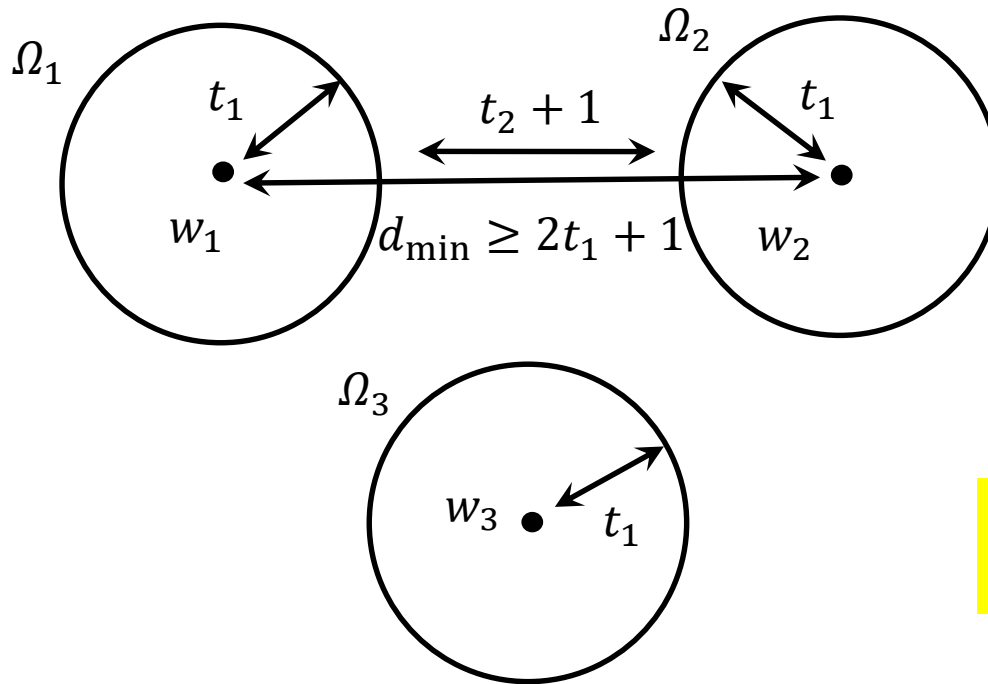


# 通信路符号化法 (1)

# 限界距離復号法

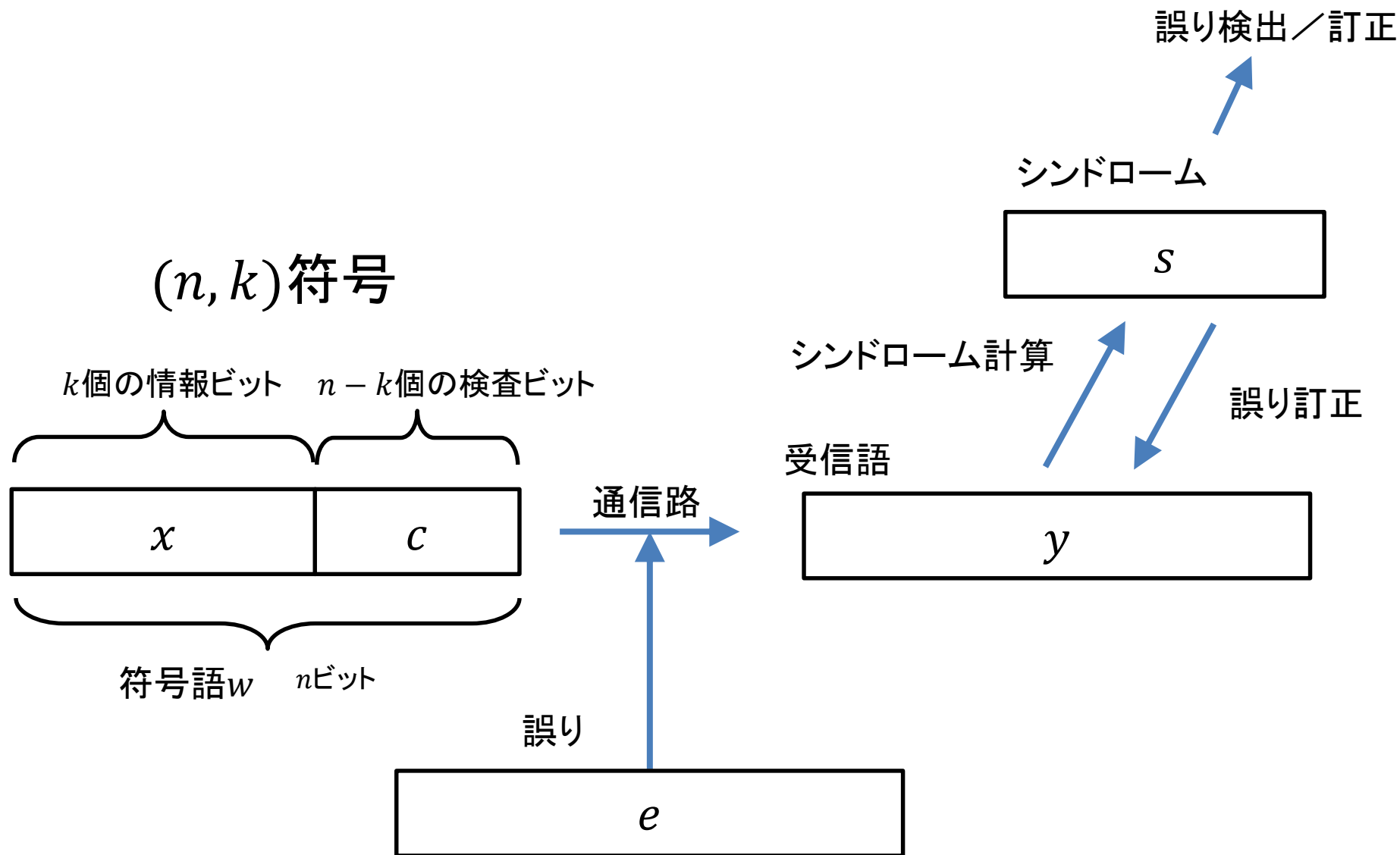
- 符号 $C$ の最小ハミング距離:  $d_{\min} = \min_{u \neq v, u, v \in C} d_H(u, v)$
- 受信空間において, 各符号語を中心として半径 $t_1$ の球を作る.



$d_{\min} \geq 2t_1 + 1$ であれば, これらの球は重複することはない.

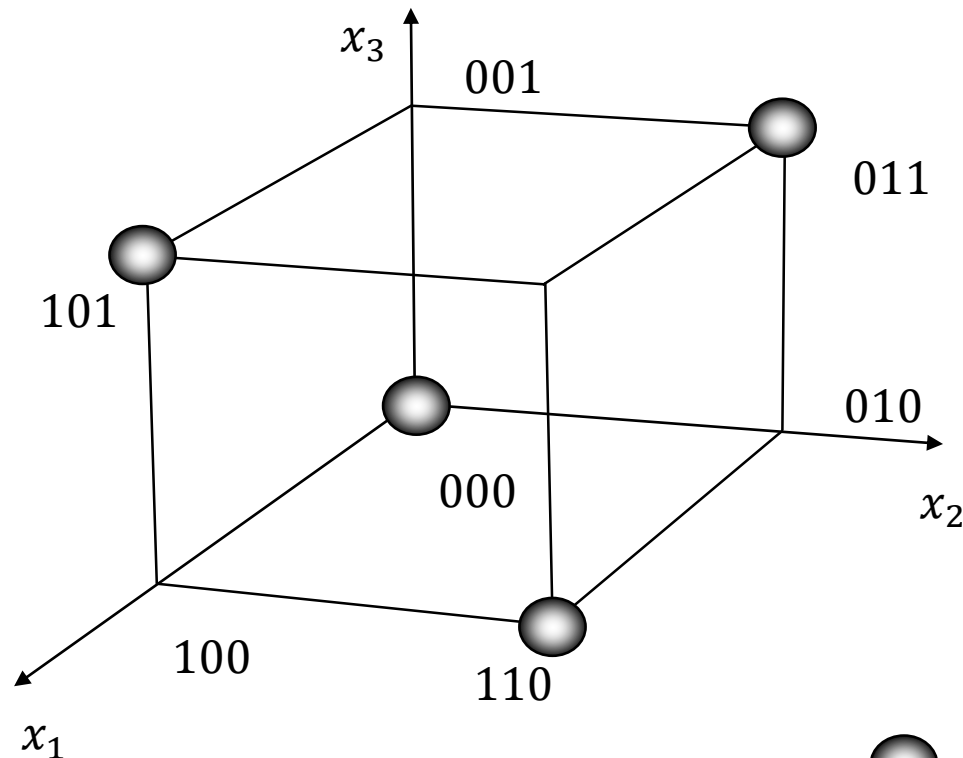
- これらの球を復号領域とすれば, この符号により,  $t_1$ 個以下の誤りを訂正でき,  $t_1 + t_2$ 個以下の誤りを検出できる.

# 通信路符号化の枠組み



# 単一パリティ検査

- 単一パリティ誤り検査符号: 長さが  $k + 1$  で, 1の個数が偶数であるような全ての2元系列からなる符号長  $n = k + 1$ , 符号語数  $M = 2^k$  の符号語の集まり.
- $k = 2$  のとき,  $C = \{000, 011, 101, 110\}$



● を符号語として使用

# 単一パリティ検査

- $0,1$ からなる長さ $k$ の系列 $x_1 \cdots x_k$ を2元通信路を介して送る.
- $x_1, \dots, x_k$ から $c = x_1 \oplus \cdots \oplus x_k$ なる $c$ を求める.  
 $\oplus$ は排他的論理和.  $x_1 \oplus \cdots \oplus x_k \oplus c = 0$ が成り立つ.
- $x_1 \cdots x_k$ に $c$ を追加した $w = x_1 \cdots x_k c$ を通信路符号として伝送する.  
 $w = (x_1, \dots, x_k, c)$ と表記することもある.
- 符号語 $w = w_1 \cdots w_k c$ , 誤りパターンを $e = e_1 \cdots e_k e_{k+1}$ ,  
受信語 $y = y_1 \cdots y_k y_{k+1}$ とすれば,  
$$y = w \oplus e = (w_1 \oplus e_1, \dots, w_k \oplus e_k, w_{k+1} \oplus e_{k+1})$$

# 単一パリティ検査

- 符号語を  $w = w_1 \cdots w_k C$ ,  
誤りパターンを  $e = e_1 \cdots e_k e_{k+1}$ ,  
受信語を  $y = y_1 \cdots y_k y_{k+1}$ ,  
シンδροームを  $s = y_1 \oplus \cdots \oplus y_k \oplus y_{k+1}$   
とすれば,

$$\begin{aligned} y &= w \oplus e = (w_1 \oplus e_1, \dots, w_k \oplus e_k, w_{k+1} \oplus e_{k+1}) \\ s &= (w_1 \oplus e_1) \oplus \cdots \oplus (w_k \oplus e_k) \oplus (w_{k+1} \oplus e_{k+1}) \\ &= (w_1 \oplus \cdots \oplus w_k \oplus w_{k+1}) \oplus (e_1 \oplus \cdots \oplus e_k \oplus e_{k+1}) \\ &= e_1 \oplus \cdots \oplus e_k \oplus e_{k+1} \end{aligned}$$

- $s = 0$  ならば誤りなし,  $s = 1$  ならば誤りありと, 判定することになれば, 奇数個の誤りが検出可能.

# 水平垂直パリティ検査符号

例:  $3 \times 4 = 12$ ビットの情報 (0,1,1,0,1,0,1,1,0,0,0,1)を送信する

## 【符号化】

情報ビット

$x_1: 0$	$x_2: 1$	$x_3: 1$	$x_4: 0$
$x_5: 1$	$x_6: 0$	$x_7: 1$	$x_8: 1$
$x_9: 0$	$x_{10}: 0$	$x_{11}: 0$	$x_{12}: 1$

検査ビット追加(パリティを用いる)

$w_1 = x_1: 0$	$w_2 = x_2: 1$	$w_3 = x_3: 1$	$w_4 = x_4: 0$	$w_{13} = c_1: 0$
$w_5 = x_5: 1$	$w_6 = x_6: 0$	$w_7 = x_7: 1$	$w_8 = x_8: 1$	$w_{14} = c_2: 1$
$w_9 = x_9: 0$	$w_{10} = x_{10}: 0$	$w_{11} = x_{11}: 0$	$w_{12} = x_{12}: 1$	$w_{15} = c_3: 1$
$w_{16} = c_4: 1$	$w_{17} = c_5: 1$	$w_{18} = c_6: 0$	$w_{19} = c_7: 0$	$w_{20} = c_8: 0$

## 【復号】

受信語

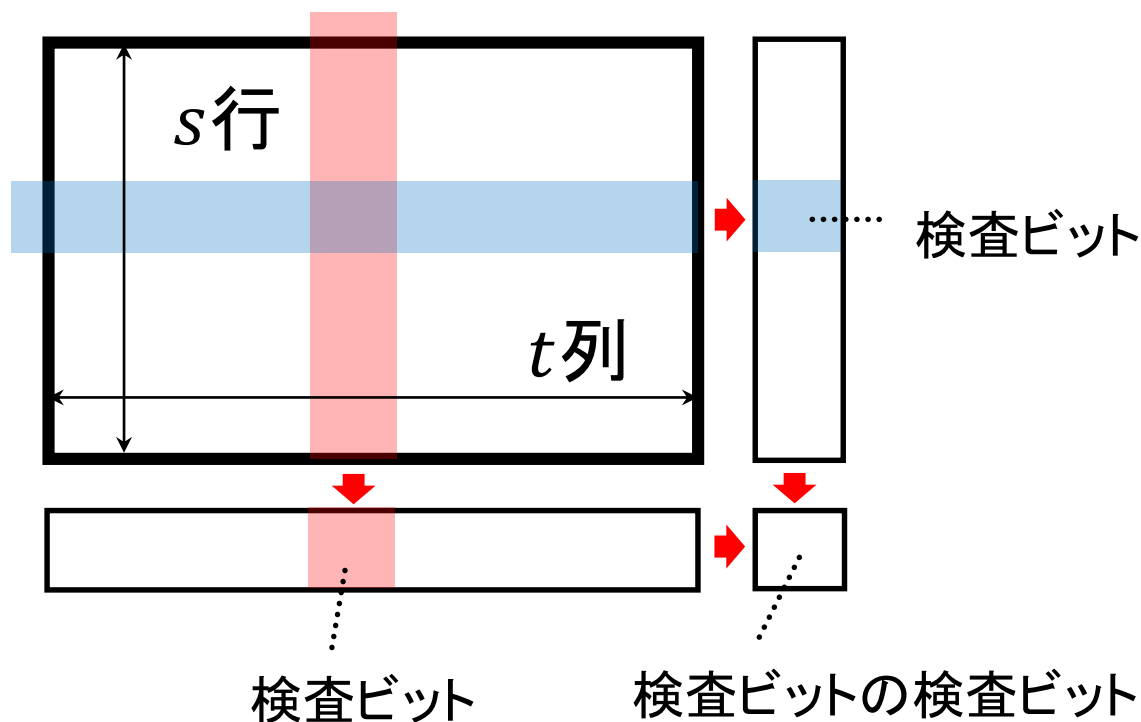
$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_{13}$
$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_{14}$
$y_9$	$y_{10}$	$y_{11}$	$y_{12}$	$y_{15}$
$y_{16}$	$y_{17}$	$y_{18}$	$y_{19}$	$y_{20}$

シンドローム計算

$$\begin{aligned} S_1 &= y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_{13} \\ S_2 &= y_5 + y_6 + y_7 + y_8 + y_{14} \\ S_3 &= y_9 + y_{10} + y_{11} + y_{12} + y_{15} \\ S_4 &= y_{16} + y_{17} + y_{18} + y_{19} + y_{20} \\ S_5 &= y_1 + y_5 + y_9 + y_{16} \\ S_6 &= y_2 + y_6 + y_{10} + y_{17} \\ S_7 &= y_3 + y_7 + y_{11} + y_{18} \\ S_8 &= y_4 + y_8 + y_{12} + y_{19} \\ S_9 &= y_{13} + y_{14} + y_{15} + y_{20} \end{aligned}$$

# 水平垂直パリティ検査符号

$s \times t$ 個の情報ビットに $s + t + 1$ 個の検査ビットを加えて構成される $((s + 1)(t + 1), st)$ 符号



$\Rightarrow ((s + 1)(t + 1), st)$ 符号



# 水平垂直パリティ検査符号

- 符号化: 情報語  $(x_1, \dots, x_{st})$  に対して

$$c_k = \begin{cases} \sum_{i=1}^t x_{(k-1)t+i} & (1 \leq k \leq s) \\ \sum_{i=1}^t x_{(i-1)t+k-s} & (s+1 \leq k \leq s+t) \\ \sum_{i=1}^s c_i = \sum_{i=1}^t c_{s+i} & (k = s+t+1) \end{cases}$$

となるように  $c_k$  ( $k = 1, \dots, s+t+1$ ) を求め,  $w = (x_1, \dots, x_{st}, c_1, \dots, c_{s+t+1})$  とする.

- 復号: 通信路からの出力  $y = (y_1, \dots, y_{st}, y_{st+1}, \dots, y_{st+s+t+1})$  に対して

$$s_k = \begin{cases} y_{st+k} + \sum_{i=1}^t y_{(k-1)t+i} & (1 \leq k \leq s) \\ \sum_{i=1}^{t+1} y_{s(t+1)+i} & (k = s+1) \\ y_{st+k-1} + \sum_{i=1}^s y_{(i-1)t+k-s-1} & (s+2 \leq k \leq s+t+1) \\ y_{st+s+t+1} + \sum_{i=1}^s y_{st+i} & (k = s+t+2) \end{cases}$$

によってシンドロームを計算し, 誤り訂正／検出を行う.

# ハミング符号

(7, 4)ハミング符号の作り方の一例:

情報ビット( $x_1, x_2, x_3, x_4$ ) →

検査ビットを

$$\begin{cases} c_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ c_2 = \quad \quad x_2 + x_3 + x_4 \\ c_3 = x_1 + x_2 \quad \quad + x_4 \end{cases}$$

によって計算し,

$w = (x_1, x_2, x_3, x_4, c_1, c_2, c_3)$   
を符号語とする.

# ハミング符号

## 検査方式

受信語

$$y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7)$$



(1)  $y$ に対するシンドローム

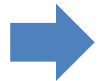
$$\begin{cases} s_1 = y_1 + y_2 + y_3 & + y_5 \\ s_2 = & y_2 + y_3 + y_4 & + y_6 \\ s_3 = y_1 + y_2 & + y_4 & + y_7 \end{cases}$$

(2) シンドロームから次のように誤り訂正

$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	$e_5$	$e_6$	$e_7$	$s_1$	$s_2$	$s_3$
1							1	0	1
	1						1	1	1
		1					1	1	0
			1				0	1	1
				1			1	0	0
					1		0	1	0
						1	0	0	1

# ハミング符号

$$w = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3 + x_4, x_1 + x_2 + x_4)$$



生成行列

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

を用いて  $w = xG$  によって符号化する.

# ハミング符号

$$y = (x_1 + e_1, x_2 + e_2, x_3 + e_3, x_4 + e_4, x_1 + x_2 + x_3 + e_5, x_2 + x_3 + x_4 + e_6, x_1 + x_2 + x_4 + e_7)$$



検査行列

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を用いてシンドロームを算出する

$$s = yH^T = (y_1, \dots, y_7) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

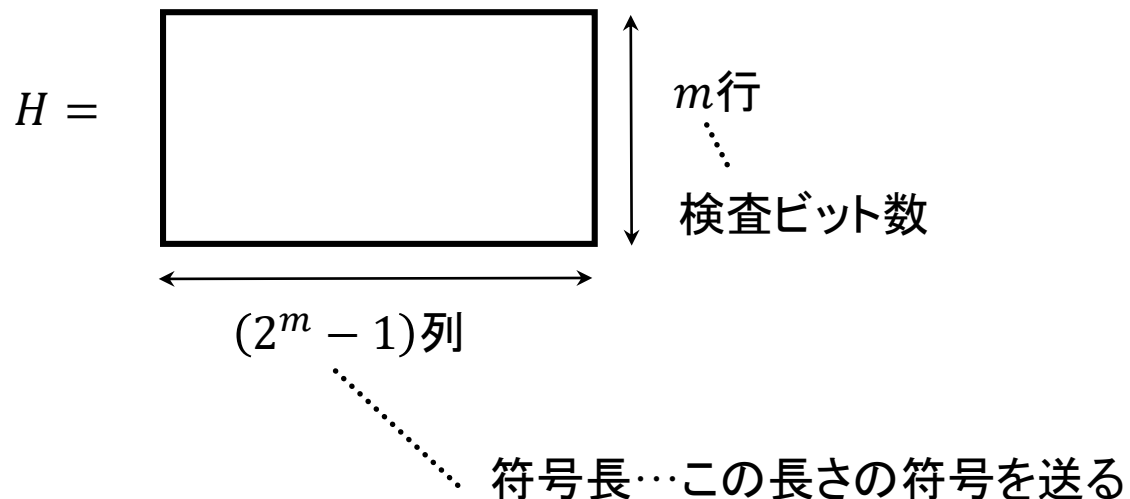
# ハミング符号

単一誤りが訂正できるためには、検査行列の全ての列が互いに異なり、全零でなければよい。（全零の列があると、そこで生じた誤りと、誤りなしの場合が区別できない。）

符号長  $n = 2^m - 1$

情報ビット数  $k = 2^m - 1 - m$

検査ビット数  $m \Rightarrow (2^m - 1, 2^m - 1 - m)$  符号



# 線形符号

- 定義: 検査記号が情報記号の線形式で与えられる.

$$c = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$$

- 2元符号 $C$ が線形符号

$\Leftrightarrow$

$C$ の任意の2つの符号語の和が $C$ の符号語になっている.

# まとめ

- 誤り検出や訂正を行うためにはシンδροームを用いる.
- 単一パリティ検査は最も単純な誤り検出符号.
- 水平垂直パリティ検査符号を用いると, 1誤りが訂正できる.
- ハミング符号は水平垂直パリティ検査符号より効率のよい単一誤り訂正符号である.
- 生成行列と検査行列による符号化とシンδροーム計算