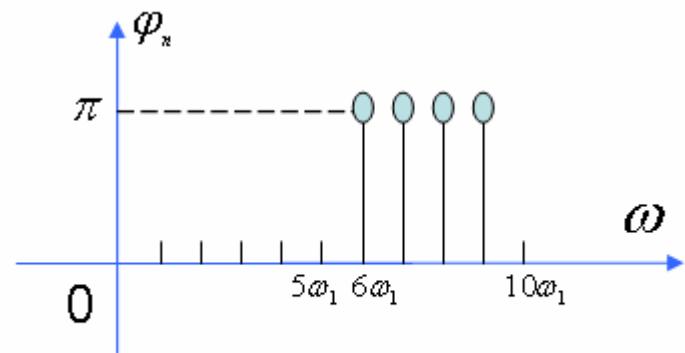
计算第一个振幅为零的谐波次数n

令 $\frac{n\omega_1\tau}{2} = \pi$ 将 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ 带入得 $\frac{n2\pi\tau}{2T} = \pi$

即 $n = \frac{T}{\tau} = 5$ (取 $\frac{\tau}{T} = \frac{1}{5}$)



幅度频谱

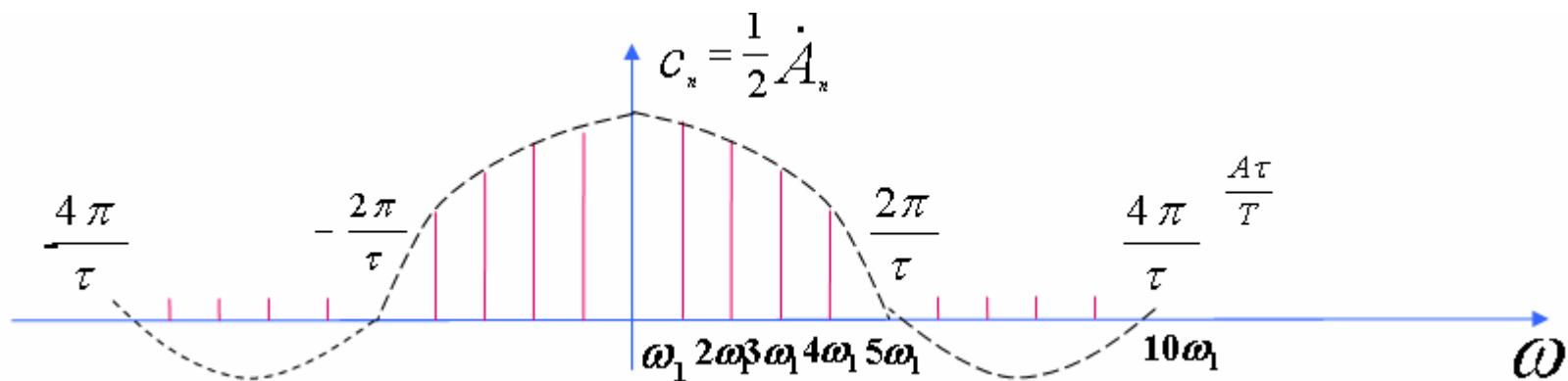


相位频谱

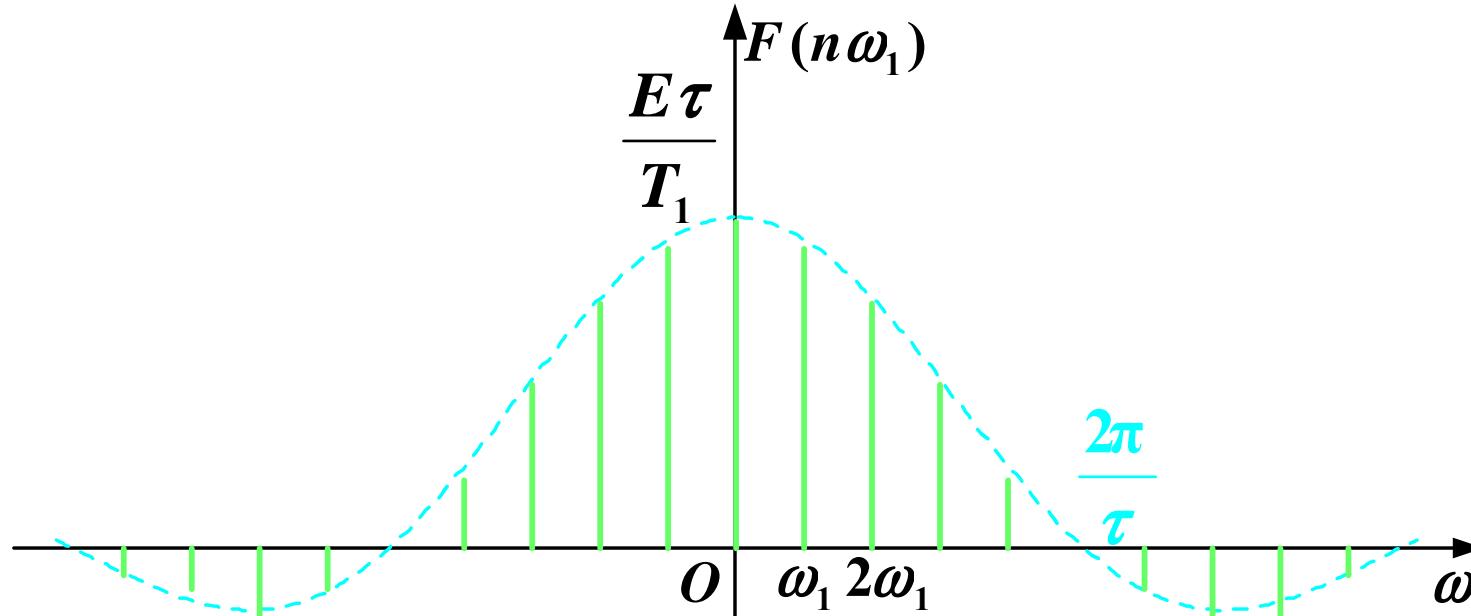
$$\varphi_n = \operatorname{tg}^{-1} \frac{b_n}{a_n} = \begin{cases} 0 & a_n > 0 \\ \pi & a_n < 0 \end{cases}$$

$$\varphi_n = \begin{cases} 0 & Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) > 0 \quad \text{即 } C_n > 0 \\ \pi & Sa\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) < 0 \quad \text{即 } C_n < 0 \end{cases}$$

此例中 C_n 为一实数。幅度与相位频谱可画在一张图上



3. 频谱及其特点 $F(n\omega_1) = \frac{E\tau}{T_1} \text{Sa}\left(n\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)$

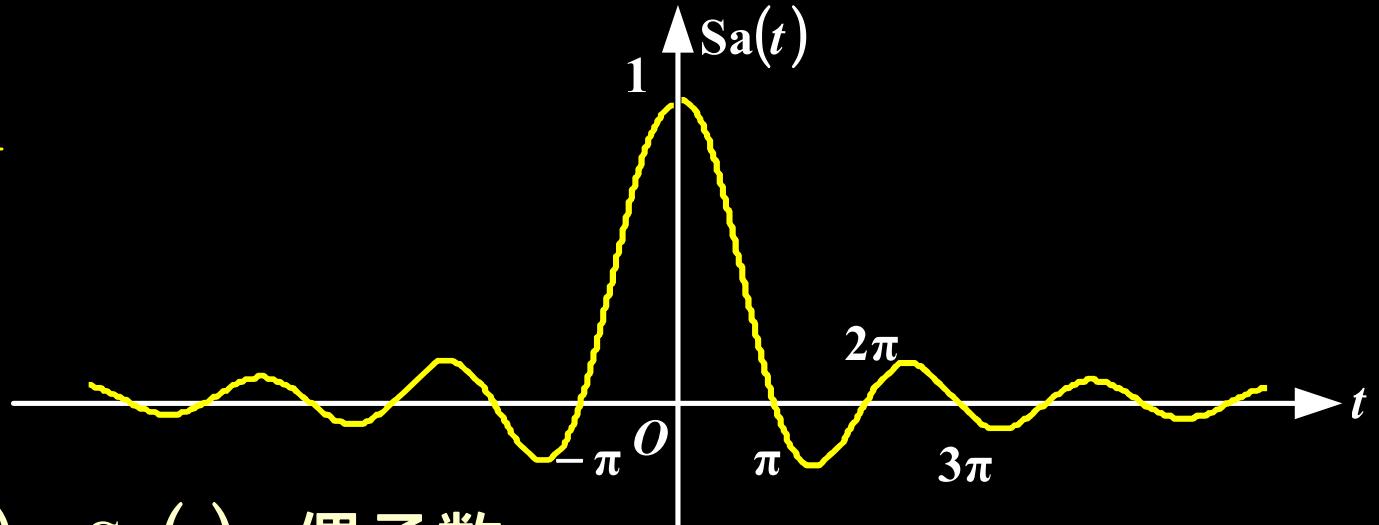


- (1) 包络线形状：抽样函数
- (2) 其最大值在 $n = 0$ 处，为 $\frac{E\tau}{T_1}$ 。
- (3) 离散谱（谐波性）
- (4) 第一个零点坐标： $\frac{2\pi}{\tau}$
当 $\omega = n\omega_1$ 时取值
令 $\frac{\omega\tau}{2} = \pi \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{\tau}$
- (5) $F(n\omega_1)$ 是复函数（此处为实函数），幅度 / 相位
 $F_n > 0$, 相位为 0, $F_n < 0$, 相位为 $\pm\pi$ 。

抽样信号 (Sampling Signal)

$$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$$

性质

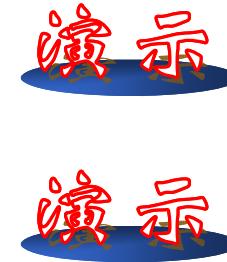


- ① $\text{Sa}(-t) = \text{Sa}(t)$, 偶函数
- ② $t = 0, \text{Sa}(t) = 1$, 即 $\lim_{t \rightarrow 0} \text{Sa}(t) = 1$
- ③ $\text{Sa}(t) = 0, t = \pm n\pi, n = 1, 2, 3 \dots$
- ④ $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \pi$
- ⑤ $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \text{Sa}(t) = 0$
- ⑥ $\text{sinc}(t) = \sin(\pi t)/(\pi t)$

$$\int_0^\infty \text{sinc}(t) dt = ?$$

4. 总结

★ $T_1 \uparrow \Rightarrow \begin{cases} \text{幅度} \downarrow \\ \text{谱线间隔 } \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \downarrow \end{cases}$



当 $T_1 \rightarrow \infty$, 时 , $\omega_1 \rightarrow 0$, $\frac{E\tau}{T_1}$ 为无限小 ,

$f(t)$ 由周期信号 → 非周期信号。

矩形脉冲的频谱说明了周期信号频谱的特点 :

★ 离散性、谐波性、收敛性。

周期性矩形脉冲信号的频谱特征：

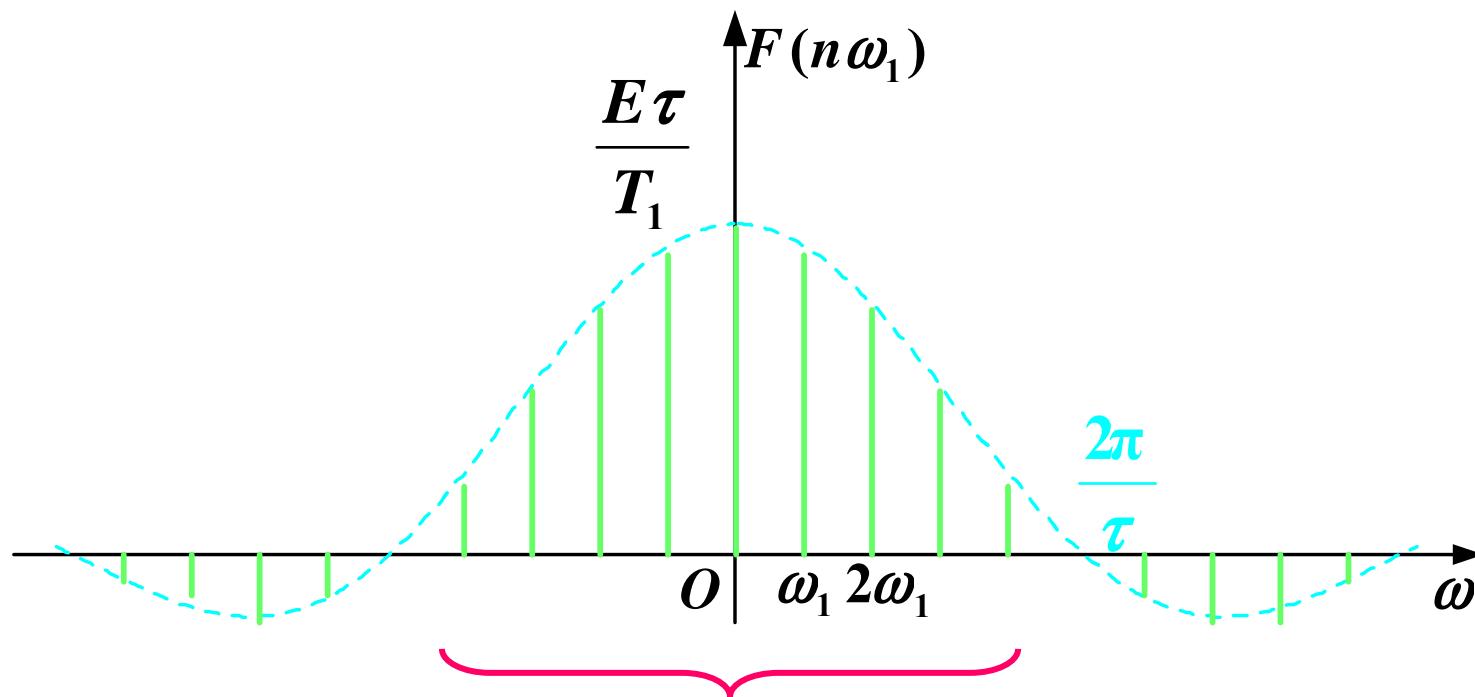
1. 离散性
2. 谐波性
3. 收敛性

考查周期 T_1 和脉冲宽度 τ 改变时频谱的变化：

1. 当 τ 不变，改变 T_1 时，随 $T_1 \uparrow$ 使占空比减小，谱线间隔变小，幅度下降。但频谱包络的形状不变，包络主瓣内包含的谐波分量数增加。
2. 当 τ 改变， T_1 不变时，随 $\tau \downarrow$ 使占空比减小，谱线间隔不变，幅度下降。频谱的包络改变，包络主瓣变宽。主瓣内包含的谐波数量也增加。

二. 频带宽度

1. 问题提出



第一个零点集中了信号绝大部分能量（平均功率）
由频谱的收敛性可知，信号的功率集中在低频段。

周期矩形脉冲信号的功率

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |F(n\omega_1)|^2$$

以 $\tau = \frac{1}{20}$ s, $T_1 = \frac{1}{4}$ s 为例，取前 5 次谐波

$$\begin{aligned} P_{5n} &= F^2(0) + |F(\omega_1)|^2 + |F(2\omega_1)|^2 + |F(3\omega_1)|^2 + |F(4\omega_1)|^2 \\ &\quad + |F(-\omega_1)|^2 + |F(-2\omega_1)|^2 + |F(-3\omega_1)|^2 + |F(-4\omega_1)|^2 \\ &= 0.181E^2 \end{aligned}$$

而总功率 $\frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f^2(t) dt = 0.2E^2$

二者比值 $\frac{P_{5n}}{P} = 90.5\%$

2. 频带宽度

在满足一定失真条件下，信号可以用某段频率范围的信号来表示，此频率范围称为频带宽度。

★一般把第一个零点作为信号的频带宽度。记为：

$$B_{\omega} = \frac{2\pi}{\tau} \text{ 或 } B_f = \frac{1}{\tau}, \text{ 带宽与脉宽成反比。}$$

★对于一般周期信号，将幅度下降为 $\frac{1}{10}|F(n\omega_1)|_{\max}$ 的频率区间定义为频带宽度。

3. 系统的通频带>信号的带宽，才能不失真

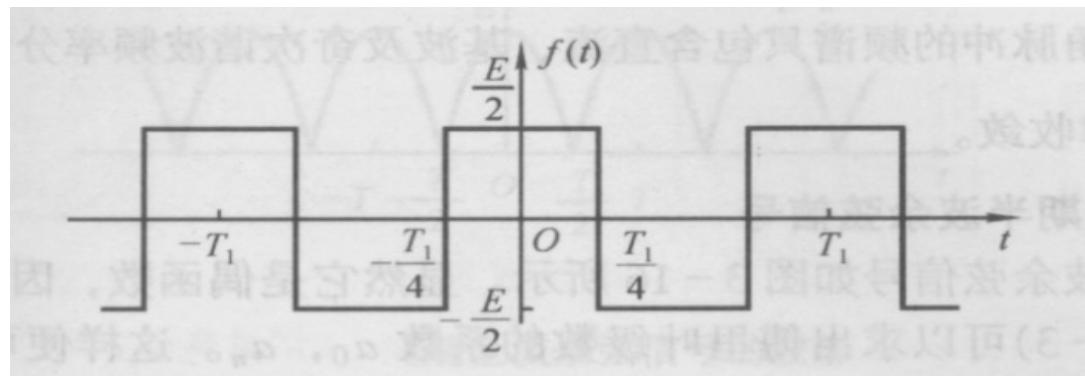
语音信号 频率大约为 300~3400Hz ,

音乐信号 50~15,000Hz ,

扩音器与扬声器 有效带宽约为 15~20,000Hz。

例：对称方波

对称方波如图，它是正负交替的周期信号。设其周期为 T_1 ，其脉冲宽度等于周期的一半



$$a_0 = 0$$

$$a_k = \frac{E}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

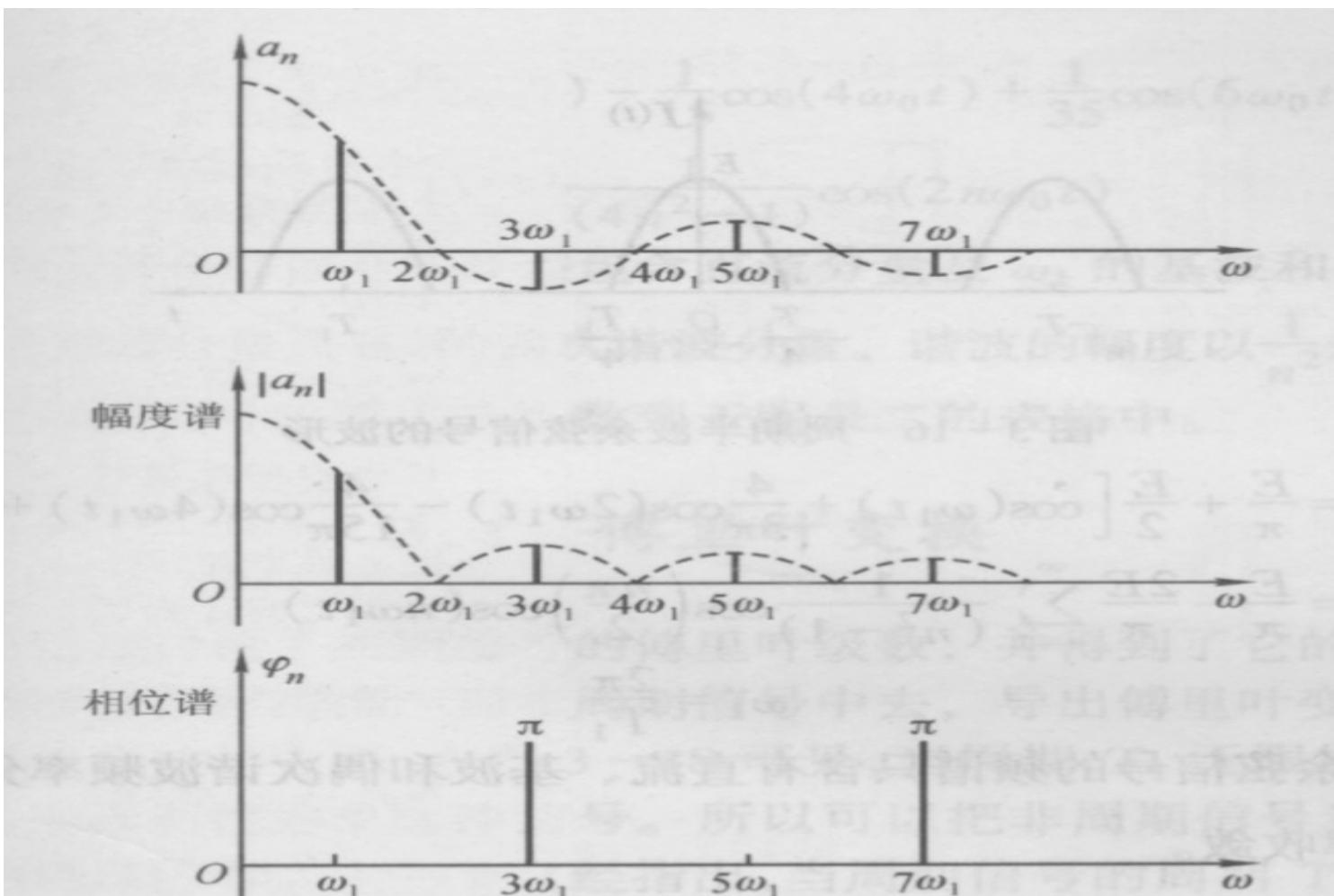


图 3-13 对称方波信号的波形及频谱

信号对称性与频谱的关系：

当 $x(t) = x(-t)$ 时，有

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos k\omega_0 t dt$$

表明：偶信号的 a_k 是关于 k 的偶函数、实函数。

当 $x(t) = -x(-t)$ 时，有

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = -j \frac{2}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin k\omega_0 t dt$$

表明：奇信号的 a_k 是关于 k 的奇函数、虚函数。

3.4 连续时间傅里叶级数的收敛

这一节来研究用傅氏级数表示周期信号的普遍性问题，即满足什么条件的周期信号可以表示为傅里叶级数。

一. 傅里叶级数是对信号的最佳近似

若 $x(t)$ 以 T_0 为周期 $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

用有限个谐波分量近似 $x(t)$ 时，有

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k e^{jk\omega_0 t}$$

误差为 $e_N(t) = x(t) - x_N(t)$

以均方误差作为衡量误差的准则，其均方误差为

$$\begin{aligned} E_N(t) &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |e_N(t)|^2 dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t) - x_N(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \left[x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right] \left[x(t) - \sum_{k=-N}^N a_k e^{jk\omega_0 t} \right]^* dt \end{aligned}$$

于是： $E_N = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt + \sum_{k=-N}^N A_k^2 - \frac{2}{T_0} \sum_{k=-N}^N A_k B_k \cos(\varphi_k - \theta_k)$

$$a_k = A_k e^{j\theta_k}, \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = B_k e^{j\varphi_k}$$

在均方误差最小准则下，可以证明，此时 a_k 应满足：

$$a_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

结论：在均方误差最小的准则下，傅里叶级数是对周期信号的最佳近似。

二. 傅里叶级数的收敛

傅里叶级数收敛的两层含义：

a_k 是否存在？

级数是否收敛于 $x(t)$ ？

两组条件：

1. 平方可积条件：

如果 $\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$ 则 a_k 必存在。

因为 $x(t)$ 能量有限 $\therefore a_k$ 一定存在。

2. Dirichlet(狄利克雷)条件：

$\int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$ ，在任何周期内信号绝对可积。

$$|a_k| \leq \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)e^{-jk\omega_0 t}| dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)| dt < \infty$$

因此，信号绝对可积就保证了 a_k 的存在。

在任何有限区间内，只有有限个极值点，且极值为有限值。

在任何有限区间内，只有有限个第一类间断点。

说明

在一周期内，信号是绝对可积的(T_1 为周期)

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} |f(t)| dt < \infty$$

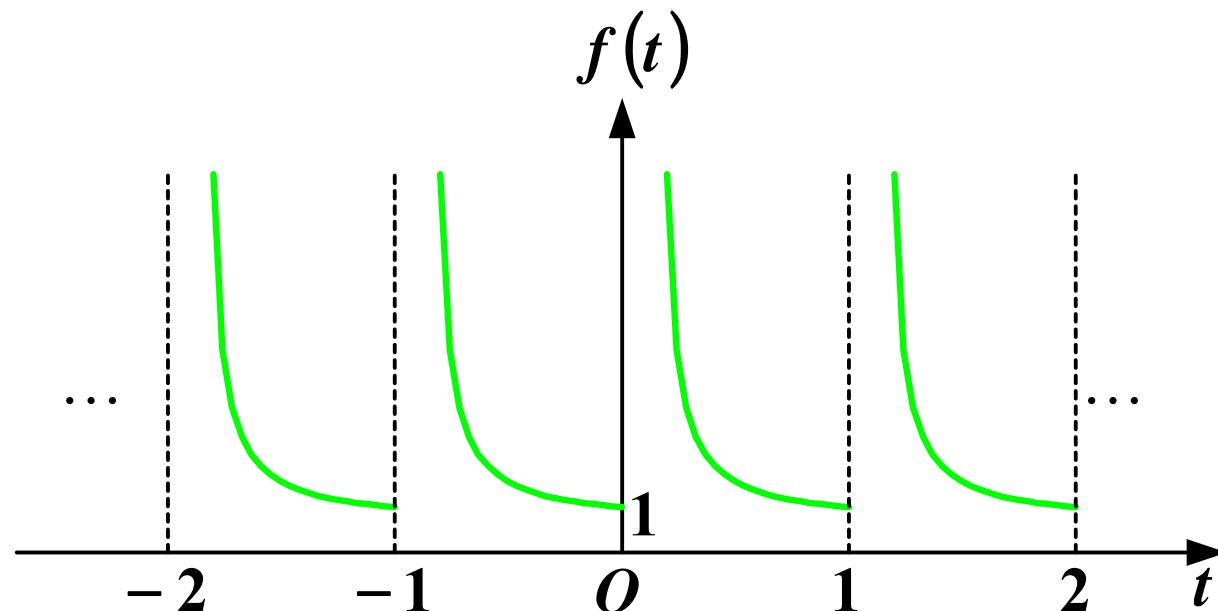
与平方可积条件相同，这一条件保证了每一系数 F_n 都是有限值，因为

$$|F_n| \leq \frac{1}{T} \int_T |f(t) e^{jn\omega_1 t}| dt = \frac{1}{T} \int_T |f(t)| dt$$

$$|F_n| < \infty \quad \xleftarrow{\hspace{1cm}} \quad \frac{1}{T} \int_T |f(t)| dt < \infty$$

例1

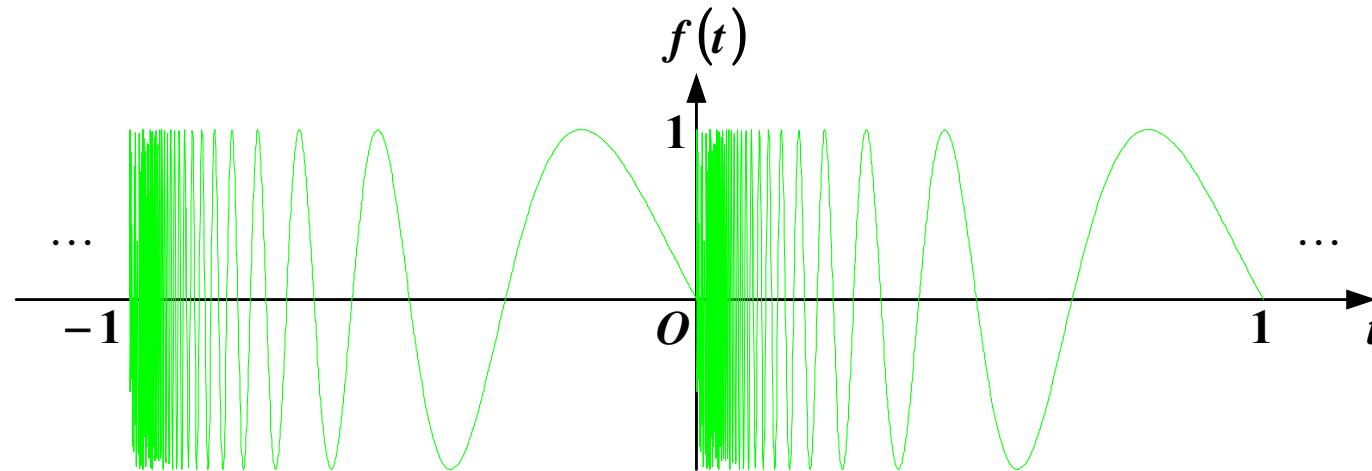
周期信号 $f(t) = \frac{1}{t}$, ($0 < t \leq 1$) , 周期为1 , 不满足此条件。



例2

不满足条件2的一个函数是

$$f(t) = \sin\left(\frac{2\pi}{t}\right), (0 < t \leq 1)$$

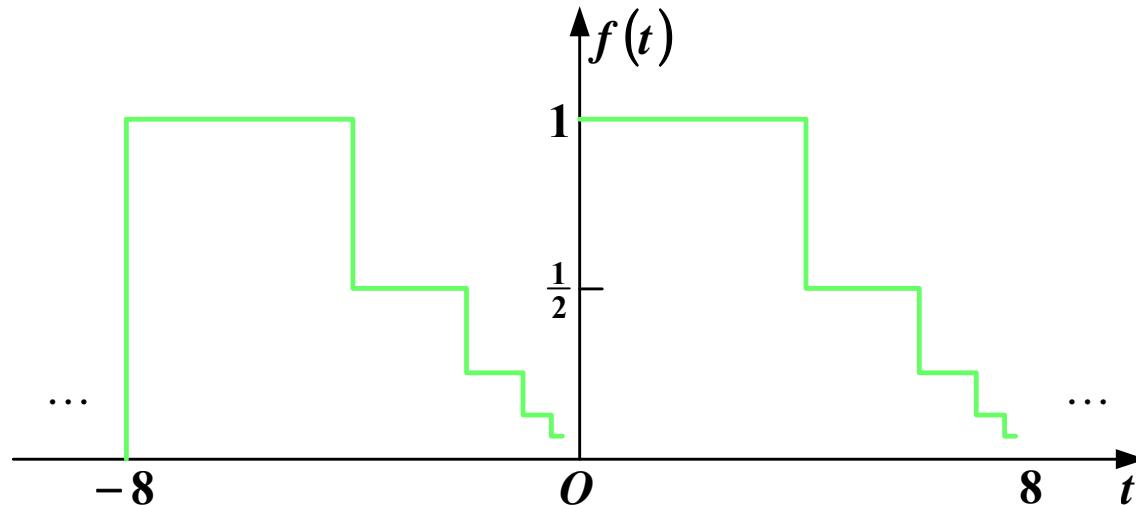


对此函数，其周期为1，有

$$\int_0^1 |f(t)| dt < 1$$

例3

不满足条件1的例子如下图所示，这个信号的周期为8，它是这样组成的：后一个阶梯的高度和宽度是前一个阶梯的一半。可见在一个周期内它的面积不会超过8，但不连续点的数目是无穷多个。



这组条件并不完全等价。它们都是傅里叶级数收敛的充分条件。相当广泛的信号都能满足这组条件中的一组，因而用傅里叶级数表示周期信号具有相当的普遍适用性。

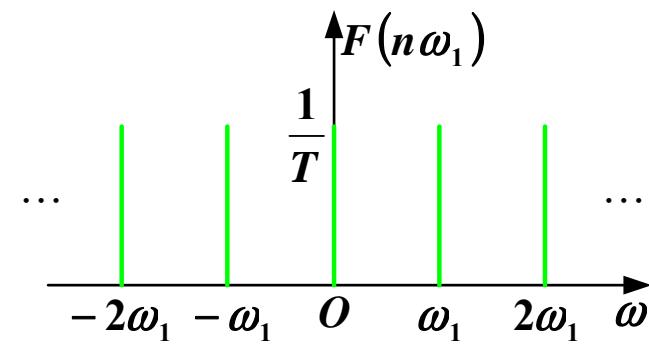
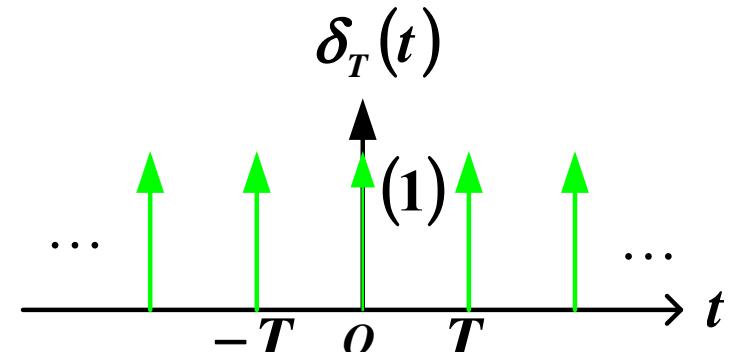
周期单位冲激序列的频谱

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad n \text{ 为整数}$$

分析：狄氏条件是傅里叶级数存在的充分条件。根据冲激信号的定义和特性，其积分有确定值，傅里叶级数存在。即

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \delta(t) e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$f(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jn\omega_1 t}$$

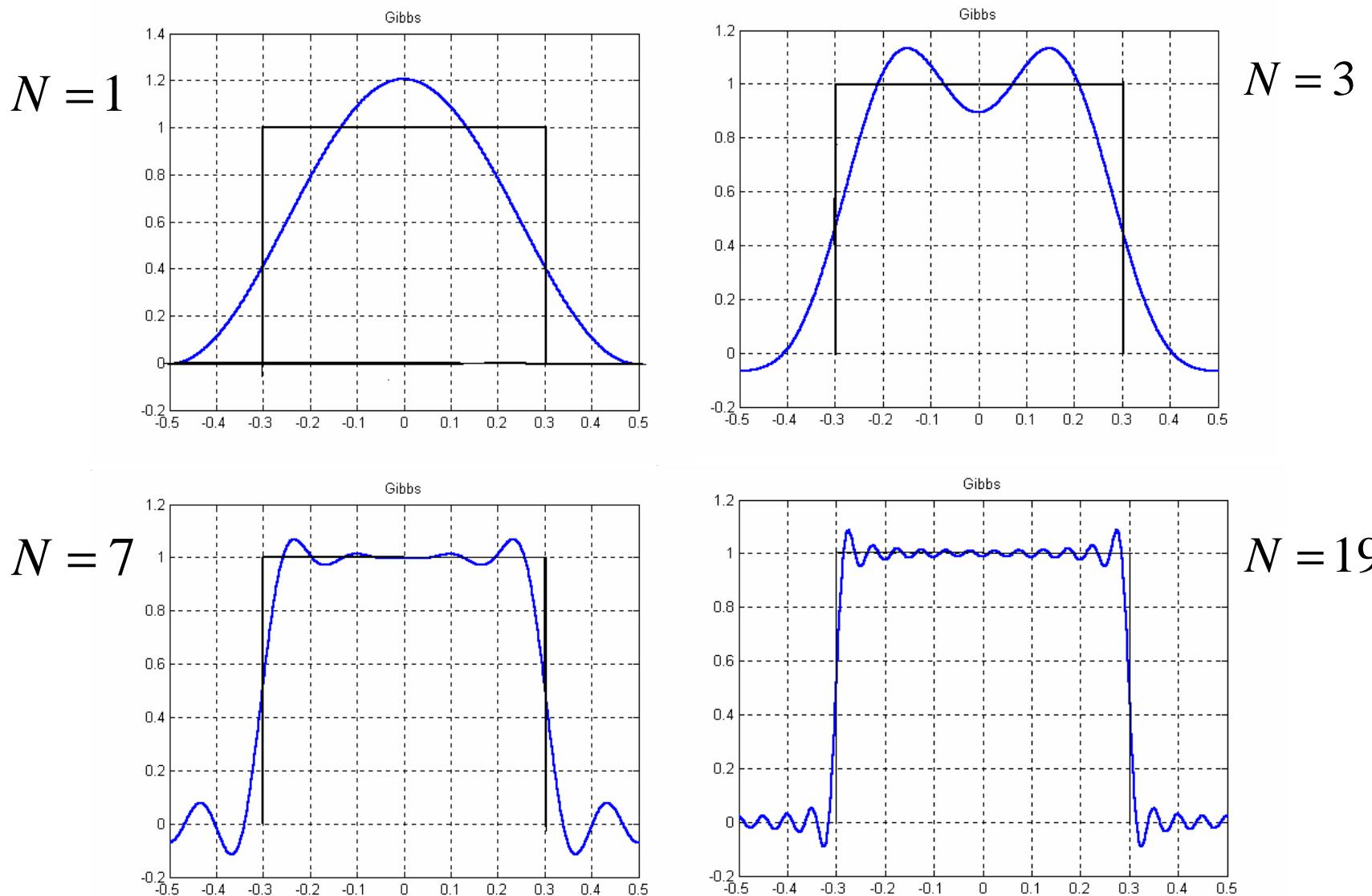


满足离散性，谐波性，不满足收敛性，频带无限宽。

三. Gibbs现象

满足 Dirichlet 条件的信号，其傅里叶级数是如何收敛于 $x(t)$ 的。特别当 $x(t)$ 具有间断点时，在间断点附近，如何收敛于 $x(t)$?





Gibbs现象

在连续点处完全收敛于 $x(t)$ ；

在不连续点处会出现超量与起伏，随着N的增大，

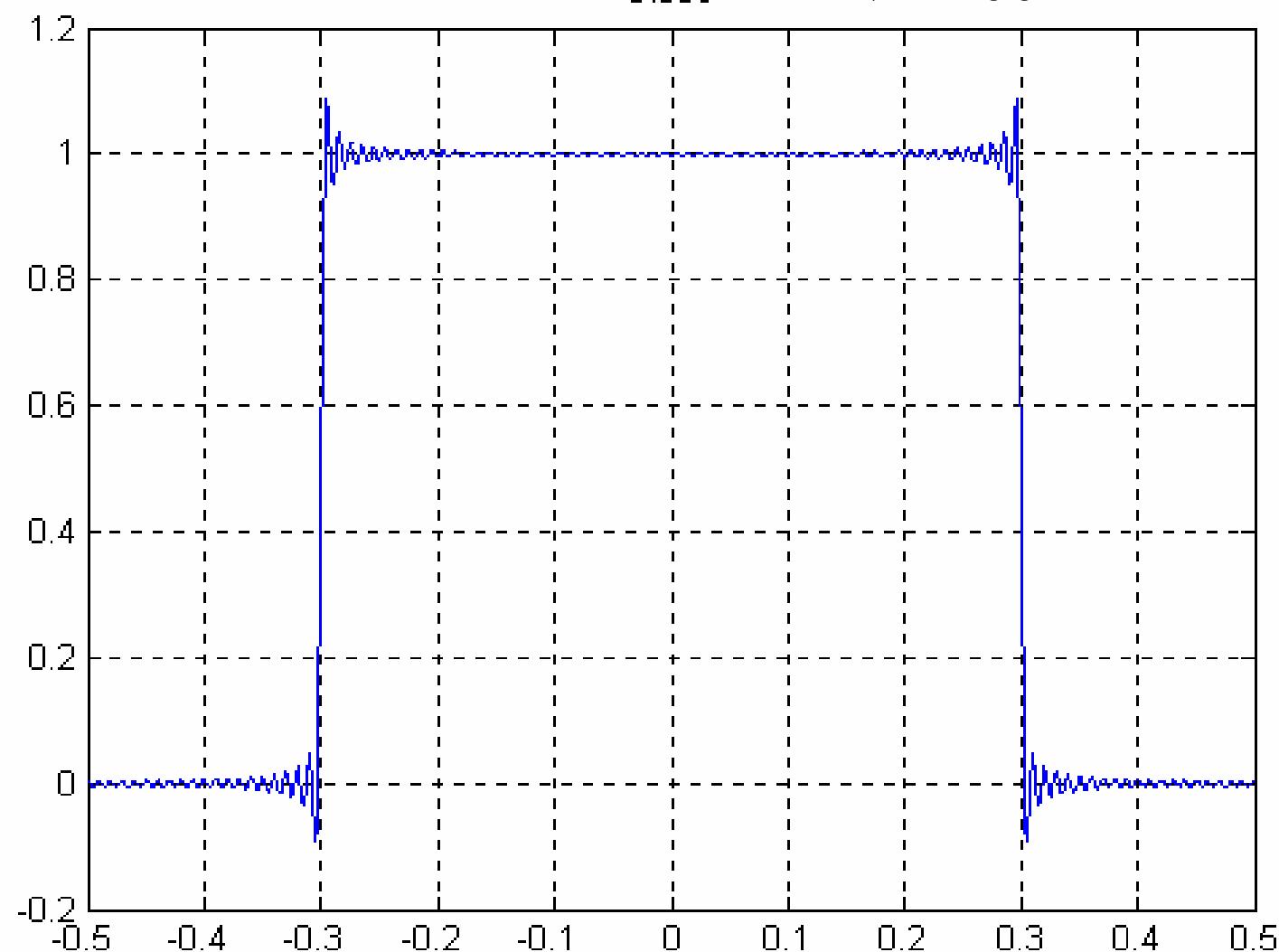
近似式越逼近方波，但起伏仍存在，最大的超量

是方波数值的9%；

方波的平顶部分主要取决于低频信号分量，间断

点附近主要取决于高频信号分量。

Gibbs $N = 100$



Gibbs现象表明：

用有限项傅里叶级数表示有间断点的信号时，在间断点附近会不可避免的出现振荡和超量。超量的幅度不会随所取项数的增加而减小。只是随着项数的增多，振荡频率变高，并向间断点处压缩，从而使它所占有的能量减少。

3.5 连续时间傅里叶级数的性质

学习这些性质，有助于对概念的理解和对信号进行级数展开。

一. 线性：

若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是以 T 为周期的两个信号，且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \quad y(t) \xleftrightarrow{F} b_k$$

则 $Ax(t) + By(t) \xleftrightarrow{F} Aa_k + Bb_k$

二.时移: 若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号, 且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \quad \text{则} \quad x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} a_k e^{-jk\omega_0 t_0} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

三.反转: 若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号, 且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k \quad \text{则} \quad x(-t) \xleftrightarrow{F} a_{-k}$$

四.尺度变换: 若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号, 且

$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k$ 则 $x(at)$ 以 T/a 为周期, 于是

$$x(at) \xleftrightarrow{F} b_k = \frac{a}{T} \int_{T/a} x(at) e^{-jka\omega_0 t} dt$$

令 $at = \tau$, 当 t 在 $0 \sim T/a$ 变化时 , τ 从 $0 \sim T$ 变化 ,

于是有 : $b_k = \frac{1}{T} \int_T x(\tau) e^{-jk\omega_0\tau} d\tau = a_k$

$$\therefore x(at) \xleftrightarrow{F} b_k = a_k$$

$a \omega_0$

五. 相乘: 若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是以 T 为周期的信号 , 且

$$x(t) \xleftrightarrow{F} a_k$$

$$y(t) \xleftrightarrow{F} b_k$$

则 $C_k = \frac{1}{T} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l \int_T y(t) e^{-j(k-l)\omega_0 t} dt = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l}$

也即

$$\therefore x(t) y(t) \xleftrightarrow{F} \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} = a_k \otimes b_k$$

六. 共轭对称性：

若 $x(t)$ 是以 T 为周期的信号，且 $x(t) \xleftrightarrow{F} a_k$

则 $x^*(t) \xleftrightarrow{} a_{-k}^*$

由此可推得，对实信号有： $a_k = a_{-k}^*$ 或 $a_k^* = a_{-k}$

$a_k = A_k e^{j\theta_k}$ 时有： $A_k = A_{-k}$ $\theta_k = -\theta_{-k}$

$a_k = B_k + jC_k$ 时有： $B_k = B_{-k}$ $C_k = -C_{-k}$

对实信号，当 $x(t) = x(-t)$ 时， $a_k = a_{-k}$ (实偶函数)

当 $x(t) = -x(-t)$ 时， $a_k = -a_{-k}$ (虚奇函数)

七.Parseval 帕斯瓦尔定理：

$$\frac{1}{T} \int_T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

表明：一个周期信号的平均功率就等于它所有谐波分量的平均功率之和.

3.5.8 连续时间傅里叶级数性质列表

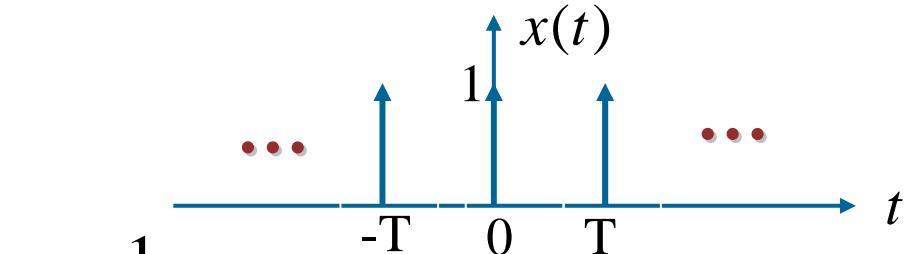
性 质	节次	周期信号	傅里叶级数系数
线性	3.5.1	$x(t)$ 周期为 T , $y(t)$ 基本频率 $\omega_0 = 2\pi/T$	a_k
时移	3.5.2	$Ax(t) + By(t)$	b_k
频移	3.5.3	$x(t - t_0)$	$Aa_k + Bb_k$
		$e^{jM\omega_0 t}x(t) = e^{jM(2\pi/T)t}x(t)$	$a_k e^{-jk\omega_0 t_0} = a_k e^{-jk(2\pi/T)t_0}$
共轭	3.5.6	$x^*(t)$	a_{-k}
时间反转	3.5.3	$x(-t)$	a_k
时域尺度变换	3.5.4	$x(at), a > 0$ (周期为 T/a)	a_k
周期卷积		$\int_T x(\tau)y(t - \tau)d\tau$	$Ta_k b_k$
相乘	3.5.5	$x(t)y(t)$	$\sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l b_{k-l}$
微分		$\frac{dx(t)}{dt}$	$jk\omega_0 a_k = jk \frac{2\pi}{T} a_k$
积分		$\int_{-\infty}^t x(t)dt$ (仅当 $a_0 = 0$ 才为有限值且为周期的)	$\left(\frac{1}{jk\omega_0}\right)a_k = \left(\frac{1}{jk(2\pi/T)}\right)a_k$
实信号的共轭对称性	3.5.6	$x(t)$ 为实信号	$\begin{cases} a_k = a_{-k} \\ \Re\{a_k\} = \Re\{a_{-k}\} \\ \Im\{a_k\} = -\Im\{a_{-k}\} \\ a_k = a_{-k} \\ \angle a_k = -\angle a_{-k} \end{cases}$
实、偶信号	3.5.6	$x(t)$ 为实、偶信号	a_k 为实且偶
实、奇信号	3.5.6	$x(t)$ 为实、奇信号	a_k 纯虚且为奇
实信号的奇偶分解		$\begin{cases} x_e(t) = \Re\{x(t)\} [x(t) \text{ 为实}] \\ x_o(t) = \Im\{x(t)\} [x(t) \text{ 为实}] \end{cases}$	$\Re\{a_k\}$ $\Im\{a_k\}$
		周期信号的帕斯瓦尔定理	
		$\frac{1}{T} \int_T x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k ^2$	

$$\text{例1 : } x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT)$$

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\therefore x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} e^{jk\omega_0 t}$$

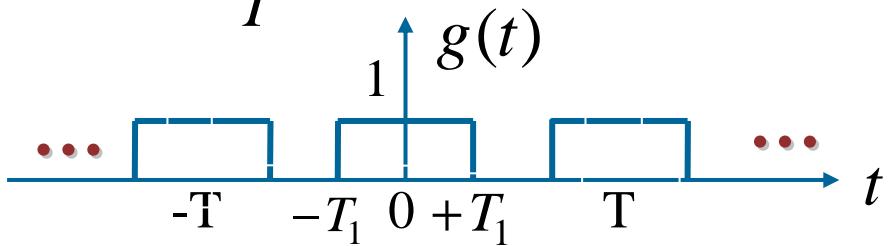
$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

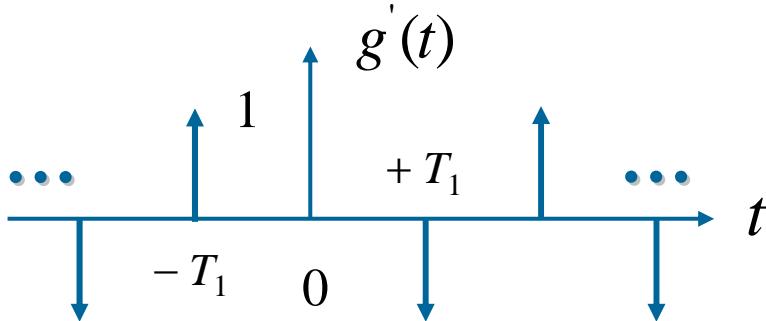


例2：周期性矩形脉冲

将其微分后可利用例1表示为

$$g'(t) = x(t + T_1) - x(t - T_1) \quad (\text{不记直流分量})$$





设 $g(t) \xleftarrow{F} c_k \quad g'(t) \xleftarrow{F} b_k$ 由时域微分性质有

$b_k = jk\omega_0 c_k$ 根据时移特性，有

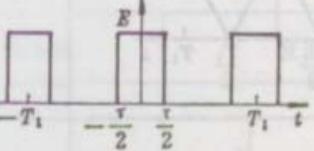
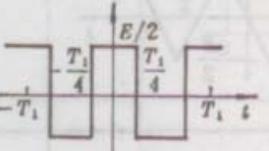
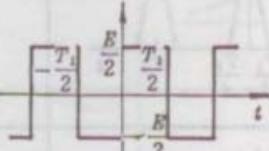
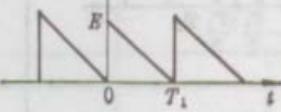
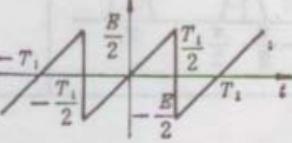
$$b_k = a_k \left[e^{jk\omega_0 T_1} - e^{-jk\omega_0 T_1} \right] = 2ja_k \sin k\omega_0 T_1$$

由例1知 $a_k = 1/T$ $\omega_0 = 2\pi/T$

$$\therefore c_k = \frac{b_k}{jk\omega_0} = \frac{2 \sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T} = \frac{2T_1}{T} \frac{\sin k\omega_0 T_1}{k\omega_0 T_1} \quad k \neq 0$$

$$c_0 = \frac{2T_1}{T}$$

附录二 常用周期信号傅里叶系数表

序号	名称	信号波形	傅里叶系数($\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$)
1	矩形脉冲		$a_0 = \frac{E\tau}{T_1}$ $a_n = \frac{2E\tau}{T_1} \text{Sa}(\frac{n\omega_1\tau}{2})$ $b_n = 0$
2	偶对称方波		$a_0 = 0$ $a_n = \frac{2E}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{2}$ $b_n = 0$
3	奇对称方波		$a_0 = 0$ $a_n = 0$ $b_n = \frac{2E}{n\pi} \sin^2(\frac{n\pi}{2})$
4	锯齿波		$a_0 = \frac{E}{2}$ $a_n = 0$ $b_n = \frac{E}{n\pi}$
5	锯齿波(奇对称)		$a_0 = 0$ $a_n = 0$ $b_n = (-1)^{n+1} \frac{E}{n\pi}$

序号	名称	信号波形	傅里叶系数($\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$)
6	三角波(偶对称)		$a_0 = \frac{E}{2}$ $a_n = \frac{4E}{(\pi n)^2} \sin^2(\frac{n\pi}{2})$ $b_n = 0$
7	三角波(奇对称)		$a_0 = 0$ $a_n = 0$ $b_n = \frac{4E}{(\pi n)^2} \sin \frac{n\pi}{2}$
8	半波余弦		$a_0 = \frac{E}{\pi}$ $a_n = \frac{2E}{\pi} \frac{1}{(1-n^2)} \cos \frac{n\pi}{2}$ $b_n = 0$
9	全波余弦		$a_0 = \frac{2E}{\pi}$ $a_n = \frac{4E}{\pi} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2-1}$ $b_n = 0$
10	三角脉冲		$a_0 = \frac{E\tau}{2T_1}$ $a_n = \frac{4T_1}{\tau} \frac{E}{(\pi n)^2} \sin^2(\frac{\pi n \omega_1 \tau}{4})$ $b_n = 0$

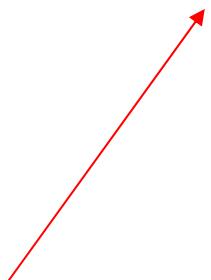
本章要点

连续时间周期信号傅立叶级数的表示

- 连续时间周期信号的傅立叶级数表示形式：
三角形式和指数形式
- 连续时间周期信号傅立叶级数的展开的狄义赫利条件
- 掌握连续时间周期信号的谱线特点，基波与谐波的概念
- 掌握周期矩形脉冲的谱线特点及信号带宽计算方法

第四章 连续时间信号的傅立叶 变换

周期信号和非周期信号



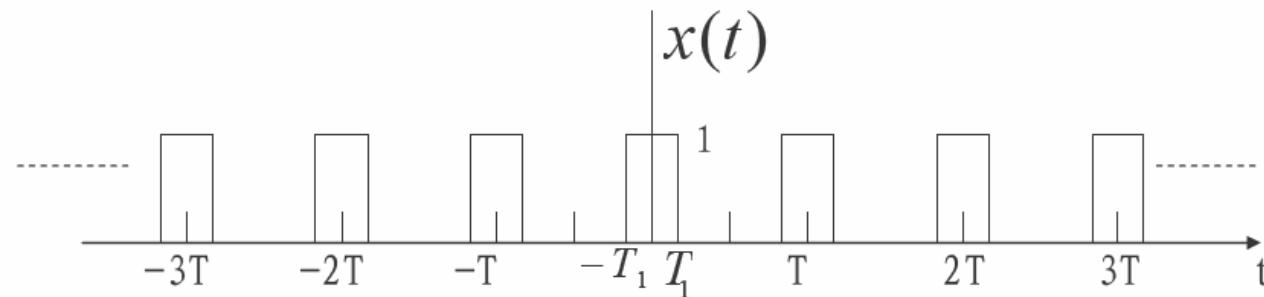
4.0 引言

通过上一章的学习我们知道，时域的周期信号可以由成谐波关系的复指数信号来线性表示。时域的波形与频域的频谱是一一对应的。从而LTI系统对周期信号的响应变得极其简便。

在工程应用中有相当广泛的信号是非周期信号，对非周期信号应该如何进行分解，什么是非周期信号的频谱表示，就是这一章要解决的问题。

在时域可以看到，如果一个周期信号的周期趋于无穷大，则周期信号将演变成一个非周期信号；反过来，任何非周期信号如果进行周期性延拓，就一定能形成一个周期信号。我们把非周期信号看成是周期信号在周期趋于无穷大时的极限，从而考查连续时间傅立叶级数在 T 趋于无穷大时的变化，就应该能够得到对非周期信号的频域表示方法。

1、先看一个连续时间周期方波信号，周期为T。



由例3.5可知,该信号的傅里叶系数 a_k 为

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T_1}^{T_1} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = -\frac{1}{jk\omega_0 T} e^{-jk\omega_0 t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{2 \sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T}$$

即 $Ta_k = \frac{2 \sin \omega T_1}{\omega} \Big|_{\omega=k\omega_0}$

这就是说,若将 ω 看作一个连续的变量,则函数 $(2 \sin \omega T_1) / \omega$ 就代表 Ta_k 的包络。而且,若 T_1 固定,则 Ta_k 的包络就与 T 无关。

见图4.2

由图可见，随着 T 增加，该包络就被以愈来愈密集的间隔采样。随着 T 变得任意大，原来的周期方波就趋近于一个矩形脉冲。

与此同时，傅里叶级数系数作为包络上的样本也变得愈来愈密集，这样从某种意义上说，随着 $T \rightarrow \infty$

傅里叶级数系数就趋近于这个包络函数（因为

$\omega_0 = 2\pi/T$, 当 $T \rightarrow \infty$ 时， $\omega_0 \rightarrow 0$)。

这说明，可以把非周期信号当作周期信号在周期任意大时的极限来看待。

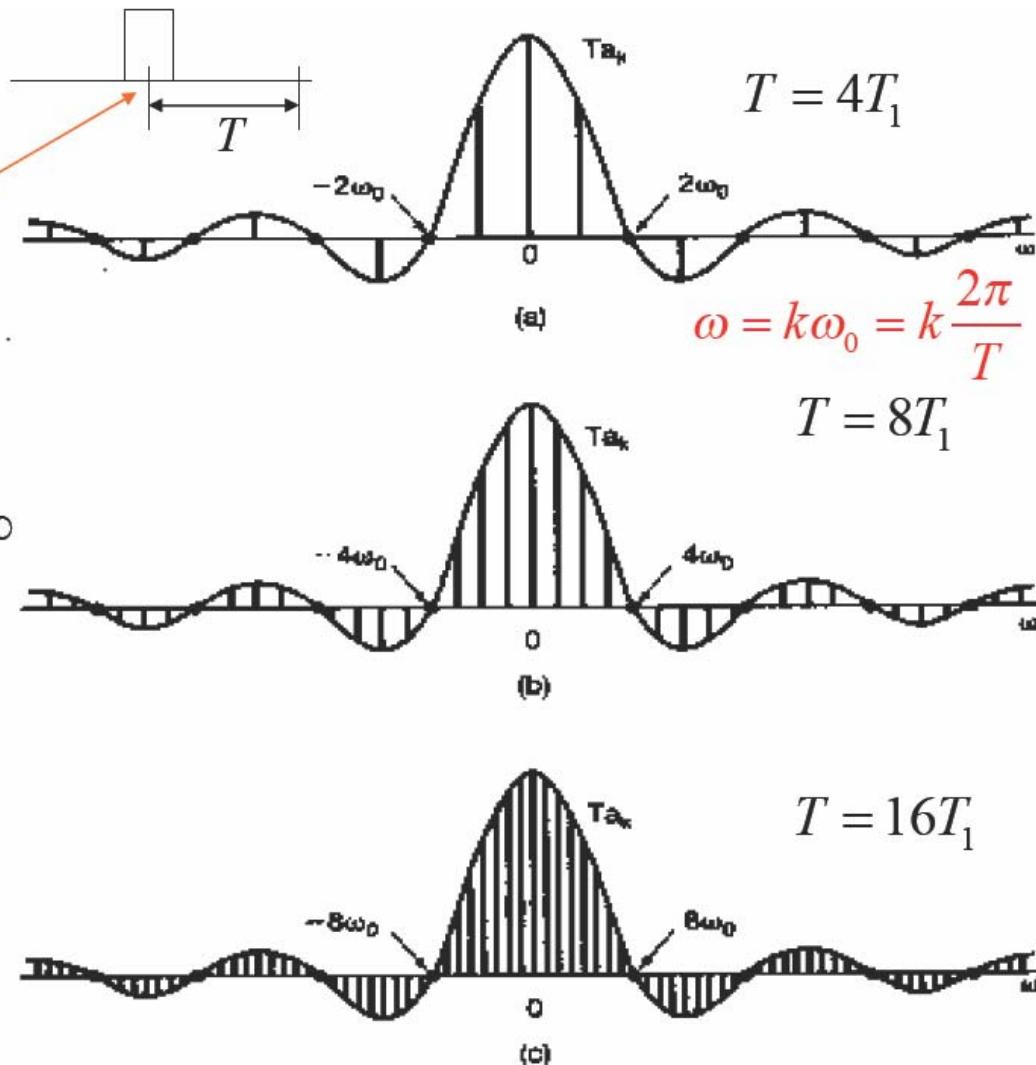


图 4.2 周期方波的傅里叶级数系数及其包络， T_1 固定：

(a) $T = 4T_1$; (b) $T = 8T_1$; (c) $T = 16T_1$

2、再看一个信号 $x(t)$, 它具有有限持续期, 即满足: $x(t)=0$, $|t|>T_1$
 如图4.3 (a) 所示。将 $x(t)$ 进行**周期延拓**, 构成一个周期信号 $\tilde{x}(t)$,
 如(b)所示。

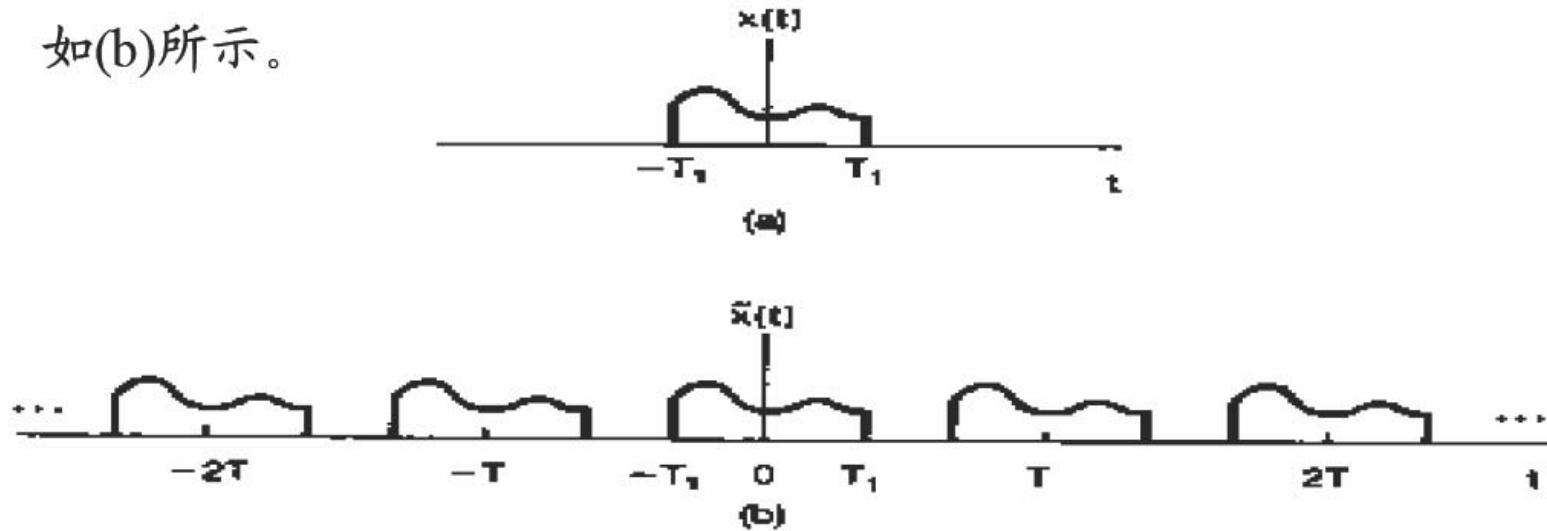


图 4.3 (a) 非周期信号 $x(t)$; (b) 由 $x(t)$ 为一个周期构成的周期信号 $\tilde{x}(t)$

延拓构成的周期信号满足

$$\tilde{x}(t) = x(t) \quad , \quad |t| \leq T_1 \quad \text{和} \quad T > 2T_1$$

以及

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \tilde{x}(t)$$

傅里叶变换

- 傅里叶变换
- 傅里叶变换的表示
- 傅里叶变换的物理意义
- 傅里叶变换存在的条件

二. 傅里叶变换

1. 引出

$$T_1 \rightarrow \infty$$

演示

$f(t)$: 周期信号 → 非周期信号

谱系数 $F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \rightarrow 0$

谱线间隔 $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \rightarrow 0$

离散谱 → 连续谱，幅度无限小；

再用 $F(n\omega_1)$ 表示频谱就不合适了，虽然各频谱幅度无限小，但相对大小仍有区别，引入频谱密度函数。

$$F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \quad (1)$$

$$T_1 F(n\omega_1) = \frac{F(n\omega_1)}{\frac{1}{T_1}} = \frac{F(n\omega_1)}{f}$$

当 $T_1 \rightarrow \infty$ 时,

$$f = \frac{1}{T_1} \rightarrow 0, \quad F(n\omega_1) \rightarrow 0 \quad \frac{F(n\omega_1)}{f} \rightarrow \text{有界函数}$$

$$\Delta(n\omega_1) = \omega_1 \rightarrow d\omega \quad (n\omega_1) \rightarrow \omega \text{ 连续}$$

$$F(\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} T_1 F(n\omega_1) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt$$

频谱密度函数
简称频谱函数

$$\underline{T_1 \rightarrow \infty} \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{\frac{T_1}{2}} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{array} \right.$$

单位频带上的
频谱值

频谱密度函数的表示

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F[f(t)]$$

由 $f(t)$ 求 $F(\omega)$ 称为傅里叶变换。

$F(\omega)$ 一般为复信号, 故可表示为

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$$

$|F(\omega)| \sim \omega$: 幅度频谱

$\varphi(\omega) \sim \omega$: 相位频谱

2. 反变换 $f(t)$ 应是 $F(\omega)$ 的反变换?

由复指数形式的傅里叶级数

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$$

除以 ω_1 , 再乘以 ω_1

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} \cdot \omega_1 \cdot e^{jn\omega_1 t}$$

当 $T_1 \rightarrow \infty$ 时, $\omega_1 \rightarrow d\omega$, $n\omega_1 \rightarrow \omega$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$F(\omega) = \lim_{T_1 \rightarrow \infty} T_1 F(n\omega_1)$$

$$= \lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} 2\pi$$

$$\lim_{T_1 \rightarrow \infty} \frac{F(n\omega_1)}{\omega_1} = \frac{F(\omega)}{2\pi}$$

3. 傅里叶变换对

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F[f(t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[F(\omega)]$$

简写 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

二. 傅里叶变换的表示

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

模 相位 实部 虚部

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

实信号 偶分量 奇分量

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_e(t) + f_o(t)] \cdot [\cos \omega t - j \sin \omega t] dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} f_e(t) \cos \omega t dt - j 2 \int_0^{\infty} f_o(t) \sin \omega t dt \end{aligned}$$

实部 虚部

$$R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f_e(t) \cos(\omega t) dt$$

关于 ω 的偶函数

$$X(\omega) = -2 \int_0^{\infty} f_o(t) \sin(\omega t) dt$$

关于 ω 的奇函数

$$|F(\omega)| = \sqrt{[R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2}$$

关于 ω 的偶函数

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

关于 ω 的奇函数

$f(t)$ 偶函数
 (奇分量为零) $\leftrightarrow F(\omega)$ 为实函数, 只有 $R(\omega)$, 相位 $\pm\pi$

$f(t)$ 奇函数
 (偶分量为零) $\leftrightarrow F(\omega)$ 为虚函数, 只有 $X(\omega)$, 相位 $\pm\frac{\pi}{2}$

三. 傅里叶变换的物理意义

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)}$

实函数

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

↓ 欧拉公式

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

↓ 积分为0

$$+ j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)| \sin[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(\omega)| \cos[\omega t + \varphi(\omega)] d\omega$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{|F(\omega)|}{\pi} d\omega \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

解释

$$f(t) = \int_0^{\infty} \frac{|F(\omega)|}{\pi} d\omega \cos[\omega t + \varphi(\omega)]$$

求和 振幅 正弦信号

- 无穷多个振幅为无穷小 $\left(\frac{1}{\pi} |F(\omega)| d\omega \right)$ 的连续余弦信号之和, 频域范围: $0 \rightarrow \infty$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{2\pi} d\omega \cdot e^{j\omega t}$$

- 无穷多个幅度为无穷小 $\left(\frac{1}{2\pi} |F(\omega)| d\omega \right)$ 的连续指数信号之和, 占据整个频域, $\omega : -\infty \rightarrow \infty$ 。

四. 傅里叶变换存在的条件

既然傅立叶变换的引出是从周期信号的傅立叶级数表示，讨论周期趋于无穷大时的极限得来的，傅立叶变换的收敛问题就应该和傅立叶级数的收敛相一致。

也有相应的两组条件：

1. 若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$ 则 $X(j\omega)$ 存在。

这表明所有能量有限的信号其傅立叶变换一定存在。

2. Dirichlet 条件

a. 绝对可积条件 $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty$

b. 在任何有限区间内， $x(t)$ 只有有限个极值点，且极值有限。

c. 在任何有限区间内， $x(t)$ 只有有限个第一类间断点。

应该指出：这些条件只是傅立叶变换存在的充分条件。

这两组条件并不等价。例如： $\frac{\sin t}{t}$ 是平方可积的，但是并不绝对可积。

和周期信号的情况一样，当 $x(t)$ 的傅立叶变换存在时，其傅立叶变换在 $x(t)$ 的连续处收敛于信号本身，在间断点处收敛于左右极限的平均值，在间断点附近会产生 Gibbs 现象。

四. 傅里叶变换存在的条件

- $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \text{有限值}$ (充分条件)

即 $f(t)$ 绝对可积

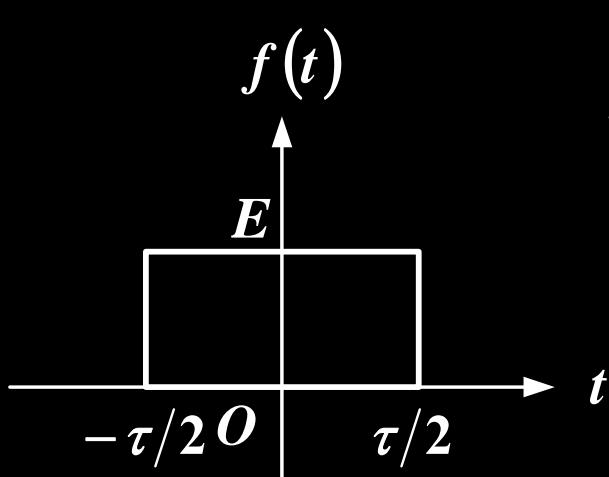
所有能量信号均满足此条件。

- 当引入 $\delta(\omega)$ 函数的概念后，允许作傅里叶变换的函数类型大大扩展了。

典型非周期信号的傅里叶变换

- 矩形脉冲
- 单边指数信号
- 直流信号
- 符号函数
- 升余弦脉冲信号

二. 矩形脉冲信号



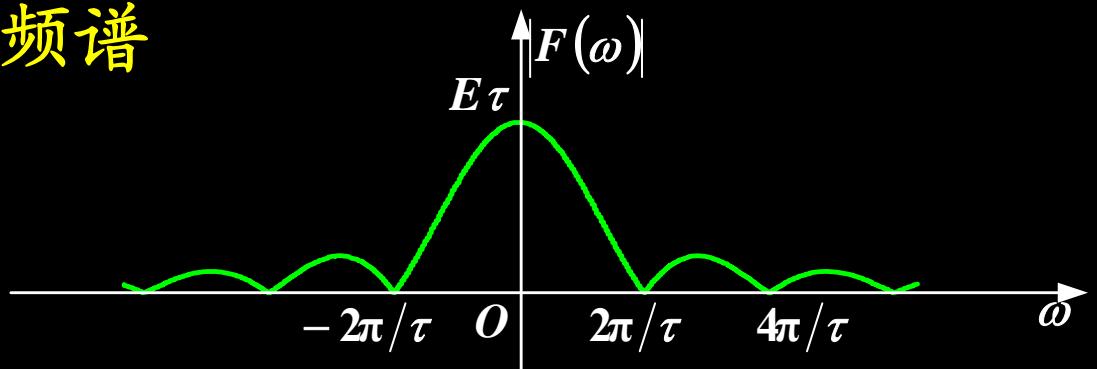
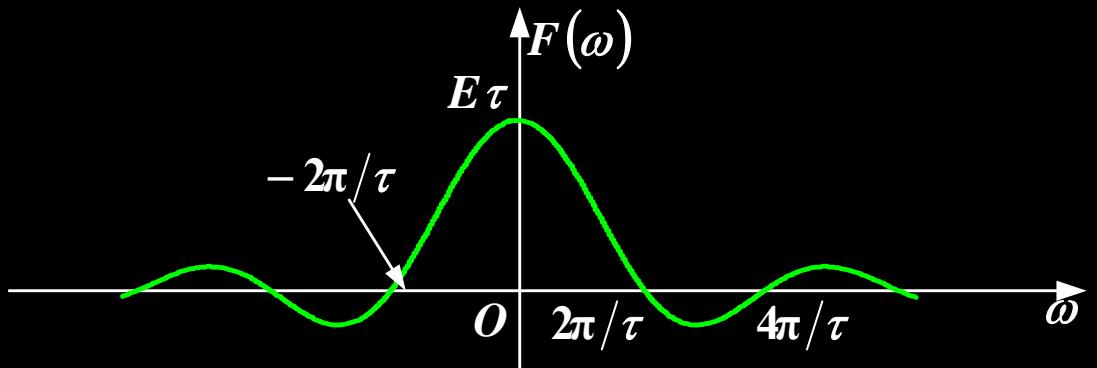
$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} E e^{-j\omega t} dt = \frac{E}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\
 &= \frac{E\tau}{\omega \frac{\tau}{2}} \cdot \frac{e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}}{2j} = E\tau \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}
 \end{aligned}$$

$$= E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

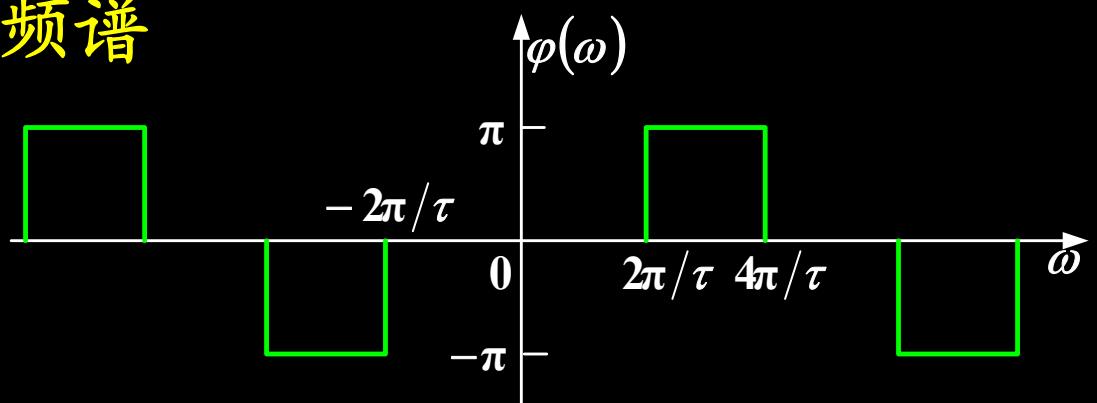
幅度频谱: $|F(\omega)| = E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$

相位频谱: $\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 & \frac{4n\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} \\ \pm\pi & \frac{2(2n+1)\pi}{\tau} < |\omega| < \frac{2(2n+2)\pi}{\tau} \end{cases} \quad n = 0, 1, 2, \dots$

频谱图



相位频谱



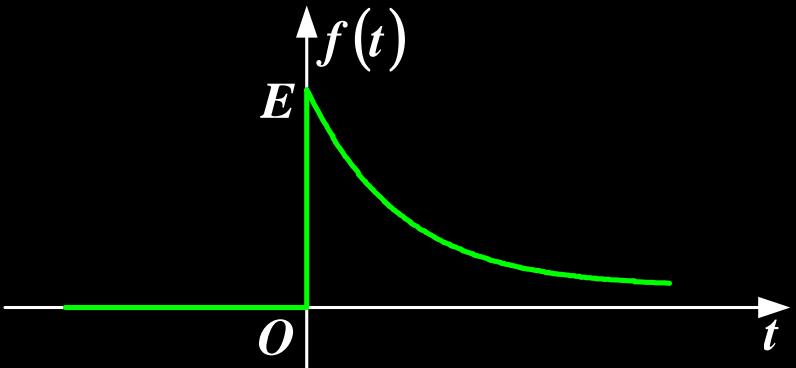
$$|F(\omega)| = E\tau \left| \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \right|$$

频宽:

$$B_\omega \approx \frac{2\pi}{\tau} \text{ 或 } B_f \approx \frac{1}{\tau}$$

二. 单边指数信号

$$f(t) = \begin{cases} E e^{-\alpha t} & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$



$$F(\omega) = F[f(t)]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-\alpha t} u(t) e^{-j\omega t} dt$$

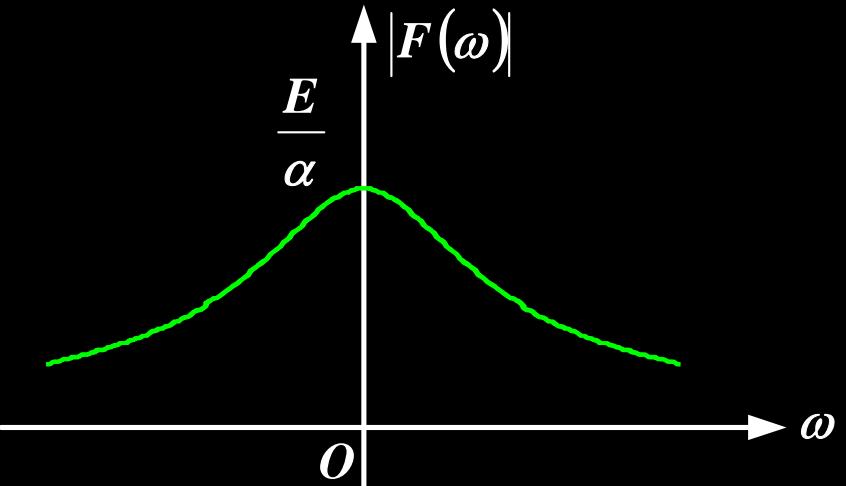
$$= \int_0^{\infty} E e^{-(\alpha + j\omega)t} dt$$

$$= \frac{E}{\alpha + j\omega}$$

频谱图

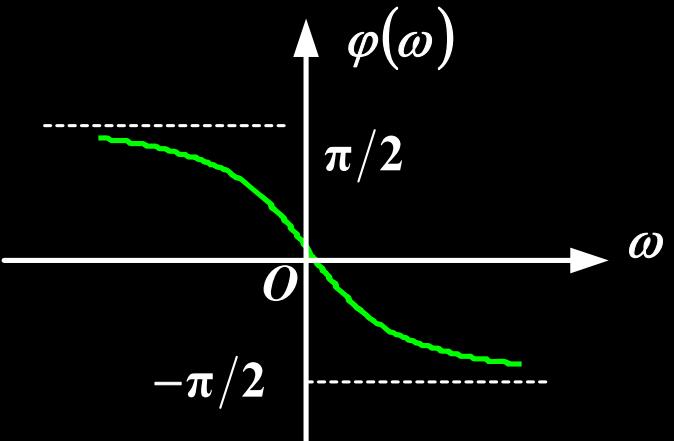
幅度频谱: $|F(\omega)| = \frac{E}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$

$$\begin{cases} \omega = 0, & |F(\omega)| = \frac{E}{\alpha} \\ \omega \rightarrow \pm\infty, & |F(\omega)| \rightarrow 0 \end{cases}$$



相位频谱: $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$

$$\begin{cases} \omega \rightarrow 0, & \varphi(\omega) = 0 \\ \omega \rightarrow +\infty, & \varphi(\omega) \rightarrow -\frac{\pi}{2} \\ \omega \rightarrow -\infty, & \varphi(\omega) \rightarrow \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

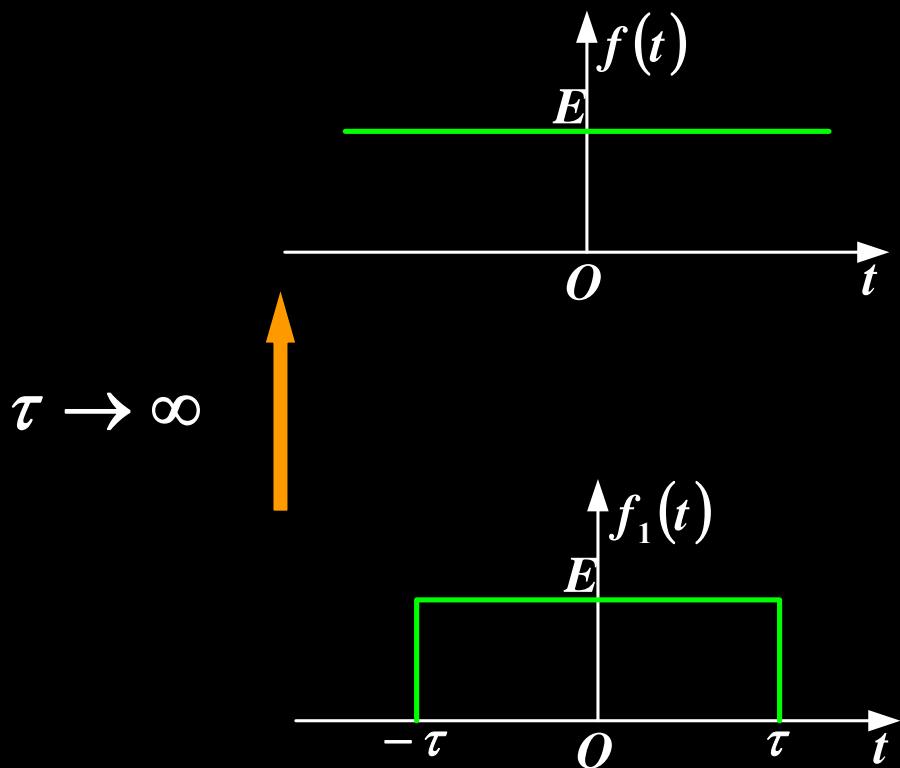


三. 直流信号

$$f(t) = E, -\infty < t < +\infty$$

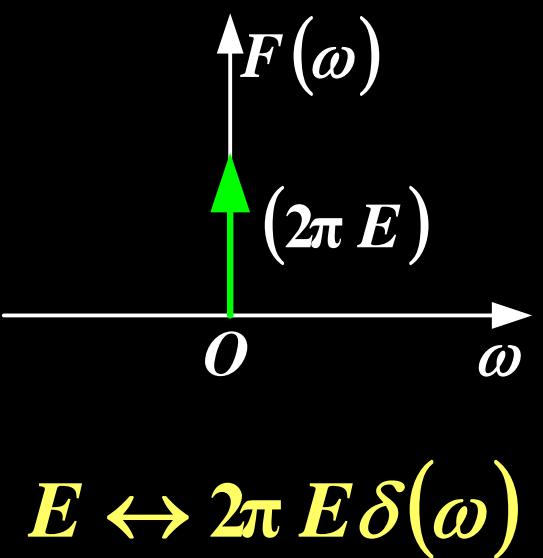
$$E \leftrightarrow 2\pi E \delta(\omega)$$

不满足绝对可积
条件，不能直接
用定义求 $F(\omega)$



推导

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} E e^{-j\omega t} dt \\
 &= E \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\tau}^{\tau} \\
 &= E \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{e^{-j\omega\tau} - e^{j\omega\tau}}{-j\omega} \\
 &= E \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{2 \sin(\omega\tau)}{\omega} \\
 &= 2\pi E \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\pi} \frac{\sin(\omega\tau)}{\omega\tau} \\
 &= 2\pi E \delta(\omega)
 \end{aligned}$$



时域无限宽，频带无限窄

$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{\pi} \text{Sa}(\omega\tau) = \delta(\omega)$

证明

四. 符号函数

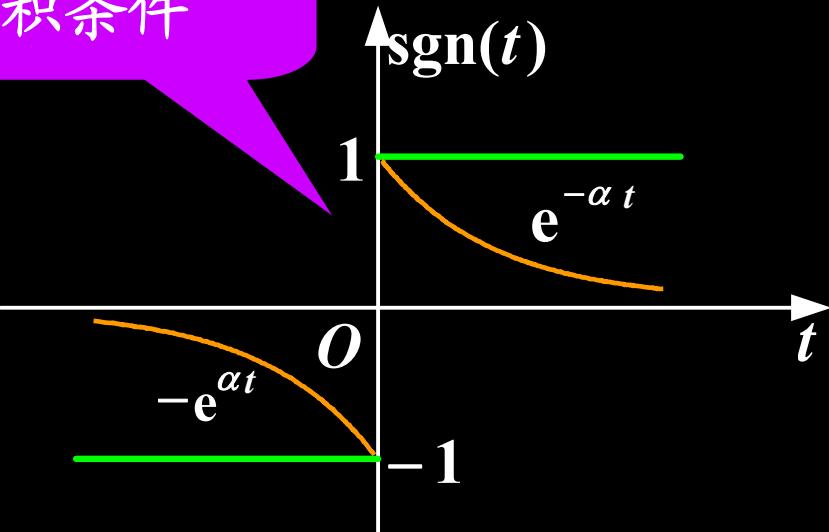
$$f(t) = \text{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

不满足绝对
可积条件

处理方法：做一个双边函数

$$f_1(t) = \text{sgn}(t)e^{-\alpha|t|}, \text{ 求 } F_1(\omega),$$

求极限得到 $F(\omega)$ 。



$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^0 -e^{\alpha t} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{-1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$F(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} F_1(\omega) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{-j2\omega}{\alpha^2 + \omega^2} = \frac{2}{j\omega}$$

频谱图

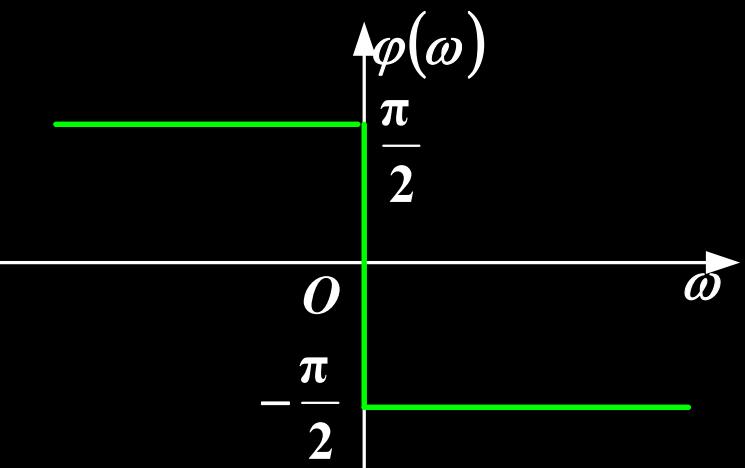
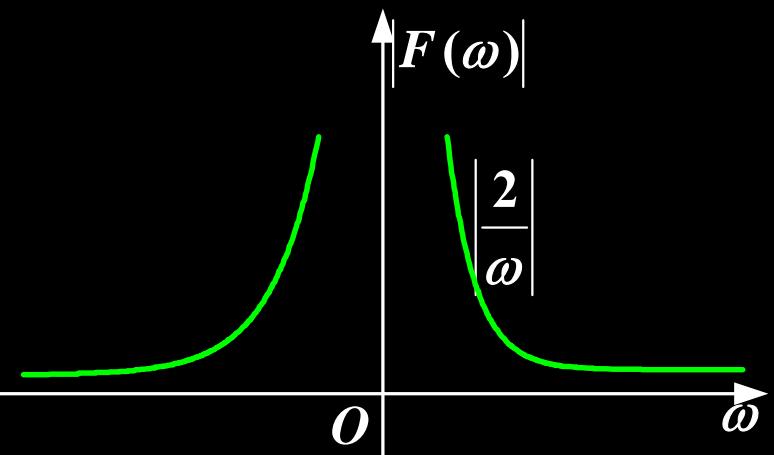
$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} = -j\frac{2}{\omega} = \frac{2}{|\omega|} e^{\mp j\frac{\pi}{2}}$$

$$|F(\omega)| = \left(\sqrt{\left(\frac{2}{\omega} \right)^2} = \frac{2}{|\omega|} \right)$$

$|F(\omega)|$ 是偶函数

$$\arctan \frac{-\frac{2}{\omega}}{0} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & \omega > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \omega < 0 \end{cases}$$

$\varphi(\omega)$ 是奇函数



五. 升余弦脉冲信号

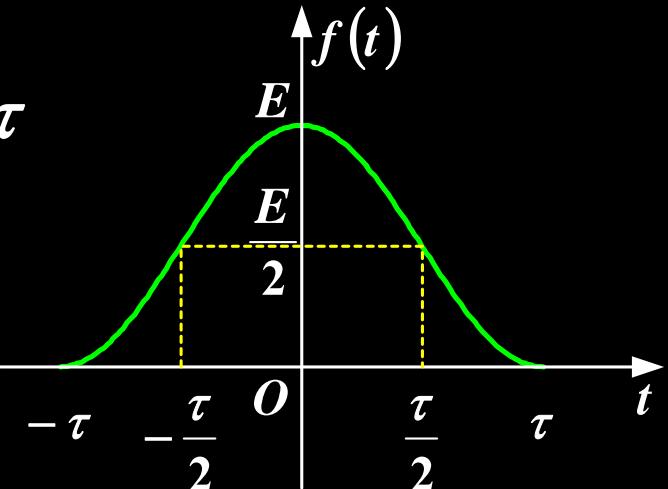
$$f(t) = \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] \quad 0 \leq |t| \leq \tau$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\tau}^{\tau} \frac{E}{2} \left[1 + \cos\left(\frac{\pi t}{\tau}\right) \right] e^{-j\omega t} dt$$

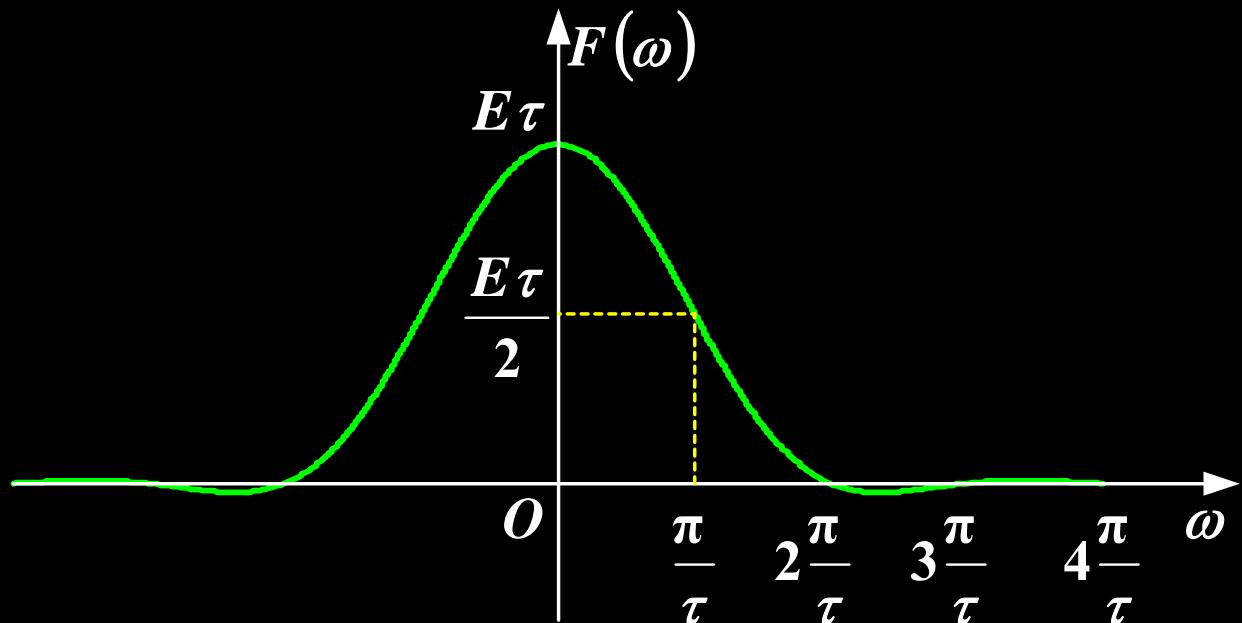
$$= \frac{E}{2} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\omega t} dt + \frac{E}{4} \int_{-\tau}^{\tau} e^{j\frac{\pi t}{\tau}} e^{-j\omega t} dt + \frac{E}{4} \int_{-\tau}^{\tau} e^{-j\frac{\pi t}{\tau}} e^{-j\omega t} dt$$

$$= E\tau \text{Sa}(\omega\tau) + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega - \frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right] + \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left[\left(\omega + \frac{\pi}{\tau}\right)\tau\right]$$



频谱图

$$F(\omega) = \frac{E \sin(\omega\tau)}{\omega \left[1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi} \right)^2 \right]} = \frac{E\tau \operatorname{Sa}(\omega\tau)}{1 - \left(\frac{\omega\tau}{\pi} \right)^2}$$



其频谱比矩形脉冲更集中。

例4.4 考虑下面矩形信号

$$x(t) = \begin{cases} 1 & , |t| < T_1 \\ 0 & , |t| > T_1 \end{cases}$$

如图4.8(a)所示,求它的傅里叶变换。

解:

$$X(j\omega) = \int_{-T_1}^{T_1} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \Big|_{-T_1}^{T_1} = \frac{1}{-j\omega} (e^{-j\omega T_1} - e^{j\omega T_1})$$

$$= 2 \frac{\sin \omega T_1}{\omega} = 2T_1 \frac{\sin \omega T_1}{\omega T_1} = 2T_1 \sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

$$[\because \sin c(\theta) = \frac{\sin \pi \theta}{\pi \theta} \quad \text{sinc函数}]$$

$$\therefore \frac{\sin(\omega T_1)}{\omega T_1} = \frac{\sin\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\pi\right)}{\frac{\omega T_1}{\pi}\pi} = \sin c\left(\frac{\omega T_1}{\pi}\right)$$

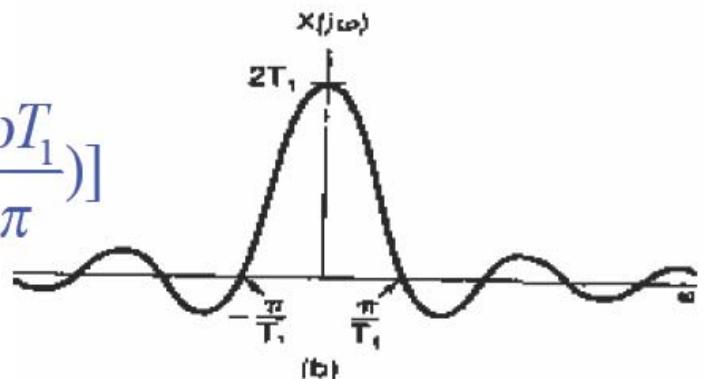
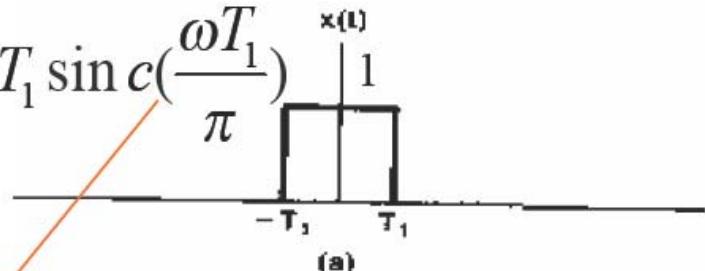


图 4.8 (a) 例 4.4 中的矩形脉冲信号;

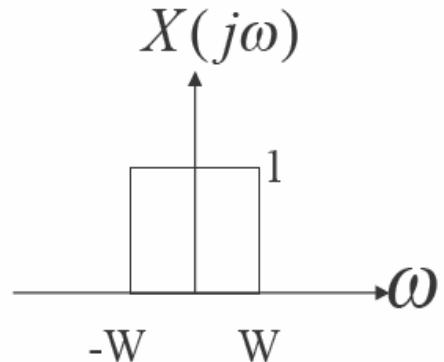
例4.5 已知信号的傅里叶变换为

$$X(j\omega) = \begin{cases} 1 & , |\omega| < W \\ 0 & , |\omega| > W \end{cases} \quad (4.18)$$

求 $x(t)$

解:利用综合公式可得

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi jt} e^{j\omega t} \Big|_{-W}^W = \frac{1}{2\pi jt} (e^{jWt} - e^{-jWt}) \\ &= \frac{\sin Wt}{\pi t} = \frac{W}{\pi} \frac{\sin Wt}{Wt} = \frac{W}{\pi} \sin c\left(\frac{Wt}{\pi}\right) \end{aligned} \quad (4.19)$$



如图4.9(b)所示

比较例4.4和例4.5可发现：

1、傅里叶变换对都是形式为 $(\sin a\theta)/b\theta$ 的函数和一个矩形脉冲所组成。（在例4.4中信号是脉冲；在例4.5中变换 $X(j\omega)$ 是一个脉冲。）这种特殊关系，显然是傅里叶变换具有对偶性的直接结果。

2、 $(\sin a\theta)/b\theta$ 的函数形式在分析及LTI系统的研究中具有特殊的重要作用，因此往往给予它特别的名称和符号。通常将

$\sin x/x$ 定义为 $Sa(x)$ 称为抽样函数

$\sin \pi x / \pi x = \sin c(x)$ 称为 $\sin c$ 函数

显然， $\sin c(x)$ 就是将 $Sa(x)$ 的自变量作尺度变换的结果，或者说是以 π 作为因子进行归一的结果。

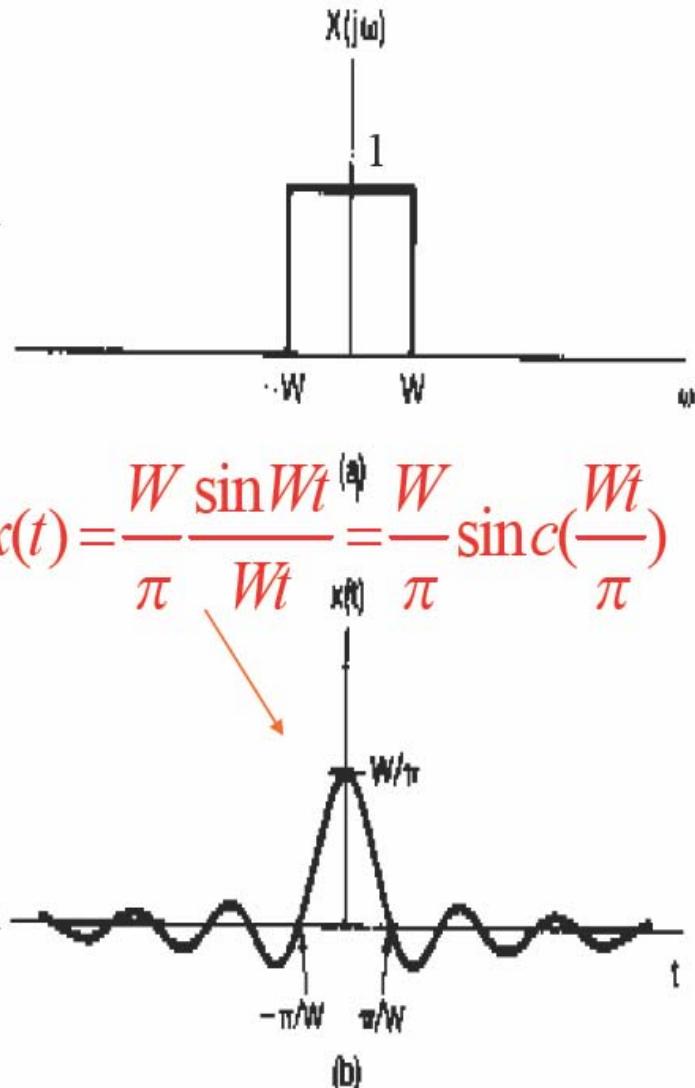


图 4.9 例 4.5 的傅里叶变换对：

(a) 例 4.5 的傅里叶变换；(b) 相应的时间函数

3、W对信号和频谱的影响

1)、当W增大时：

- $X(j\omega)$ 变宽；
- $x(t)$ 在时域被压缩，其主瓣（即 $|t| < \pi/W$ 部分）变得愈来愈窄；

2)、当 $W \rightarrow \infty$ 的极限下

$$X(j\omega) = 1, \quad -\infty < \omega < \infty$$

(见例4.3)

$x(t)$ 将表现为一个冲激函数。

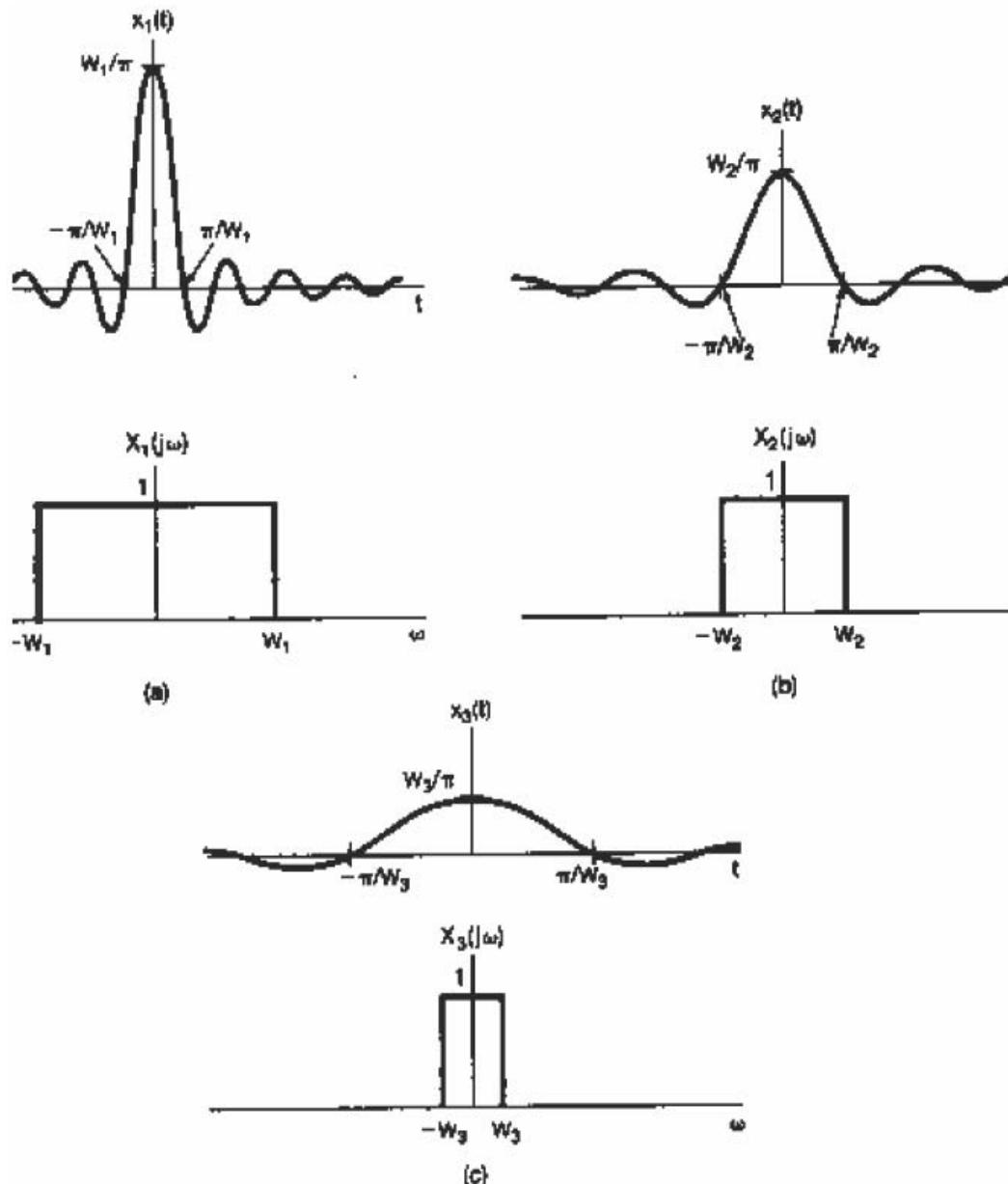
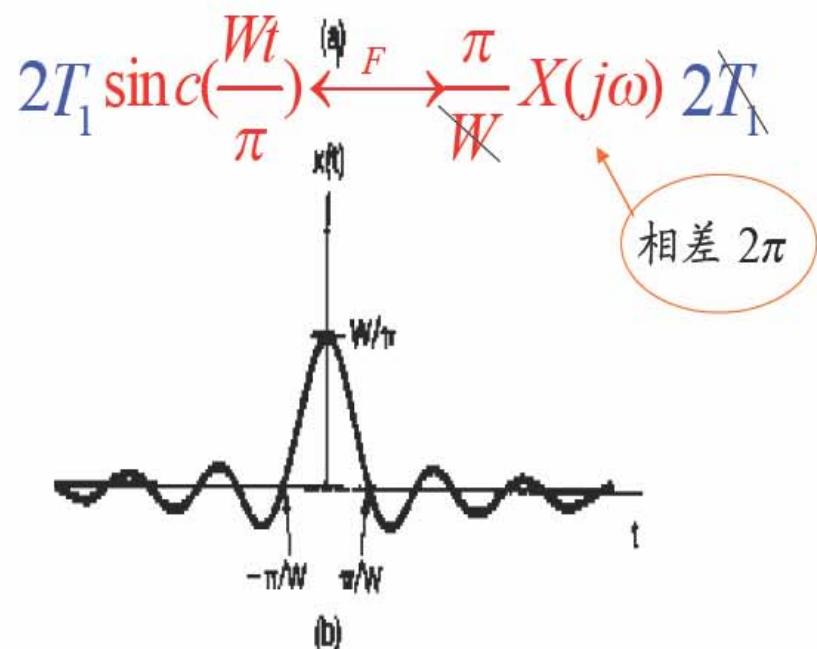
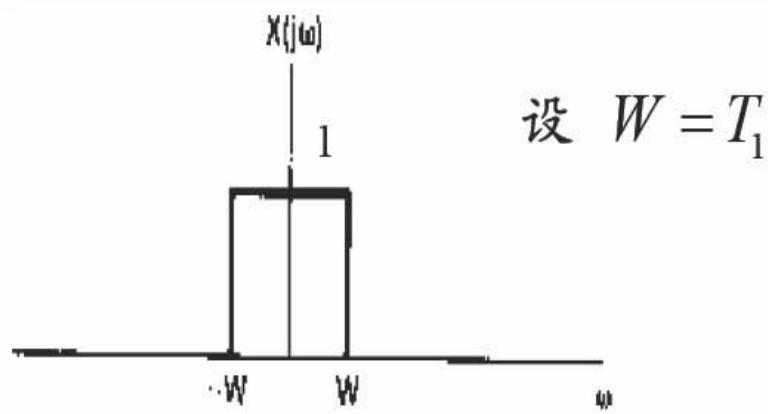


图 4.11 对于几个不同的 W 值，图 4.9 的傅里叶变换对



4.9 例 4.5 的傅里叶变换对：

(a) 例 4.5 的傅里叶变换；(b) 相应的时间函数

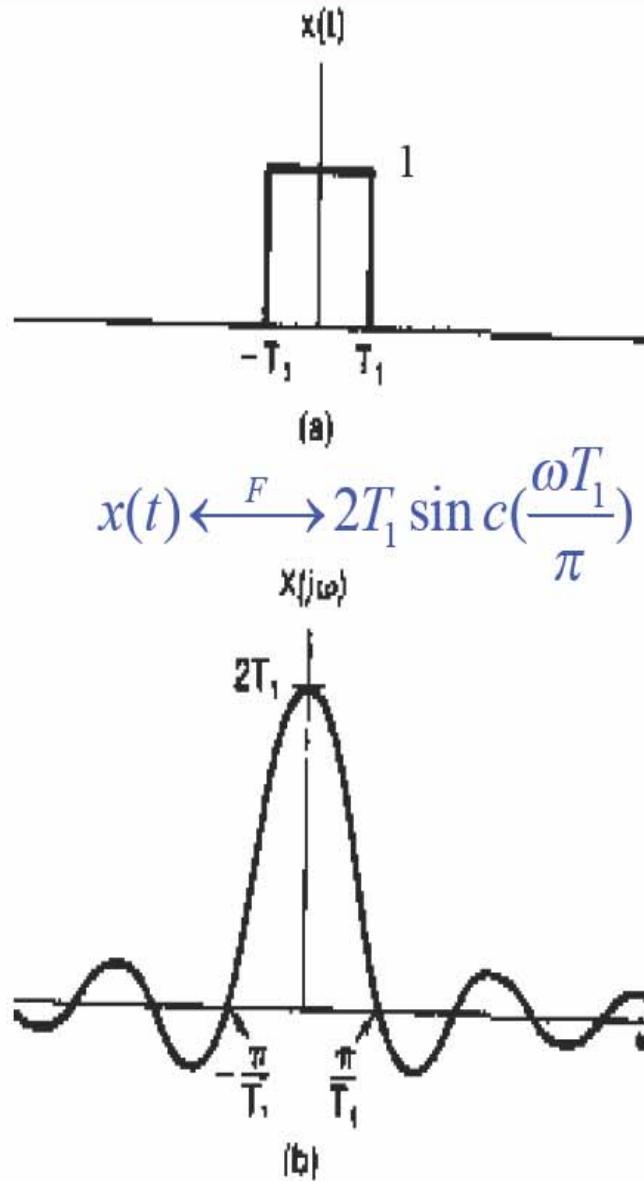


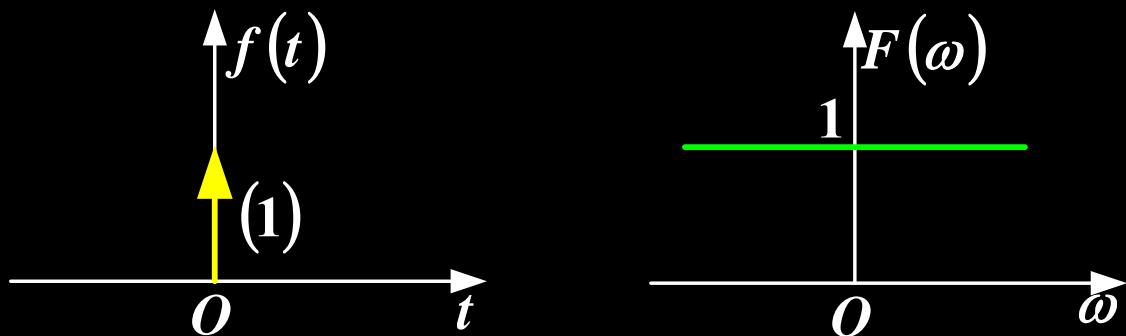
图 4.8 (a) 例 4.4 中的矩形脉冲信号；

冲激函数和阶跃函数的傅里叶 变换

- 冲激函数
- 冲激偶
- 单位阶跃函数

一. 冲激函数

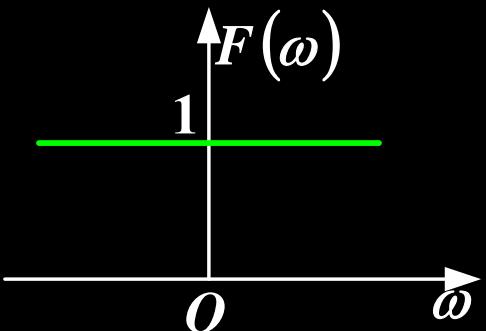
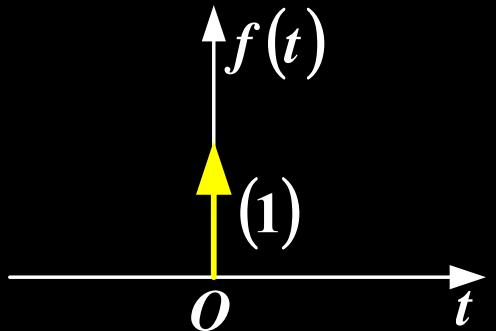
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1$$



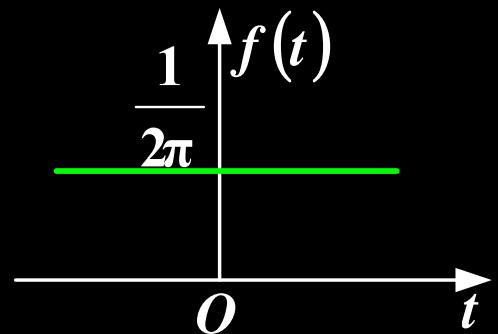
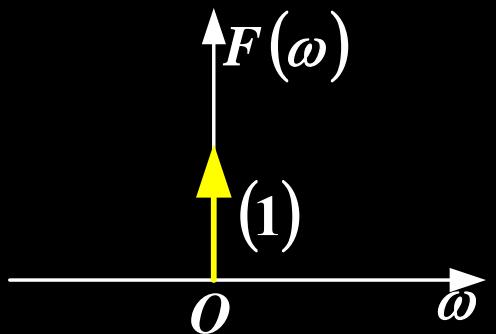
- $\delta(t)$ 看作 $\tau \times \frac{1}{\tau}$ 的矩形脉冲， $\tau \rightarrow 0$ 时, $B_\omega \rightarrow \infty$
- 冲激函数积分是有限值，可以用公式求。而 $u(t)$ 不满足绝对可积条件，不能用定义求。

比较

$$\delta(t) \leftrightarrow 1$$



$$\delta(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}$$



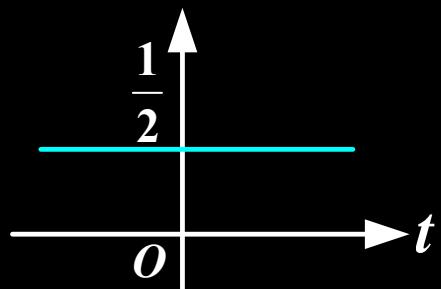
二. 冲激偶的傅里叶变换

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t) dt = -f'(0)$$

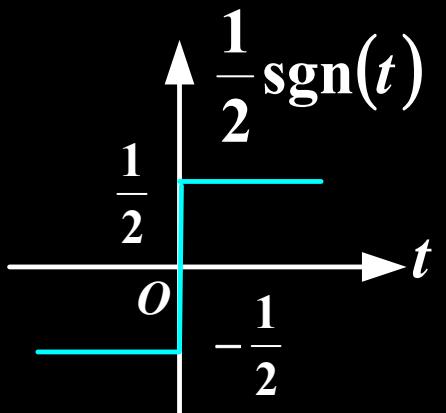
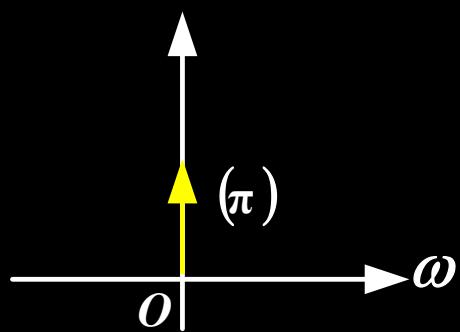
$$\begin{aligned} F[\delta'(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= -[e^{-j\omega t}] \Big|_{t=0} \\ &= -(-j\omega) = j\omega \end{aligned}$$

三. 单位阶跃函数

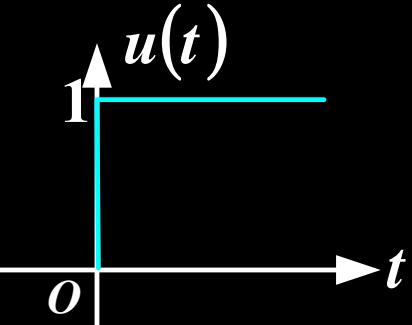
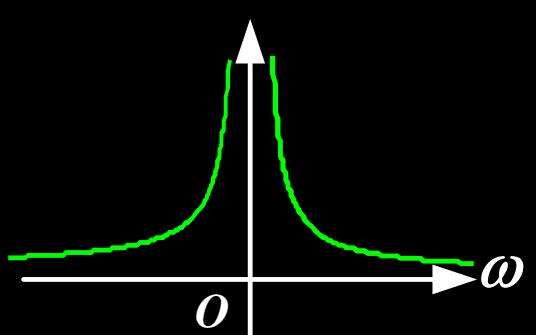
$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t)$$



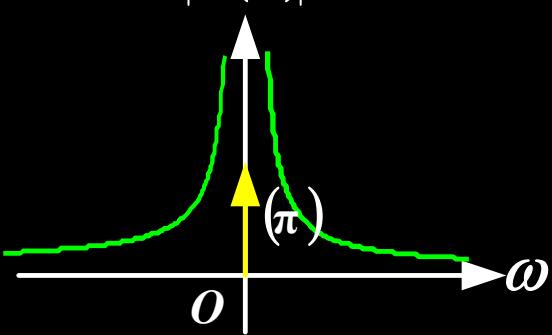
$$\frac{1}{2} \leftrightarrow \pi \delta(\omega)$$



$$\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$



$$u(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



傅里叶变换的基本性质

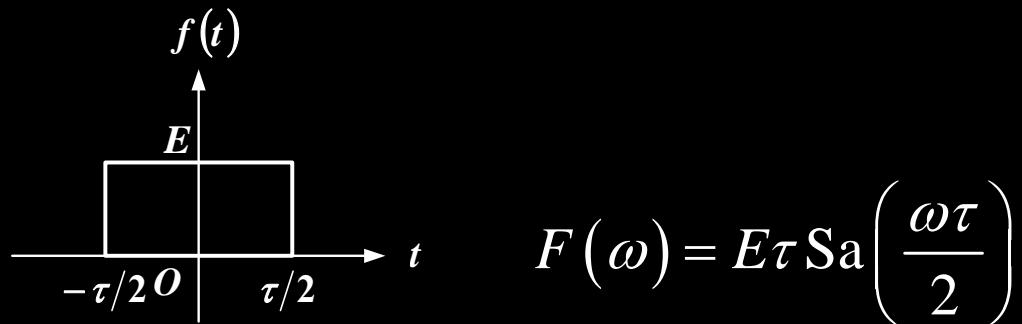
傅里叶变换对

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F[f(t)]$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}[F(\omega)]$$

简写 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

典型信号的傅立叶变换



$$f(t) = \begin{cases} E e^{-\alpha t} & t > 0 \quad \alpha > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad F(\omega) = \frac{E}{\alpha + j\omega}$$

$$\delta(t) \leftrightarrow 1 \quad \delta(\omega) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}$$

$$E \leftrightarrow 2\pi E \delta(\omega) \quad \delta'(t) \leftrightarrow j\omega$$

$$\operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega} \quad u(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

主要内容

对称性质

线性性质

奇偶虚实性

尺度变换性质

时移特性

频移特性

微分性质

时域积分性质

Parseval定理

意义

傅里叶变换具有唯一性。傅氏变换的性质揭示了信号的时域特性和频域特性之间的确定的内在联系。讨论傅里叶变换的性质，目的在于：

- 了解特性的内在联系；
- 用性质求 $F(\omega)$ ；
- 了解在通信系统领域中的应用。

符号说明： $F(\omega)$ 、 $X(j\omega)$ 等价

一. 对称性质

1. 性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega)$

若 $f(t)$ 为偶函数 则 $F(t) \leftrightarrow 2\pi f(\omega)$

2. 意义

若 $F(t)$ 形状与 $F(\omega)$ 相同, $(\omega \rightarrow t)$

则 $F(t)$ 的频谱函数形状与 $f(t)$ 形状相同, $(t \rightarrow \omega)$,
幅度差 2π 。

例题

例题

例3-7-1

$$\delta(t) \leftrightarrow 1, \quad F(t) = 1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

例3-7-2

已知 $F[\text{sgn}(t)] = \frac{2}{j\omega}$,

则 $\frac{2}{jt} \leftrightarrow 2\pi \text{sgn}(-\omega)$

即 $\frac{1}{t} \leftrightarrow -j\pi \text{sgn}(\omega)$

相移全通
网络

例3-7-3

$$f(t) = E \left[u\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - u\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] \Leftrightarrow F(\omega) = E \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

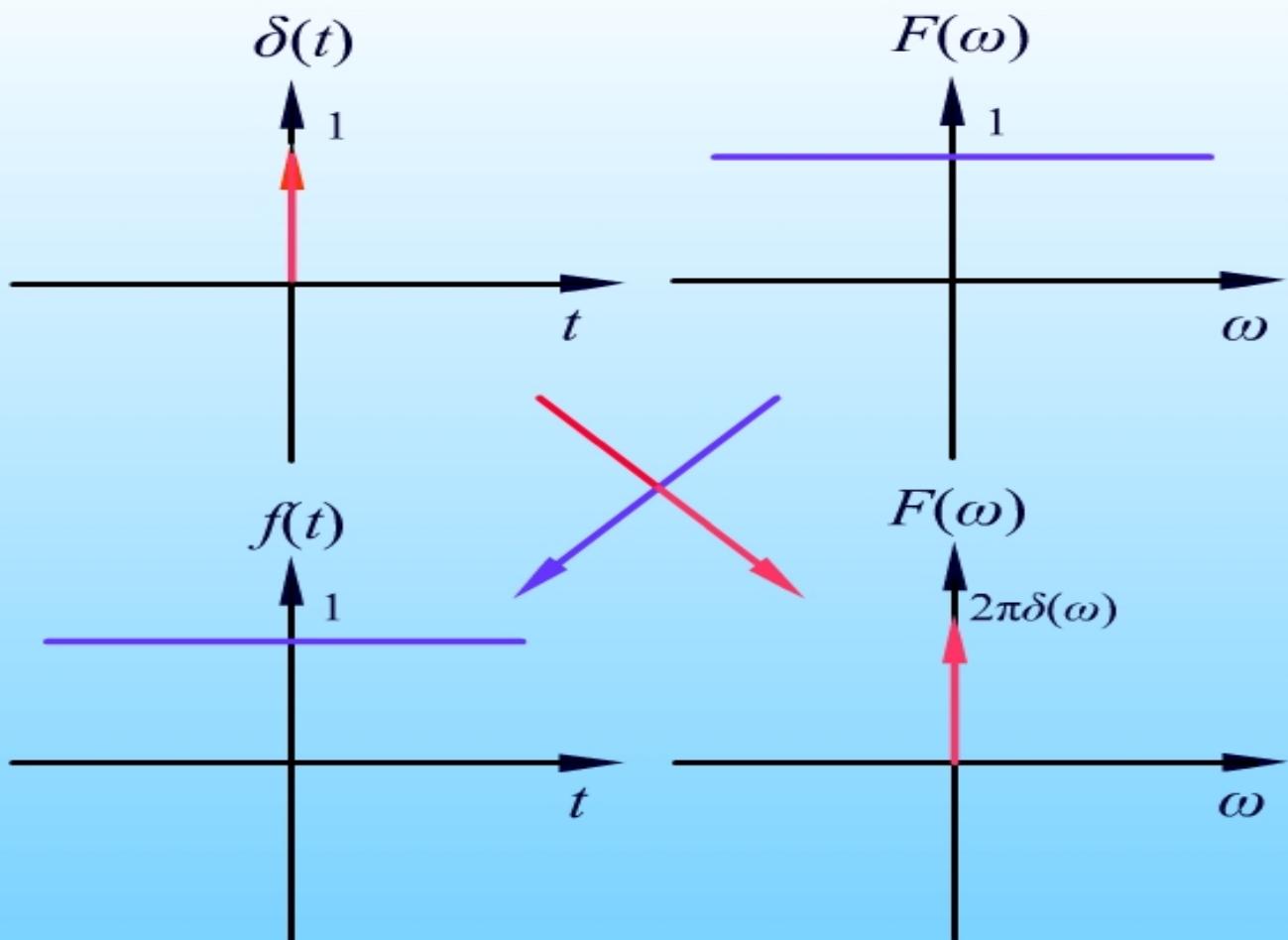
$$\tau \rightarrow \omega_c, t \leftrightarrow \omega$$

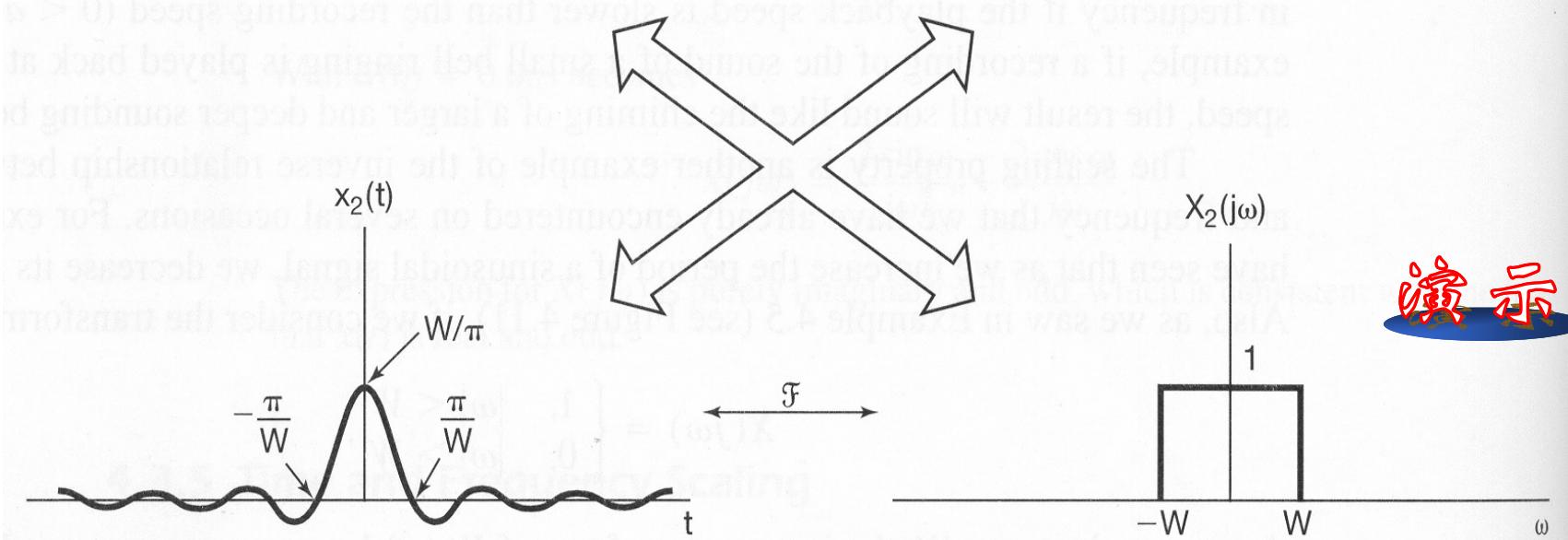
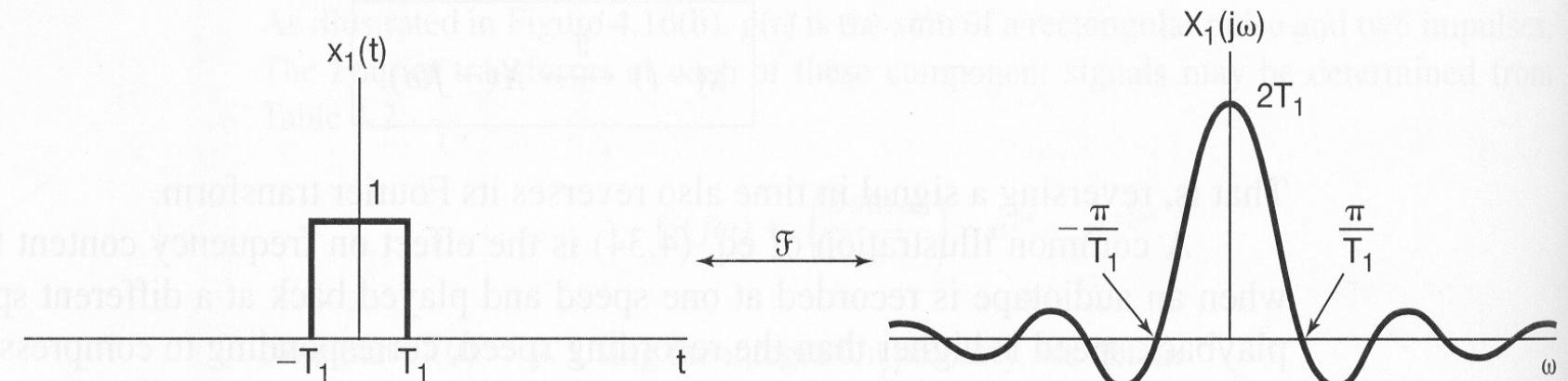
$$f(\omega) = E \left[u\left(\omega + \frac{\omega_c}{2}\right) - u\left(\omega - \frac{\omega_c}{2}\right) \right] \Leftrightarrow F(t) = \frac{1}{2\pi} E \omega_c \text{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$$

$$= E \frac{\omega_c}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega_c t}{2}\right)$$

宽度为 $2\omega_0$
的方波

$$\text{若 } \omega_c = 2\omega_0, \text{ 则有 } \text{Sa}(\omega_0 t) \Leftrightarrow \frac{\pi}{\omega_0} G_{2\omega_0}(\omega)$$





二. 线性性质

1. 性质

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则 $c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) \leftrightarrow c_1 F_1(\omega) + c_2 F_2(\omega)$ c_1, c_2 为常数

2. 例3-7-3

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t) \leftrightarrow F(\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

三. 奇偶虚实性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $f(-t) \leftrightarrow F(-\omega)$

证明:

由定义 $F[f(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega)$

可以得到

$$F[f(-t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-j(-\omega)u} du = F(-\omega)$$

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $f(-t) \leftrightarrow F^*(\omega)$

证明

奇偶虚实性证明

设 $f(t)$ 是 实 函数 (为虚函数或复函数情况相似, 略)

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt$$

显然

$$\left. \begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \right\}$$

关于 ω 的偶函数

$$R(\omega) = R(-\omega)$$

关于 ω 的奇函数

$$X(\omega) = -X(-\omega)$$

所以

$$F(-\omega) = F^*(\omega)$$

已知 $F[f(-t)] = F(-\omega)$

$$F[f(-t)] = F^*(\omega)$$

无论 $f(t)$ 是实函数还是复函数，下面四式都成立。

$$F[f(t)] = F(j\omega)$$

$$F[f(-t)] = F(-j\omega)$$

$$F[f^*(t)] = F^*(-j\omega)$$

$$F[f^*(-t)] = F^*(j\omega)$$

(1) $f(t)$ 为实函数

$$F(\omega) = |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} = R(\omega) + jX(\omega)$$

模 相位 实部 虚部

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

实信号 偶分量 奇分量

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [f_e(t) + f_o(t)] \cdot [\cos \omega t - j \sin \omega t] dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} f_e(t) \cos \omega t dt - j 2 \int_0^{\infty} f_o(t) \sin \omega t dt \end{aligned}$$

实部 虚部

$$R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f_e(t) \cos(\omega t) dt$$

关于 ω 的偶函数

$$X(\omega) = -2 \int_0^{\infty} f_o(t) \sin(\omega t) dt$$

关于 ω 的奇函数

$$|F(\omega)| = \sqrt{[R(\omega)]^2 + [X(\omega)]^2}$$

关于 ω 的偶函数

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{X(\omega)}{R(\omega)}$$

关于 ω 的奇函数

$f(t)$ 偶函数
 (奇分量为零) $\leftrightarrow F(\omega)$ 为实函数，只有 $R(\omega)$ ，相位 $\pm\pi$

$f(t)$ 奇函数
 (偶分量为零) $\leftrightarrow F(\omega)$ 为虚函数，只有 $X(\omega)$ ，相位 $\pm\frac{\pi}{2}$

(2) $f(t)$ 为虚函数

$$f(t) = -f^*(t) \quad F(\omega) = -F^*(-\omega)$$

$$R(\omega) + jX(\omega) = -[R(-\omega) + jX(-\omega)]^* = -R(-\omega) + jX(-\omega)$$

$$\begin{cases} R(\omega) = -R(-\omega) \\ X(\omega) = X(-\omega) \end{cases} \quad \begin{cases} |F(\omega)| = |F(-\omega)| \\ \varphi(\omega) = \pi - \varphi(-\omega) \end{cases}$$

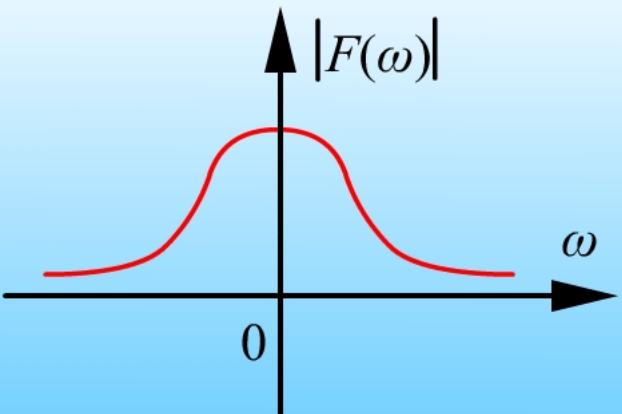
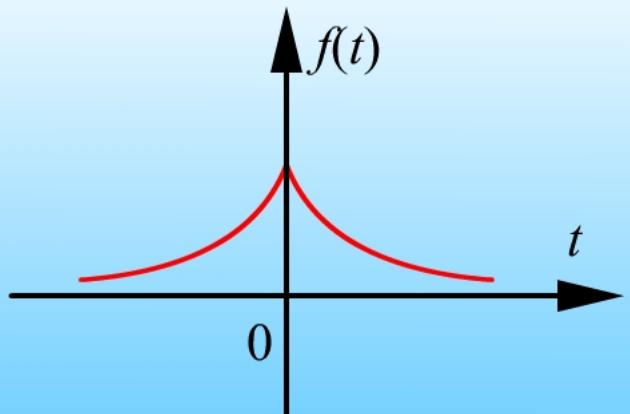
$f(t)$ 虚偶函数 $\leftrightarrow F(\omega)$ 为虚偶函数

$f(t)$ 虚奇函数 $\leftrightarrow F(\omega)$ 为实奇函数

实偶函数的傅里叶变换仍为实偶函数

$$f(t) = e^{-at|t|} \quad (0 < a < 1)$$

$$F(j\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}, \varphi(\omega) = 0$$



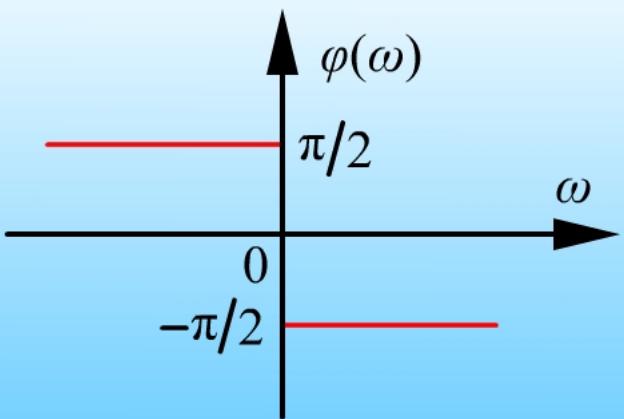
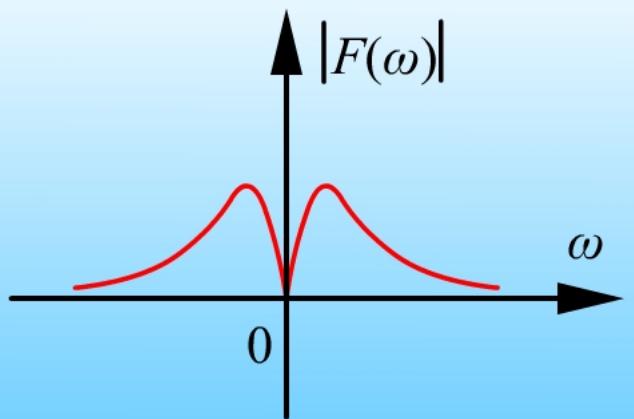
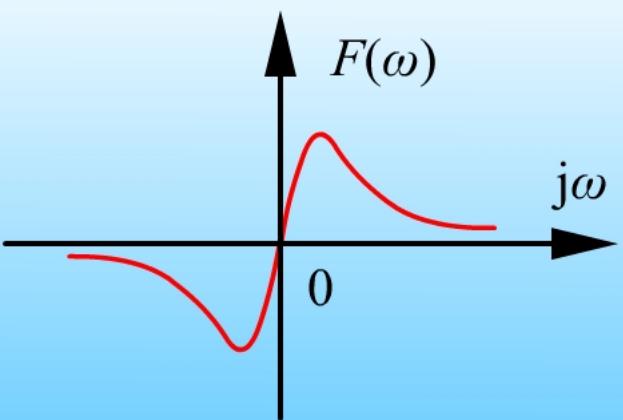
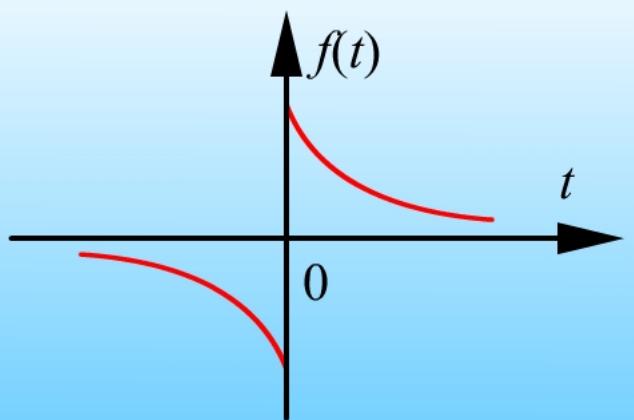
实奇函数的傅里叶变换则为虚奇函数

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & (t > 0) \\ e^{-at} & (t < 0) \end{cases}, \quad (0 < a < 1)$$

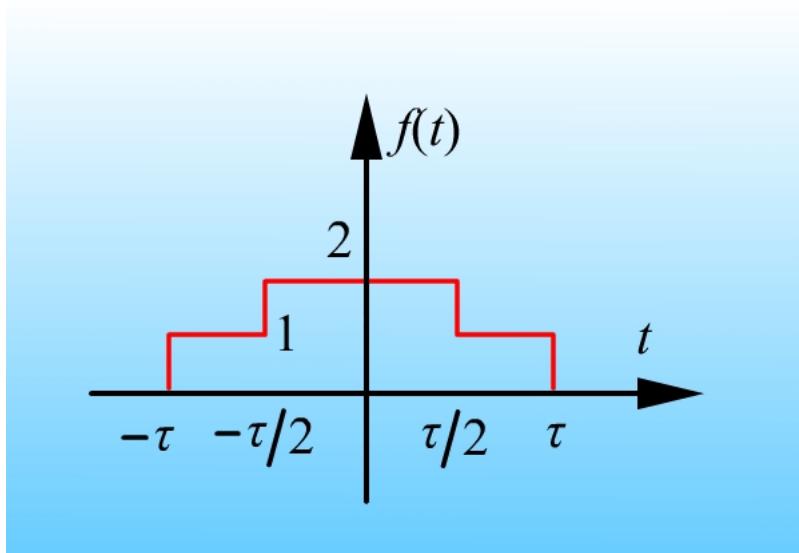
$$F(j\omega) = \frac{2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{2|\omega|}{a^2 + \omega^2}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (\omega > 0) \\ \frac{\pi}{2} & (\omega < 0) \end{cases}$$



例1. 求 $f(t)$ 的傅里叶变换



$$f(t) = [u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})] + [u(t + \tau) - u(t - \tau)]$$

$$F(j\omega) = \tau [sa(\omega\tau/2) + 2sa(\omega\tau)]$$

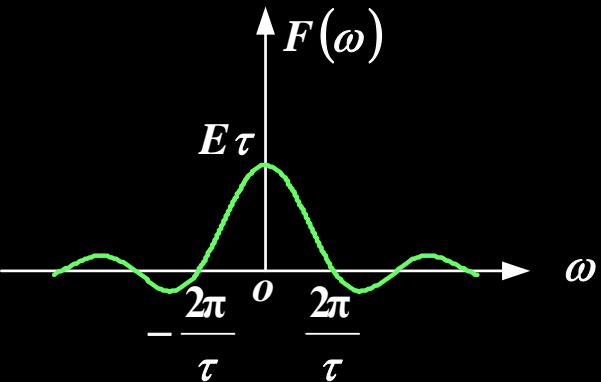
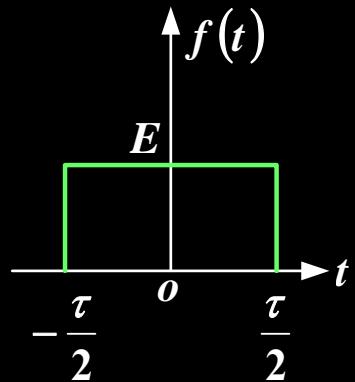
四. 尺度变换性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$, a 为非零函数

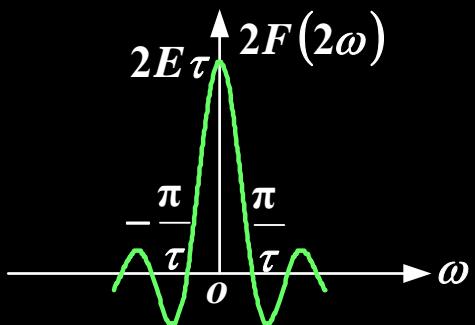
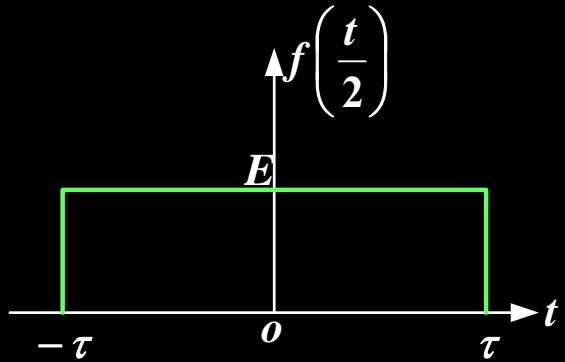
证明

意义

- (1) $0 < a < 1$ 时域扩展, 频带压缩。
- (2) $a > 1$ 时域压缩, 频域扩展 a 倍。
- (3) $a = -1$ $f(t) \rightarrow f(-t)$, $F(\omega) \rightarrow F(-\omega)$ 。

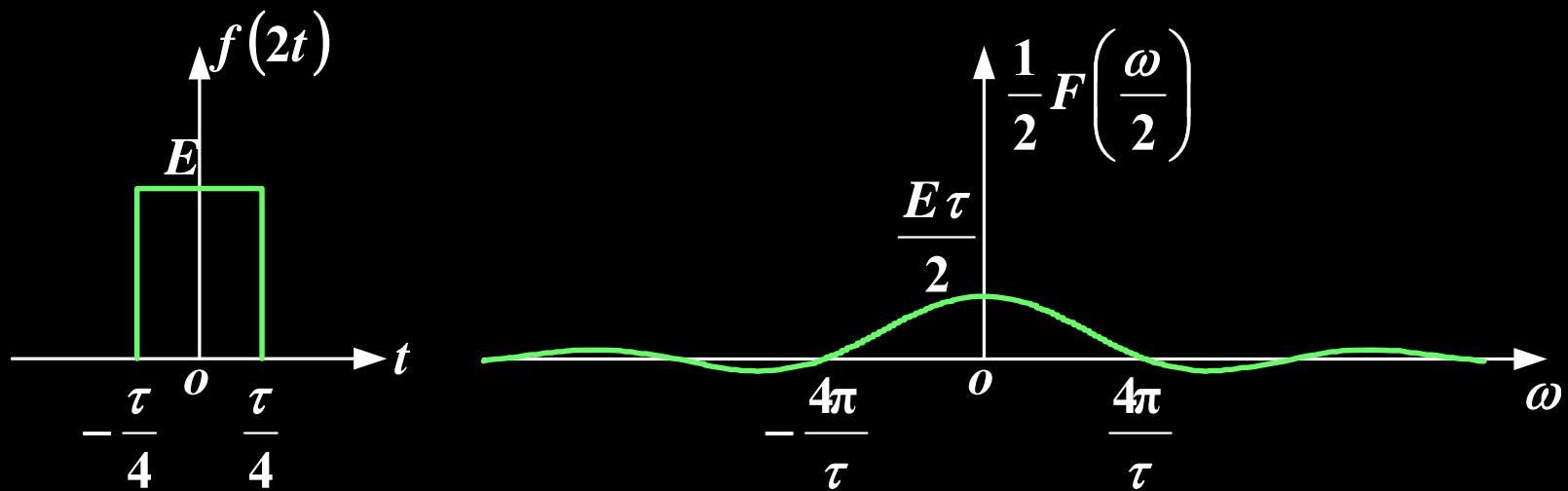


(1) $0 < a < 1$ 时域扩展，频带压缩。



脉冲持续时间增加 a 倍，变化慢了，信号在频域的频带压缩 a 倍。高频分量减少，幅度上升 a 倍。

(2) $a > 1$ 时域压缩，频域扩展 a 倍。



持续时间短，变化快。信号在频域高频分量增加，频带展宽，各分量的幅度下降 a 倍。

此例说明：信号的持续时间与信号占有频带成反比，有时为加速信号的传递，要将信号持续时间压缩，则要以展开频带为代价。

$$(3) \quad a = -1 \quad f(t) \rightarrow f(-t), \quad F(\omega) \rightarrow F(-\omega) = F^*(\omega)$$

当 $f(t)$ 为实函数时, $F(-\omega) = F^*(\omega)$ 共轭

$R(\omega)$ 为偶函数, $X(\omega)$ 为奇函数

$$F(-\omega) = R(-\omega) + jX(-\omega) = R(\omega) - jX(\omega) = F^*(\omega)$$

演示

尺度变换性质证明

因为

$$F[f(at)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$$

当 $a > 0$, 令 $x = at, t = \frac{x}{a}, dt = \frac{1}{a} dx$

$$F[f(at)] = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

当 $a < 0$, $a = -|a|$,

令 $x = at = -|a|t, t = \frac{x}{a} = -\frac{1}{|a|}x, dt = -\frac{1}{|a|} dx$

$$F[f(at)] = \frac{-1}{|a|} \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} dx = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

综合上述两种情况

$$F[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

五. 时移特性

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $f(t - t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{-j\omega t_0}$;

若 $F(\omega) = |F(\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$ 则 $f(t - t_0) \leftrightarrow |F(\omega)| \cdot e^{j[\varphi(\omega) - \omega t_0]}$

幅度频谱无变化，只影响相位频谱，

$$\text{相移 } \omega t_0 \begin{cases} \text{右} & -\omega t_0 \\ \text{左} & \omega t_0 \end{cases}$$

例题

时移加尺度变换

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ 则 $f(at + b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \cdot e^{j\omega \frac{b}{a}}$

例题

证明 $\left(\text{仿 } \delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \right)$ 的证明过程

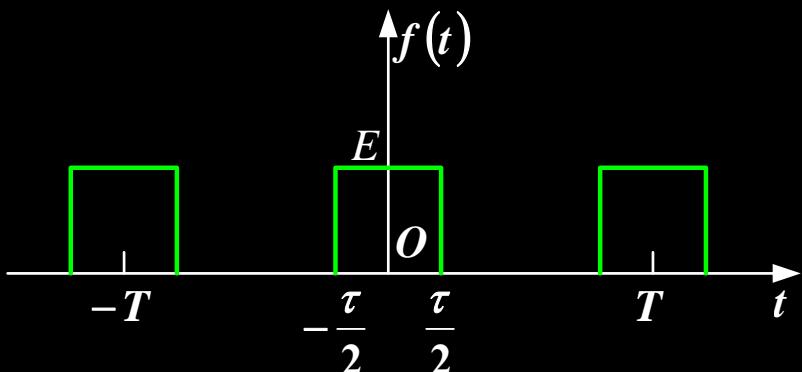
例3-7-4 (时移性质, 教材3-2)

求图(a)所示三脉冲信号的频谱。

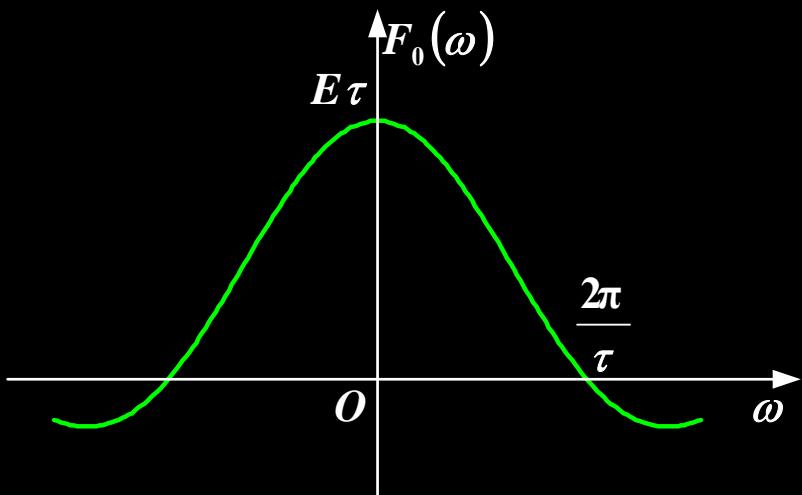
解:

令 $f_0(t)$ 表示矩形单脉冲信号, 其频谱函数 $F_0(\omega)$,

$$F_0(\omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



(a) 三脉冲信号的波形



(b)

因为

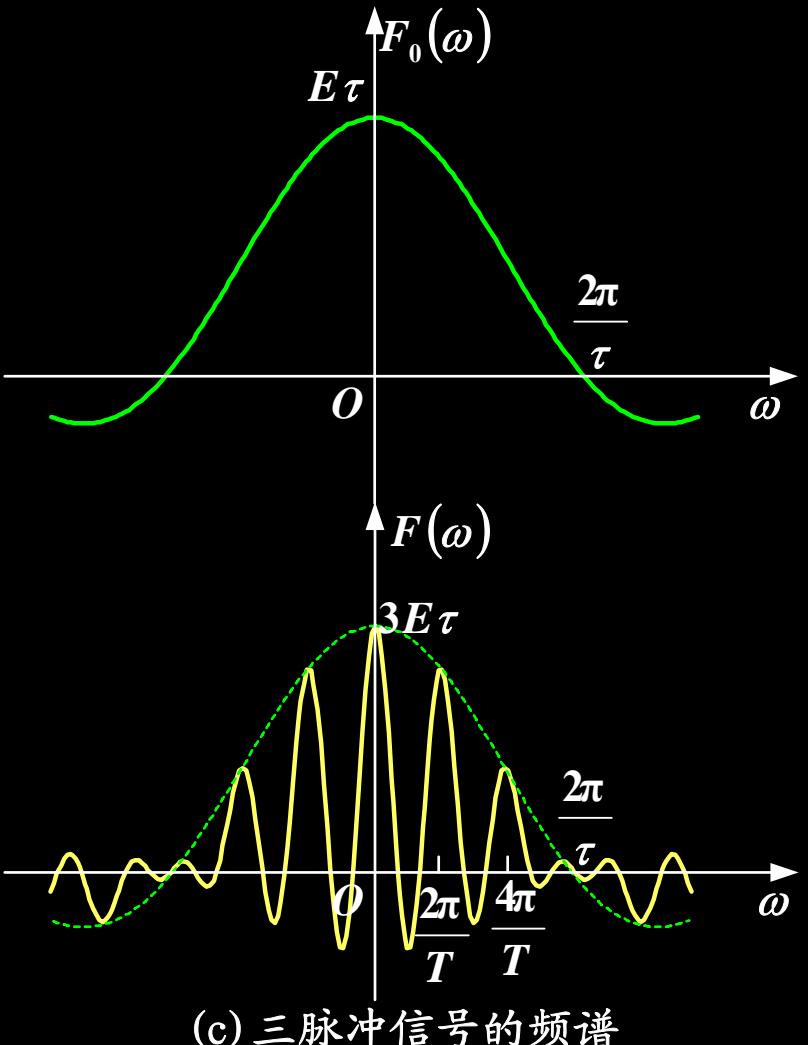
$$f(t) = f_0(t) + f_0(t+T) + f_0(t-T)$$

由时移性质知三脉冲函数 $f(t)$
的频谱函数 $F(\omega)$ 为：

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_0(\omega)(1 + e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) \\ &= E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)[1 + 2\cos(\omega T)] \end{aligned}$$

脉冲个数增多，频谱
包络不变，带宽不变。

演示



时移加尺度变换证明

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(at + b) e^{-j\omega t} dt$$

当 $a > 0$ 时, 设 $at + b = x$, 则 $t = \frac{x - b}{a}$, $dt = \frac{1}{a} dx$

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a}x} \cdot e^{j\frac{\omega}{a} \cdot \frac{b}{a}} \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \cdot e^{j\frac{\omega}{a} \cdot \frac{b}{a}}$$

当 $a < 0$ 时, $a = -|a|$, 设 $at + b = x$, 则 $t = \frac{x - b}{a} = \frac{x - b}{-|a|}$, $dt = -\frac{1}{|a|} dx$

$$e^{-j\omega t} = e^{-j\omega \frac{x-b}{a}} = e^{-j\frac{\omega}{a}x} \cdot e^{\frac{j\omega b}{a}}$$

$$F_1(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a}x} \cdot e^{j\frac{\omega}{a} \cdot \frac{b}{a}} \cdot -\frac{1}{|a|} dx = \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a}x} \cdot e^{j\frac{\omega}{a} \cdot \frac{b}{a}} dx$$

$$= \frac{1}{|a|} e^{j\frac{\omega}{a} \cdot \frac{b}{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a}x} dx = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \cdot e^{j\frac{\omega}{a} \cdot \frac{b}{a}}$$

例3-7-5

已知 $f(t) \leftrightarrow F(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 求 $f(2t - 5)$ 的频谱密度函数。

方法一：先标度变换，再时延

$$\text{因为 } a = 2, \text{ 所以 } f(2t) \leftrightarrow \frac{1}{2}F\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$$

$$\text{因为 } b = -5, \text{ 对 } t \text{ 时移 } \frac{5}{2} \text{ (向右)} \text{ 所以 } f(2t - 5) \leftrightarrow \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) e^{-j\frac{5}{2}\omega}$$

方法二：先时延再标度变换

$$\text{对 } t \text{ 时移 } 5 \text{ (向右)} : f(t - 5) \leftrightarrow E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega 5}$$

$$\text{对所有 } \omega \text{ 压缩 } 2 : f(2t - 5) \leftrightarrow \frac{E\tau}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4}\right) e^{-j\frac{5}{2}\omega}$$

相同

六. 频移特性

1. 性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$

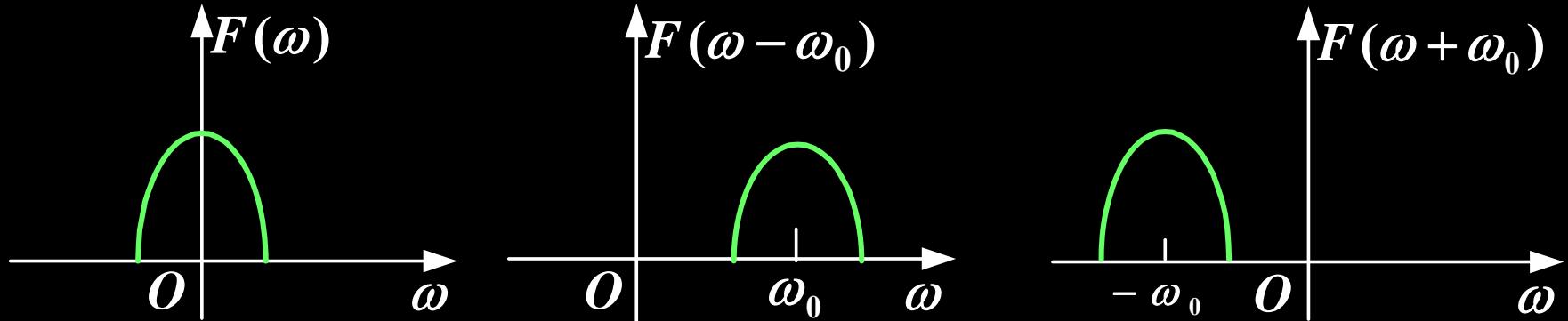
则
$$\left. \begin{aligned} f(t)e^{j\omega_0 t} &\leftrightarrow F(\omega - \omega_0) \\ f(t)e^{-j\omega_0 t} &\leftrightarrow F(\omega + \omega_0) \end{aligned} \right\}$$
 ω_0 为常数, 注意 \pm 号

2. 证明

$$F[f(t)e^{j\omega_0 t}] = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)e^{j\omega_0 t}] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt = F(\omega - \omega_0)$$

3. 说明



时域 $f(t)$ 乘 $e^{j\omega_0 t}$, 频域频谱搬移 右移 ω_0

时域 $f(t)$ 乘 $e^{-j\omega_0 t}$, 频域频谱搬移 左移 ω_0

4. 应用

通信中调制与解调，频分复用。

例题

例3-7-6 (教材例3-4)

已知矩形调幅信号 $f(t) = G(t)\cos(\omega_0 t)$,

其中 $G(t)$ 为矩形脉冲, 脉冲幅度为 E ,
脉宽为 τ , 试求其频谱函数。

解:

已知矩形脉冲 $G(t)$ 的频谱 $G(\omega)$ 为

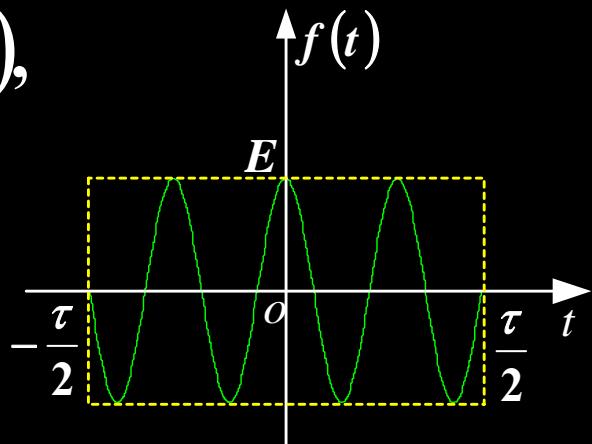
$$G(\omega) = E\tau \cdot \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

因为

$$f(t) = \frac{1}{2}G(t)(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

根据频移性质, $f(t)$ 频谱 $F(\omega)$ 为

$$F(\omega) = \frac{1}{2}G(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}G(\omega + \omega_0)$$

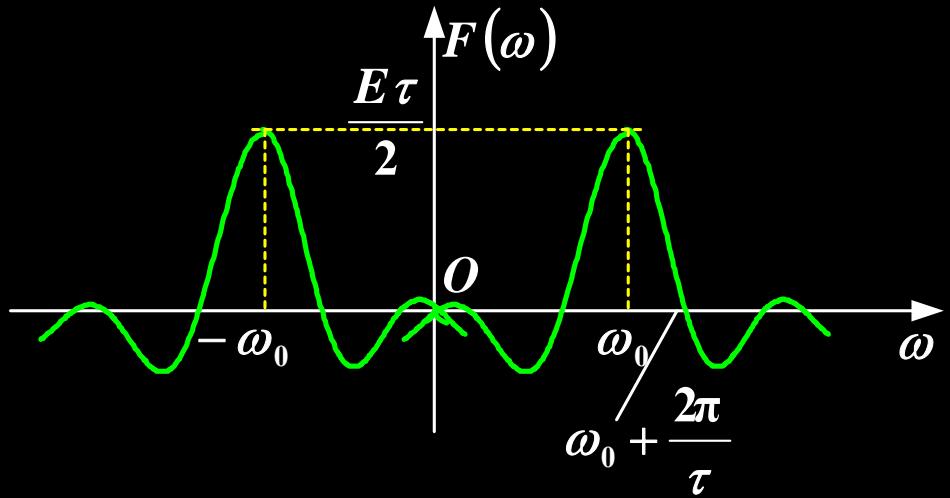


(a) 矩形调幅信号的波形

频谱图

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \frac{1}{2}G\left(\omega - \omega_0\right) + \frac{1}{2}G\left(\omega + \omega_0\right) \\
 &= \frac{E\tau}{2}\text{Sa}\left[\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}\right] + \frac{E\tau}{2}\text{Sa}\left[\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right]
 \end{aligned}$$

将包络线的频谱一分为二，向左、右各平移 ω_0



(b) 矩形调幅信号的频谱

七. 微分性质

时域微分性质

$$f(t) \leftrightarrow F(\omega), \text{ 则 } f'(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega)$$

频域微分性质

$$\text{若 } f(t) \leftrightarrow F(\omega), \text{ 则 } tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

$$-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$$

或

$$t^n f(t) \leftrightarrow (j)^n F^n(\omega)$$

1. 时域微分

$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $f'(t) \leftrightarrow j\omega F(\omega)$

一般情况下 $f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(\omega)$

若已知 $F[f^n(t)]$, 则 $F(\omega) = \frac{F[f^n(t)]}{(j\omega)^n}$

$F[f'(t)] = j\omega F(\omega)$: $\begin{cases} \text{幅度乘 } \omega \\ \text{相位增加, } j \rightarrow 90^\circ \end{cases}$

证明

例题

注意

时域微分性质证明

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$f'(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega$$

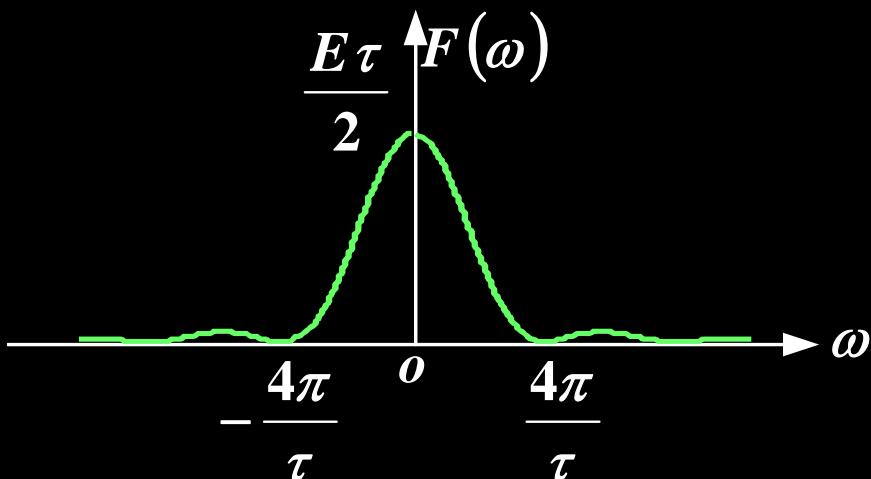
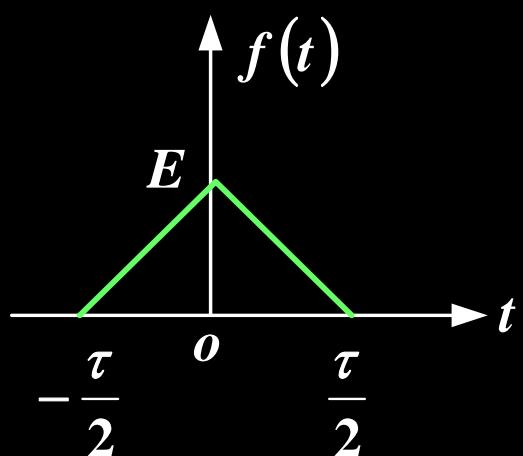
$$f'(t) \leftrightarrow F(\omega) j\omega = j\omega F(\omega)$$

即

$$F[f'(t)] = j\omega F(\omega)$$

例3-7-7

求三角函数的频谱密度函数.

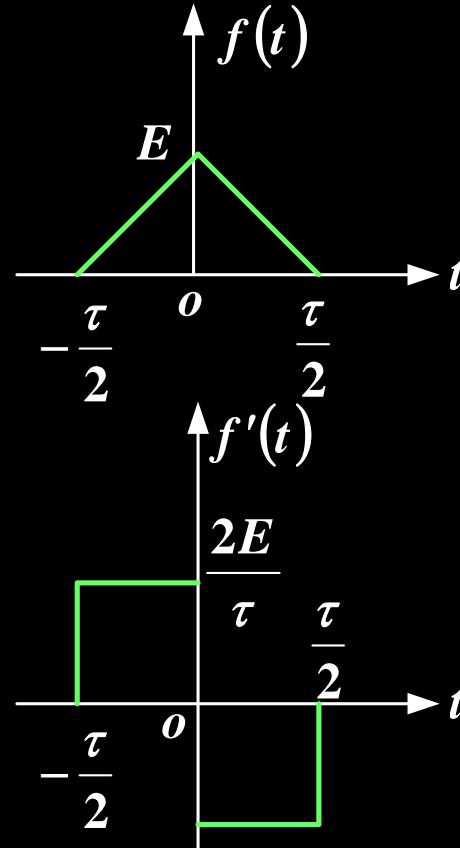


分析

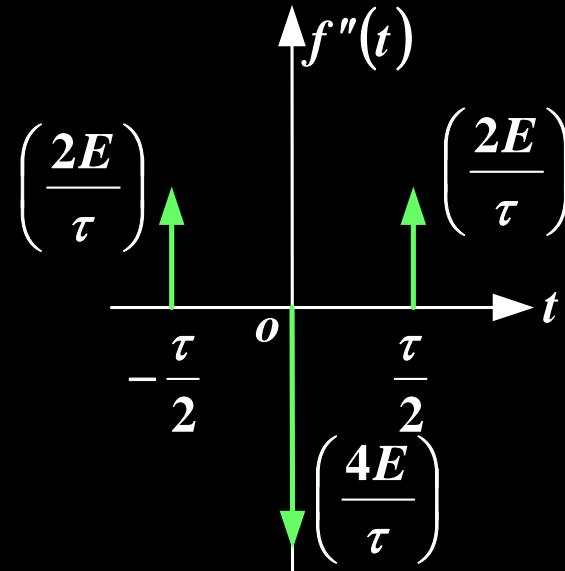
解答

分析

三角形函数 $\xrightarrow{\text{求导}}$ 方波



方波 $\xrightarrow{\text{求导}}$ 冲激函数



解

$$F[f''(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{2E}{\tau} \delta\left(t + \frac{\tau}{2}\right) - \frac{4E}{\tau} \delta(t) + \frac{2E}{\tau} \delta\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{2E}{\tau} e^{j\omega\tau/2} - \frac{4E}{\tau} + \frac{2E}{\tau} e^{-j\omega\tau/2} = (j\omega)^2 F(\omega) = -\omega^2 F(\omega)$$

$$F(\omega) = \frac{1}{-\omega^2} \left[\frac{2E}{\tau} e^{j\omega\tau/2} - \frac{4E}{\tau} + \frac{2E}{\tau} e^{-j\omega\tau/2} \right]$$

$$= \frac{1}{-\omega^2} \frac{2E}{\tau} \left[e^{j\omega\tau/2} - 2 + e^{-j\omega\tau/2} \right]$$

$$= \frac{-2E}{\tau\omega^2} \left[e^{j\omega\tau/4} - e^{-j\omega\tau/4} \right]^2 = \frac{-2E}{\tau\omega^2} \left(2 j \sin \frac{\omega\tau}{4} \right)^2$$

$$= \frac{8E}{\tau\omega^2} \left(\sin \frac{\omega\tau}{4} \right)^2 \frac{\left(\frac{\omega\tau}{4} \right)^2}{\left(\frac{\omega\tau}{4} \right)^2} = \frac{\tau E}{2} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{4} \right)^2$$

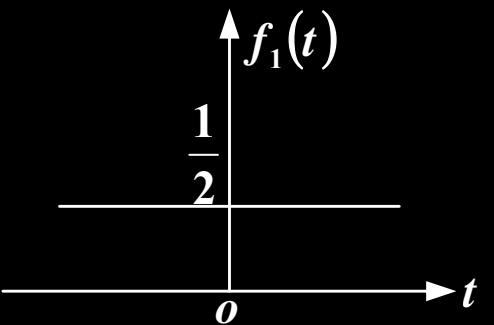
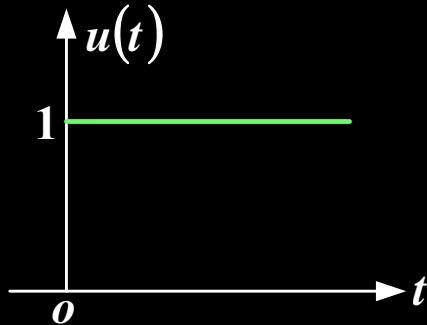
注意

如果 $f(t)$ 中有确定的直流分量，应先取出单独求傅里叶变换，余下部分再用微分性质。

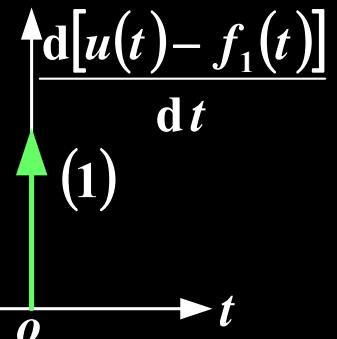
$$u(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad \text{直流 } \frac{1}{2} \leftrightarrow \pi \delta(\omega)$$

$$\text{余下部分 } f_2(t) = u(t) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(t),$$

$$f_2(t) \text{ 微分 } f_2'(t) = \delta(t) \leftrightarrow 1, f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega}$$



$$u(t) \leftrightarrow \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



2. 频域微分性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则 $tf(t) \leftrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$

推广

或 $-jtf(t) \leftrightarrow \frac{dF(\omega)}{d\omega}$

$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$

或

$t^n f(t) \leftrightarrow (j)^n F^n(\omega)$

例题

例题

例3-7-8

已知 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 求 $F[(t-2)f(t)] = ?$

解:

$$F[(t-2)f(t)] = F[tf(t) - 2f(t)]$$

$$= j \frac{dF(\omega)}{d(\omega)} - 2F(\omega)$$

例3-7-9

求 $\mathcal{F}[t^n]$

解：

$$t^n = t^n \cdot 1$$

$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega) = F(\omega)$$

$$t \cdot 1 \leftrightarrow j \frac{dF(\omega)}{d\omega}$$

$$t \cdot (t \cdot 1) \leftrightarrow j \left[j \frac{d^2 F(\omega)}{d\omega^2} \right]$$

.....

$$t^n \cdot 1 \leftrightarrow (j)^n \frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n} = (j)^n \frac{d^n [2\pi \delta(\omega)]}{d\omega^n}$$

八. 时域积分性质

若 $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$, 则

$$F(0) = 0 \text{ 时, } \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

$$F(0) \neq 0 \text{ 时, } \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

也可以记作: $F(\omega) \cdot \left[\frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \right]$

证明

例题

时域积分性质证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

变上限积分用带时移的单位阶跃的无限积分表示，成为 $f(t)*u(t)$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

交换积分顺序先 t 后 τ ，即先求时移的单位阶跃信号的傅里叶变换

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] e^{-j\omega \tau} d\tau$$

$$= \left(\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right) \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau$$

对积分变量 τ 而言 ω 为常数，移到积分外

续.....

.....续

$$= \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$= \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] F(\omega)$$

$$f(t) * u(t) \leftrightarrow F(\omega) \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right]$$

$$= \pi \delta(\omega) F(\omega) + \frac{1}{j\omega} F(\omega)$$

$$= \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

如果 $F(0) = 0$, 则第一项为零

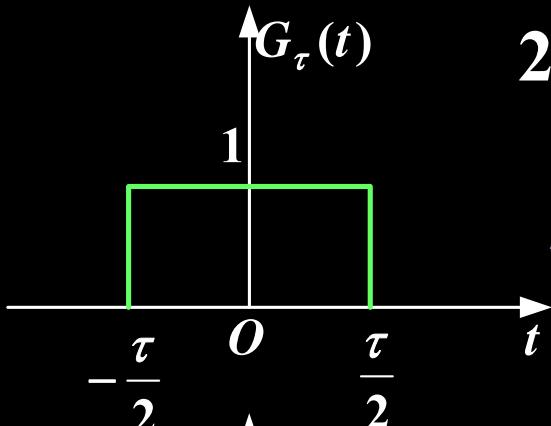
$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow F(\omega) \cdot \left[\pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi F(0) \delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

例3-7-10

1. 求单位阶跃函数的傅里叶变换。

解: 已知 $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(t) dt \quad \delta(t) \leftrightarrow 1$

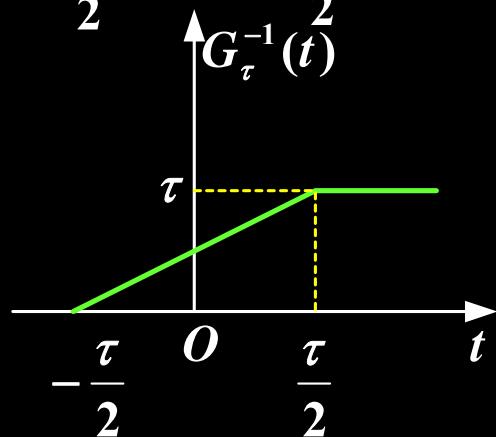
$$\text{则 } u(t) \leftrightarrow \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega) \cdot 1 = \frac{1}{j\omega} + \pi \delta(\omega)$$



2. 求门函数 $G_\tau(t)$ 积分的频谱函数。

$$\text{解: } G_\tau(t) \leftrightarrow \tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

由 $\operatorname{Sa}(0) = \tau$, 知 $F(0) \neq 0$



$$F\left[\int_{-\infty}^t G_\tau(\tau) d\tau\right] = \pi \tau \delta(\omega) + \frac{\tau}{j\omega} \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^t G_\tau(\tau) d\tau \leftrightarrow \pi \tau \delta(\omega) + \frac{\tau}{j\omega} \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

九. Parseval定理

若 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ 则

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

这表明：信号的能量既可以在时域求得，也可以在频域求得。由于 $|X(j\omega)|^2$ 表示了信号能量在频域的分布，因而称其为“**能量谱密度**”函数。

已知信号

$$f(t) = t \cdot \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) \cdot \left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right)$$

计算积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[t \cdot \left(\frac{\sin \pi t}{\pi t}\right) \cdot \left(\frac{\sin 2\pi t}{\pi t}\right) \right]^2 dt$$

§ 4.4 卷积特性（卷积定理）

- 卷积定理
- 卷积定理的应用

一. 卷积定理

- 时域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

证明

则 $f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$

时域卷积对应频域频谱密度函数乘积。

- 频域卷积定理

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(\omega), f_2(t) \leftrightarrow F_2(\omega)$

则 $f_1(t) \cdot f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(\omega) * F_2(\omega)$

时间函数的乘积 \leftrightarrow 各频谱函数卷积的 $1/2\pi$ 倍。

卷积定理揭示了时间域与频率域的运算关系，在通信系统和信号处理研究领域中得到大量应用。

时域卷积定理的证明

卷积
定义

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

因此

$$F[f_1(t) * f_2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt$$

交换积分
次序

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau$$

时移
性质

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) F_2(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

所以

$$F[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(\omega) F_2(\omega)$$

二. 应用

①用时域卷积定理求频谱密度函数。

例题

②求 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 的傅里叶变换。

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) u(t - \tau) d\tau = f(t) * u(t)$$

$$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \leftrightarrow F(\omega) \cdot \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] = \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(\omega)}{j\omega}$$

③求系统的响应。



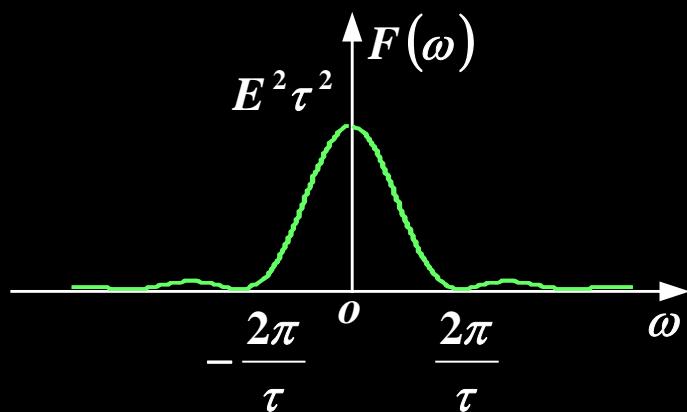
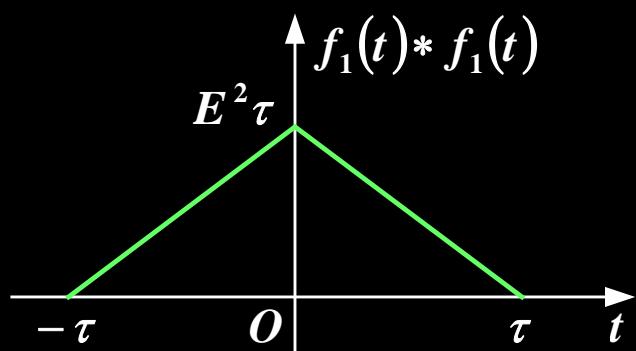
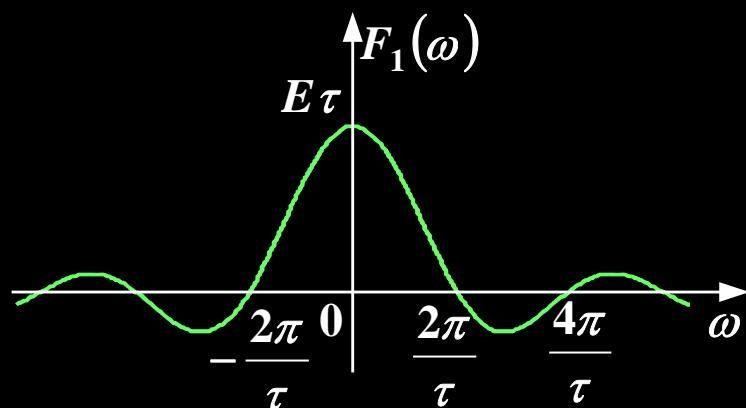
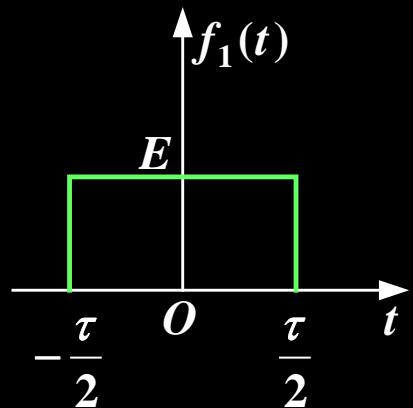
$$g(t) = f(t) * h(t) \quad G(\omega) = F(\omega)H(\omega) \leftrightarrow g(t) = F^{-1}[G(\omega)]$$

将时域求响应，转化为频域求响应。

例3-8-1 已知 $f_1(t) \leftrightarrow E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 求 $f(t) = f_1(t) * f_1(t)$ 的频谱密度函数 $F(\omega)$ 。

解答

$$F[f(t)] = F_1(\omega) \cdot F_1(\omega) = E^2 \tau^2 \text{Sa}^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



$$\text{若 } x(t) \leftrightarrow X(j\omega) \quad h(t) \leftrightarrow H(j\omega)$$

$$\text{则 } x(t) * h(t) \leftrightarrow X(j\omega)H(j\omega)$$

由于卷积特性的存在，使对LTI系统在频域进行分析成为可能。本质上，卷积特性成立正是因为复指数信号是LTI系统的特征函数。由

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

将 $x(t)$ 分解成复指数分量的线性组合，每个 $e^{j\omega t}$ 通过 LTI 系统时都要受到系统频响 $H(j\omega)$ 的加权，

其中
$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt$$

即是系统与 $e^{j\omega t}$ 对应的特征值。故有

$$y(t) = x(t) * h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

所以
$$Y(j\omega) = X(j\omega) H(j\omega)$$

由于 $h(t)$ 的傅氏变换 $H(j\omega)$ 就是频率为 ω 的复指
数信号 $e^{j\omega t}$ 通过 LTI 系统时，系统对输入信号在
幅度上产生的影响，所以称为系统的频率响应。

鉴于 $h(t)$ 与 $H(j\omega)$ 是一一对应的，因而 LTI 系统
可以由其频率响应完全表征。由于并非任何系统的
频率响应 $H(j\omega)$ 都存在，因此用频率响应表征系统
时，一般都限于对稳定系统。

二. LTI系统的频域分析法:

根据卷积特性, 可以对LTI系统进行频域分析,
其过程为:

1. 由 $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$
2. 根据系统的描述, 求出 $H(j\omega)$
3. $Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$
4. $y(t) = F^{-1}[Y(j\omega)]$

4.5 相乘性质

若 $x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$

则 $x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$

利用对偶性可以从卷积性质得出相乘性质

$x_1(t) \leftrightarrow X_1(j\omega)$ $x_2(t) \leftrightarrow X_2(j\omega)$

$X_1(jt) \leftrightarrow 2\pi x_1(-\omega)$ $X_2(jt) \leftrightarrow 2\pi x_2(-\omega)$

$X_1(jt) * X_2(jt) \leftrightarrow 4\pi^2 x_1(-\omega)x_2(-\omega)$

$$4\pi^2 x_1(-t) \cdot x_2(-t) \leftrightarrow 2\pi X_1(-j\omega) * X_2(-j\omega)$$

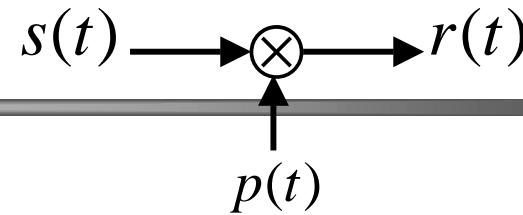
$$x_1(t) \cdot x_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$$

两个信号在时域相乘，可以看成是由一个信号控制另一个信号的幅度，这就是幅度调制。其中一个信号称为载波，另一个是调制信号。

例1: $\because x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$ $e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

$$\therefore x(t)e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow X[j(\omega - \omega_0)] \text{ —— 移频性质}$$

例2. 正弦幅度调制:



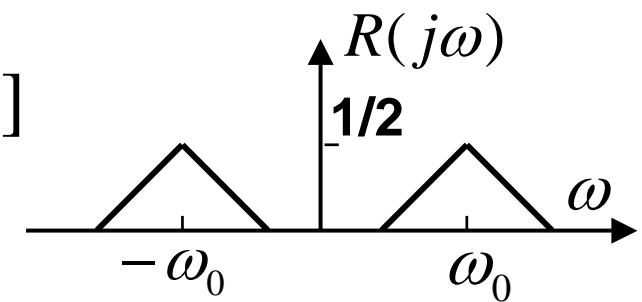
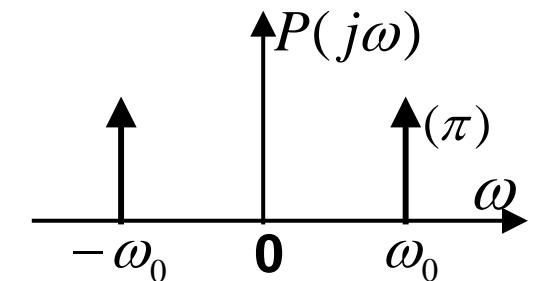
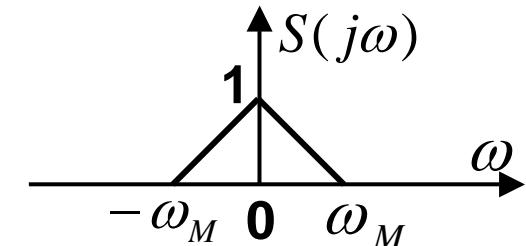
$$s(t) \leftrightarrow S(j\omega), \quad p(t) = \cos \omega_0 t$$

$$r(t) = s(t)p(t)$$

$$P(j\omega) = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$R(j\omega) = \frac{1}{2\pi} S(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$= \frac{1}{2} S[j(\omega - \omega_0)] + \frac{1}{2} S[j(\omega + \omega_0)]$$



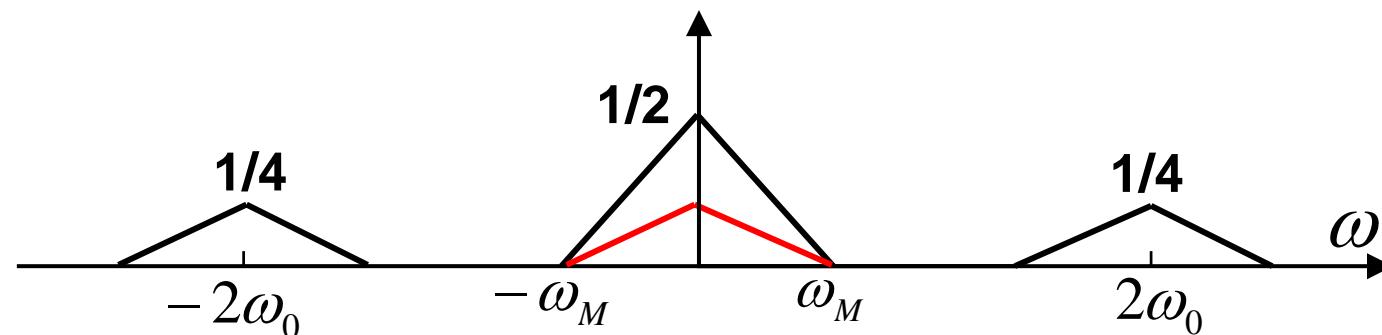
正弦幅度调制等效于在频域将调制信号的频谱搬

移到载频位置。

例3. 同步解调:

$$r(t) \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} R(j\omega) * \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

$$= \frac{1}{2\pi} S(j\omega) + \frac{1}{4} S[j(\omega - 2\omega_0)] + \frac{1}{4} S[j(\omega + 2\omega_0)]$$

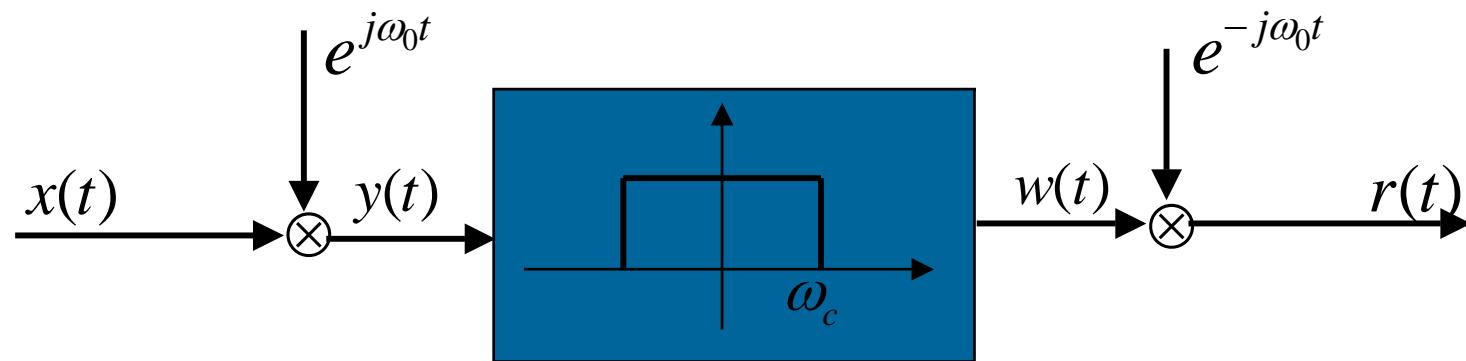


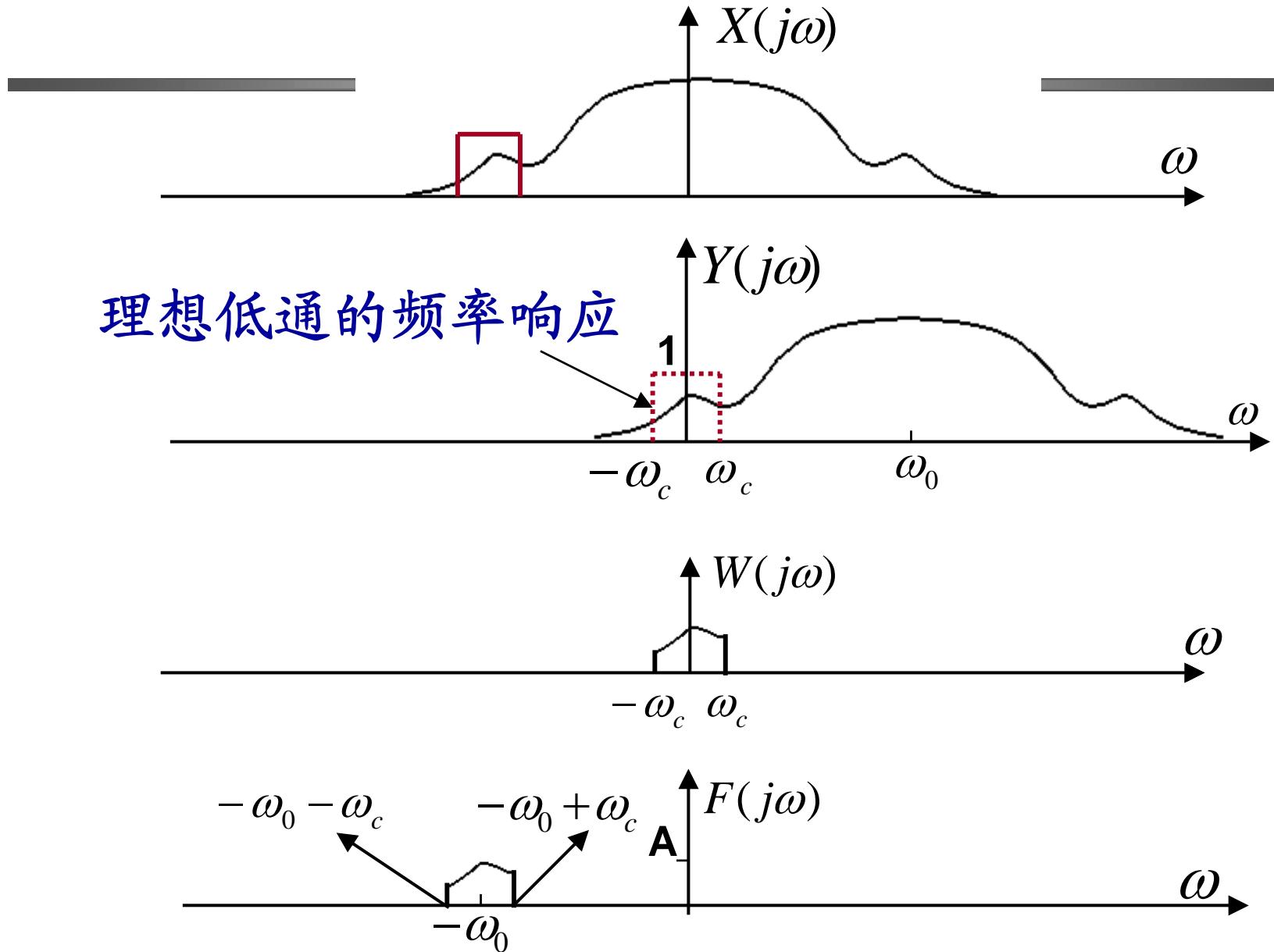
此时，用一个频率特性为 $H(j\omega)$ 的系统即可从 $r(t)$ 恢复出 $s(t)$ 。

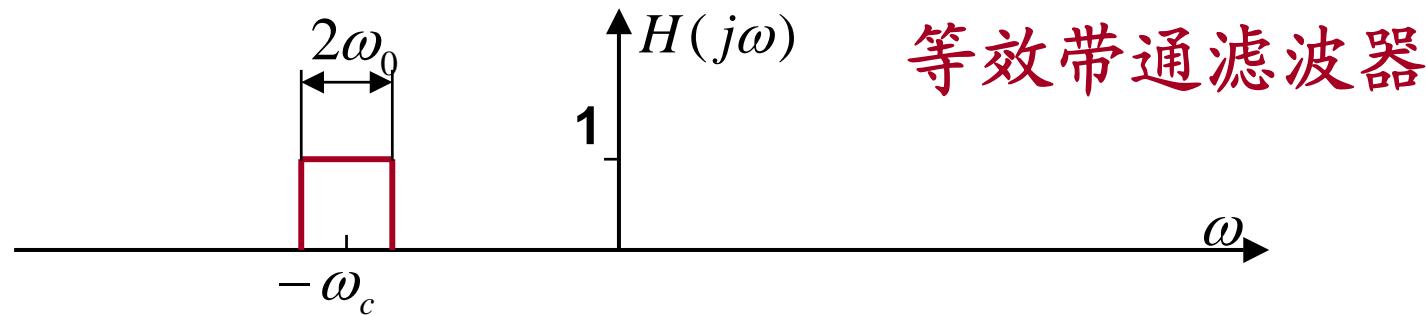
只要 $\omega_M < \omega_c < 2\omega_0 - \omega_M$ 即可。

具有此频率特性的LTI系统称为**理想低通滤波器**。

例4. 中心频率可变的带通滤波器：







相当于从 $X(j\omega)$ 中直接用一个带通滤波器滤出的频谱。表明整个系统相当于一个中心频率为 ω_0 的带通滤波器，改变 ω_0 即可实现中心频率可变。

§ 4.5 周期信号的傅里叶变换

主要内容

- 正弦信号的傅里叶变换
- 一般周期信号的傅里叶变换
- 如何由 $F_0(\omega)$ 求 $F(n\omega_1)$
- 单位冲激序列的傅氏变换
- 周期矩形脉冲序列的傅氏变换

引言

周期信号：

$$f(t) \leftrightarrow \text{傅里叶级数} - F(n\omega_1) \quad \text{离散谱}$$

非周期信号：

$$f(t) \leftrightarrow \text{傅里叶变换} - F(\omega) \quad \text{连续谱}$$

周期信号的傅里叶变换如何求？

与傅里叶级数的关系？

$f(t)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{周期} \\ \text{非周期} \end{array} \right\}$ 统一的分析方法：傅里叶变换

一. 正弦信号的傅里叶变换

由欧拉公式

$$\cos \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})$$

$$\sin \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

已知

$$1 \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega)$$

由频移性质

$$1 \cdot e^{j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$

$$1 \cdot e^{-j\omega_0 t} \leftrightarrow 2\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

$$\therefore \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{1}{2} [2\pi \delta(\omega - \omega_0) + 2\pi \delta(\omega + \omega_0)] = \pi \delta(\omega + \omega_0) + \pi \delta(\omega - \omega_0)$$

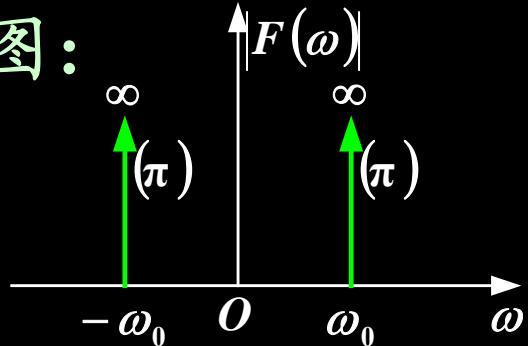
同理

$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow -j\pi \delta(\omega - \omega_0) + j\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

频谱图

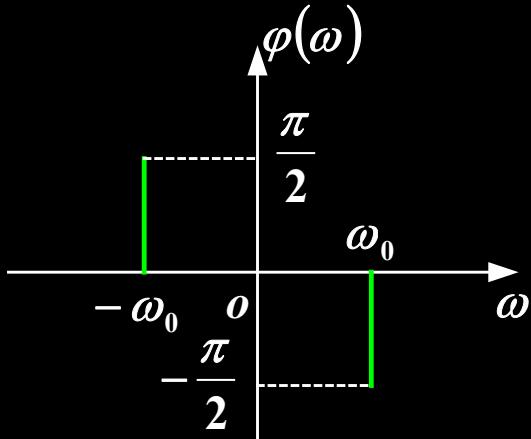
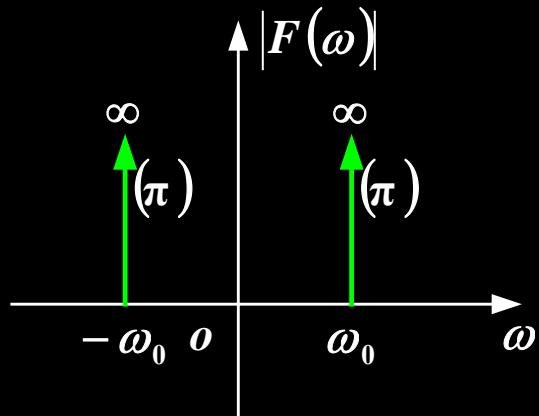
$$\cos \omega_0 t \leftrightarrow \pi [\delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0)]$$

$\cos \omega_0 t$ 频谱图：



$$\sin \omega_0 t \leftrightarrow -j\pi \delta(\omega - \omega_0) + j\pi \delta(\omega + \omega_0)$$

$\sin \omega_0 t$ 频谱图：



二. 一般周期信号的傅里叶变换

设信号周期: $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$

由傅里叶级数的指数形式出发: $f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t}$

其傅氏变换(用定义)

$$F_T(\omega) = F[f_T(t)]$$

$$= F\left[\sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \right] = \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) F[e^{jn\omega_1 t}]$$

$$= \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot 2\pi \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$= 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$$

几点认识

$$F_T(\omega) = 2\pi \sum_{-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$$

(1) $f_T(t)$ 的频谱由冲激序列组成；

位置： $\omega = n\omega_1$ (谐波频率)

强度： $2\pi F(n\omega_1)$ 与 $F(n\omega_1)$ 成正比，离散谱

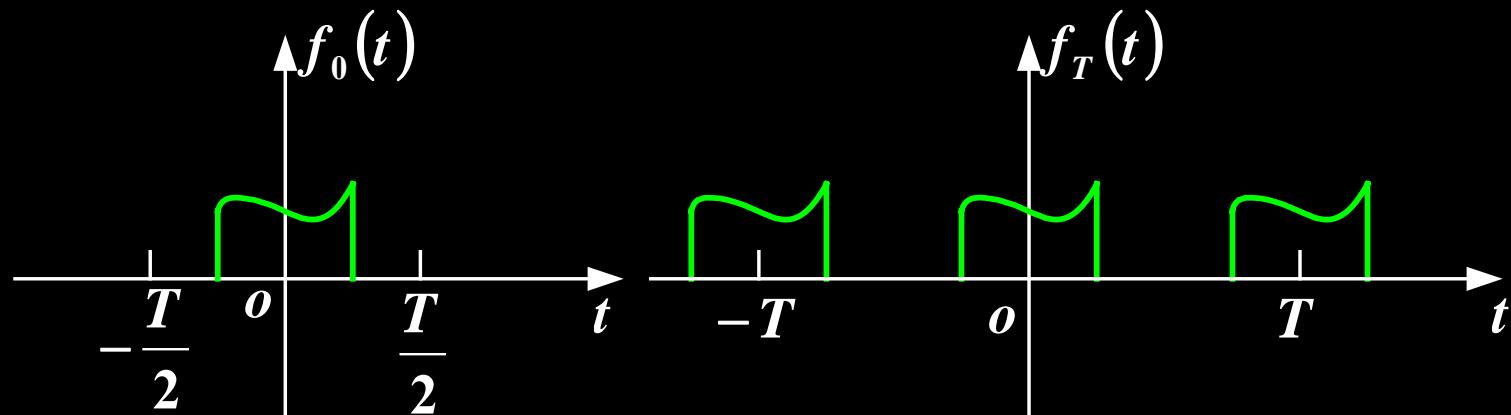
(2) 谱线的幅度不是有限值，因为 $F(\omega)$ 表示的是频谱密度。

周期信号的 $F(\omega)$ 只存在于 $\omega = n\omega_1$ 处，

频率范围无限小，幅度为 ∞ 。

三. 如何由 $F_0(\omega)$ 求 $F(n\omega_1)$

即单个脉冲的 $F_0(\omega)$ 与周期信号 $f_T(t)$ 的谱系数 $F(n\omega_1)$ 的关系



$$\text{设 } f_0(t) \leftrightarrow F_0(\omega) \quad F_0(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$\begin{cases} f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \\ F(n\omega_1) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{cases} \quad (2)$$

$$F_0(\omega) = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_0(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1)$$

$$\begin{cases} f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} \\ F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_T(t) e^{-jn\omega_1 t} dt \end{cases} \quad (2)$$

比较式(1),(2)

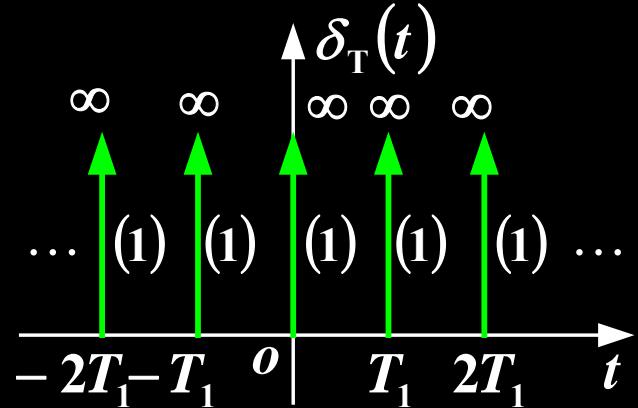
ω	\leftrightarrow	$n\omega_1$
$f_0(t)$	\leftrightarrow	$f_T(t)$

在 $\left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right)$ 内 $f_0(t)$ 与 $f_T(t)$ 相同 所以 $F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$

可由 $F_0(\omega)$ 求周期函数 $f_T(t)$ 的谱系数 $F(n\omega_1)$

四. 周期单位冲激序列的傅里叶变换

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_1)$$



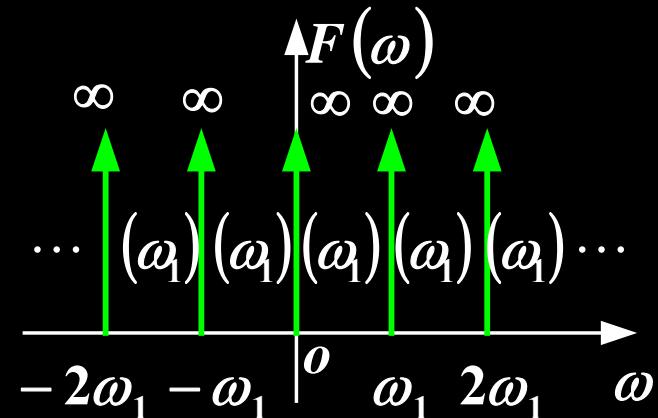
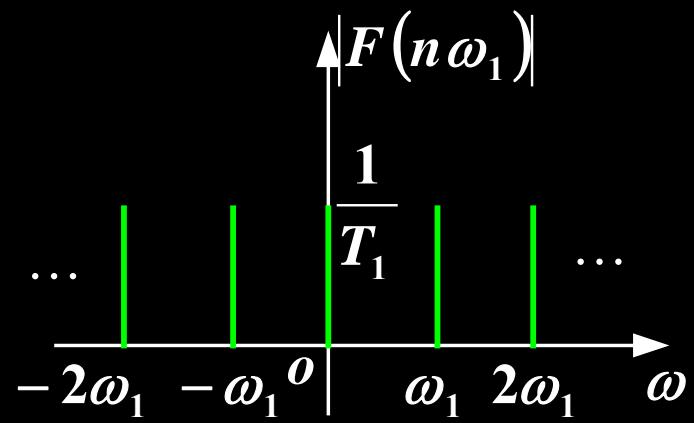
因为 $\delta(t) \leftrightarrow 1$

所以 $\delta_T(t)$ 的傅氏级数谱系数 $F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1}$

所以 $\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) e^{jn\omega_1 t} = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_1 t}$

频谱

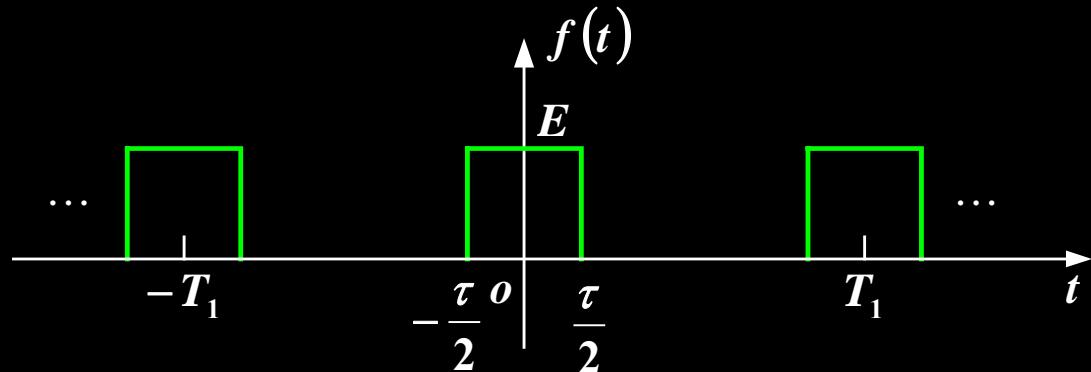
$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= F[\delta_T(t)] = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F[e^{jn\omega_1 t}] = \frac{1}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \delta(\omega - n\omega_1) \\
 &= \frac{2\pi}{T_1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1) = \delta_\omega(\omega)
 \end{aligned}$$



$\delta_T(t)$ 的频谱密度函数仍是冲激序列,强度和间隔都是 ω_1 。

五. 周期矩形脉冲序列的傅氏变换

方法1



$$F_0(\omega) \rightarrow F(n\omega_1) \rightarrow F(\omega)$$

$$F_0(\omega) = E\tau \operatorname{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad \text{所以} \quad F(n\omega_1) = \frac{1}{T_1} F_0(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_1}$$

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{E\tau}{T_1} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$= E\tau\omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

方法2

利用时域卷积定理，周期 T_1

$$f(t) = f_0(t) * \delta_T(t)$$

$$F(\omega) = F_0(\omega) \cdot \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_1)$$

利用冲激函数的抽样性质

$$F(\omega) = \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_0(n\omega_1) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$$

因为

$$F_0(\omega) = E\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

所以

$$F(\omega) = \omega_1 \sum_{-\infty}^{\infty} E\tau \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \cdot \delta(\omega - n\omega_1)$$

$$= E\tau \omega_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_1)$$

§ 4.6 抽样信号的傅里叶变换

- 抽样
- 理想抽样
- 矩形脉冲抽样

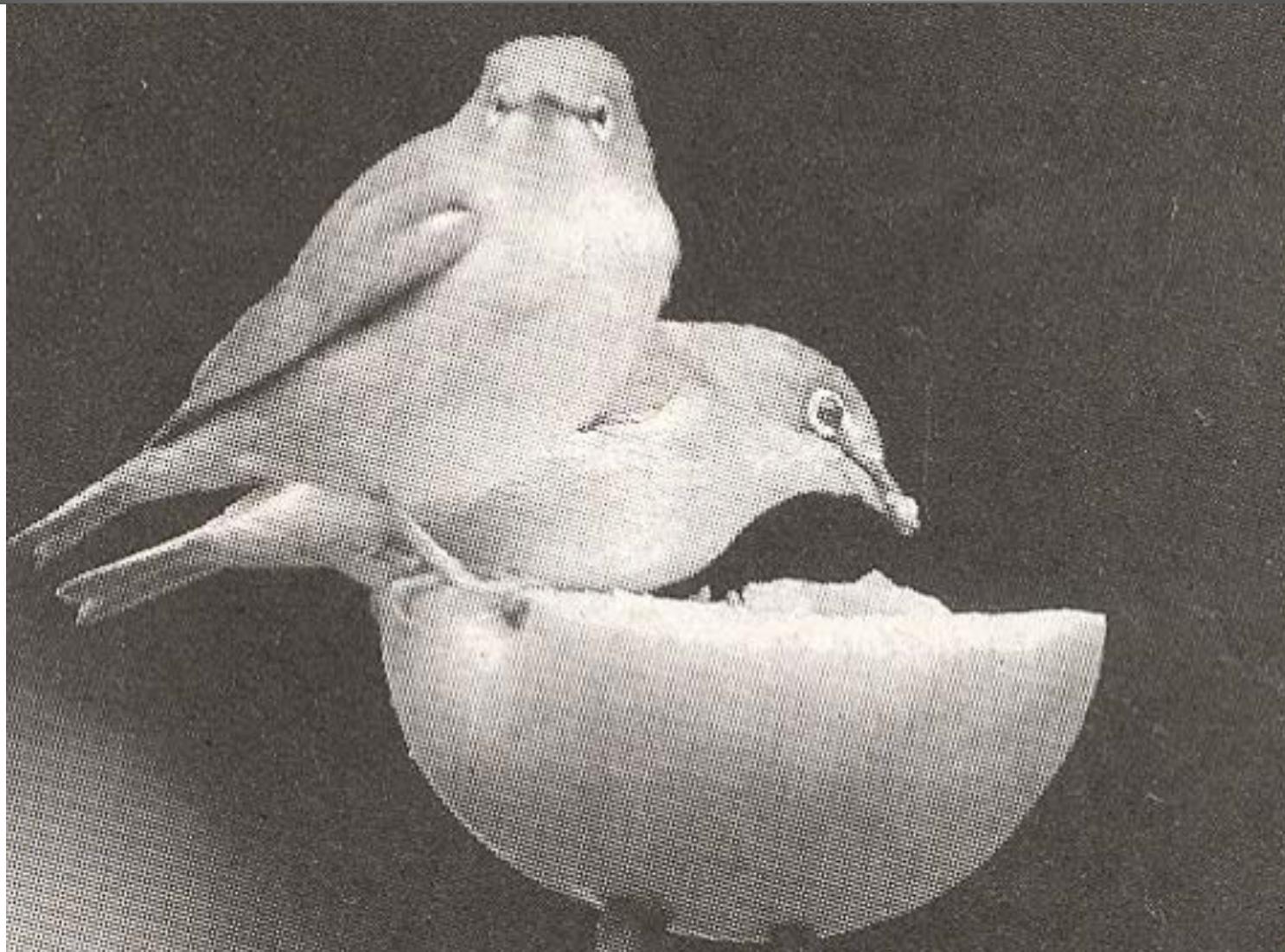
补充（第七章）

1. 如何用连续时间信号的离散时间样本来表示连续时间信号——采样定理。
2. 如何从采样所得到的样本重建连续时间信号。
3. 欠采样导致的后果——频谱混叠。

引言：

在日常生活中，常可以看到用离散时间信号表示连续时间信号的例子。如传真的照片、电视屏幕的画面、电影胶片等等，这些都表明连续时间信号与离散时间信号之间存在着密切的联系。在一定条件下，可以用离散时间信号代替连续时间信号而并不丢失原来信号所包含的信息。

例1. 一幅新闻照片



局部放大后的图片



例2. 另一幅新闻照片



局部放大后的图片



研究连续时间信号与离散时间信号之间的关系
主要包括：

1. 在什么条件下，一个连续时间信号可以用它的离散时间样本来代替而不致丢失原有的信息。
2. 如何从连续时间信号的离散时间样本不失真地恢复成原来的连续时间信号。
3. 如何对一个连续时间信号进行离散时间处理。
4. 对离散时间信号如何进行采样、抽取，及内插。

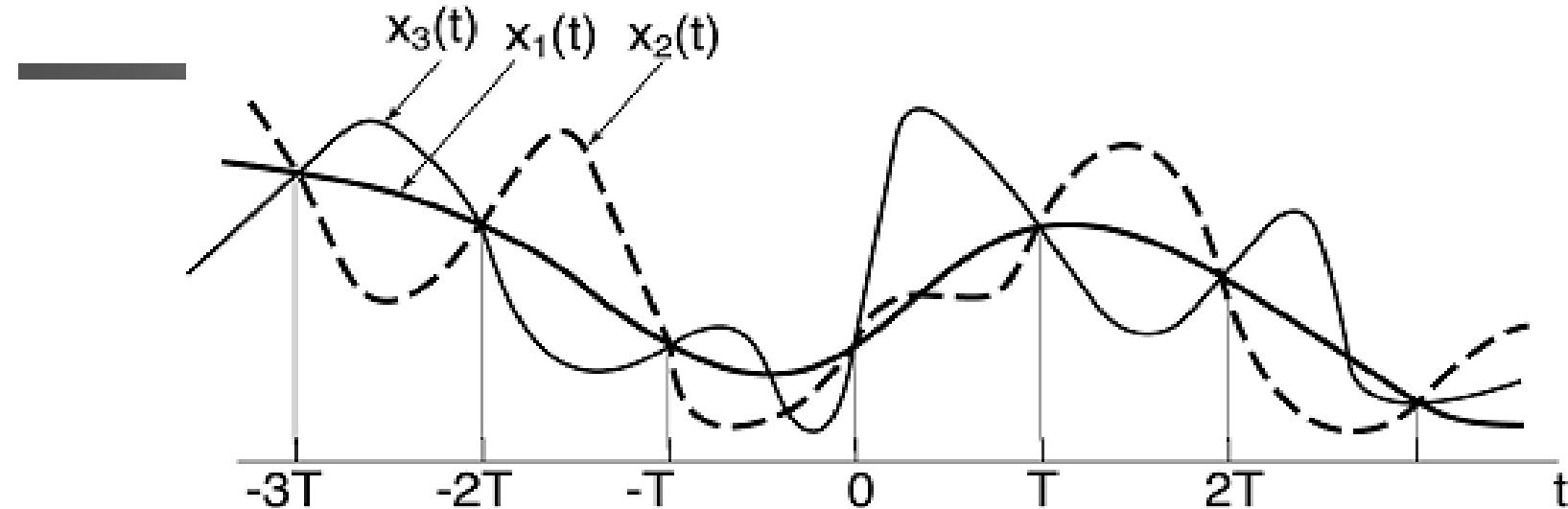
用样本表示连续时间信号：采样定理

一. 采样：

在某些离散的时间点上提取连续时间信号值的过程称为采样。

是否任何信号都可以由它的离散时间样本来表示？

对一维连续时间信号采样的例子：



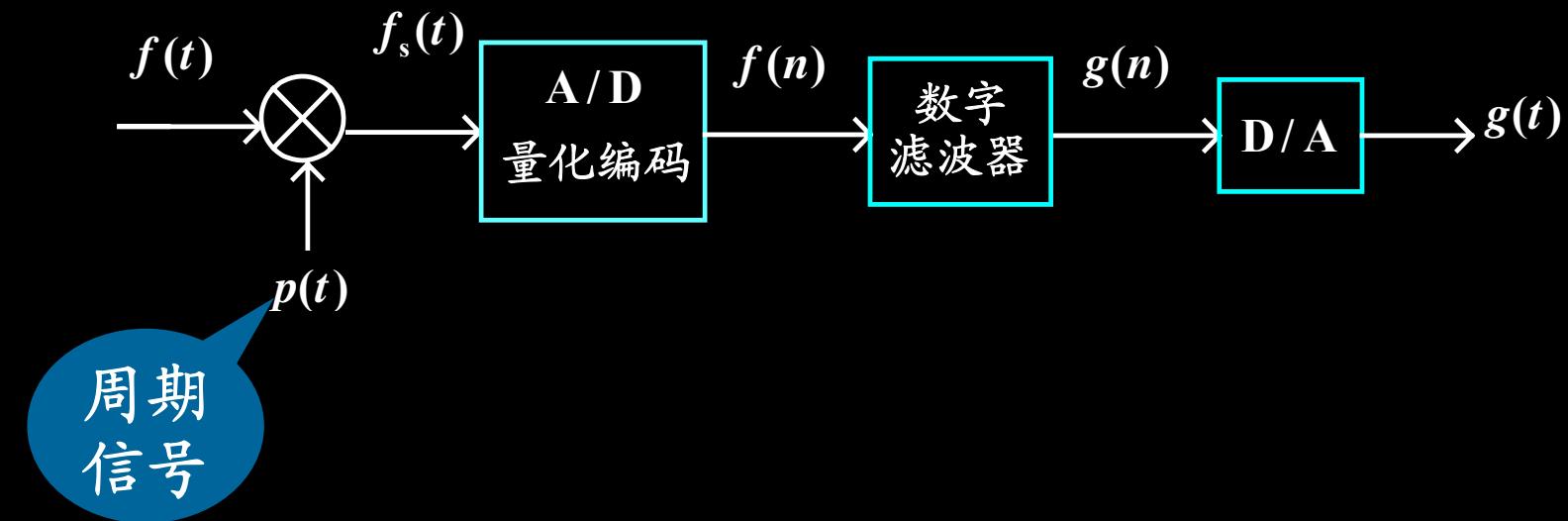
在没有任何条件限制的情况下，从连续时间信号采样所得到的样本序列不能唯一地代表原来的连续时间信号。

此外，对同一个连续时间信号，当采样间隔不同时也会得到不同的样本序列。

一. 抽样

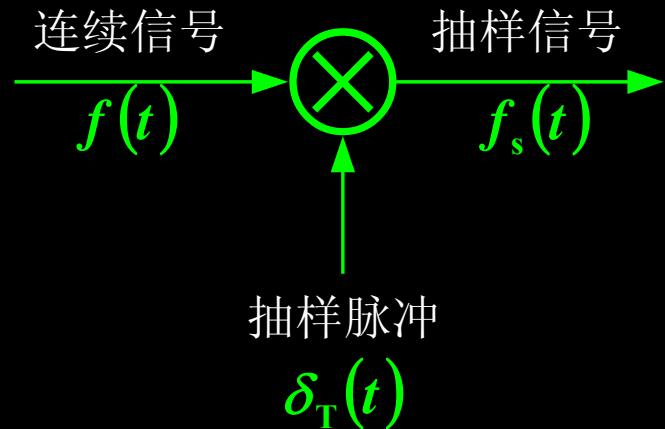
从连续信号到离散信号的桥梁，也是对信号进行数字处理的第一个环节。

抽样原理图：



需解决的问题：
 $\begin{cases} f_s(t) \leftrightarrow F_s(\omega) \text{ 与 } F(\omega) \text{ 的关系} \\ \text{由 } f_s(t) \text{ 能否恢复 } f(t) \end{cases}$

二. 理想抽样（周期单位冲激抽样）



$$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \quad (-\omega_m < \omega < \omega_m)$$

$$p(t) \leftrightarrow P(\omega),$$

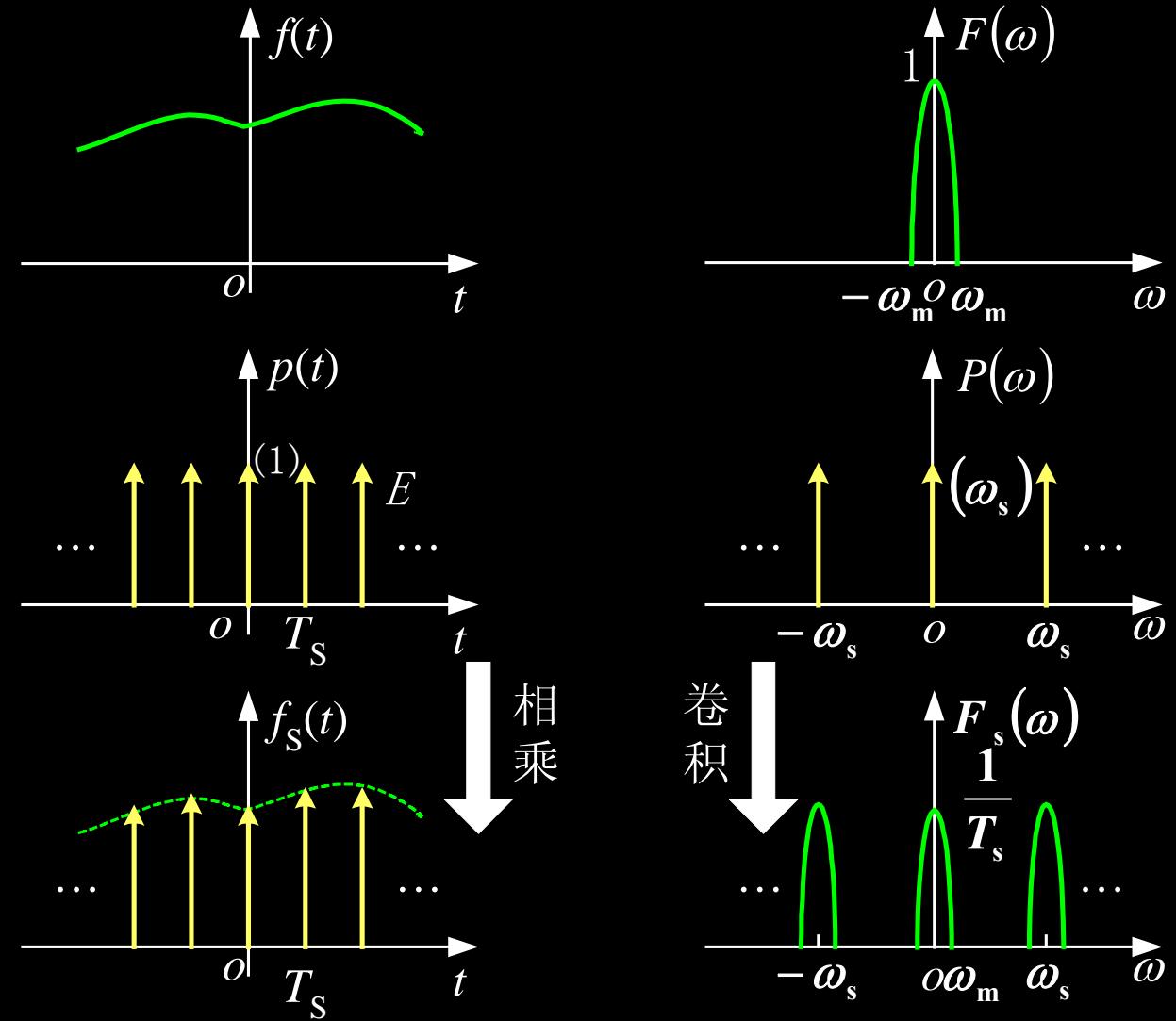
$$f_s(t) \leftrightarrow F_s(\omega)$$

$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \leftrightarrow \omega_s \sum_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$f_s(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$F_s(\omega) = F[f(t)\delta_T(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * \delta_T(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$

2. 冲激抽样信号的频谱



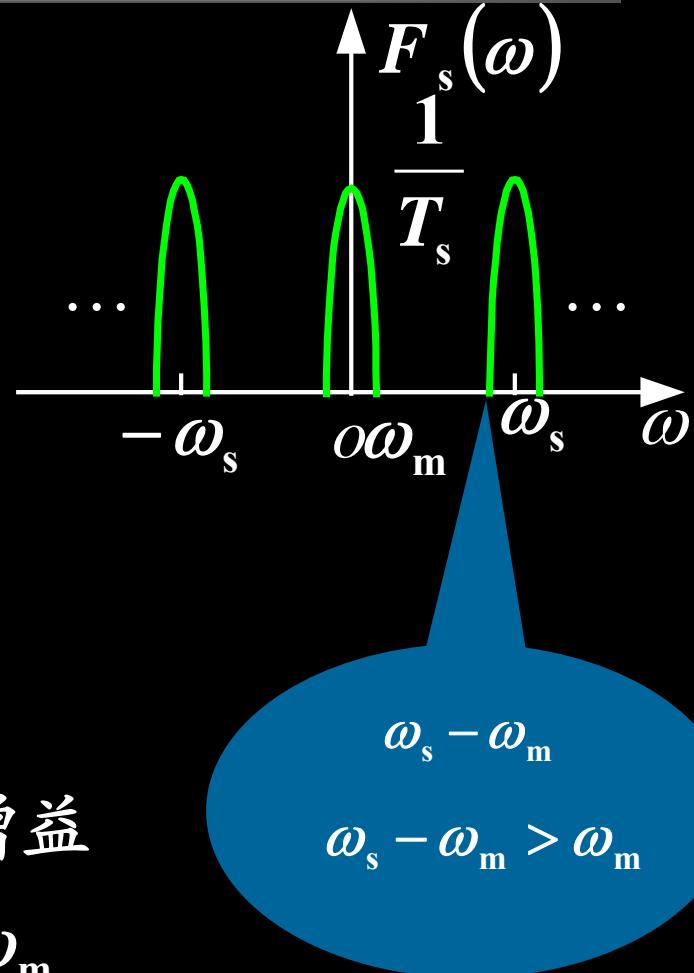
3. 几点认识

(1) $n = 0$ 时, $F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} F(\omega)$, 包

含原信号的全部信息, 幅度差 T_s 倍。

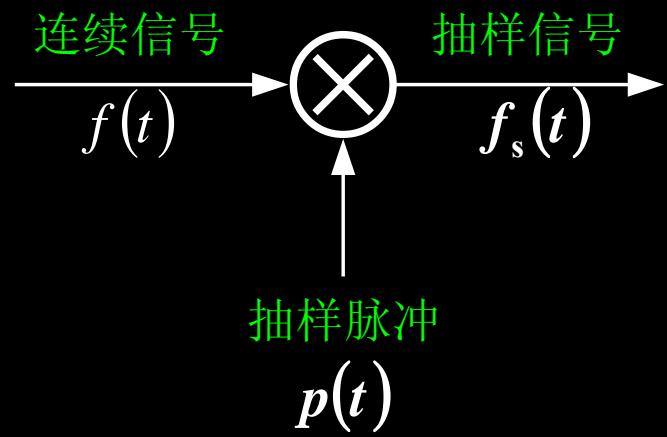
(2) $F_s(\omega)$ 以 ω_s 为周期的连续谱, 有新的频率成分, 即 $F(\omega)$ 的周期性延拓。

(3) 若接一个理想低通滤波器, 其增益为 T_s 截止频率 $\omega_m < \omega_c < \omega_s - \omega_m$ 滤除高频成分, 即可重现原信号。



三. 矩形脉冲抽样

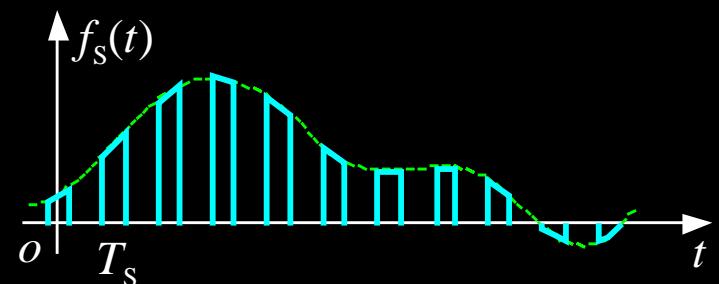
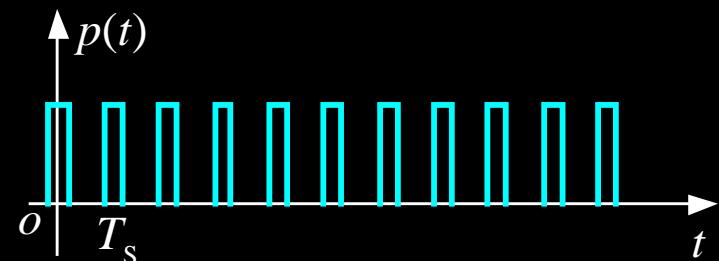
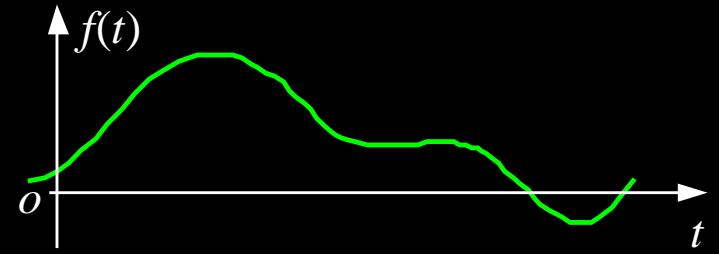
1. 抽样信号



连续信号： $f(t)$

抽样脉冲序列： $p(t)$

抽样信号： $f_s(t) = f(t) \cdot p(t)$



关系

连续信号： $f(t)$; $f(t) \leftrightarrow F(\omega)$ ($-\omega_m < \omega < \omega_m$)

抽样脉冲序列： $p(t)$ $p(t) \leftrightarrow P(\omega)$,

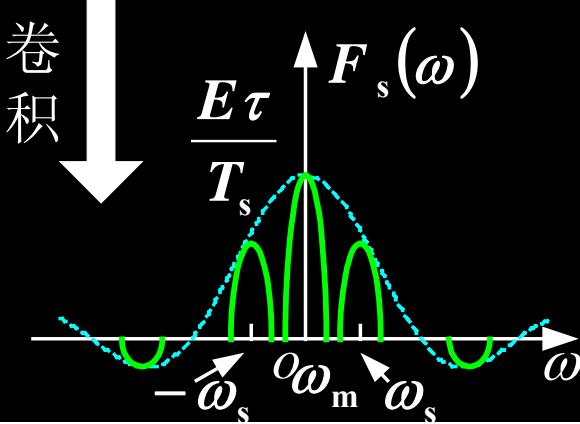
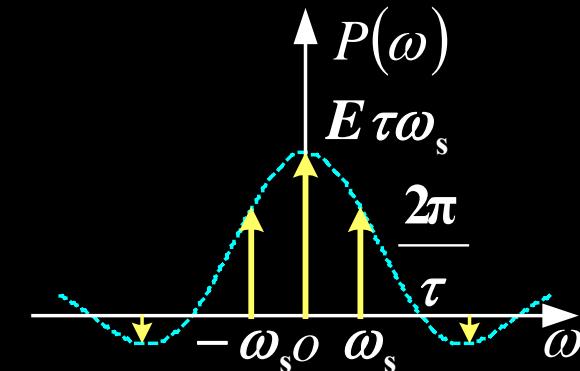
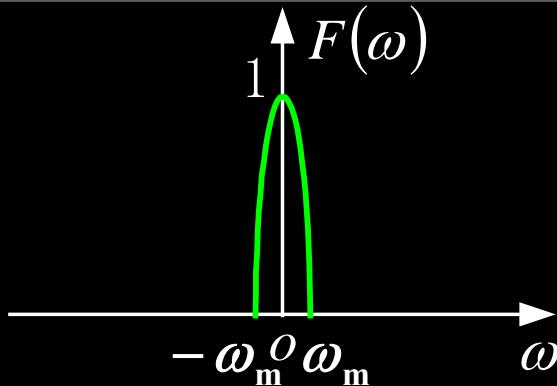
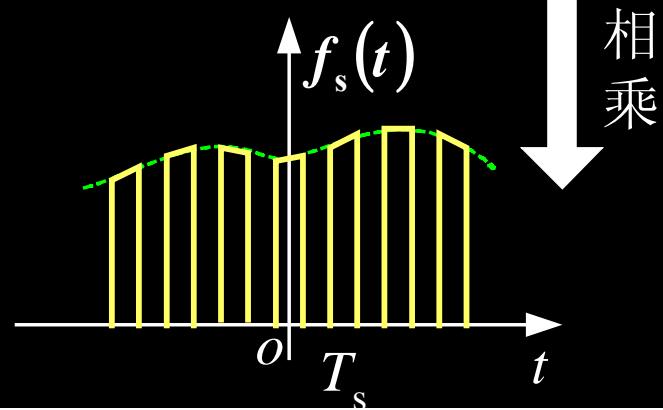
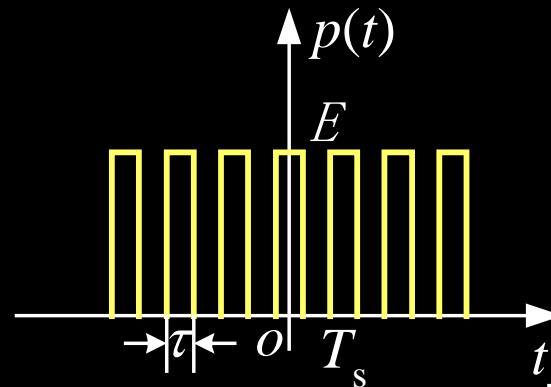
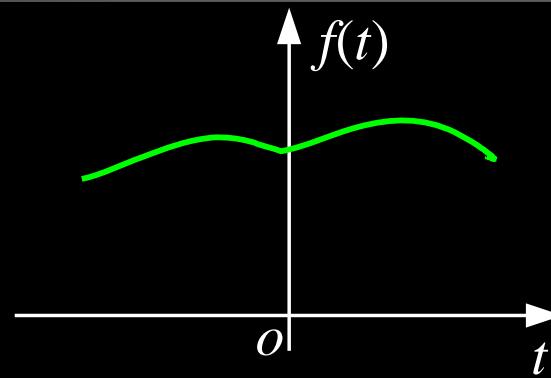
抽样信号： $f_s(t)$ $f_s(t) \leftrightarrow F_s(\omega)$

$$f_s(t) = f(t) \cdot p(t) \quad F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$$

限带
信号

- τ 越小，越能反映离散时刻之值，从信号传输角度看，更关心 $f_s(t)$ 中有无 $f(t)$ 的全部信息，必须考虑 $f_s(t)$ 的频谱结构。

频谱结构



演示

频谱结构的数学表示

$$F_s(\omega) = F[f(t) \cdot p(t)] = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * P(\omega)$$

$$p(t) \leftrightarrow P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$p(t) \text{的谱系数 } P_n = \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right)$$

$$P(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\tau}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_s)$$

$$= \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s \tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

2. 举例说明抽样信号与原信号频谱的关系

$$\text{因为 } F_s(\omega) = \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_s\tau}{2}\right) F(\omega - n\omega_s)$$

设: $\frac{\tau}{T_s} = \frac{1}{2}$, $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = \frac{\pi}{\tau}$, $\omega_s\tau = \pi$ 所以 $\frac{2\pi}{\tau} = 2\omega_s$ 即二次谐波为 0

$$n=0 \quad F_s(0) \Big|_{n=0} = \frac{1}{2} F(\omega)$$

$$n=1 \quad F_s(\omega) \Big|_{n=1} = \frac{1}{2} \text{Sa}\left(\frac{\pi}{2}\right) F(\omega - \omega_s) = \frac{1}{\pi} F(\omega - \omega_s)$$

$$n=-1 \quad F_s(\omega) \Big|_{n=-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\pi} F(\omega + \omega_s) = \frac{1}{\pi} F(\omega + \omega_s)$$

$$n = \pm 2, \quad F_s(\omega) \Big|_{n=\pm 2} = 0$$

$n = \pm 3$

$$F_s(\omega) \Big|_{n=\pm 3} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3\pi} \right) F(\omega \mp 3\omega_s) = -\frac{1}{3\pi} F(\omega \mp 3\omega_s)$$

$$\begin{aligned} F_s(\omega) = & \cdots -\frac{1}{3\pi} F(\omega + 3\omega_s) + \frac{1}{\pi} F(\omega + \omega_s) + \frac{1}{2} F(\omega) \\ & + \frac{1}{\pi} F(\omega - \omega_s) - \frac{1}{3\pi} F(\omega - 3\omega_s) \cdots \end{aligned}$$

3. 讨论 τ 的影响

因为 $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$, T_s 不变, ω_s 不变

脉冲宽度 $\tau \downarrow$, 第一个零点 $\frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi}{T_s} \frac{T_s}{\tau} = \omega_s \frac{T_s}{\tau}$
 $\tau \downarrow$, 离原点越远。

理想抽样 $\tau \rightarrow 0$, 矩形脉冲 $\rightarrow \delta(t)$

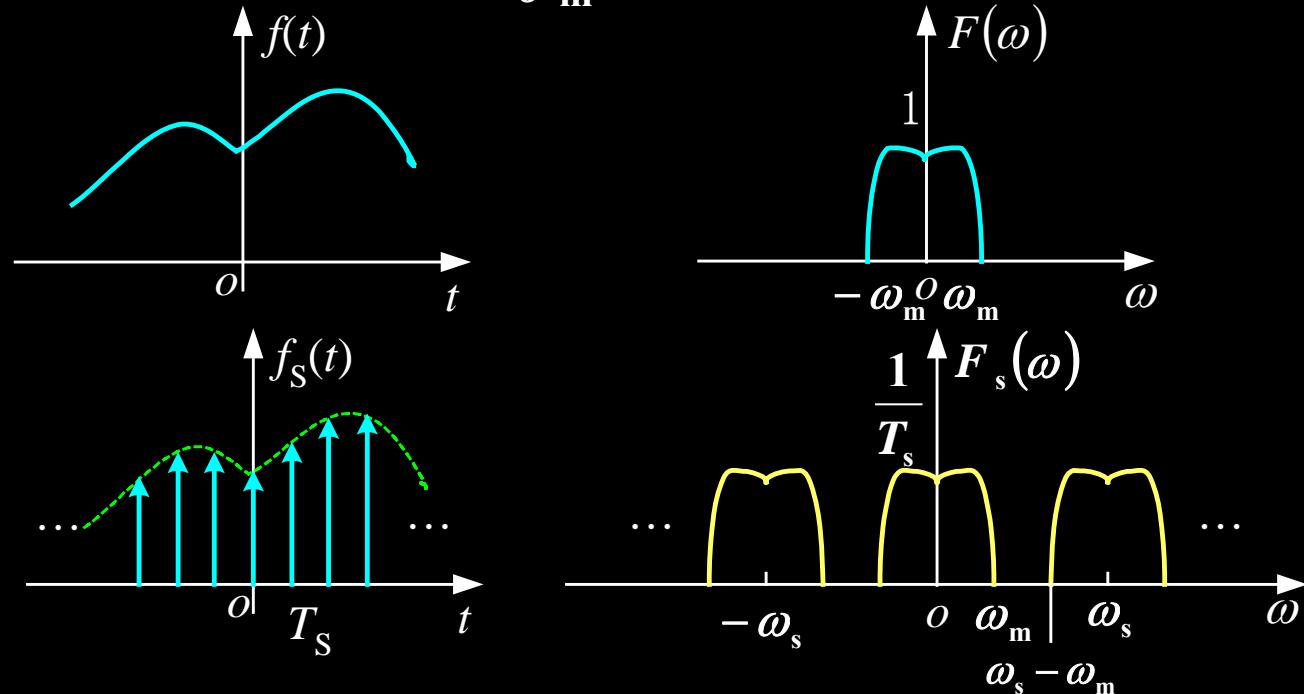
§ 4.7 抽样定理

抽样定理

一个频带受限的信号 $f(t)$, 若频谱只占据 $-\omega_m \sim +\omega_m$ 的范围, 则信号 $f(t)$ 可用等间隔的抽样值来惟一地表示。

其抽样间隔必须不大于 $\frac{1}{2f_m}$, 即 $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ ($\omega_m = 2\pi f_m$),

或者说最低抽样率为 $2f_m$ 。



演示

奈奎斯特 (Nyquist) 抽样率和抽样间隔

重建原信号的必要条件：

$$\omega_s = \frac{2\pi}{T_s} = 2\pi \cdot f_s \geq 2\omega_m = 2 \cdot 2\pi f_m$$

演示

不满足此条件，就会发生频谱混叠现象。

即 抽样频率 $f_s \geq 2f_m$ 是必要条件，或抽样间隔 $T_s \leq \frac{1}{2f_m}$ 。

$$T_s = \frac{1}{2f_m}$$

是最大抽样间隔，称为“奈奎斯特抽样间隔”。

$$f_s = 2f_m$$

是最低允许的抽样频率，称为“奈奎斯特抽样频率”

例3-11-1

例如音频信号: $0 \sim 3.4 \text{ kHz}$,

$$f_{\text{smin}} = 6800 \text{ Hz}, T_{\text{smax}} = \frac{1}{2f_m},$$

$$f_m = 3.4 \text{ k Hz}, f_s \geq 2f_m,$$

若取 $f_s = 8000 \text{ Hz}$, 则 $T_s = \frac{1}{8000} = 125 \mu \text{ s}$

作业(交作业时间: 4月?日)

- 4.7
- 4.8
- 4.11
- 4.22
- 4.24(a,c,d,e)
- 4.25
- 4.27
- 4.29
- 4.31
- 4.32(b)
- 4.34
- 4.39
- 4.41
- 4.44
- 4.49(a,c)
- 4.52