Metody obliczeniowe zadanie nr. 2

Mateusz Miotk
Sylwia Kaczmarczyk
Michał Kulesz

1 Treść zadania

Zadanie 2.7 Dla równania $f(x) = 0$, gdzie $f(x) = 4-2x-\ln x$,wczytać $a, b \in R$ takie, by $0 < a < b$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$ Następnie dopóki "użytkownik się nie znudzi",wczytywać wartości $0 < \varepsilon < 1$ i metodą połowienia na $[a, b]$ przybliżyć z dokładnością ε rozwiązanie tego równania. Rozwiązanie to przybliżyć również metodą Newtona z $x_0 = a$, przy czym x_k będzie dobrym przybliżeniem, gdy $|x_k-x_{k-1}| \leq \varepsilon$.Porównać ilość kroków wykonanych metodą połowienia i metodą Newtona.

2 Podstawa teoretyczna:

2.1 Metoda połowienia przedziału(bisekcji)

Jeśli f jest funkcją ciągłą w przedziale $[a, b]$ i jeśli $f(a) \cdot f(b) < 0$, a więc f zmienia znak w $[a, b]$, to funkcja ta musi mieć zero w (a, b). Jest to konsekwencja własności Darboux funkcji ciągłych. Metoda bisekcji korzysta z tej własności. Jeśli $f(a)f(b) < 0$ to obliczamy $c = \frac{1}{2}(a + b)$ i sprawdzamy, czy $f(a)f(c) < 0$. Jeśli tak, to f ma zero w $[a, c]$; wtedy pod b podstawiamy c. W przeciwnym razie jest $f(c)f(b) < 0$; wtedy pod a podstawiamy c. Szukamy do momentu jeśli $sgn(a) = sgn(b)$ lub $f(c) \leq \varepsilon$

2.2 Metoda Newtona:

Szukamy we funkcji f rozwiązania równania $f(x) = 0$. Niech r będzie takim zerem, a x jego przybliżeniem. Jeśli f'' istnieje, to na mocy twierdzenia Taylora mamy:
$0 = f(r) = f(x + h) = f(x) + hf'(x) + \theta(h^2)$ gdzie $h = r - x$.
Jeśli h jest małe (czyli x jest bliskie r), to jest rozsądne pominięcie składnika $\theta(h^2)$ i rozwiązanie otrzymanego równania względem h. Daję to $h = -f(x)/f'(x)$.Jeśli x jest przybliżeniem r, to $x-f(x)/f'(x)$ powinno być lepszym przybliżeniem tego zera. Dlatego z definicji metoda Newtona zaczyna od przybliżenia x_0 zera r i polega na rekurencyjnym stosowaniu wzoru:
$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ dla $(x \geq 0)$.

3 Algorytm realizujący zadanie

1.Program wczytuje wartości $a, b \in R$ gdzie $0 < a < b$ oraz $f(a) \cdot f(b) < 0$
2.Następnie wczytywana jest wartość ε dopóki użytkownik się ”nie znudzi”, gdzie $0 < \varepsilon < 1$.
3.W każdym wczytaniu ε liczone jest rozwiązanie za pomocą algorytmu metody bisekcji oraz metody Newtona.

3.1 Algorytm bisekcji

Wykorzystany jest dany kod:

```
unsigned int M=0;
        double u,v,e,c,w;
        u=f(a);
        v=f(b);
        e=b-a;
        printf("METODA BISEKCJI: \n");
        while(sgn(u) != sgn(v)){
        M++;
        e/=2;
        c=a+e;
        w=f(c);
        printf("f(%lf)==%lf\n",c,w);
        if(fabs(w) < epsilon)
        break;
                if(sgn(w) != sgn(u)){
                        b=c;
                        v=w;
                }
                else{
                        a=c;
                        u=w;
                }
        }
```

Przybliżonym rozwiązaniem jest wartość c.
M oznacza ilość wykonanych kroków.

3.2 Algorytm metody Newtona

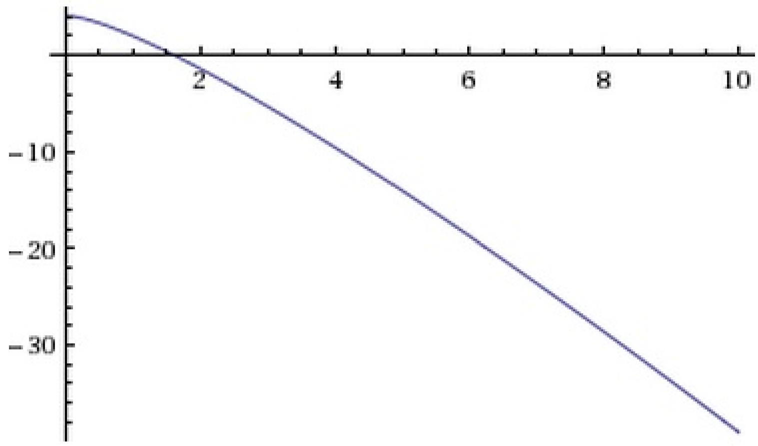
Wykorzystany jest dany kod:

```
unsigned M=0;
        double v=f(x_0);
        printf("f(%lf)==%lf\n",x_0,v);
        printf("METODA NEWTONA: \n");
        double x_1;
        if(fabs(v) < epsilon)
        return ;
                while(1){
                M++;
                x_1 = x_0 - v/f_bis(x_0);
                v=f(x_1);
                printf("f(%lf)==%lf\n",x_1,v);
                if(fabs(x_1-x_0) <= epsilon){
                break;
                }
                x_0=x_1;
        }
        printf("Przyblizone rozwiazanie: f(%lf)==%lf\n",x_1,v);
        printf("Ilosc krokow: %d\n",M);
```

M oznacza ilość wykonanych kroków.

3.3 Przykładowe rozwiązanie

Wykres funkcji w przedziale $[0, 10]$



1.Dla danych:
$a = 1$
$b = 2$

$\varepsilon = 0.5$
Otrzymujemy :
METODA BISEKCJI:
f(1.500000)==0.594535
f(1.750000)==-0.059616
Przyblizone rozwiazanie: f(1.750000)==-0.059616
Ilosc krokow: 2
METODA NEWTONA:
f(1.666667)==0.155841
f(1.726606)==0.000632
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726606)==0.000632
2.Dla danych:
a, b - takie same jak wyżej
$\varepsilon = 0.01$
Otrzymujemy :
METODA BISEKCJI:
f(1.500000)==0.594535
f(1.750000)==-0.059616
f(1.625000)==0.264492
f(1.687500)==0.101752
f(1.718750)==0.020903
f(1.734375)==-0.019397
f(1.726562)==0.000743
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726562)==0.000743
Ilosc krokow: 7
METODA NEWTONA:
f(1.666667)==0.155841
f(1.726606)==0.000632
f(1.726850)==0.000000
Przyblizone rozwiazanie: f(1.726850)==0.000000
Ilosc krokow: 3