Metody obliczeniowe zadanie nr. 2

Mateusz Miotk
Sylwia Kaczmarczyk
Michał Kulesz

1 Treść zadania

Zadanie 2.7 Dla równania $f(x) = 0$, gdzie $f(x) = 4-2x-\ln x$,wczytać $a, b \in R$ takie, by $0 < a < b$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$ Następnie dopóki "użytkownik się nie znudzi",wczytywać wartości $0 < \varepsilon < 1$ i metodą połowienia na $[a, b]$ przybliżyć z dokładnością ε rozwiązanie tego równania. Rozwiązanie to przybliżyć również metodą Newtona z $x_0 = a$, przy czym x_k będzie dobrym przybliżeniem, gdy $|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon$.Porównać ilość kroków wykonanych metodą połowienia i metodą Newtona.

2 Podstawa teoretyczna:

2.1 Metoda połowienia przedziału(bisekcji)

Jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i jeśli $f(a) \cdot f(b) < 0$, a więc f zmienia znak w $[a, b]$, to funkcja ta musi mieć zero w (a, b). Jest to konsekwencja własności Darboux funkcji ciągłych. Metoda bisekcji korzysta z tej własności. Jeśli $f(a)f(b) < 0$ to obliczamy $c = \frac{1}{2}(a + b)$ i sprawdzamy, czy $f(a)f(c) < 0$. Jeśli tak, to f ma zero w $[a, c]$; wtedy pod b podstawiamy c. W przeciwnym razie jest $f(c)f(b) < 0$; wtedy pod a podstawiamy c. Szukamy do momentu jeśli $f(c) \leq \varepsilon$.

2.2 Metoda Newtona:

Szukamy we funkcji f rozwiązania równania $f(x) = 0$. Niech r będzie takim zerem, a x jego przybliżeniem. Jeśli f'' istnieje, to na mocy twierdzenia Taylora mamy:
$0 = f(r) = f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \theta(h^2)$ gdzie $h = r - x$.
Jeśli h jest małe (czyli x jest bliskie r), to jest rozsądne pominięcie składnika $\theta(h^2)$ i rozwiązanie otrzymanego równania względem h. Daję to $h = -f(x)/f'(x)$.Jeśli x jest przybliżeniem r, to $x-f(x)/f'(x)$ powinno być lepszym przybliżeniem tego zera. Dlatego z definicji metoda Newtona zaczyna od przybliżenia x_0 zera r i polega na rekurencyjnym stosowaniu wzoru:
$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dla $(x \geq 0)$.

3 Algorytm realizujący zadanie

1.Program wczytuje wartości $a, b \in R$ gdzie $0 < a < b$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$
2.Następnie wczytywana jest wartość ε dopóki użytkownik się "nie znudzi", gdzie $0 < \varepsilon < 1$.
3.W każdym wczytaniu ε liczone jest rozwiązanie za pomocą algorytmu metody bisekcji oraz metody Newtona.

3.1 Algorytm bisekcji

Wykorzystany jest dany kod:

```
void Bisection(double a, double b, double epsilon)
{
    unsigned int M = 0;
    double u, v, e, c, w;
    u = f(a);
    v = f(b);
    e = b - a;
    printf("METODA BISEKCJI: \n");
    while (sgn(u) != sgn(v)) {
        M++;
        e /= 2;
        c = a + e;
        w = f(c);
        //printf("KROK %d:f(%lf)==%lf\n", M, c, w);
        if (fabs(w) < epsilon)
            break;
        if (sgn(w) != sgn(u)) {
            b = c;
            v = w;
        } else {
            a = c;
            u = w;
        }
    }
    printf("Przyblizone rozwiazanie: x==%lf\n", c);
    printf("Ilosc krokow: %d\n", M);
}
```

Przybliżonym rozwiązaniem jest wartość c.
M oznacza ilość wykonanych kroków.

3.2 Algorytm metody Newtona

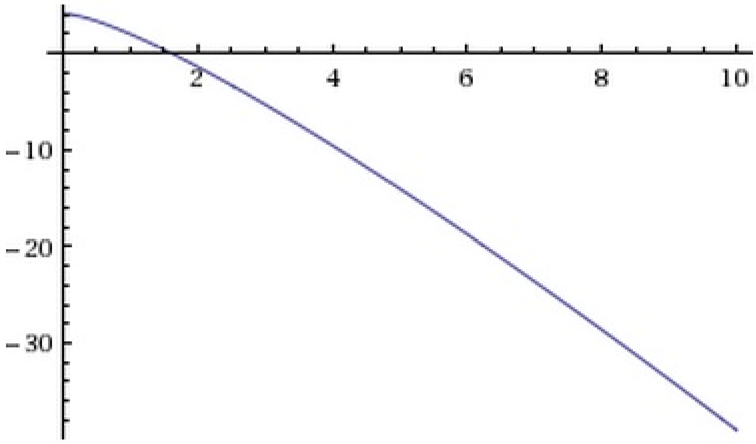
Wykorzystany jest dany kod:

```
void Newton(double x_0, double epsilon)
{
    unsigned M = 0;
    double v = f(x_0);
     printf("METODA NEWTONA: \n");
    double x_1;
    if (fabs(v) < epsilon)
        return;
    while (1) {
        M++;
        x_1 = x_0 - v / f_prim(x_0);
        v = f(x_1);
        //printf("KROK %d:f(%lf)==%lf\n", M, x_1, v);
        if (fabs(x_1 - x_0) <= epsilon) {
            break;
        }
        x_0 = x_1;
    }
    printf("Przyblizone rozwiazanie: x==%lf\n", x_1);
    printf("Ilosc krokow: %d\n", M);
}
```

M oznacza ilość wykonanych kroków.

3.3 Przykładowe rozwiązanie

Wykres funkcji w przedziale $[0, 10]$



1.Dla danych:
$a = 1$
$b = 2$
$\varepsilon = 0.5$
Otrzymujemy :
METODA BISEKCJI:
f(1.500000)==0.594535
f(1.750000)==-0.059616
Przyblizone rozwiazanie: f(1.750000)==-0.059616
Ilosc krokow: 2
METODA NEWTONA:
f(1.666667)==0.155841
f(1.726606)==0.000632
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726606)==0.000632
2.Dla danych:
a, b - takie same jak wyżej
$\varepsilon = 0.01$
Otrzymujemy :
METODA BISEKCJI:
f(1.500000)==0.594535
f(1.750000)==-0.059616
f(1.625000)==0.264492
f(1.687500)==0.101752
f(1.718750)==0.020903
f(1.734375)==-0.019397
f(1.726562)==0.000743
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726562)==0.000743

Ilosc krokow: 7
METODA NEWTONA:
f(1.666667)==0.155841
f(1.726606)==0.000632
f(1.726850)==0.000000
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726850)==0.000000
Ilosc krokow: 3

4 Opis Programu

4.1 Opis struktur danych oraz funkcji w programie

Program opiera się w głównej mierze z liczb zmiennoprzeciwnkowych:
x określa, czy dana liczba jest większa, równa lub mniejsza od zera
a określa dolny przedział przeszukiwań drogą bisekcji
b określa górny przedział przeszukiwań drogą bisekcji
epsilon określa dokładność przeszukiwań miejsca zerowego
Najważniejsze funkcje użyte w programie to:
1. Wczytywanie zmiennych a i b
2. Sprawdzenie, czy a i b są prawidłowe
3. Wczytywanie epsilon oraz sprawdzanie czy jest prawidłowy
4. Wypisanie miejsca zerowego metodą bisekcji
5. Wypisanie liczby kroków do znalezienia miejsca zerowego
6. Wypisanie miejsca zerowego metodą Newtona
7. Wypisanie liczby kroków do znalezienia miejsca zerowego

4.2 Opis wejścia-wyjścia

Program na początku chce otrzymać zmienne a i b, które muszą spełniać warunkami opisanymi w punkcie 3.
Program będzie sprawdzał, czy podane wartości spełniają warunek. Jeżeli nie, to wyświetli odpowiedni komunikat.
Następnie program chce otrzymać wartość *epsilon*, który tak jak powyżej musi spełnić warunek. W prciwnym wypadku wyświetli odpowiedni komunikat.
Potem program wypisze miejsce zerowe znalezione metodą bisekcji i Newtona, po każdym znalezionym rozwiązaniu poda ilość kroków potrzebne do znalezienia miejsca zerowego.
Po tym wszystkim użytkownik może jeszcze raz podać liczbe *epsilon*, dopóki mu się nie znudzi.

4.3 Treść programu

```
/*Autorzy:
 * Mateusz Miotk
 * Sylwia Kaczmarczyk
 * Michal Kulesz
 * Opis:Program po wczytaniu wartosc a oraz b gdzie 0<a<b
 * oraz podania do "znudzenia" wartosci epsilon
 * bedzie liczyc miejsce zerowe funkcji f(x)=4-2*x-ln x
 * metoda polowienia oraz metoda Newtona.
/*******************/

#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>

/*Nazwa funkcji:sgn(double x)
 * Opis wejscia:liczba x zmiennoprzecinkowa
 * Opis wyjscia:-1 jesli x<0 0 jesli x=0 1 jesli x>0
/***************/
int sgn(double x)
{
    if (x < 0)
        return -1;
    else if (x > 0)
        return 1;
    else
        return 0;
}

/*Funkcja f(x)=4-2*x-ln x*/
double f(double x)
{
    return 4 - 2 * x - log(x);
}

/*Pochodna funkcji f czyli f'(x)=-1/x - 2*/
double f_prim(double x)
{
    return -1 / x - 2;
}

/*Nazwa funkcji:Bisection(double a,double b, double epsilon)
 * Opis wejscia:liczby a,b zmiennoprzecinkowe
 * okreslajacy badany przedzial
```

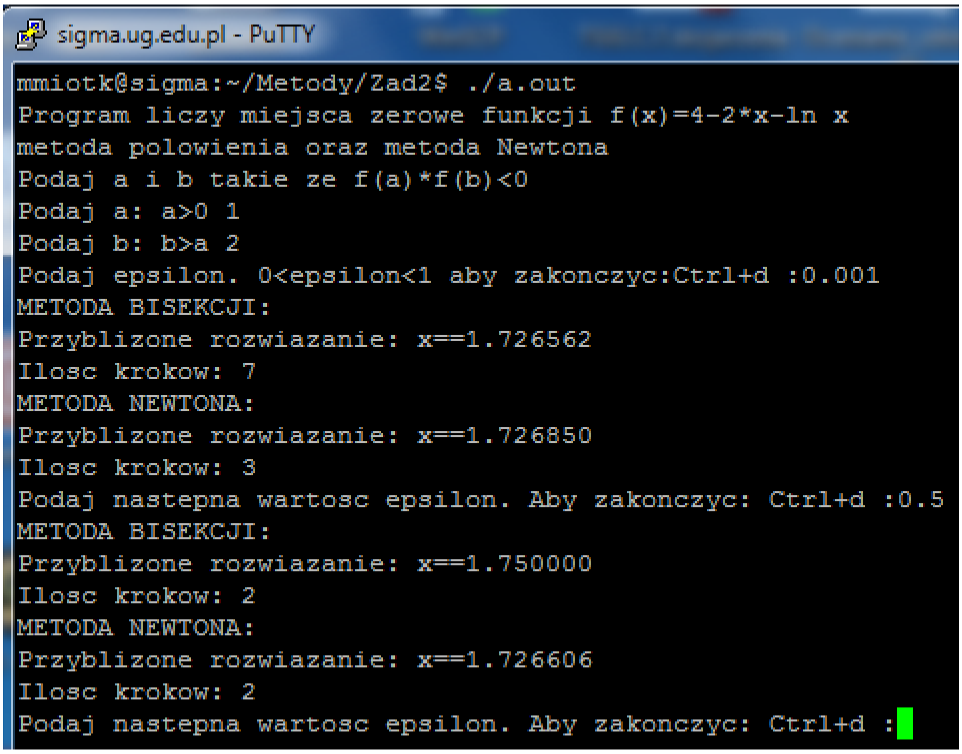
```
 * Opis funkcji:Funkcja szuka miejsca zerowego metoda bisekcji
 * Opis wyjscia:Kroki i kolejne etapy metody bisekcji
 * Ilosc krokow oraz przyblizone rozwiazanie
/***************/
void Bisection(double a, double b, double epsilon)
{
    unsigned int M = 0;
    double u, v, e, c, w;
    u = f(a);
    v = f(b);
    e = b - a;
    //printf("U==%lf V==%lf e==%lf\n",u,v,e);
    printf("METODA BISEKCJI: \n");
    while (sgn(u) != sgn(v)) {
        M++;
        e /= 2;
        c = a + e;
        w = f(c);
        //printf("KROK %d:f(%lf)==%lf\n", M, c, w);
        if (fabs(w) < epsilon)
            break;
        //printf("f(%lf)==%lf\n",c,w);
        if (sgn(w) != sgn(u)) {
            b = c;
            v = w;
        } else {
            a = c;
            u = w;
        }
        //printf("U==%lf V==%lf e==%lf\n",u,v,e);
    }
    printf("Przyblizone rozwiazanie: x==%lf\n", c);
    printf("Ilosc krokow: %d\n", M);
}

/*Nazwa funkcji:Newton(double x_0, double epsilon)
 * Opis wejscia:liczba x_0 zmiennoprzecinkowa oraz epsilon
 * zmiennoprzecinkowe
 * Opis funkcji:Funkcja szuka miejsca zerowego metoda Newtona
 * Opis wyjscia:Kroki i kolejne etapy metody Newtona
 * Ilosc krokow oraz przyblizone rozwiazanie
/***************/
void Newton(double x_0, double epsilon)
```

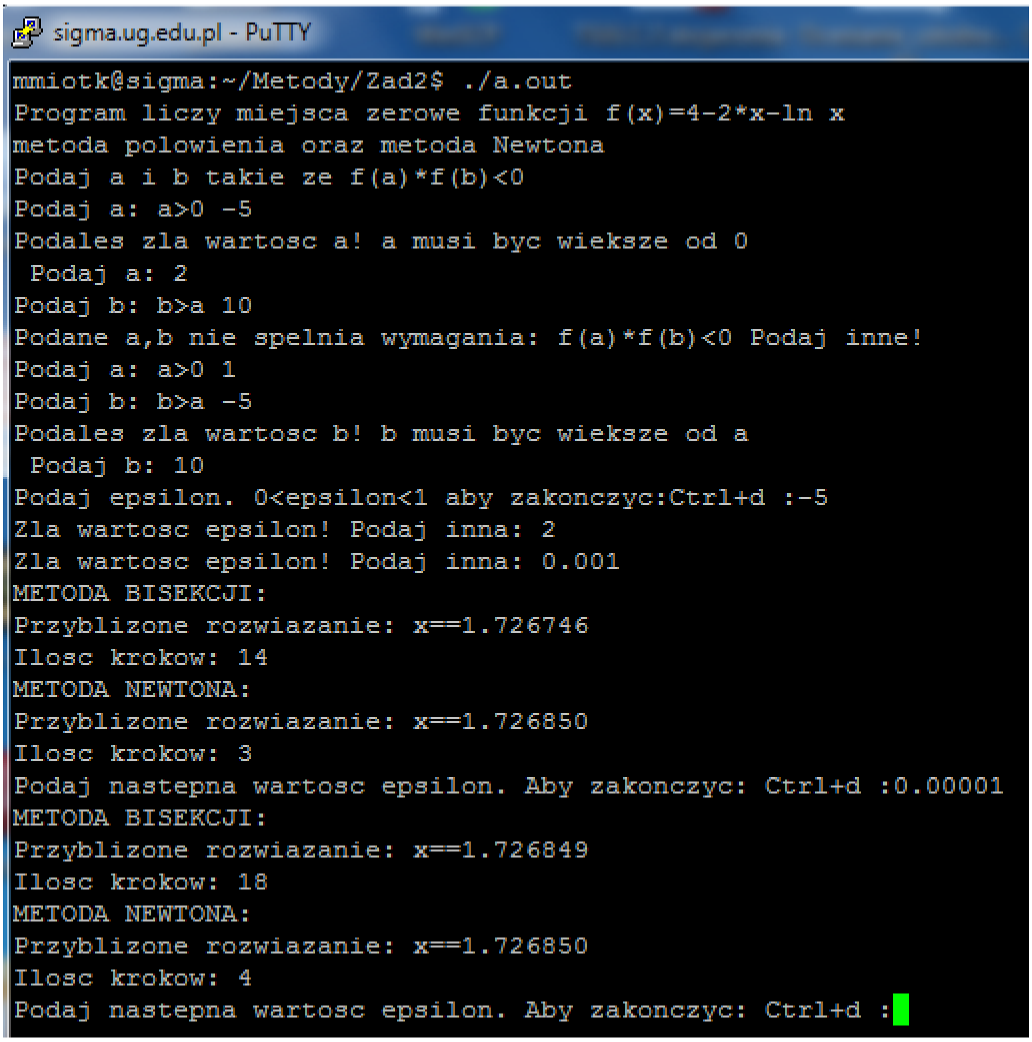
```
{
    unsigned M = 0;
    double v = f(x_0);
    //printf("f(%lf)==%lf\n",x_0,v);
    printf("METODA NEWTONA: \n");
    double x_1;
    if (fabs(v) < epsilon)
        return;
    while (1) {
        M++;
        x_1 = x_0 - v / f_prim(x_0);
        v = f(x_1);
//          printf("KROK %d:f(%lf)==%lf\n", M, x_1, v);
        if (fabs(x_1 - x_0) <= epsilon) {
            break;
        }
        x_0 = x_1;
    }
    printf("Przyblizone rozwiazanie: x==%lf\n", x_1);
    printf("Ilosc krokow: %d\n", M);
}

/*Nazwa funkcji:pobranie_danych
 * Opis wejscia:liczby a,b zmiennoprzecinkowe
 * Opis funkcji:Funkcja wczytuje wartosci a,b i pilnuje poprawnosci
 * danych
 * Opis wyjscia:Wczytane wartosci a i b.
/***************/
void pobranie_danych(double *a, double *b)
{
    printf("Podaj a i b takie ze f(a)*f(b)<0\n");
    while (1) {
        printf("Podaj a: a>0 ");
        scanf("%lf", a);
        while (1) {
            if ((*a) > 0.0) {
                break;
            } else {
                printf
            ("Podales zla wartosc a! a musi byc wieksze od 0\n Podaj a: ");
                scanf("%lf", a);
            }
        }
```

```
        printf("Podaj␣b:␣b>a␣");
        scanf("%lf", b);
        while (1) {
            if ((*b) > *a) {
                break;
            } else {
                printf
            ("Podales␣zla␣wartosc␣b!␣b␣musi␣byc␣wieksze␣od␣a\n␣Podaj␣b:␣");
                scanf("%lf", b);
            }
        }
        if (sgn(f(*a)) != sgn(f(*b))) {
            break;
        } else {
            printf
        ("Podane␣a,b␣nie␣spelnia␣wymagania:␣f(a)*f(b)<0␣Podaj␣inne!\n");
        }
    }
}

void komunikat()
{
    printf
("Program␣liczy␣miejsca␣zerowe␣funkcji␣f(x)=4-2*x-ln␣x\nmetoda␣polowienia␣ora
}

void policz(double a, double b)
{
    double epsilon;
    printf("Podaj␣epsilon.␣0<epsilon<1␣aby␣zakonczyc:Ctrl+d␣:");
    while (scanf("%lf", &epsilon) != EOF) {
        if (epsilon > 0 && epsilon < 1) {
            Bisection(a, b, epsilon);
            Newton(a, epsilon);
            printf
                ("Podaj␣nastepna␣wartosc␣epsilon.␣Aby␣zakonczyc:␣Ctrl+d␣:");
        } else {
            printf("Zla␣wartosc␣epsilon!␣Podaj␣inna:␣");
        }
    }
}

int main()
```

```
{
    double a, b;
    komunikat();
    pobranie_danych(&a, &b);
    policz(a, b);
    return EXIT_SUCCESS;
}
```

4.4 Przykładowe wyniki działania programu





sigma.ug.edu.pl - PuTTY

```
mmiotk@sigma:~/Metody/Zad2$ ./a.out
Program liczy miejsca zerowe funkcji f(x)=4-2*x-ln x
metoda polowienia oraz metoda Newtona
Podaj a i b takie ze f(a)*f(b)<0
Podaj a: a>0 -5
Podales zla wartosc a! a musi byc wieksze od 0
 Podaj a: 2
Podaj b: b>a 10
Podane a,b nie spelnia wymagania: f(a)*f(b)<0 Podaj inne!
Podaj a: a>0 1
Podaj b: b>a -5
Podales zla wartosc b! b musi byc wieksze od a
 Podaj b: 10
Podaj epsilon. 0<epsilon<1 aby zakonczyc:Ctrl+d :-5
Zla wartosc epsilon! Podaj inna: 2
Zla wartosc epsilon! Podaj inna: 0.001
METODA BISEKCJI:
Przyblizone rozwiazanie: x==1.726746
Ilosc krokow: 14
METODA NEWTONA:
Przyblizone rozwiazanie: x==1.726850
Ilosc krokow: 3
Podaj nastepna wartosc epsilon. Aby zakonczyc: Ctrl+d :0.00001
METODA BISEKCJI:
Przyblizone rozwiazanie: x==1.726849
Ilosc krokow: 18
METODA NEWTONA:
Przyblizone rozwiazanie: x==1.726850
Ilosc krokow: 4
Podaj nastepna wartosc epsilon. Aby zakonczyc: Ctrl+d :
```