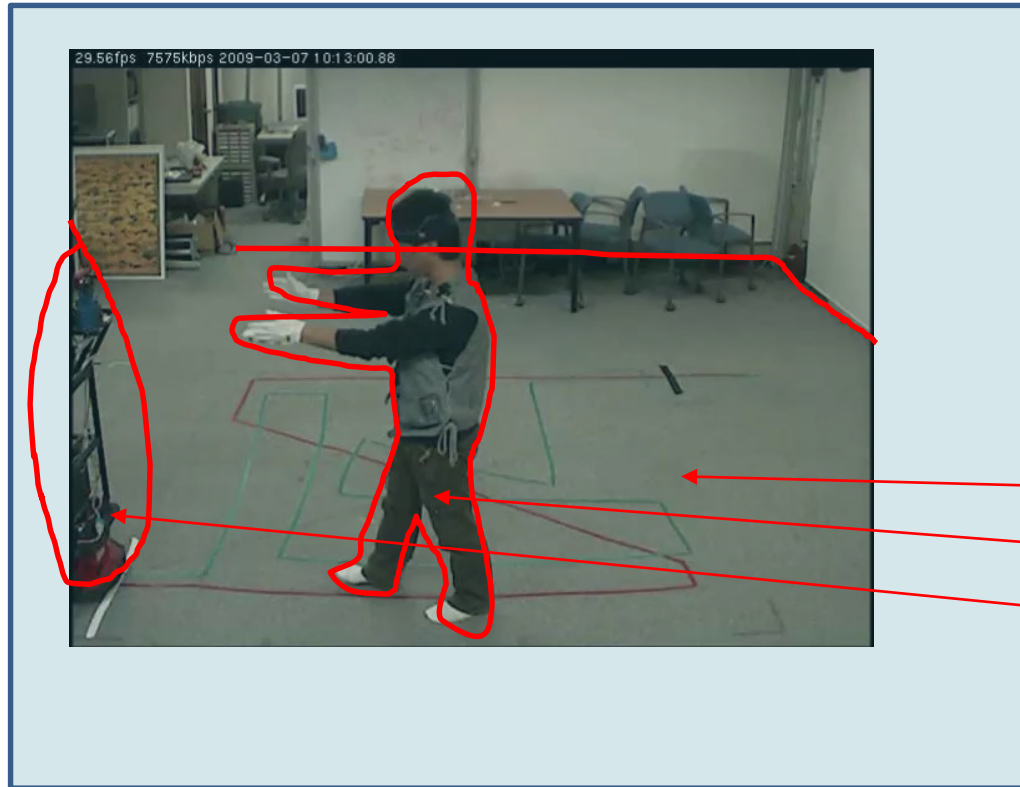


情報符号理論の枠組み

情報符号理論の枠組み



物理理論

質点, 力, 位置, 速度, 加速度, 光, 電気, 電子, ...

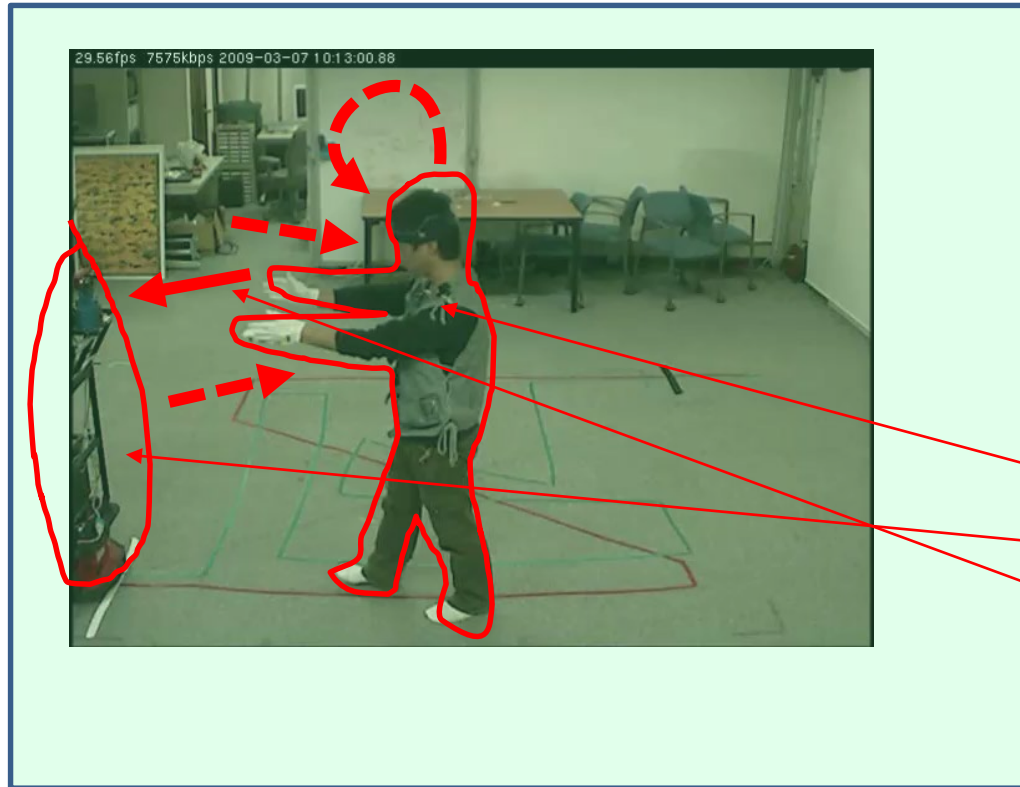
物理的説明

- 平面
- 物体1
- 物体2

物理学者



情報符号理論の枠組み



情報の理論

情報源, 情報, ...

情報科学的説明

- 情報源
- 受信者
- 情報



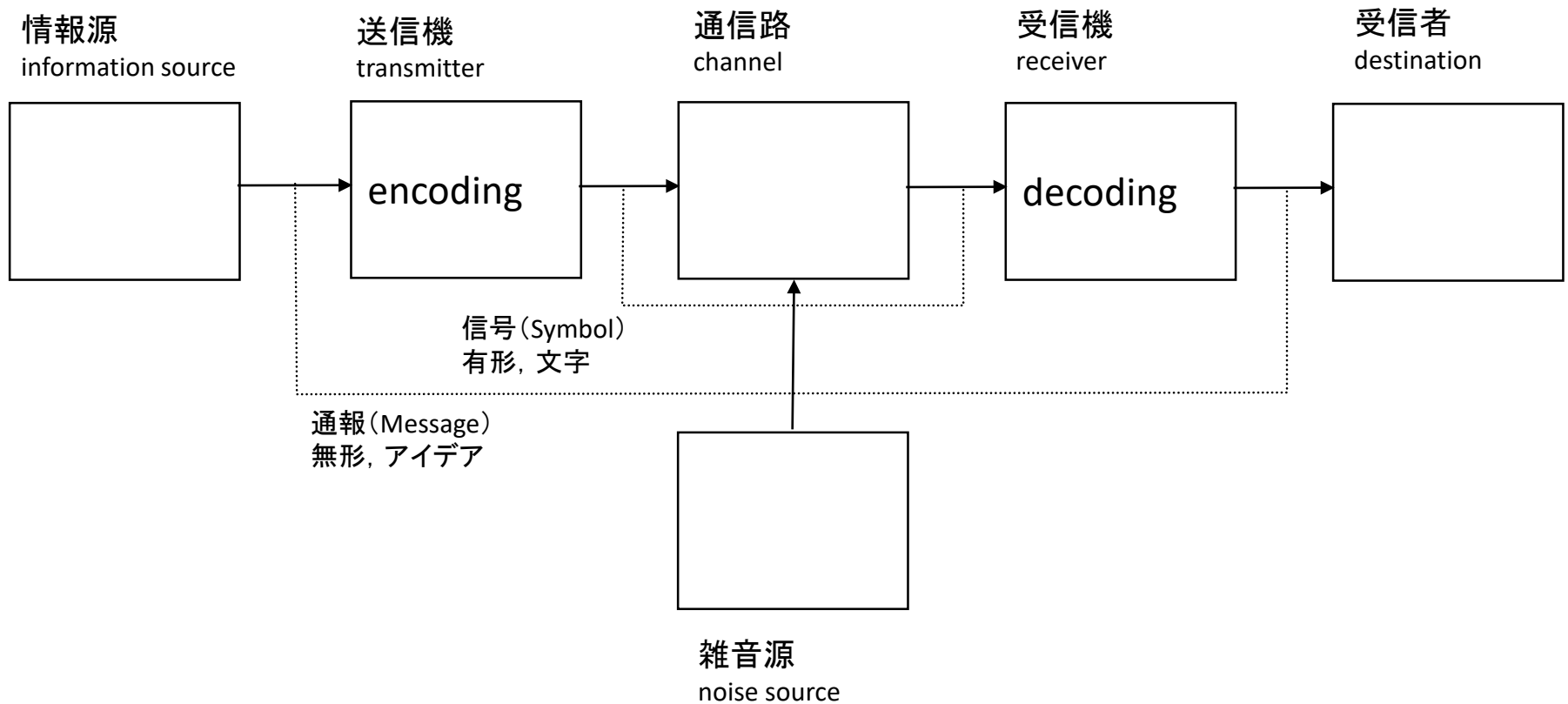
情報科学者



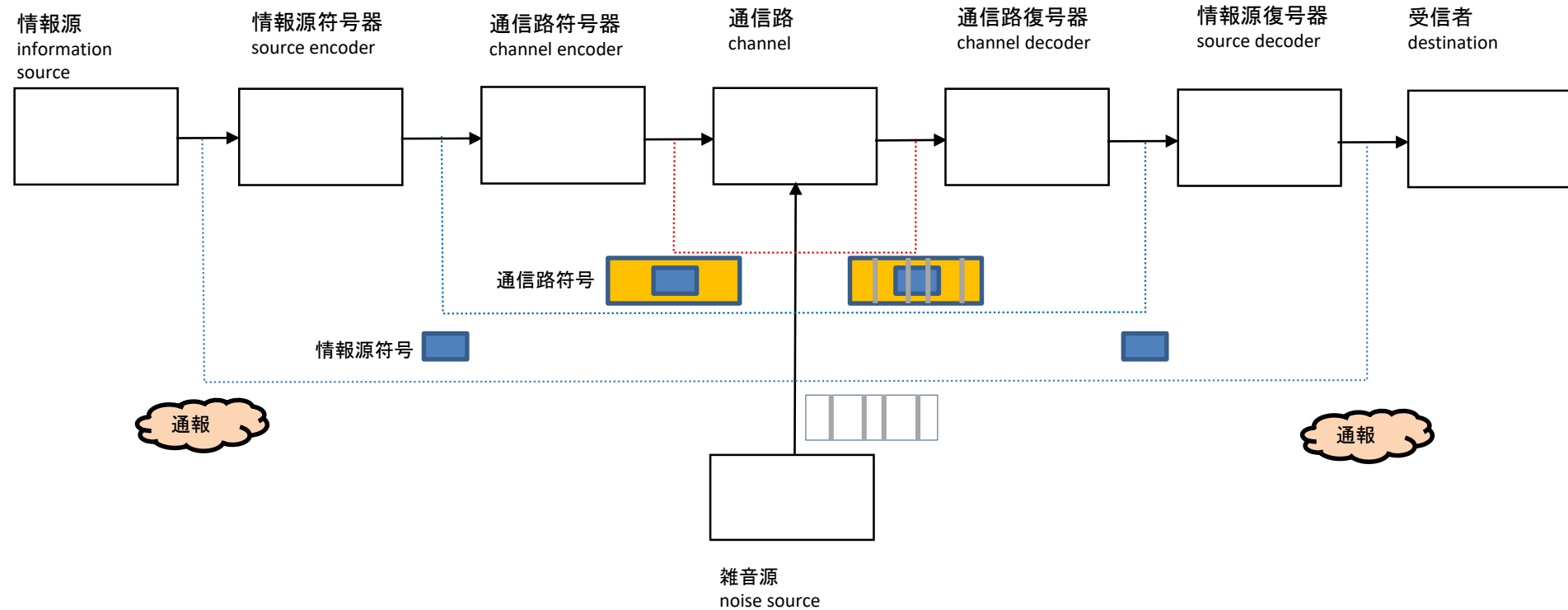
情報とは何か？

- 情報＝不確かさを減らすもの
- 生命：環境のなかの様々な情報に反応して複雑な行動をする.
- 機械：環境内の情報を検出して組み込まれた機序にしたがって行動する.

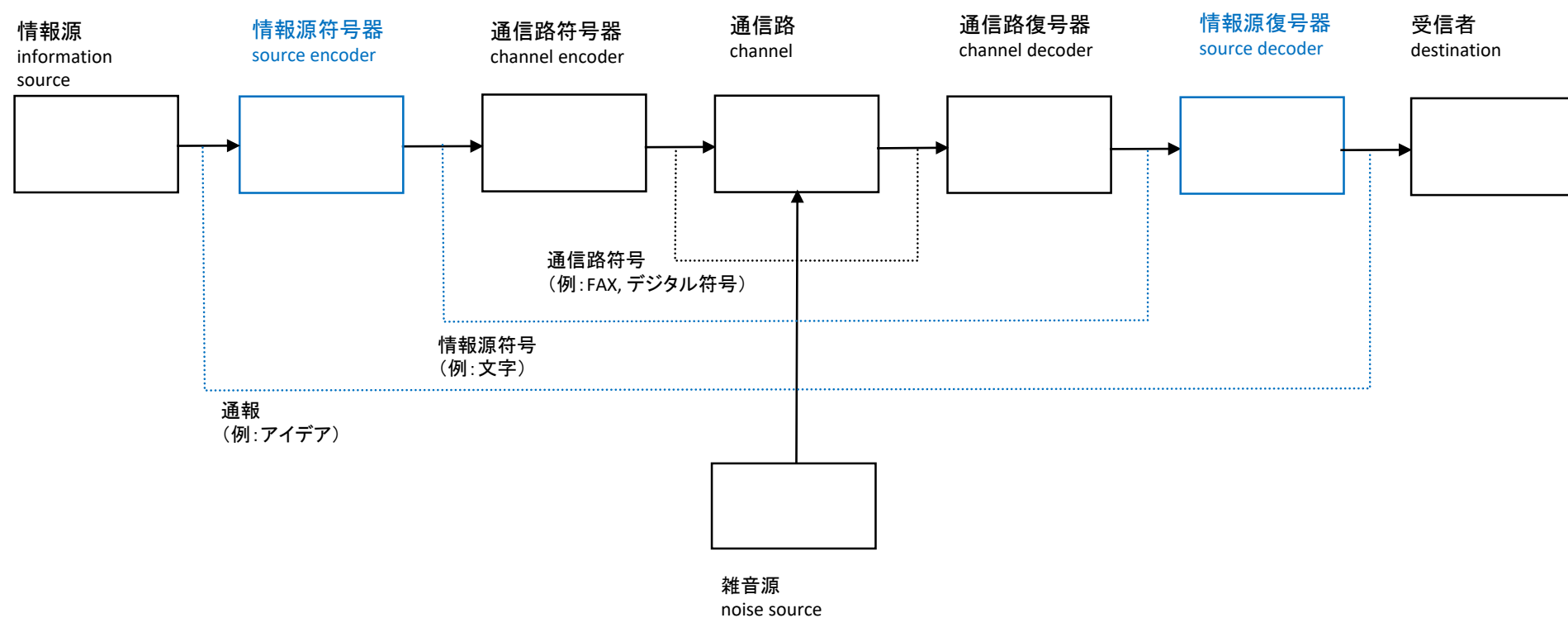
Shannonモデル



Fanoによる修正Shannonモデル



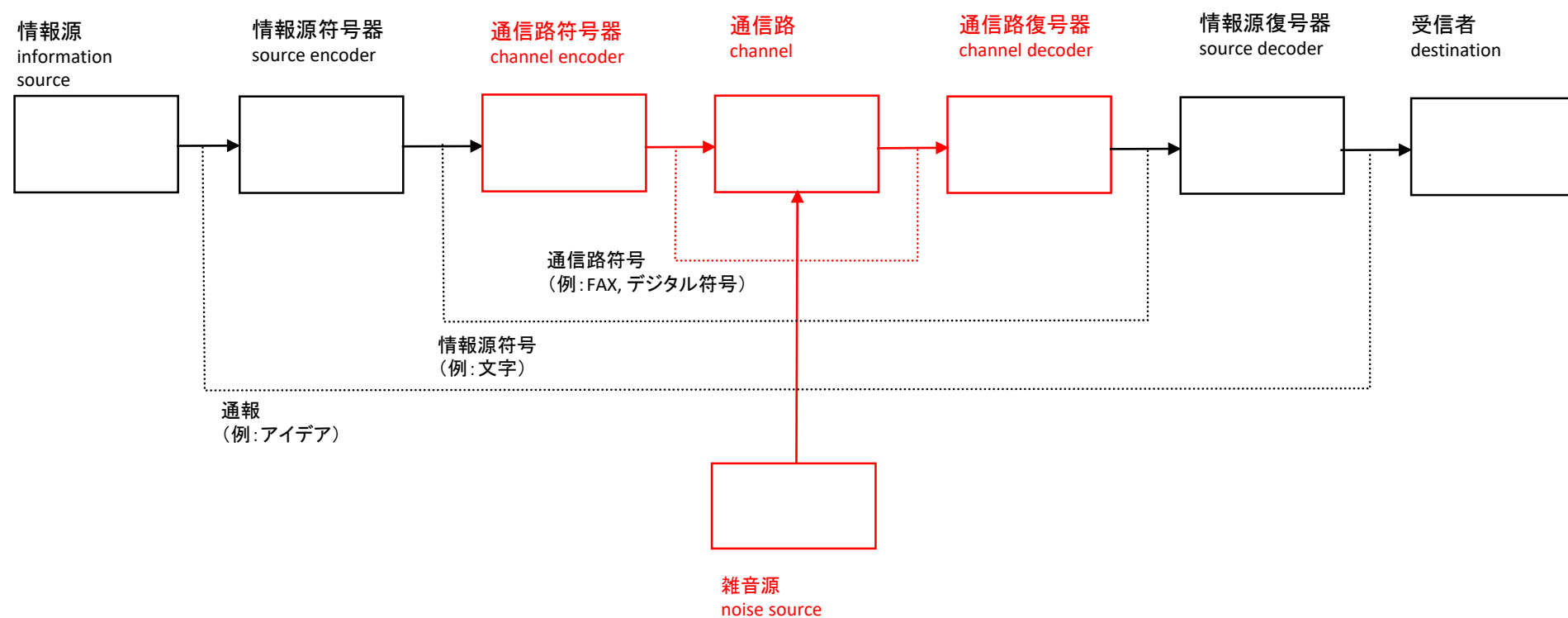
本科目の構成



①(離散系)情報源符号化とその限界

瞬時復号可能性を保ったまま, 平均符号長をどれだけ短くできるか?

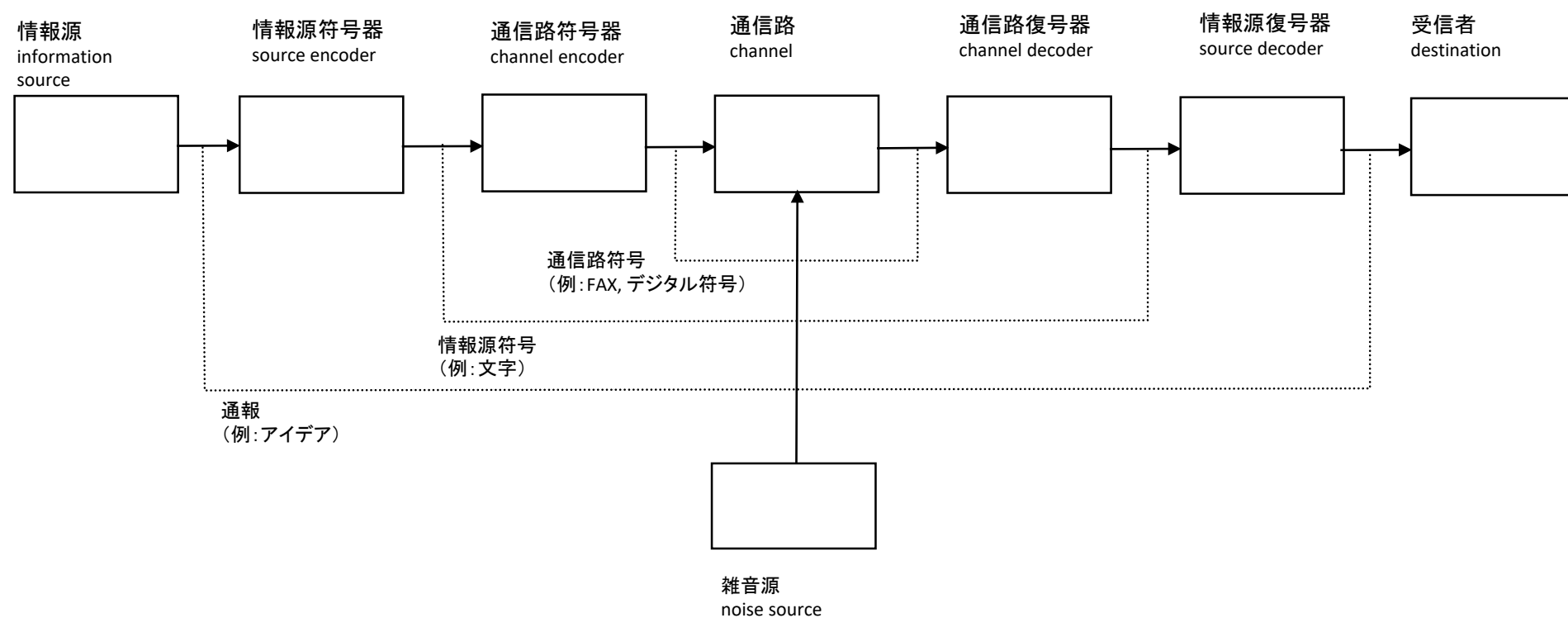
本科目の構成



②(離散系)通信路符号化とその限界

通信路の品質から定まる通信速度の範囲内なら, 復号誤りを任意に小さくできる

本科目の構成



③離散系の誤り訂正／検出符号構成法

④アナログ系

情報とは何か？

不確かさを減らす度合いが大きければ、より価値のある情報

山田さんはこの路地の奥に行ったよ



情報量

2つの事象 $\{e_1, e_2\}$ のいずれかが起きるとする.

e_1 の生起確率を p_1 , e_2 の生起確率を p_2 とする.

- e_1 が起きたことを知らせるメッセージの情報量:

$$\log_2 \frac{1}{p_1} = -\log_2 p_1 \quad \text{ビット}$$

- e_2 が起きたことを知らせるメッセージの情報量:

$$\log_2 \frac{1}{p_2} = -\log_2 p_2 \quad \text{ビット}$$

- メッセージの平均的な情報量:

$$p_1 \log_2 \frac{1}{p_1} + p_2 \log_2 \frac{1}{p_2} = -(p_1 \log_2 p_1 + p_2 \log_2 p_2) \quad \text{ビット}$$

情報量

出現確率 p の事象 e が起きたことを知らせるメッセージの情報量

$$\log_2 \frac{1}{p} = -\log_2 p \quad \text{ビット}$$

(例) 左へ行った確率が $1/4$ であるとき, 実際にそうであるということを伝えるメッセージの情報量:

$$\log_2 \frac{1}{\frac{1}{4}} = -\log_2 \frac{1}{4} = 2 \quad \text{ビット}$$

情報量

n 個の事象 $\{e_1, \dots, e_n\}$ が与えられたとき, e_i の生起確率を p_i とすると, e_i の起きたことを知らせるメッセージの平均的な情報量:

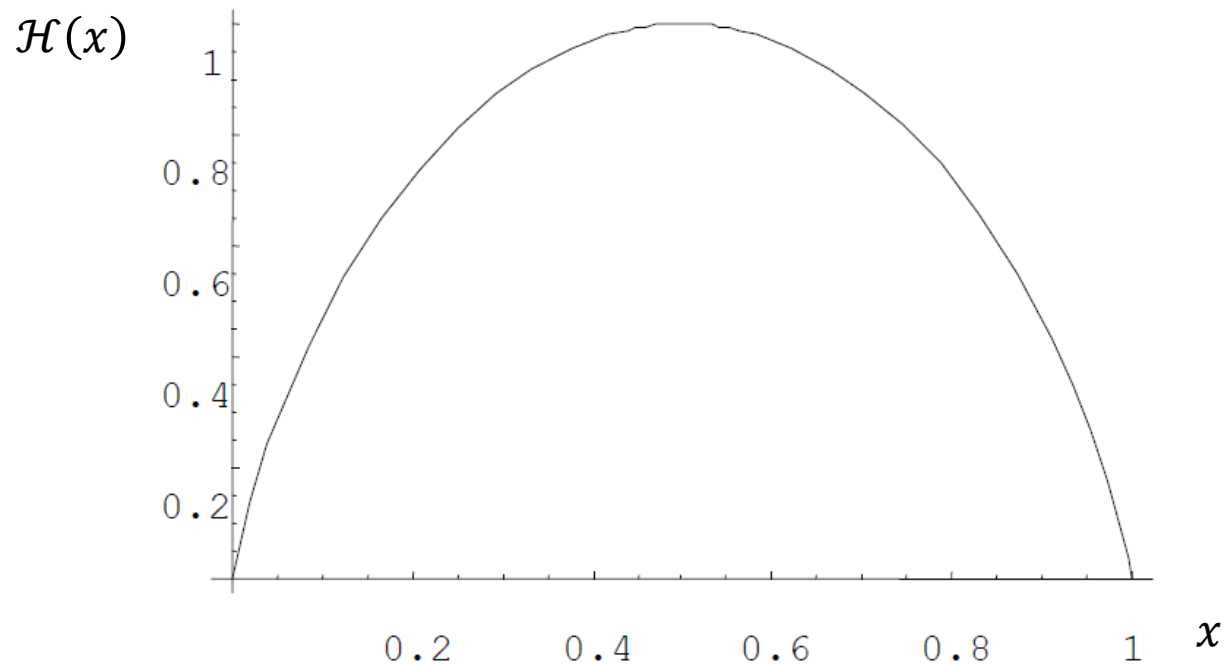
$$p_1 \log_2 \frac{1}{p_1} + \dots + p_n \log_2 \frac{1}{p_n} = - \sum_{i=1}^n p_i \log_2 p_i \quad \text{ビット}$$

- 例1: {左: 1/2, 右: 1/2} ... 左でも, 右でも1ビットの情報が得られる. 平均情報量は1ビット.
- 例2: {左: 1/4, 右: 3/4} ... 1/4の確率で $\log_2 4 = 2$ ビットの情報が得られるが, 残り3/4の確率で得られる情報量は $\log_2 \frac{4}{3} \approx 0.415$ ビットだけである. 平均すれば,

$$\frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{\frac{1}{4}} + \frac{3}{4} \log_2 \frac{1}{\frac{3}{4}} \approx \frac{1}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times 0.415 \approx 0.811 \quad \text{ビット}$$

情報量

事象が2個のとき, そのうちの1個の生起確率を x とすれば, 他方の事象の生起確率は $1 - x$ なので, 事象の生起を知らせるメッセージのもたらす平均的な情報量を $\mathcal{H}(x)$ とすれば, $\mathcal{H}(x) = -(x \log_2 x + (1 - x) \log_2(1 - x))$ となる. $\mathcal{H}(x)$ はエントロピー関数と呼ばれる.



相互情報量の概念



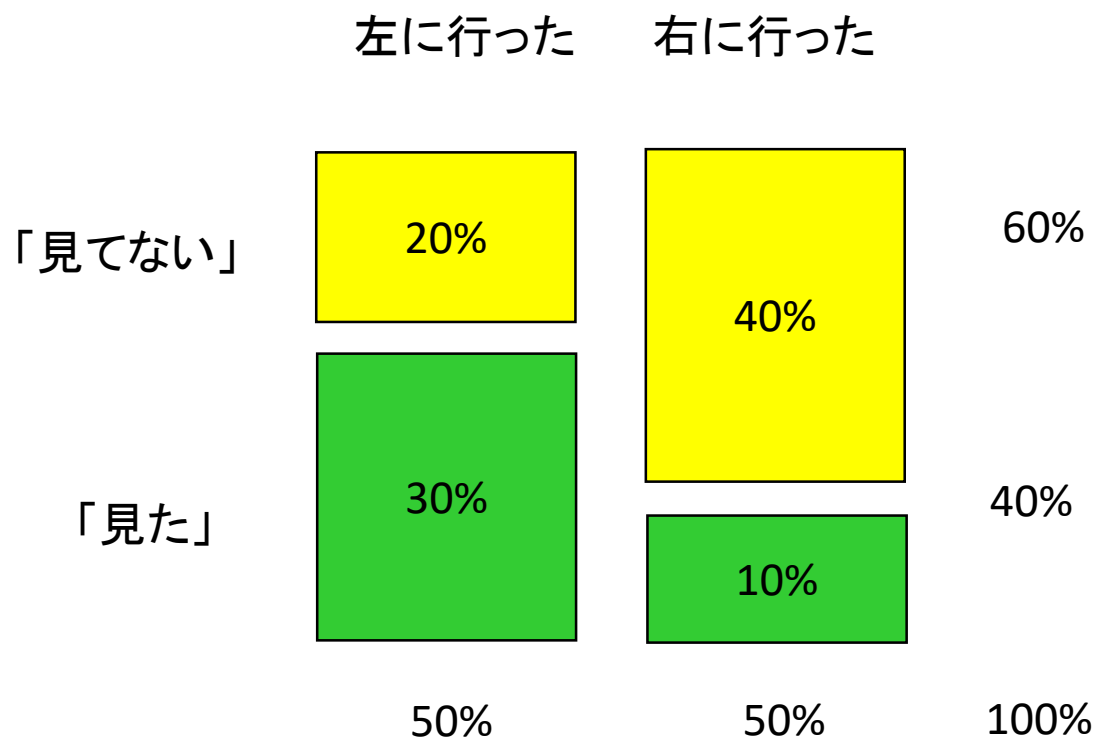
若い男性は見かけ
なかったな

	左	右
見てない	20%	40%
見た	30%	10%

相互情報量の概念

■ 不完全な答えからも情報は得られる

「見てない／見た」と「左／右に行った」の関わりについての知識



相互情報量

- 「左に行った」、「右に行った」というメッセージのもたらす価値は文脈に依存する.
- 何も知らないときは, 「左に行った」は1ビットの情報量, 「右に行った」も1ビットの情報量をもつから, メッセージは平均1ビットの情報量をもつことになる.
- 目撃有無情報を得たとしよう. 「見てない」という回答だったとすれば,
 - 「左に行った」というメッセージは, $\log_2 \frac{1}{\frac{1}{3}} = \log_2 3 \approx 1.585$ ビットの情報をもたらす.
 - 「右に行った」というメッセージは, $\log_2 \frac{1}{\frac{2}{3}} = \log_2 \frac{3}{2} \approx 0.585$ ビットの情報をもたらす.
 - 平均すると, $[-(p \log_2 p + (1 - p) \log_2 (1 - p))]_{p=\frac{1}{3}} \approx 0.918$ ビットの情報をもたらされる.
 - 同様に, 「見た」という回答だったとすれば, メッセージの平均情報量は
$$[-(p \log_2 p + (1 - p) \log_2 (1 - p))]_{p=\frac{1}{4}} \approx 0.811 \quad \text{ビット}$$
- 以上より, 目撃有無情報から得られる平均情報量は
$$0.918 \times \frac{3}{5} + 0.811 \times \frac{2}{5} \approx 0.8755 \quad \text{ビット}$$

相互情報量

確率変数 X のエントロピー(平均的な不確かさ)を $H(X)$ とすると,

$$H(\text{左右}) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$H(\text{左右}|\text{見てない}) = \mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.918296$$

$$H(\text{左右}|\text{見てる}) = \mathcal{H}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.811278$$

$$H(\text{左右}|\text{目撃有無}) = \frac{3}{5}\mathcal{H}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{2}{5}\mathcal{H}\left(\frac{3}{4}\right) \approx 0.8755$$

$$H(\text{左右}) - H(\text{左右}|\text{目撃有無}) \approx 1 - 0.8755 = 0.1245$$

一方,

$$H(\text{目撃有無}) = \mathcal{H}\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0.970951$$

$$H(\text{目撃有無}|\text{左}) = \mathcal{H}\left(\frac{2}{5}\right) \approx 0.970951$$

$$H(\text{目撃有無}|\text{右}) = \mathcal{H}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0.721928$$

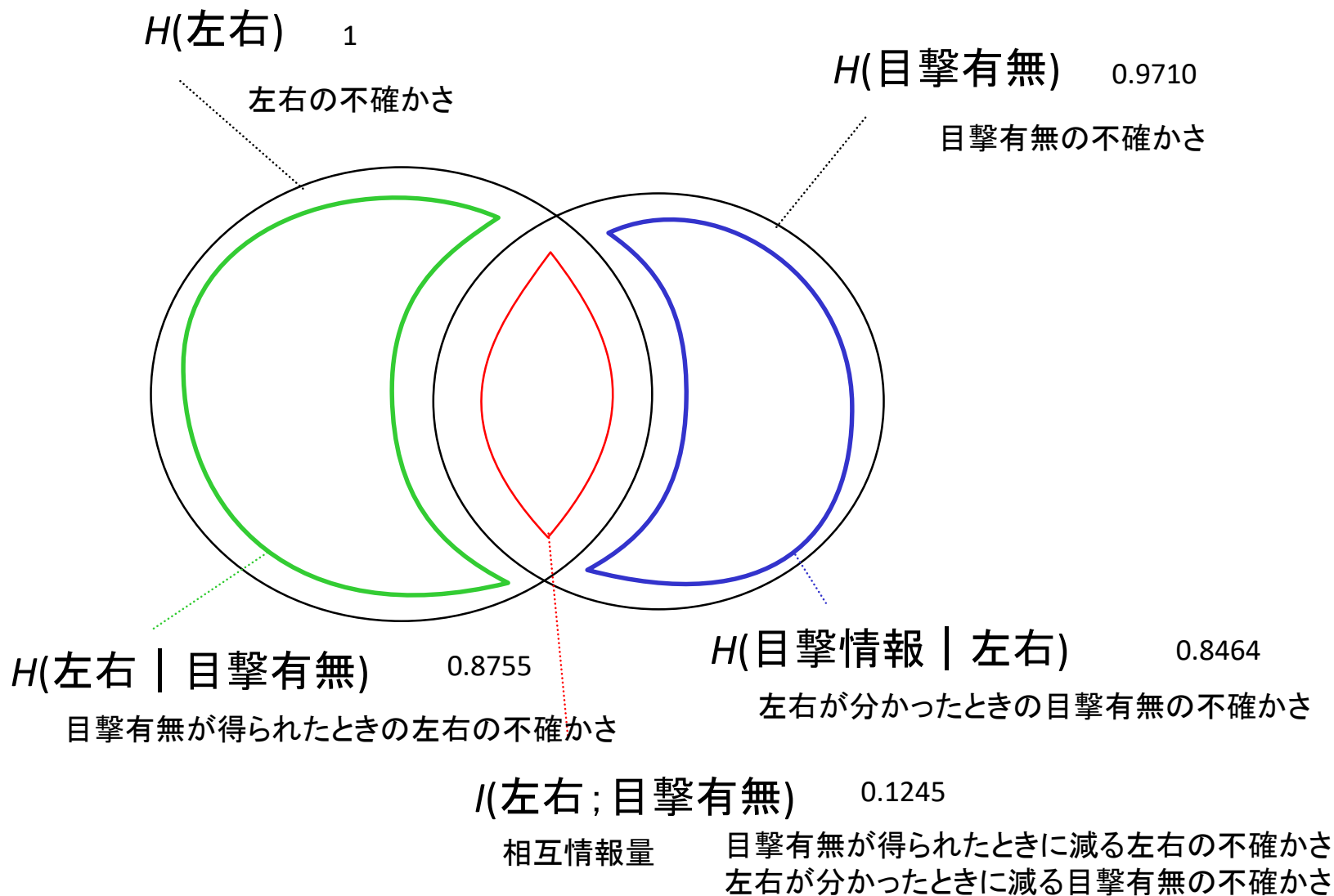
$$H(\text{目撃有無}|\text{左右}) = \frac{1}{2}\mathcal{H}\left(\frac{2}{5}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{H}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0.846439$$

$$H(\text{目撃有無}) - H(\text{目撃有無}|\text{左右}) = \mathcal{H}\left(\frac{3}{5}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{H}\left(\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{H}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0.1245$$

このように,

$$H(\text{左右}) - H(\text{左右}|\text{目撃有無}) = H(\text{目撃有無}) - H(\text{目撃有無}|\text{左右})$$

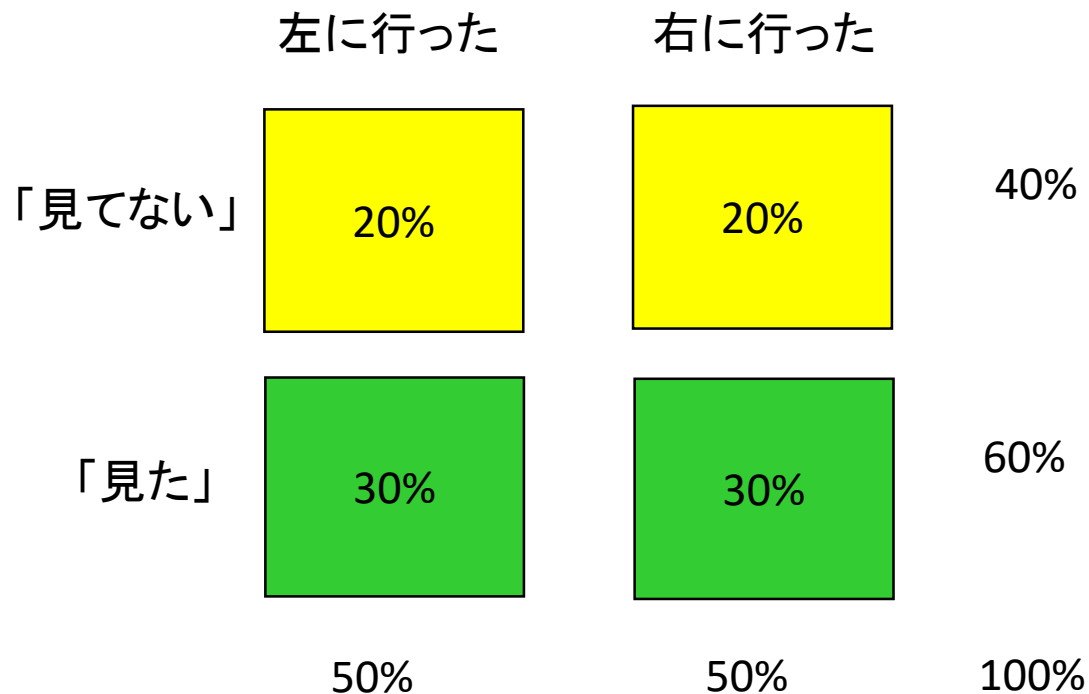
相互情報量の概念



相互情報量の概念

■ 不完全な答えからも情報は得られるか？

「見てない／見た」と「左／右に行った」の関わりについての知識
... もう一つのケース



課題

- 情報符号理論では、情報をどのように単純化しているか？基礎になっている仮定は何か？

講義プラン

1. 情報符号理論の枠組み

情報符号理論の基礎となる情報量の概念を中心に、情報符号理論の枠組みを紹介する.

2. 情報源符号化とその限界

情報源符号化法, 情報源符号化定理, 情報源のエントロピーについて述べる.

3. 通信路符号化とその限界

情報量の概念を導入し, 相互情報量, 通信路容量, 通信路符号化, 通信路符号化定理について述べる.

4. 通信路符号化法

誤り検出・訂正が可能な符号の構成法について, パリティ検査符号, ハミング符号, 巡回符号, BCH符号などを中心に述べる

5. アナログ情報源の扱い

フーリエ級数, フーリエ変換など, アナログ情報の扱いについて基本的事項を述べる.