WIKIPEDIA

哈密尔顿–凯莱定理

维基百科，自由的百科全书

在线性代数中，**哈密尔顿–凯莱定理**（英语：Cayley–Hamilton theorem）（以数学家阿瑟·凯莱与威廉·卢云·哈密顿命名）表明每个布于任何交换环上的实或复方阵都满足其特征方程。

明确地说：设A为给定的$n \times n$矩阵，并设I_n为$n \times n$单位矩阵，则A的特征多项式定义为：

$$p(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$$

其中$\det$表行列式函数。哈密尔顿–凯莱定理断言：

$$p(A) = O$$

哈密尔顿–凯莱定理等价于方阵的特征多项式会被其极小多项式整除，这在寻找若尔当标准形时特别有用。

目录

例子

举例明之，考虑下述方阵：

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4) - 2 \cdot 3 = \lambda^2 - 5\lambda - 2$$

此时可以直接验证哈密尔顿–凯莱定理：

$$A^2 - 5A - 2I_2 = O$$

此式可以简化高次幂的运算，关键在于下述关系：

$$A^2 - 5A - 2I_2 = O$$
$$A^2 = 5A + 2I_2$$

例如，为了计算A^4，可以反复利用上述关系式：

$$A^3 = (5A + 2I_2)A = 5A^2 + 2A = 5(5A + 2I_2) + 2A = 27A + 10I_2$$
$$A^4 = A^3 A = (27A + 10I_2)A = 27A^2 + 10A = 27(5A + 2I_2) + 10A$$

$$A^4 = 145A + 54I_2$$

或是，如果要计算A^n，也可以假设：

$$A^n = aA + bI$$

然后，依照前面的特征多项式$\lambda^2 - 5\lambda - 2$之两解λ_1, λ_2，代入后可以得到

$$\lambda_1^n = a\lambda_1 + b$$
$$\lambda_2^n = a\lambda_2 + b$$

然后解方程后求出a, b，便可得A^n。

此外，哈密尔顿–凯莱定理也是计算特征向量的重要工具。

注：一般而言，若$n \times n$矩阵A可逆（即：$\det(A) \neq 0$），则A^{-1}可以写成A的幂次和：特征多项式有如下形式

$$p(\lambda) = \lambda^n - \operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

将方程$p(A) = 0$同乘以A^{-1}，便得到

$$A^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{\det(A)}(A^{n-1} - \operatorname{tr}(A)A^{n-2} + \cdots)$$

定理证明

以下考虑布于域$k = \mathbb{R}, \mathbb{C}$上的矩阵。

哈密尔顿–凯莱定理可以视为线性代数中拉普拉斯展开的推论。拉普拉斯展开可推出若S是$n \times n$矩阵，而$\operatorname{adj}(S)$表其伴随矩阵，则

$$S \operatorname{adj}(S) = \det(S) I_n$$

取$S = tI_n - A$，便得到$(tI_n - A) \operatorname{adj}(tI_n - A) = p_A(t) I_n$。此式对所有$t$皆成立，由于实数或复数域有无穷多元素，上式等式在多项式环$k[t]$内成立。

设$M := k^n$，矩阵A赋予M一个$k[t]$-模结构：$f(t) \cdot m = f(A)m$。考虑$k[t]$-模$M[t] := M \otimes_k k[t]$，我们有$k[t]$-模之间的“求值态射”：

$$e_A : M[t] \to M, \qquad M \otimes t^i \mapsto A^i m$$

固定$m \in M$，对$M[t]$中的等式

$$(tI_n - A) \operatorname{adj}(tI_n - A)\, m = p_A(t) m$$

右侧取e_A后得到$p_A(A)m$，左侧取e_A后得到$(A - A) \cdot (\cdots) = 0$。明所欲证。

一个简单的证明：令：

$$B = \operatorname{adj}(tI_n - A)$$

由:

$$S \operatorname{adj}(S) = \det(S) I_n$$

得：

$$(tI_n - A)B = \det(tI_n - A)I_n = p(t)I_n$$
$$\begin{aligned} p(t)I_n &= (tI_n - A)B \\ &= (tI_n - A)\sum_{i=0}^{n-1} t^i B_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} tI_n \cdot t^i B_i - \sum_{i=0}^{n-1} A \cdot t^i B_i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} t^{i+1} B_i - \sum_{i=0}^{n-1} t^i AB_i \\ &= t^n B_{n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} t^i (B_{i-1} - AB_i) - AB_0 \end{aligned}$$
$$p(t)I_n = \det(tI_n - A)I_n = t^n I_n + t^{n-1} c_{n-1} I_n + \cdots + tc_1 I_n + c_0 I_n$$

因两多项式，他们的对应项系数相等得：

$$B_{n-1} = I_n, \qquad B_{i-1} - AB_i = c_i I_n \quad \text{for } 1 \le i \le n-1, \qquad -AB_0 = c_0 I_n$$

在等式两边t的i次项系数分别乘以A^i, 并将等式左右两边分别相加并合项得：

$$O = A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I_n = p(A)$$

得证。

抽象化与推广

前述证明用到系数在$k[t]$的矩阵的克莱姆法则，事实上该法则可施于任何系数在交换环上的矩阵。借此，哈密尔顿–凯莱定理可以推广到一个交换环R上的任何有限生成自由模M（向量空间是特例）。中山正引理的一种证明就用到这个技巧。

外部链接

- PlanetMath 上的证明 (http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=7308)

取自“https://zh.wikipedia.org/w/index.php?title=凱萊–哈密頓定理&oldid=55027796”