by Toyoaki Nishida

平均符号長の限界と情報源符号化定理

情報源の1次エントロピー

- 情報源S:
  - 情報源記号$A = \{a_1, \cdots, a_M\}$
  - 各情報源記号の発生確率　$P(a_i) = p_i$
- 情報源符号化
  - 情報源記号a_iの符号化$K(a_i) = c_i$
  - 1情報源記号あたりの平均符号長$L = p_1 l_1 + \cdots + p_M l_M$
    ここで，　$l_i = |c_i|$
- 情報源Sの1次エントロピー

$$H_1(S) = \sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 \frac{1}{p_i} = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i$$

情報源の1次エントロピー

【補助定理3】

$p_1, \cdots, p_M$を $p_1 + \cdots + p_M = 1$となる非負の数，$q_1, \cdots, q_M$を $q_1 + \cdots + q_M \leq 1$となる非負の数とする．$p_i \neq 0$のとき，$q_i \neq 0$ とすれば，

$$-\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 q_i \geq -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i$$

が成立する．等号はすべてのi について$q_i = p_i$のときに限り成立する．

【補助定理3】の適用例

		$-\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 q_i$
$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$	$(0.6, 0.2, 0.1, 0.07, 0.03)$	
$(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5)$	$(0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$	≈ 2.32193
	$(0.9, 0.025, 0.025, 0.025, 0.025)$	≈ 2.21997
	$(0.6, 0.2, 0.1, 0.07, 0.03)$	≈ 1.65908

情報源の1次エントロピー

【補助定理3】

$p_1, \cdots, p_M$を $p_1 + \cdots + p_M = 1$となる非負の数，$q_1, \cdots, q_M$ $q_1 + \cdots + q_M \leq 1$となる非負の数とする．．$p_i \neq 0$のとき，$q_i \neq 0$ とすれば，

$$-\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 q_i \geq -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i$$

が成立する．等号はすべてのi について$q_i = p_i$のときに限り成立する．

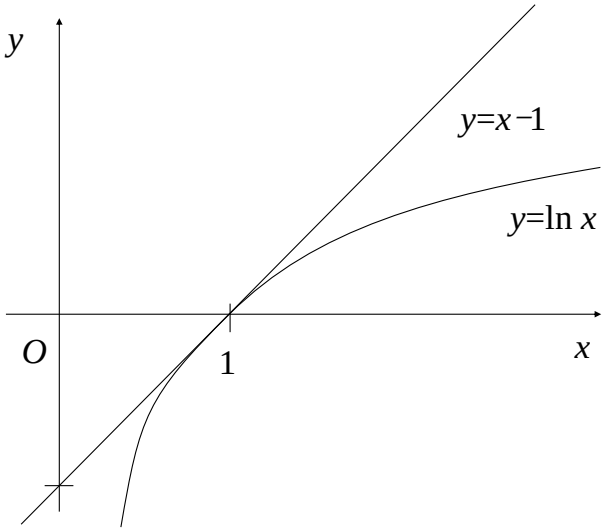
【補助定理3】の証明の骨子

$$D = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 q_i + \sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 \frac{q_i}{p_i} = -\sum_{i=1}^{M} \frac{p_i}{\ln 2} \ln \frac{q_i}{p_i}$$

と置く．$\ln x \leq x - 1$であることを利用すると，

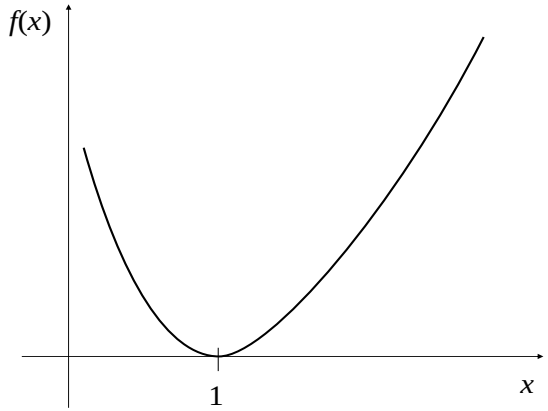
$$D = -\sum_{i=1}^{M} \frac{p_i}{\ln 2} \ln \frac{q_i}{p_i} \geq -\sum_{i=1}^{M} \frac{p_i}{\ln 2} \left(\frac{q_i}{p_i} - 1 \right) = \frac{1}{\ln 2} \sum_{i=1}^{M} (p_i - q_i) = \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{i=1}^{M} p_i - \sum_{i=1}^{M} q_i \right) \geq 0$$

情報源の1次エントロピー



$$\ln x \leq x - 1$$

$$f(x) = x - 1 - \ln x$$



$$f(1) = 0, f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

情報源の1次エントロピー

【定理】

情報源Sの各情報源記号を一意復号可能な2元符号に符号化すると，平均符号長Lは，$H_1(S) \leq L$を満足する.

また，平均符号長Lが$L < H_1(S) + 1$となる瞬時符号を作ることができる.

情報源の1次エントロピー

【定理】の証明の骨子　（前半：$H_1(S) \leq L$の証明）

- $q_i = 2^{-l_i}$と置く（q_iを導入する）.
- 一意復号可能な情報源符号は，$l_1, l_2, \cdots, l_M$はマクミランの不等式を満足するので，$2^{-l_1} + 2^{-l_2} + \cdots + 2^{-l_M} \leq 1$. つまり，$q_1 + \cdots + q_M \leq 1$ が満足される. また，$q_i > 0$も明らか.
- 従って補助定理から，$-\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 q_i \geq -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 p_i = H_1(S)$となる.
- 左辺は，$-\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 q_i = -\sum_{i=1}^{M} p_i \log_2 2^{-l_i} = \sum_{i=1}^{M} p_i l_i = L$である. 等号が成立するのは，全ての$i$について，$p_i = 2^{-l_i}$のときである. ■

情報源の1次エントロピー

【定理】の証明の骨子 （後半: $L < H_1(S) + 1$を満足する瞬時符号が構成可能）

- $-\log_2 p_i \leq l_i < -\log_2 p_i + 1$なる整数$l_i$が一意に決まる.
- 得られたl_iに対して$2^{-l_i} \leq 2^{\log_2 p_i} = p_i$が成りたつ.
- $\sum 2^{-l_i} \leq \sum p_i = 1$となり，クラフトの不等式が満たされるので，$l_i$を符号長バッグとする瞬時符号をつくることができる.
- $L = \sum_{i=1}^{M} p_i l_i$であるので，

  この符号の平均符号長は，$-p_i \log_2 p_i \leq p_i l_i < -p_i \log_2 p_i + p_i$つまり，

  $H_1(S) \leq L < H_1(S) + 1$が満足される. ■

定理の意味すること

情報源S: 〈A: 0.6, B : 0.2, C: 0.1, D: 0.07 , E: 0.03〉

$$H_1(S) = -\left(0.6\log_2 0.6 + 0.2\log_2 0.2 + 0.1\log_2 0.1 + 0.07\log_2 0.07 + 0.03\log_2 0.03\right)$$
$$\approx 1.65908$$

平均符号長が1.65908～2.65908となる瞬時符号を構成可能.

しかしこの定理は，そのような瞬時符号の構成法を教えてくれるわけではない.

⇒　ハフマン符号化などを用いてコンパクト符号を計算する.

〈A→0, B→10, C→110, D→1110, E→1111〉はコンパクト符号で平均符号長1.7

情報源記号ごとに符号化するかぎり，平均符号長を理論的下限に近づけることはできない

拡大情報源

- q元情報源Sのn次の拡大情報源S^n : Sの連続するn個の情報源記号列を情報源記号とするq^n元情報源.

- 無記憶情報源Sの連続するn個の出力は互いに独立であるから, その結合確率分布は,

$$P(x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}) = P(x_0)P(x_1)\cdots P(x_{n-1})$$

となる.

- 無記憶情報源Sのn次拡大情報源をS^nとすれば,

$$H_1(S^n) = nH_1(S)$$

が成り立つ.

拡大情報源

$H_1(S^n) = nH_1(S)$になるわけ ⇒ $H_1(S^3)$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{x_0}\sum_{x_1}\sum_{x_2} P(x_0,x_1,x_2)\log_2 P(x_0,x_1,x_2) \\
&= -\sum_{x_0}\sum_{x_1}\sum_{x_2} P(x_0)P(x_1)P(x_2)\log_2\big(P(x_0)P(x_1)P(x_2)\big) \\
&= -\sum_{x_0}\sum_{x_1}\sum_{x_2} P(x_0)P(x_1)P(x_2)\log_2 P(x_0) \\
&\quad -\sum_{x_0}\sum_{x_1}\sum_{x_2} P(x_0)P(x_1)P(x_2)\log_2 P(x_1) \\
&\quad -\sum_{x_0}\sum_{x_1}\sum_{x_2} P(x_0)P(x_1)P(x_2)\log_2 P(x_2) \\
&= -\sum_{x_0} P(x_0)\log_2 P(x_0) \\
&\quad -\sum_{x_1} P(x_1)\log_2 P(x_1) \\
&\quad -\sum_{x_2} P(x_2)\log_2 P(x_2) \\
&= 3H_1(S)
\end{aligned}
$$

計算の様子 (1/2)

$$\sum_{x_1\{A,B,C\}}\sum_{x_2\{D,E,F\}}\sum_{x_3\in\{G,H,I\}}P(x_0)P(x_1)P(x_2)\log_2\left(P(x_0)P(x_1)P(x_2)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&P(A)P(D)P(G)\log_2\left(P(A)P(D)P(G)\right)\\
&P(A)P(D)P(H)\log_2\left(P(A)P(D)P(H)\right)\\
&P(A)P(D)P(I)\log_2\left(P(A)P(D)P(I)\right)\\
&P(A)P(E)P(G)\log_2\left(P(A)P(E)P(G)\right)\\
&P(A)P(E)P(H)\log_2\left(P(A)P(E)P(H)\right)\\
&P(A)P(E)P(I)\log_2\left(P(A)P(E)P(I)\right)\\
&P(A)P(F)P(G)\log_2\left(P(A)P(F)P(G)\right)\\
&P(A)P(F)P(H)\log_2\left(P(A)P(F)P(H)\right)\\
&P(A)P(F)P(I)\log_2\left(P(A)P(F)P(I)\right)\\
&P(B)P(D)P(G)\log_2\left(P(B)P(D)P(G)\right)\\
&P(B)P(D)P(H)\log_2\left(P(B)P(D)P(H)\right)\\
&P(B)P(D)P(I)\log_2\left(P(B)P(D)P(I)\right)\\
=\sum\ &P(B)P(E)P(G)\log_2\left(P(B)P(E)P(G)\right)\\
&P(B)P(E)P(H)\log_2\left(P(B)P(E)P(H)\right)\\
&P(B)P(E)P(I)\log_2\left(P(B)P(E)P(I)\right)\\
&P(B)P(F)P(G)\log_2\left(P(B)P(F)P(G)\right)\\
&P(B)P(F)P(H)\log_2\left(P(B)P(F)P(H)\right)\\
&P(B)P(F)P(I)\log_2\left(P(B)P(F)P(I)\right)\\
&P(C)P(D)P(G)\log_2\left(P(C)P(D)P(G)\right)\\
&P(C)P(D)P(H)\log_2\left(P(C)P(D)P(H)\right)\\
&P(C)P(D)P(I)\log_2\left(P(C)P(D)P(I)\right)\\
&P(C)P(E)P(G)\log_2\left(P(C)P(E)P(G)\right)\\
&P(C)P(E)P(H)\log_2\left(P(C)P(E)P(H)\right)\\
&P(C)P(E)P(I)\log_2\left(P(C)P(E)P(I)\right)\\
&P(C)P(F)P(G)\log_2\left(P(C)P(F)P(G)\right)\\
&P(C)P(F)P(H)\log_2\left(P(C)P(F)P(H)\right)\\
&P(C)P(F)P(I)\log_2\left(P(C)P(F)P(I)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(A)P(D)P(G)\left(\log_2P(A)+\log_2P(D)+\log_2P(G)\right)\\
&P(A)P(D)P(H)\left(\log_2P(A)+\log_2P(D)+\log_2P(H)\right)\\
&P(A)P(D)P(I)\left(\log_2P(A)+\log_2P(D)+\log_2P(I)\right)\\
&P(A)P(E)P(G)\left(\log_2P(A)+\log_2P(E)+\log_2P(G)\right)\\
&P(A)P(E)P(H)\left(\log_2P(A)+\log_2P(E)+\log_2P(H)\right)\\
&P(A)P(E)P(I)\left(\log_2P(A)+\log_2P(E)+\log_2P(I)\right)\\
&P(A)P(F)P(G)\left(\log_2P(A)+\log_2P(F)+\log_2P(G)\right)\\
&P(A)P(F)P(H)\left(\log_2P(A)+\log_2P(F)+\log_2P(H)\right)\\
&P(A)P(F)P(I)\left(\log_2P(A)+\log_2P(F)+\log_2P(I)\right)\\
&P(B)P(D)P(G)\left(\log_2P(B)+\log_2P(D)+\log_2P(G)\right)\\
&P(B)P(D)P(H)\left(\log_2P(B)+\log_2P(D)+\log_2P(H)\right)\\
&P(B)P(D)P(I)\left(\log_2P(B)+\log_2P(D)+\log_2P(I)\right)\\
=\sum\ &P(B)P(E)P(G)\left(\log_2P(B)+\log_2P(E)+\log_2P(G)\right)\\
&P(B)P(E)P(H)\left(\log_2P(B)+\log_2P(E)+\log_2P(H)\right)\\
&P(B)P(E)P(I)\left(\log_2P(B)+\log_2P(E)+\log_2P(I)\right)\\
&P(B)P(F)P(G)\left(\log_2P(B)+\log_2P(F)+\log_2P(G)\right)\\
&P(B)P(F)P(H)\left(\log_2P(B)+\log_2P(F)+\log_2P(H)\right)\\
&P(B)P(F)P(I)\left(\log_2P(B)+\log_2P(F)+\log_2P(I)\right)\\
&P(C)P(D)P(G)\left(\log_2P(C)+\log_2P(D)+\log_2P(G)\right)\\
&P(C)P(D)P(H)\left(\log_2P(C)+\log_2P(D)+\log_2P(H)\right)\\
&P(C)P(D)P(I)\left(\log_2P(C)+\log_2P(D)+\log_2P(I)\right)\\
&P(C)P(E)P(G)\left(\log_2P(C)+\log_2P(E)+\log_2P(G)\right)\\
&P(C)P(E)P(H)\left(\log_2P(C)+\log_2P(E)+\log_2P(H)\right)\\
&P(C)P(E)P(I)\left(\log_2P(C)+\log_2P(E)+\log_2P(I)\right)\\
&P(C)P(F)P(G)\left(\log_2P(C)+\log_2P(F)+\log_2P(G)\right)\\
&P(C)P(F)P(H)\left(\log_2P(C)+\log_2P(F)+\log_2P(H)\right)\\
&P(C)P(F)P(I)\left(\log_2P(C)+\log_2P(F)+\log_2P(I)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&P(A)P(D)P(G)\log_2P(A)\\
&P(A)P(D)P(H)\log_2P(A)\\
&P(A)P(D)P(I)\log_2P(A)\\
&P(A)P(E)P(G)\log_2P(A)\\
&P(A)P(E)P(H)\log_2P(A)\\
&P(A)P(E)P(I)\log_2P(A)\\
&P(A)P(F)P(G)\log_2P(A)\\
&P(A)P(F)P(H)\log_2P(A)\\
&P(A)P(F)P(I)\log_2P(A)\\
&P(B)P(D)P(G)\log_2P(B)\\
&P(B)P(D)P(H)\log_2P(B)\\
&P(B)P(D)P(I)\log_2P(B)\\
=\sum\ &P(B)P(E)P(G)\log_2P(B)\\
&P(B)P(E)P(H)\log_2P(B)\\
&P(B)P(E)P(I)\log_2P(B)\\
&P(B)P(F)P(G)\log_2P(B)\\
&P(B)P(F)P(H)\log_2P(B)\\
&P(B)P(F)P(I)\log_2P(B)\\
&P(C)P(D)P(G)\log_2P(C)\\
&P(C)P(D)P(H)\log_2P(C)\\
&P(C)P(D)P(I)\log_2P(C)\\
&P(C)P(E)P(G)\log_2P(C)\\
&P(C)P(E)P(H)\log_2P(C)\\
&P(C)P(E)P(I)\log_2P(C)\\
&P(C)P(F)P(G)\log_2P(C)\\
&P(C)P(F)P(H)\log_2P(C)\\
&P(C)P(F)P(I)\log_2P(C)
\end{aligned}
+\sum
\begin{aligned}
&P(A)P(D)P(G)\log_2P(D)\\
&P(A)P(D)P(H)\log_2P(D)\\
&P(A)P(D)P(I)\log_2P(D)\\
&P(A)P(E)P(G)\log_2P(E)\\
&P(A)P(E)P(H)\log_2P(E)\\
&P(A)P(E)P(I)\log_2P(E)\\
&P(A)P(F)P(G)\log_2P(F)\\
&P(A)P(F)P(H)\log_2P(F)\\
&P(A)P(F)P(I)\log_2P(F)\\
&P(B)P(D)P(G)\log_2P(D)\\
&P(B)P(D)P(H)\log_2P(D)\\
&P(B)P(D)P(I)\log_2P(D)\\
&P(B)P(E)P(G)\log_2P(E)\\
&P(B)P(E)P(H)\log_2P(E)\\
&P(B)P(E)P(I)\log_2P(E)\\
&P(B)P(F)P(G)\log_2P(F)\\
&P(B)P(F)P(H)\log_2P(F)\\
&P(B)P(F)P(I)\log_2P(F)\\
&P(C)P(D)P(G)\log_2P(D)\\
&P(C)P(D)P(H)\log_2P(D)\\
&P(C)P(D)P(I)\log_2P(D)\\
&P(C)P(E)P(G)\log_2P(E)\\
&P(B)P(E)P(H)\log_2P(E)\\
&P(B)P(E)P(I)\log_2P(E)\\
&P(B)P(F)P(G)\log_2P(F)\\
&P(B)P(F)P(H)\log_2P(F)\\
&P(B)P(F)P(I)\log_2P(F)
\end{aligned}
+\sum
\begin{aligned}
&P(A)P(D)P(G)\log_2P(G)\\
&P(A)P(D)P(H)\log_2P(H)\\
&P(A)P(D)P(I)\log_2P(I)\\
&P(A)P(E)P(G)\log_2P(G)\\
&P(A)P(E)P(H)\log_2P(H)\\
&P(A)P(E)P(I)\log_2P(I)\\
&P(A)P(F)P(G)\log_2P(G)\\
&P(A)P(F)P(H)\log_2P(H)\\
&P(A)P(F)P(I)\log_2P(I)\\
&P(B)P(D)P(G)\log_2P(G)\\
&P(B)P(D)P(H)\log_2P(H)\\
&P(B)P(D)P(I)\log_2P(I)\\
&P(B)P(E)P(G)\log_2P(G)\\
&P(B)P(E)P(H)\log_2P(H)\\
&P(B)P(E)P(I)\log_2P(I)\\
&P(B)P(F)P(G)\log_2P(G)\\
&P(B)P(F)P(H)\log_2P(H)\\
&P(B)P(F)P(I)\log_2P(I)\\
&P(C)P(D)P(G)\log_2P(G)\\
&P(C)P(D)P(H)\log_2P(H)\\
&P(C)P(D)P(I)\log_2P(I)\\
&P(C)P(E)P(G)\log_2P(G)\\
&P(C)P(E)P(H)\log_2P(H)\\
&P(C)P(E)P(I)\log_2P(I)\\
&P(C)P(F)P(G)\log_2P(G)\\
&P(C)P(F)P(H)\log_2P(H)\\
&P(C)P(F)P(I)\log_2P(I)
\end{aligned}
$$

計算の様子 (1/2)

$$
\sum \begin{matrix}
P(A)P(D)P(G)\log_2 P(A) \\ P(A)P(D)P(H)\log_2 P(A) \\ P(A)P(D)P(I)\log_2 P(A) \\
P(A)P(E)P(G)\log_2 P(A) \\ P(A)P(E)P(H)\log_2 P(A) \\ P(A)P(E)P(I)\log_2 P(A) \\
P(A)P(F)P(G)\log_2 P(A) \\ P(A)P(F)P(H)\log_2 P(A) \\ P(A)P(F)P(I)\log_2 P(A) \\
P(B)P(D)P(G)\log_2 P(B) \\ P(B)P(D)P(H)\log_2 P(B) \\ P(B)P(D)P(I)\log_2 P(B) \\
P(B)P(E)P(G)\log_2 P(B) \\ P(B)P(E)P(H)\log_2 P(B) \\ P(B)P(E)P(I)\log_2 P(B) \\
P(B)P(F)P(G)\log_2 P(B) \\ P(B)P(F)P(H)\log_2 P(B) \\ P(B)P(F)P(I)\log_2 P(B) \\
P(C)P(D)P(G)\log_2 P(C) \\ P(C)P(D)P(H)\log_2 P(C) \\ P(C)P(D)P(I)\log_2 P(C) \\
P(C)P(E)P(G)\log_2 P(C) \\ P(C)P(E)P(H)\log_2 P(C) \\ P(C)P(E)P(I)\log_2 P(C) \\
P(C)P(F)P(G)\log_2 P(C) \\ P(C)P(F)P(H)\log_2 P(C) \\ P(C)P(F)P(I)\log_2 P(C)
\end{matrix}
+ \sum \begin{matrix}
P(A)P(D)P(G)\log_2 P(D) \\ P(A)P(D)P(H)\log_2 P(D) \\ P(A)P(D)P(I)\log_2 P(D) \\
P(A)P(E)P(G)\log_2 P(E) \\ P(A)P(E)P(H)\log_2 P(E) \\ P(A)P(E)P(I)\log_2 P(E) \\
P(A)P(F)P(G)\log_2 P(F) \\ P(A)P(F)P(H)\log_2 P(F) \\ P(A)P(F)P(I)\log_2 P(F) \\
P(B)P(D)P(G)\log_2 P(D) \\ P(B)P(D)P(H)\log_2 P(D) \\ P(B)P(D)P(I)\log_2 P(D) \\
P(B)P(E)P(G)\log_2 P(E) \\ P(B)P(E)P(H)\log_2 P(E) \\ P(B)P(E)P(I)\log_2 P(E) \\
P(B)P(F)P(G)\log_2 P(F) \\ P(B)P(F)P(H)\log_2 P(F) \\ P(B)P(F)P(I)\log_2 P(F) \\
P(C)P(D)P(G)\log_2 P(D) \\ P(C)P(D)P(H)\log_2 P(D) \\ P(C)P(D)P(I)\log_2 P(D) \\
P(C)P(E)P(G)\log_2 P(E) \\ P(B)P(E)P(H)\log_2 P(E) \\ P(B)P(E)P(I)\log_2 P(E) \\
P(B)P(F)P(G)\log_2 P(F) \\ P(B)P(F)P(H)\log_2 P(F) \\ P(B)P(F)P(I)\log_2 P(F)
\end{matrix}
+ \sum \begin{matrix}
P(A)P(D)P(G)\log_2 P(G) \\ P(A)P(D)P(H)\log_2 P(H) \\ P(A)P(D)P(I)\log_2 P(I) \\
P(A)P(E)P(G)\log_2 P(G) \\ P(A)P(E)P(H)\log_2 P(H) \\ P(A)P(E)P(I)\log_2 P(I) \\
P(A)P(F)P(G)\log_2 P(G) \\ P(A)P(F)P(H)\log_2 P(H) \\ P(A)P(F)P(I)\log_2 P(I) \\
P(B)P(D)P(G)\log_2 P(G) \\ P(B)P(D)P(H)\log_2 P(H) \\ P(B)P(D)P(I)\log_2 P(I) \\
P(B)P(E)P(G)\log_2 P(G) \\ P(B)P(E)P(H)\log_2 P(H) \\ P(B)P(E)P(I)\log_2 P(I) \\
P(B)P(F)P(G)\log_2 P(G) \\ P(B)P(F)P(H)\log_2 P(H) \\ P(B)P(F)P(I)\log_2 P(I) \\
P(C)P(D)P(G)\log_2 P(G) \\ P(C)P(D)P(H)\log_2 P(H) \\ P(C)P(D)P(I)\log_2 P(I) \\
P(C)P(E)P(G)\log_2 P(G) \\ P(C)P(E)P(H)\log_2 P(H) \\ P(C)P(E)P(I)\log_2 P(I) \\
P(C)P(F)P(G)\log_2 P(G) \\ P(C)P(F)P(H)\log_2 P(H) \\ P(C)P(F)P(I)\log_2 P(I)
\end{matrix}
=
$$

$$
= \sum \begin{pmatrix} P(A)\log_2 P(A) \\ P(B)\log_2 P(B) \\ P(C)\log_2 P(C) \end{pmatrix} + \sum \begin{pmatrix} P(D)\log_2 P(D) \\ P(E)\log_2 P(E) \\ P(F)\log_2 P(F) \end{pmatrix} + \sum \begin{pmatrix} P(G)\log_2 P(G) \\ P(H)\log_2 P(H) \\ P(I)\log_2 P(I) \end{pmatrix}
$$

$$
\sum \begin{pmatrix} P(A)\log_2 P(A) \\ P(B)\log_2 P(B) \\ P(C)\log_2 P(C) \end{pmatrix} \sum \begin{pmatrix} P(D)\log_2 P(D) \\ P(E)\log_2 P(E) \\ P(F)\log_2 P(F) \end{pmatrix} \sum \begin{pmatrix} P(G)\log_2 P(G) \\ P(H)\log_2 P(H) \\ P(I)\log_2 P(I) \end{pmatrix}
$$

$$
\sum \begin{pmatrix} P(D)P(G) \\ P(D)P(H) \\ P(D)P(I) \\ P(E)P(G) \\ P(E)P(H) \\ P(E)P(I) \\ P(F)P(G) \\ P(F)P(H) \\ P(F)P(I) \end{pmatrix} \times + \sum \begin{pmatrix} P(A)P(G) \\ P(A)P(H) \\ P(A)P(I) \\ P(B)P(G) \\ P(B)P(H) \\ P(B)P(I) \\ P(C)P(G) \\ P(C)P(H) \\ P(C)P(I) \end{pmatrix} \times + \sum \begin{pmatrix} P(A)P(D) \\ P(A)P(E) \\ P(A)P(F) \\ P(B)P(D) \\ P(B)P(E) \\ P(B)P(F) \\ P(C)P(D) \\ P(C)P(E) \\ P(C)P(F) \end{pmatrix} \times
$$

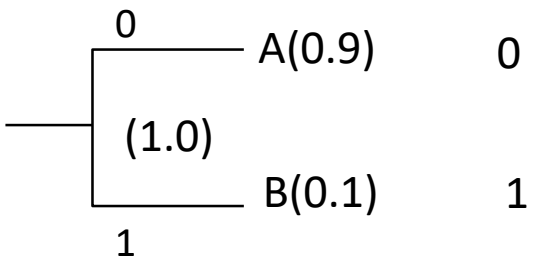
$$
\sum \begin{pmatrix} P(D)P(G) \\ P(D)P(H) \\ P(D)P(I) \\ P(E)P(G) \\ P(E)P(H) \\ P(E)P(I) \\ P(F)P(G) \\ P(F)P(H) \\ P(F)P(I) \end{pmatrix} = \big(P(D)+P(E)+P(F)\big)\times\big(P(G)+P(H)+P(I)\big)=1
$$

ブロック符号化

- ブロック符号化：情報源から発生する記号をまとめて符号化する方法.
- ブロック符号化をすることによって，平均符号長を情報源エントロピーに近づけることができる.

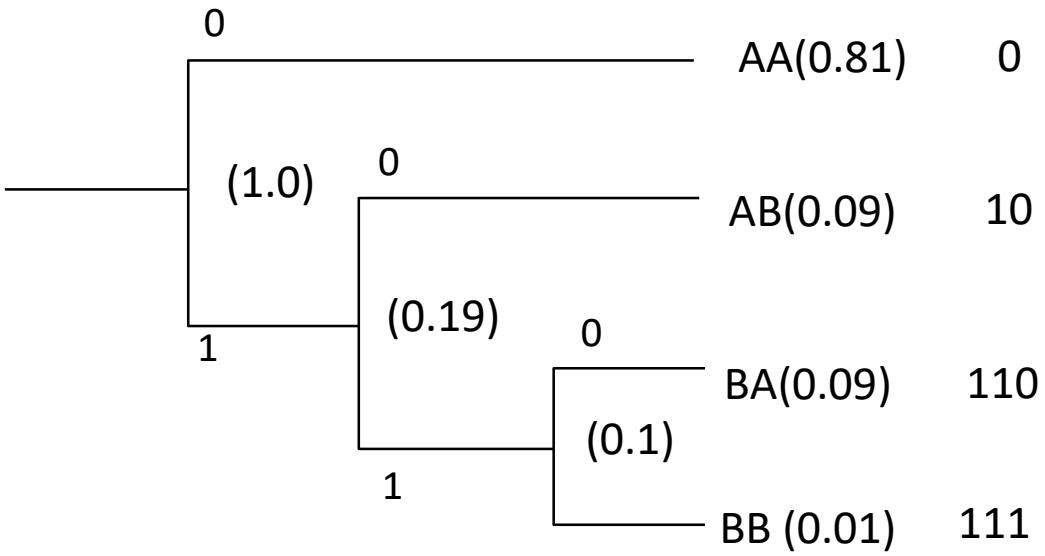
ブロック符号化

〈A: 0.9, B: 0.1〉に対するハフマン符号化



⇒ 情報源記号あたりの平均符号長1

〈AA: 0.81, AB: 0.09, BA: 0.09, BB: 0.01〉に対するハフマン符号化



⇒ 情報源記号あたりの平均符号長0.645

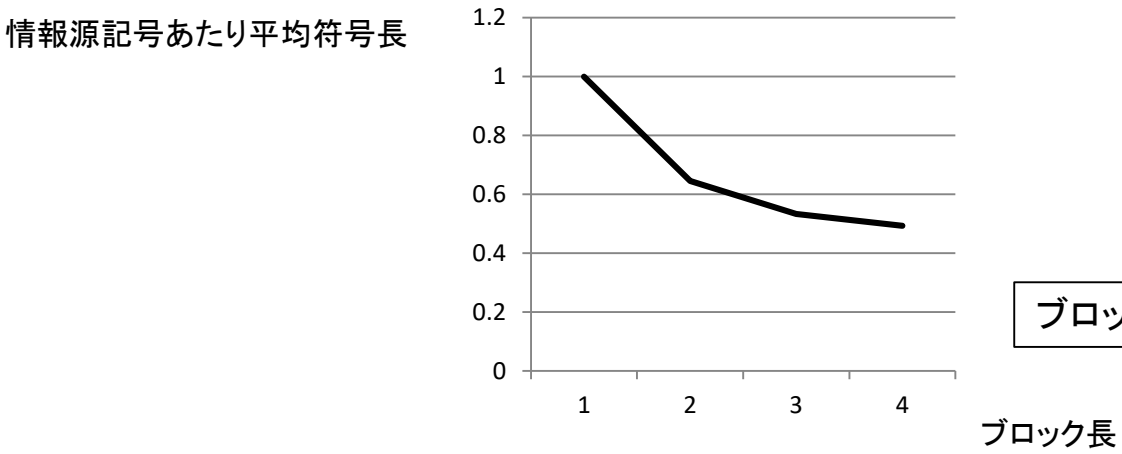
ブロック符号化

〈A: 0.9, B: 0.1〉の3次拡大情報源に対するハフマン符号化

AAA: 0.729 0
AAB: 0.081 100
ABA: 0.081 101
BAA: 0.081 110
ABB: 0.009 11100
BAB: 0.009 11101
BBA: 0.009 11110
BBB: 0.001 11111

⇒ 情報源記号あたりの平均符号長約0.53267

ブロック符号化の威力



ブロック長を大きくしたらどうなるか？

情報源符号化定理

情報源Sについて，

$$H_1(S^n) \leq L_n < H_1(S^n) + 1$$

が成立する.

情報源 Sのn次の拡張S^nについても，

$$H_1(S^n) \leq L_n < H_1(S^n) + 1$$

ここで，L_nはSの1記号あたりの平均符号長．Sが無記憶であれば

$$H_1(S^n) = nH_1(S)$$

また，$L_n = nL$なので，

$$H_1(S) \leq L < H_1(S) + \frac{1}{n}$$

→ブロック符号化によって，平均符号長を$H_1(S)$に限りなく近づけられる

情報源符号化定理

【情報源符号化定理】

情報源Sは，任意の正数εに対して，1情報源記号あたりの平均符号長Lが，

$$H(S) \leq L < H(S) + \varepsilon$$

となるような2元瞬時符号に符号化できる.

他方，どのような一意復号可能な2元符号を用いても，平均符号長がこの式の左辺より小さくなる符号化はできない.

情報源符号化定理

情報源Sのエントロピー$H(S)$:

$$H(S) \equiv \lim_{n\to\infty} H_n(S) = \lim_{n\to\infty} \frac{H_1(S^n)}{n}$$

ここで，$H_1(S^n) = -\sum \cdots \sum P(x_0, \cdots, x_{n-1}) \log_2 P(x_0, \cdots, x_{n-1})$

はSのn次の拡大情報源 S^nの1次エントロピー.

$H_n(S) \equiv \frac{H_1(S^n)}{n}$は$S$の1情報源記号あたりの$n$次エントロピー.

一般には，$H(S) \leq H_n(S)$であることが知られている.

まとめ

- 情報源の1次エントロピー
- 補助定理3
- 情報源記号ごとに瞬時符号を構成した場合の平均符号長の下限
- 拡大情報源とその1次エントロピー
- ブロック符号化：情報源から発生する記号をまとめて符号化する方法.
- ブロック符号化をすることによって，平均符号長を情報源エントロピーに近づけることができる.
- 情報源符号化定理