Metody Obliczeniowe

Mateusz Miotk
Michał Kulesz
Sylwia Kaczmarczyk

1 Treść zadania

Zadanie 1.14: Ustalić naturalną n_{max}. Wczytać $n \in \{1, 2, ..., n_{max}\}$, różne węzły $x_1.x_2, ..., x_n$ oraz dowolne wartości $A_1, A_2, ..., A_n$ i $B_1, B_2, ..., B_n$. Wyznaczyć w postaci Newtona wielomian interpolacyjny Hermite'a $W = W(x)$ stopnia co najwyżej $(2n-1)$ spełniający warunki: $W(x_i) = A_i$ oraz $W'(x_i) = B_i$ dla $i = 1, 2, ..., n$. Wynik przedstawić również w postaci ogólnej.

2 Podstawa teoretyczna

2.1 Wielomian w postaci Newtona:

Wielomian $p_k(x)$ można przedstawić w postaci:
$p_k(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i \prod_{j=0}^{i-1}(x - x_j)$ Współczynniki c_i to ilorazy różnicowe.

2.2 Definicja ilorazów różnicowych

Ogólnie liczbę c_i definiujemy w następujący sposób:
$c_i = f[x_0, ..., x_i] = \frac{f[x_1,x_2,...,x_{i-1}]-f[x_0,x_1,...,x_{i-1}]}{x_i-x_0}$ Jednak w naszych rozważaniach będziemy używać wzoru rekurencyjnego:
$c_{ij} = \frac{c_{i+1,j-1}-c_{i,j-1}}{x_{i+j}-x_i}$
Jeśli jednak wartość c_i będzie wynosić $\frac{0}{0}$ to wpisujemy zamiast tego wartość pochodnej z x_i.

3 Algorytm, który ma realizować zadanie

3.1 Pobieranie danych.

Na początku program zapyta nas o ilość RÓŻNYCH węzłów jakie chcemy wprowadzić do programu.Zostaną one wprowadzone do tablicy x[].
Następnie program zażąda od nas podania wartości funkcji w tych punktach. Zostaną one dodane do tablicy A[]. W tablicy A[] każda wartość zostanie podwójnie zapisanie w celu łatwiejszego policzenia tablicy różnic dzielonych.
Następnie program zażąda podania wartości pochodnych w danych węzłach. Zapisane one będą do tablicy B[].

3.2 Liczenie ilorazów różnicowych.

W tym kroku wykorzystamy tablicę D[], która będzie miała tyle samo wyrazów co tablica A[].Wykorzystujemy to algorytm ,który wykorzystuje wzór rekurencyjny podany powyżej a w wyniku otrzymamy wyłącznie jeden wiersz tablicę,który odpowiada wartością $c-_i$ wielomianu w postaci Newtona.
Jeżeli w wyniku obliczeń program napotka na działanie $\frac{0}{0}$ to w tym miejscu zapisywana jest wartość pochodnej w tym punkcie.

3.3 Wypisanie wielomianu w postaci Newtona.

Wykorzystywany jest wzór powyżej(Patrz 2.1).

3.4 Wypisanie wielomianu w postaci ogólnej.

4 Przykładowe rozwiązanie dla małych danych

Dla danych:
$p(1) = 2$
$p'(1) = 3$
$p(2) = 6$
$p'(2) = 7$
Tworzymy tabelę ilorazów różnicowych:
1 2|<u>**3**</u> 1 2
1 2|4 3
2 6|<u>**7**</u>
2 6|
Pogrubione i podkreślone wyrazy tablicy to wpisane wartości pochodnej w punkcie.
Wynika to, ponieważ:
$f[x_0, x_0] = \frac{f[x_0]-f[x_0]}{x_0-x_0} = \frac{2-2}{1-1} = \frac{0}{0} = f'(1) = 3$
$f[x_1, x_1] = \frac{f[x_1]-f[x_1]}{x_1-x_1} = \frac{6-6}{2-2} = \frac{0}{0} = f'(2) = 7$

Jest to pełna tabela. Program zapisze wyłącznie wiersz:
2 3 1 2
co jest równoznaczne ze wspólczynnikami wielomianu w postaci Newtona.
Co daje wielomian postaci:
$p(x) = 2 + 3(x-1) + (x-1)^2 + 2(x-1)^2(x-2)$ - postać Newtona
lub
$p(x) = 2x^3 - 7x^2 + 11x - 4$ w postaci ogólnej
$p'(x) = 6x^2 - 14x + 11$
Sprawdzamy wyniki:
$p(1) = 2 + 3(1-1) + (1-1)^2 + 2(1-1)^2(1-2) = 2$
$p'(1) = 6 - 14 + 11 = 3$
$p(2) = 2 + 3(2-1) + (2-1)^2 + 2(2-1)^2(2-2) = 6$
$p'(x) = 6 * 4 - 14 * 2 + 11 = 24 - 28 + 11 = -4 + 11 = 7$