Metody obliczeniowe zadanie nr. 2

Mateusz Miotk
Sylwia Kaczmarczyk
Michał Kulesz

1 Treść zadania

Zadanie 2.7 Dla równania $f(x) = 0$, gdzie $f(x) = 4-2x-\ln x$,wczytać $a, b \in R$ takie, by $0 < a < b$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$ Następnie dopóki "użytkownik się nie znudzi",wczytywać wartości $0 < \varepsilon < 1$ i metodą połowienia na $[a, b]$ przybliżyć z dokładnością ε rozwiązanie tego równania. Rozwiązanie to przybliżyć również metodą Newtona z $x_0 = a$, przy czym x_k będzie dobrym przybliżeniem, gdy $|x_k - x_(k-1) \leq \varepsilon$.Porównać ilość kroków wykonanych metodą połowienia i metodą Newtona.

2 Podstawa teoretyczna:

2.1 Metoda połowienia przedziału(bisekcji)

Jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i jeśli $f(a) \cdot f(b) < 0$, a więc f zmienia znak w $[a, b]$, to funkcja ta musi mieć zero w (a, b). Jest to konsekwencja własności Darboux funkcji ciągłych. Metoda bisekcji korzysta z tej własności. Jeśli $f(a)f(b) < 0$ to obliczamy $c = \frac{1}{2}(a + b)$ i sprawdzamy, czy $f(a)f(c) < 0$. Jeśli tak, to f ma zero w $[a, c]$; wtedy pod b podstawiamy c. W przeciwnym razie jest $f(c)f(b) < 0$; wtedy pod a podstawiamy c. Szukamy do momentu jeśli $f(c) = 0$

2.2 Metoda Newtona:

Szukamy we funkcji f rozwiązania równania $f(x) = 0$. Niech r będzie takim zerem, a x jego przybliżeniem. Jeśli f'' istnieje, to na mocy twierdzenia Taylora mamy:
$0 = f(r) = f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \theta(h^2)$ gdzie $h = r - x$.
Jeśli h jest małe (czyli x jest bliskie r), to jest rozsądne pominięcie składnika $\theta(h^2)$ i rozwiązanie otrzymanego równania względem h. Daję to $h = -f(x)/f'(x)$.Jeśli x jest przybliżeniem r, to $x-f(x)/f'(x)$ powinno być lepszym przybliżeniem tego zera. Dlatego z definicji metoda Newtona zaczyna od przybliżenia x_0 zera r i polega na rekurencyjnym stosowaniu wzoru:
$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dla $(x \geq 0)$.