Metody obliczeniowe zadanie nr. 2

Mateusz Miotk
Sylwia Kaczmarczyk
Michał Kulesz

1 Treść zadania

Zadanie 2.7 Dla równania $f(x) = 0$, gdzie $f(x) = 4-2x-\ln x$,wczytać $a, b \in R$ takie, by $0 < a < b$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$ Następnie dopóki "użytkownik się nie znudzi",wczytywać wartości $0 < \varepsilon < 1$ i metodą połowienia na $[a, b]$ przybliżyć z dokładnością ε rozwiązanie tego równania. Rozwiązanie to przybliżyć również metodą Newtona z $x_0 = a$, przy czym x_k będzie dobrym przybliżeniem, gdy $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$.Porównać ilość kroków wykonanych metodą połowienia i metodą Newtona.

2 Podstawa teoretyczna:

2.1 Metoda połowienia przedziału(bisekcji)

Jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i jeśli $f(a) \cdot f(b) < 0$, a więc f zmienia znak w $[a, b]$, to funkcja ta musi mieć zero w (a, b). Jest to konsekwencja własności Darboux funkcji ciągłych. Metoda bisekcji korzysta z tej własności. Jeśli $f(a)f(b) < 0$ to obliczamy $c = \frac{1}{2}(a + b)$ i sprawdzamy, czy $f(a)f(c) < 0$. Jeśli tak, to f ma zero w $[a, c]$; wtedy pod b podstawiamy c. W przeciwnym razie jest $f(c)f(b) < 0$; wtedy pod a podstawiamy c. Szukamy do momentu jeśli $f(c) \leq \varepsilon$.

2.2 Metoda Newtona:

Szukamy we funkcji f rozwiązania równania $f(x) = 0$. Niech r będzie takim zerem, a x jego przybliżeniem. Jeśli f'' istnieje, to na mocy twierdzenia Taylora mamy:
$0 = f(r) = f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \theta(h^2)$ gdzie $h = r - x$.
Jeśli h jest małe (czyli x jest bliskie r), to jest rozsądne pominięcie składnika $\theta(h^2)$ i rozwiązanie otrzymanego równania względem h. Daję to $h = -f(x)/f'(x)$.Jeśli x jest przybliżeniem r, to $x-f(x)/f'(x)$ powinno być lepszym przybliżeniem tego zera. Dlatego z definicji metoda Newtona zaczyna od przybliżenia x_0 zera r i polega na rekurencyjnym stosowaniu wzoru:
$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dla $(x \geq 0)$.

3 Algorytm realizujący zadanie

1.Program wczytuje wartości $a, b \in R$ gdzie $0 < a < b$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$
2.Następnie wczytywana jest wartość ε dopóki użytkownik się "nie znudzi", gdzie $0 < \varepsilon < 1$.
3.W każdym wczytaniu ε liczone jest rozwiązanie za pomocą algorytmu metody bisekcji oraz metody Newtona.

3.1 Algorytm bisekcji

Wykorzystany jest dany kod:

```
void Bisection(double a, double b, double epsilon)
{
    unsigned int M = 0;
    double u, v, e, c, w;
    u = f(a);
    v = f(b);
    e = b - a;
    printf("METODA BISEKCJI: \n");
    while (sgn(u) != sgn(v)) {
        M++;
        e /= 2;
        c = a + e;
        w = f(c);
        printf("KROK %d: f(%lf)==%lf\n", M, c, w);
        if (fabs(w) < epsilon)
            break;
        if (sgn(w) != sgn(u)) {
            b = c;
            v = w;
        } else {
            a = c;
            u = w;
        }
    }
    printf("Przyblizone rozwiazanie: f(%lf)==%lf\n", c, w);
    printf("Ilosc krokow: %d\n", M);
}
```

Przybliżonym rozwiązaniem jest wartość c.
M oznacza ilość wykonanych kroków.

3.2 Algorytm metody Newtona

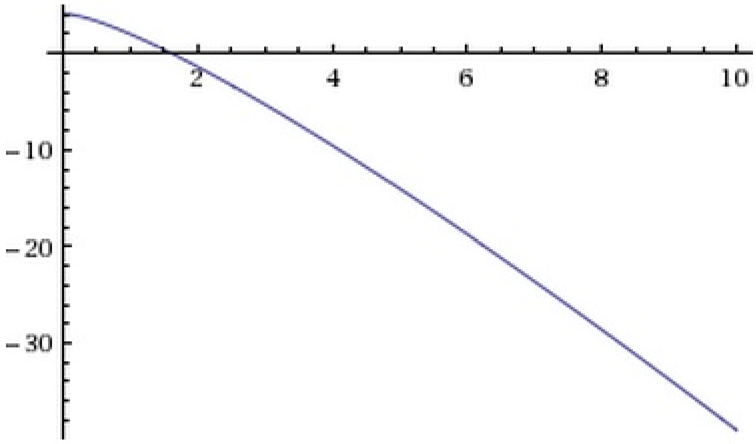
Wykorzystany jest dany kod:

```
void Newton(double x_0, double epsilon)
{
    unsigned M = 0;
    double v = f(x_0);
     printf("METODA NEWTONA: \n");
    double x_1;
    if (fabs(v) < epsilon)
        return;
    while (1) {
        M++;
        x_1 = x_0 - v / f_prim(x_0);
        v = f(x_1);
        printf("KROK %d: f(%lf)==%lf\n", M, x_1, v);
        if (fabs(x_1 - x_0) <= epsilon) {
            break;
        }
        x_0 = x_1;
    }
    printf("Przyblizone rozwiazanie: f(%lf)==%lf\n", x_1, v);
    printf("Ilosc krokow: %d\n", M);
}
```

M oznacza ilość wykonanych kroków.

3.3 Przykładowe rozwiązanie

Wykres funkcji w przedziale $[0, 10]$



1.Dla danych:
$a = 1$
$b = 2$
$\varepsilon = 0.5$
Otrzymujemy :
METODA BISEKCJI:
f(1.500000)==0.594535
f(1.750000)==-0.059616
Przyblizone rozwiazanie: f(1.750000)==-0.059616
Ilosc krokow: 2
METODA NEWTONA:
f(1.666667)==0.155841
f(1.726606)==0.000632
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726606)==0.000632
2.Dla danych:
a, b - takie same jak wyżej
$\varepsilon = 0.01$
Otrzymujemy :
METODA BISEKCJI:
f(1.500000)==0.594535
f(1.750000)==-0.059616
f(1.625000)==0.264492
f(1.687500)==0.101752
f(1.718750)==0.020903
f(1.734375)==-0.019397
f(1.726562)==0.000743
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726562)==0.000743

Ilosc krokow: 7
METODA NEWTONA:
f(1.666667)==0.155841
f(1.726606)==0.000632
f(1.726850)==0.000000
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726850)==0.000000
Ilosc krokow: 3

4 Opis Programu

4.1 Opis struktur danych oraz funkcji w programie

4.2 Opis wejścia-wyjścia

4.3 Treść programu

```
/*Autorzy:
 * Mateusz Miotk
 * Sylwia Kaczmarczyk
 * Michal Kulesz
 * Opis:Program po wczytaniu wartosc a oraz b gdzie 0<a<b
 * oraz podania do "znudzenia" wartosci epsilon
 * bedzie liczyc miejsce zerowe funkcji f(x)=4-2*x-ln x
 * metoda polowienia oraz metoda Newtona.
/*******************/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/*Nazwa funkcji:sgn(double x)
 * Opis wejscia:liczba x zmiennoprzecinkowa
 * Opis wyjscia:-1 jesli x<0 0 jesli x=0 1 jesli x>0
/***************/
int sgn(double x)
{
    if (x < 0)
        return -1;
    else if (x > 0)
        return 1;
    else
        return 0;
}
```

```
/*Funkcja f(x)=4-2*x-ln x*/
double f(double x)
{
    return 4 - 2 * x - log(x);
}

/*Pochodna funkcji f czyli f'(x)=-1/x - 2*/
double f_prim(double x)
{
    return -1 / x - 2;
}

/*Nazwa funkcji:Bisection(double a,double b, double epsilon)
 * Opis wejscia:liczby a,b zmiennoprzecinkowe
 * okreslajacy badany przedzial
 * Opis funkcji:Funkcja szuka miejsca zerowego metoda bisekcji
 * Opis wyjscia:Kroki i kolejne etapy metody bisekcji
 * Ilosc krokow oraz przyblizone rozwiazanie
/***************/
void Bisection(double a, double b, double epsilon)
{
    unsigned int M = 0;
    double u, v, e, c, w;
    u = f(a);
    v = f(b);
    e = b - a;
    //printf("U==%lf V==%lf e==%lf\n",u,v,e);
    printf("METODA BISEKCJI: \n");
    while (sgn(u) != sgn(v)) {
         M++;
         e /= 2;
         c = a + e;
         w = f(c);
         printf("KROK %d:f(%lf)==%lf\n", M, c, w);
         if (fabs(w) < epsilon)
              break;
         //printf("f(%lf)==%lf\n",c,w);
         if (sgn(w) != sgn(u)) {
              b = c;
              v = w;
         } else {
              a = c;
              u = w;
```

```
        }
        //printf("U==%lf V==%lf e==%lf\n",u,v,e);
    }
    printf("Przyblizone rozwiazanie: f(%lf)==%lf\n", c, w);
    printf("Ilosc krokow: %d\n", M);
}

/*Nazwa funkcji:Bisection(double a,double b, double epsilon)
 * Opis wejscia:liczba x_0 zmiennoprzecinkowa oraz epsilon
 * zmiennoprzecinkowe
 * Opis funkcji:Funkcja szuka miejsca zerowego metoda Newtona
 * Opis wyjscia:Kroki i kolejne etapy metody Newtona
 * Ilosc krokow oraz przyblizone rozwiazanie
/***************/
void Newton(double x_0, double epsilon)
{
    unsigned M = 0;
    double v = f(x_0);
    //printf("f(%lf)==%lf\n",x_0,v);
    printf("METODA NEWTONA: \n");
    double x_1;
    if (fabs(v) < epsilon)
        return;
    while (1) {
        M++;
        x_1 = x_0 - v / f_prim(x_0);
        v = f(x_1);
        printf("KROK %d:f(%lf)==%lf\n", M, x_1, v);
        if (fabs(x_1 - x_0) <= epsilon) {
            break;
        }
        x_0 = x_1;
    }
    printf("Przyblizone rozwiazanie: f(%lf)==%lf\n", x_1, v);
    printf("Ilosc krokow: %d\n", M);
}

/*Nazwa funkcji:pobranie_danych
 * Opis wejscia:liczby a,b zmiennoprzecinkowe
 * Opis funkcji:Funkcja wczytuje wartosci a,b i pilnuje poprawnosci
 * danych
 * Opis wyjscia:Wczytane wartosci a i b.
/***************/
```

```
void pobranie_danych(double *a, double *b)
{
    printf("Podaj␣a␣i␣b␣takie␣ze␣f(a)*f(b)<0\n");
    while (1) {
        printf("Podaj␣a:␣a>0␣");
        scanf("%lf", a);
        while (1) {
            if ((*a) > 0.0) {
                break;
            } else {
                printf
            ("Podales␣zla␣wartosc␣a!␣a␣musi␣byc␣wieksze␣od␣0\n␣Podaj␣a:␣");
                scanf("%lf", a);
            }
        }
        printf("Podaj␣b:␣b>a␣");
        scanf("%lf", b);
        while (1) {
            if ((*b) > *a) {
                break;
            } else {
                printf
            ("Podales␣zla␣wartosc␣b!␣b␣musi␣byc␣wieksze␣od␣a\n␣Podaj␣b:␣");
                scanf("%lf", b);
            }
        }
        if (sgn(f(*a)) != sgn(f(*b))) {
            break;
        } else {
            printf
        ("Podane␣a,b␣nie␣spelnia␣wymagania:␣f(a)*f(b)<0␣Podaj␣inne!\n");
        }
    }
}

void komunikat()
{
    printf
("Program␣liczy␣miejsca␣zerowe␣funkcji␣f(x)=4-2*x-ln␣x\nmetoda␣polowienia␣ora
}

void policz(double a, double b)
{
```

```c
    double epsilon;
    printf("Podaj epsilon. 0<epsilon<1 aby zakonczyc:Ctrl+d :");
    while (scanf("%lf", &epsilon) != EOF) {
        if (epsilon > 0 && epsilon < 1) {
            Bisection(a, b, epsilon);
            Newton(a, epsilon);
            printf
                ("Podaj nastepna wartosc epsilon. Aby zakonczyc: Ctrl+d :");
        } else {
            printf("Zla wartosc epsilon! Podaj inna: ");
        }
    }
}

int main()
{
    double a, b;
    komunikat();
    pobranie_danych(&a, &b);
    policz(a, b);
    return EXIT_SUCCESS;
}
```

4.4 Przykładowe wyniki działania programu

```
mmiotk@sigma:~/Metody/Zad2$ ./a.out
Program liczy miejsca zerowe funkcji f(x)=4-2*x-ln x
metoda polowienia oraz metoda Newtona
Podaj a i b takie ze f(a)*f(b)<0
Podaj a: a>0 1
Podaj b: b>a 2
Podaj epsilon. 0<epsilon<1 aby zakonczyc:Ctrl+d :0.5
METODA BISEKCJI:
KROK 1:f(1.500000)==0.594535
KROK 2:f(1.750000)==-0.059616
Przyblizone rozwiazanie: f(1.750000)==-0.059616
Ilosc krokow: 2
METODA NEWTONA:
KROK 1:f(1.666667)==0.155841
KROK 2:f(1.726606)==0.000632
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726606)==0.000632
Ilosc krokow: 2
Podaj nastepna wartosc epsilon. Aby zakonczyc: Ctrl+d :0.01
METODA BISEKCJI:
KROK 1:f(1.500000)==0.594535
KROK 2:f(1.750000)==-0.059616
KROK 3:f(1.625000)==0.264492
KROK 4:f(1.687500)==0.101752
KROK 5:f(1.718750)==0.020903
KROK 6:f(1.734375)==-0.019397
KROK 7:f(1.726562)==0.000743
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726562)==0.000743
Ilosc krokow: 7
METODA NEWTONA:
KROK 1:f(1.666667)==0.155841
KROK 2:f(1.726606)==0.000632
KROK 3:f(1.726850)==0.000000
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726850)==0.000000
Ilosc krokow: 3
```

```
mmiotk@sigma:~/Metody/Zad2$ ./a.out
Program liczy miejsca zerowe funkcji f(x)=4-2*x-ln x
metoda polowienia oraz metoda Newtona
Podaj a i b takie ze f(a)*f(b)<0
Podaj a: a>0 -5
Podales zla wartosc a! a musi byc wieksze od 0
 Podaj a: 0
Podales zla wartosc a! a musi byc wieksze od 0
 Podaj a: 1
Podaj b: b>a 0
Podales zla wartosc b! b musi byc wieksze od a
 Podaj b: -5
Podales zla wartosc b! b musi byc wieksze od a
 Podaj b: 2
Podaj epsilon. 0<epsilon<1 aby zakonczyc:Ctrl+d :2
Zla wartosc epsilon! Podaj inna: -1
Zla wartosc epsilon! Podaj inna: 0
Zla wartosc epsilon! Podaj inna: 1
Zla wartosc epsilon! Podaj inna: 0.0001
METODA BISEKCJI:
KROK 1:f(1.500000)==0.594535
KROK 2:f(1.750000)==-0.059616
KROK 3:f(1.625000)==0.264492
KROK 4:f(1.687500)==0.101752
KROK 5:f(1.718750)==0.020903
KROK 6:f(1.734375)==-0.019397
KROK 7:f(1.726562)==0.000743
KROK 8:f(1.730469)==-0.009330
KROK 9:f(1.728516)==-0.004294
KROK 10:f(1.727539)==-0.001776
KROK 11:f(1.727051)==-0.000517
KROK 12:f(1.726807)==0.000113
KROK 13:f(1.726929)==-0.000202
KROK 14:f(1.726868)==-0.000045
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726868)==-0.000045
Ilosc krokow: 14
METODA NEWTONA:
KROK 1:f(1.666667)==0.155841
KROK 2:f(1.726606)==0.000632
KROK 3:f(1.726850)==0.000000
KROK 4:f(1.726850)==0.000000
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726850)==0.000000
Ilosc krokow: 4
```