Přehled harmonické analýzy

Ing. Marek Nožka

1 Základní pojmy

Signál je obecně libovolná, v čase se měnící veličina, která s sebou nese nějakou informaci. Pomocí signálů tedy lze přenášet informace. V tomto případě bude za signál považována například okamžitá hodnota v čase se měnícího elektrického napětí.

Harmonický signál je signál jehož časový průběh odpovídá funkci sinus nebo cosinus, a který začíná v čase $-\infty$ a končí v čase ∞. Funkce sinus a cosinus jsou totožné jen v čase různě posunuté.

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$
$$\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$$

Jakýkoli jiný signál je *neharmonický*. Tím je myšlen signál jiného tvaru, ale i signál tvaru sinus, který trvá v čase omezenou dobu. Např. 10 period signálu tvaru cosinus je signál neharmonický, protože trvá jen určitou dobu a ne od $-\infty$ do ∞.

Periodický signál je signál, který se v čase stéle opakuje. Délka jednoho opakování se nazývá perioda T. Signál začíná v čase $-\infty$ a končí v čase ∞.

Systém Obecně se dá říci, že systém je jakási černá skříňka, o které nevíme co je uvnitř, ale víme (nebo chceme vědět), jak se chová. Systém má vstupy (jeden nebo více) reprezentované vstupními veličinami a výstupy (jeden nebo více) reprezentované výstupními veličinami. Jestliže se podaří systém popsat, je možné pomocí tohoto popisu přesně odhadnout chování výstupu, pro jakýkoli vstup.

V tomto případě bude za systém považován dvojbran, jehož jedna brána tvoří vstup a vstupní veličinou je vstupní napětí u_1 a druhá brána tvoří výstup s výstupní veličinou – napětím u_2. Popisem systému se potom rozumí jeho komplexní přenos.

$$\bar{A}_u = \frac{\bar{U}_2}{\bar{U}_1} \tag{1}$$

Časová oblast Jestliže je popisován tvar signálu, mluví se o popisu signálu v časové oblasti. V časové oblasti lze signál sledovat např. na obrazovce osciloskopu. Je to vlastně sled okamžitých hodnot např. napětí.

Podle tvaru se signál označuje jako signál např. obdélníkového  nebo trojúhelníkového  tvaru. Časový popis je pro člověka nejpřirozenější, protože se odehrává v čase, který si dokáže docela dobře představit.

Systém se v časové oblasti popisuje tzv. *impulzní charakteristikou*. O ní bude řeč později.

Frekvenční oblast Popis ve frekvenční oblasti již není tak přirozený a vyžaduje jistou míru abstrakce. Ve frekvenční oblasti je signál popisován jakoby pod jiným úhlem pohledu. V zorném poli už není čas ale frekvence. Při popisu signálu, se sleduje jak jsou v něm zastoupeny které kmitočty. Jinak řečeno sleduje se jak velká část, z celkové energie signálu, je obsažena na kterém kmitočtu.

Harmonický signál má jako jediný všechnu svou energii na jednom jediném kmitočtu $f_1 = \frac{1}{T_1}$, kde T_1 je doba trvání jedné periody signálu. Jakýkoli jiný – neharmonický signál má energii na více nežli jednom kmitočtu. K popisu ve frekvenční oblasti se používá *Fourierova řada* a *Fourierova transformace*.

Systém se ve frekvenční oblasti popisuje tzv. *frekvenční charakteristikou*. Ta udává, jak jsou jednotlivé frekvence zesilovány či zeslabovány. Frekvenční charakteristika je vlastně jen frekvenčně závilý přenos systému(1). A_u je tedy funkcí kmitočtu. $A_u = \mathsf{f}(f)$

Jak ve frekvenční, tak i v časové oblasti lze každý systém i signál plně popsat. V každém s těchto popisů je středem zájmu něco jiného, ale vždy to daný systém nebo signál plně popisuje a oba popisy lze mezi sebou přepočítat. Jestliže se v jedné oblasti cokoli změní projeví se to i v druhé.

Fourierova řada a Fourierova transformace Fourierova transformace a Fourierova řada patří do skupiny integrálních transformaci. Ty v matematice slouží k zjednodušení jinak velice náročného výpočtu.

$$c_k = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)e^{jk\omega t}\,\mathrm{d}t,\ k \in Z,\ k \in (-\infty, \infty) \tag{2}$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{j\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

Tyto vztahy jsou pouze informativní. Důležité je, že Fourierova řada (vztah 2) je opravdu řadou, tedy posloupností čísel c_k. Indexem jednotlivých prvků je celé číslo k. Za zmínku také stojí, že

$$c_k = c^*_{-k}, \tag{4}$$

tedy že tzv. c_k koeficienty s indexy, které mají opačné znaménko jsou komplexně sdružené. Často používaným symbolem je také velké písmeno C s indexem k. k je tentokrát přirozené číslo.

$$C_k = 2c_k,\ k \in N \tag{5}$$

Fourierova řada řeší problematiku *periodických signálů*. Periodické signály se v čase stále opakují se stéle stejnou periodou T_1, začínají v $-\infty$ a končí v $+\infty$.

Oproti tomu Fourierova transformace (vztah 3), řeší problematiku signálů *neperiodických* a *jednorázových*. To jsou signály, které se v čase neopakují – nemají periodu, nebo jsou v čase omezené.

Operátor $\sum$ – suma je symbolem, který se používá pro zkrácený zápis součtu mnoha čísel.
Např. zápis

$$W = \sum_{i=3}^{7} r_i$$

se čte jako W = suma pro i od 3 do 7 r_i a je to zkrácený zápis pro

$$W = r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7$$

a pokud r je řada čísel $r \in \{2, 5, 8, 2, 3, 5, 2, 10, 7, 13\}$ potom

$$W = r_3 + r_4 + r_5 + r_6 + r_7 = 8 + 2 + 3 + 5 + 2 = 20$$

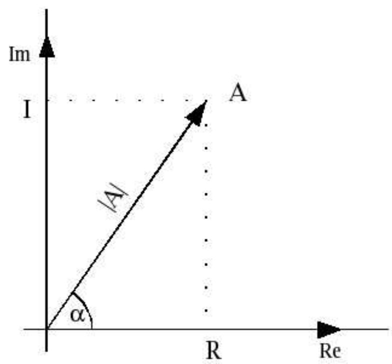
Komplexní čísla jsou čísla, které mají kromě své „klasické“ reálné části ještě část imaginární. Imaginární část je násobena číslem j, tzv. imaginární jednotkou.

$$j = \sqrt{-1} \tag{6}$$

Komplexní číslo je potom součtem reálné části R a imaginární části I násobené imaginární jednotkou.

$$A = R + jI\ .$$

Komplexní číslo se zobrazuje v komplexní rovině. Vodorovná osa je reálná, svislá osa je imaginární. Číslo A leží na souřadnicích $A = [R, I]$, kde R je reálná a I je imaginární část. Komplexní číslo potom může být vyjádřeno také pomocí vzdálenosti bodu A od počátku $|A|$ a velikostí úhlu α, který svírá reálné osa se spojnicí počátku souřadnic a souřadnicí $[R, I]$. Uvádí se celkem tři tvary komplexních čísel: složkový tvar, goniometrický tvar a exponenciální tvar. Každý z těchto tvarů je vhodnější pro jiné matematické operace.



Obrázek 1: Komplexní číslo zobrazené v komplexní rovině.

Absolutní hodnota:

$$|A| = \sqrt{R^2 + I^2} \tag{7}$$

Složkový tvar:

$$A = R + jI$$

Složkový tvar se hodí pro sčítání a odčítání komplexních čísel. Sčítají a odčítají se vždy zvlášť reálná a imaginární část.

$$A_1 + A_2 = (R_1 + R_2) + j(I_1 + I_2)$$

Goniometrický tvar:

$$A = |A| \left[\cos(\alpha) + j \sin(\alpha)\right]$$

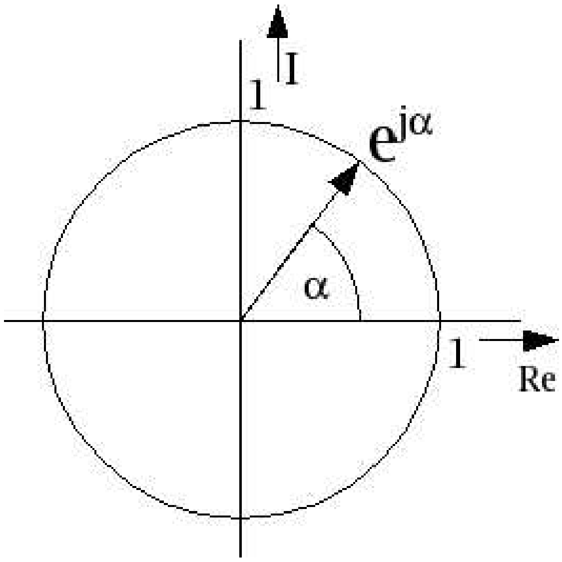
Exponenciální tvar:

$$A = |A|\, e^{j\alpha}$$

Exponenciální a goniometrický tvar je vhodný pro násobení a dělení komplexních čísel. Násobí (dělí) se jen absolutní hodnoty a úhly se sčítají (odčítají).

$$A_1 \cdot A_2 = |A_1| \cdot |A_2| \cdot e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{|A_1|}{|A_2|} \cdot e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}$$



Obrázek 2: Komplexní exponenciala.[1]

Funkce $\mathbf{e}^{\mathbf{j}\alpha}$ V exponenciálním tvaru se vyskytuje podivná funkce $F = e^{j\alpha}$. Výsledkem této funkce je komplexní číslo, ležící na jednotkové kružnici ($|F| = 1$) a svírající s reálnou osou úhel α.Např: $e^{j0} = 1$, $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$, $e^{j-\frac{\pi}{2}} = -j$, $\ldots$ atd.

2 Harmonická analýza periodických signálů

Harmonické analýza slouží k popisu signálů nebo systémů ve *frekvenční oblasti*. Pro frekvenční popis periodických signálů se používá *Fourierova řada* (2).

Jakýkoli periodický signál $s(t)$, libovolného tvaru, lze rozložit na součet nekonečně mnoha harmonických signálů. Matematicky to lze zapsat takto:

$$s(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} |C_k| \cos(2\pi k\ f_1 t + arg(C_k)), \tag{8}$$

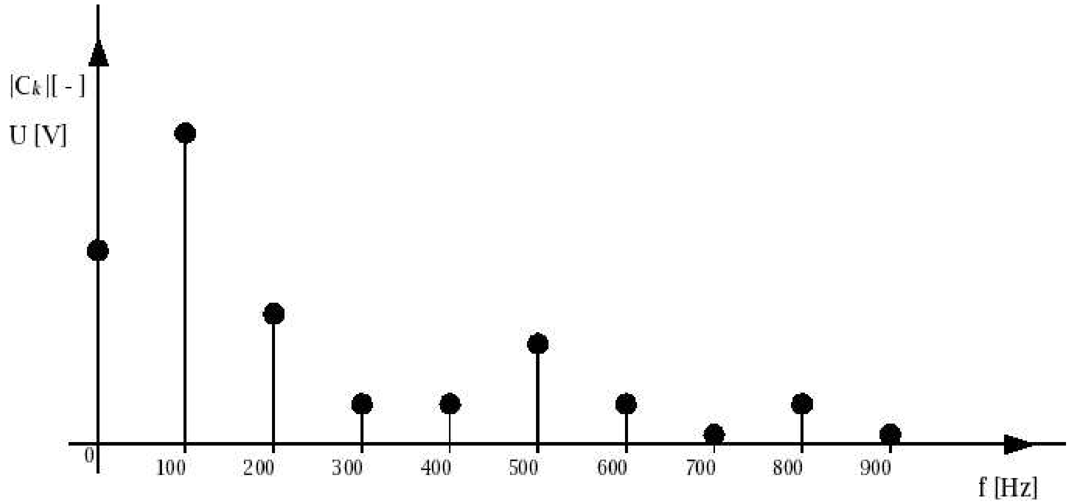
kde $f_1 = \frac{1}{T_1}$ a T_1 je perioda signálu $s(t)$. c_0 představuje stejnosměrnou složku signálu $s(t)$. Někdy se také označuje jako nultá harmonická. $|C_k|$ a $arg(C_k)$ představují amplitudy a počáteční fáze jednotlivých harmonických složek, jejichž součtem je signál $s(t)$. Všechny harmonické složky mají frekvenci, která je k-násobkem frekvence první harmonické složky f_1. Ta bývá označována jako *základní* nebo také *první harmonická*. Frekvence první harmonické je totožná s frekvencí signálu $s(t)$. Číslo k, zde udává pořadí každé harmonické složky. Proto se v běžném hovoru mluví o první, druhé,..., desáté,... atd. „harmonické“.

Ve frekvenční oblasti lze periodycký signál plně popsat posloupností tzv. C_k *koeficientů*. To jsou obecně komplexní čísla, která mají svůj argument $|C_k|$ a fázi $arg(C_k)$.

2.1 Amplitudové frekvenční spektrum

Pojmem *frekvenční spektrum signálu*, nebo zkráceně jen *spektrum signálu* je myšlen signál ve frekvenční oblasti.

Argumenty $|C_k|$ určují amplitudy jednotlivých harmonických složek. Ty říkají, jak velkou energii každá z harmonických nese. Čím větší má daná harmonická složka amplitudu tím větší energie je na dané kmitočtu. Tato informace o amplitudách se označuje jako *amplitudové frekvenční spektrum* signálu a graficky ho znázorňuje obrázek 3. Všechny *spektrální čáry*, jak jsou harmonické složky také někdy označovány, jsou od sebe stejně vzdáleny, protože jejich frekvence jsou všechny násobkem základní harmonické. Ta má na obrázku frekvenci 100 Hz.



Obrázek 3: Amplitudové frekvenční spektrum

Protože všechna energie je obsažena jen na kmitočtech, které jsou násobkem základního kmitočtu, je spektrum periodických signálů diskrétní

Spektrum periodických signálů je vždy diskrétní. Vzdálenost všech spektrálních čar je rovna kmitočtu základní harmonické složky.

Největší část energie nese několik prvních harmonických složek. Ty mají také největší amplitudu a zásadním způsobem určují tvar signálu. Oproti tomu vyšší harmonické složky sice nenesou velkou část energie ale jejich přítomnost určuje, zda budou v signálu v časové oblasti patrné rychlé změny. Rychlou změnou může být například hrana obdélníkového signálu.

Amlitudové frekvenční spektrum fšak podává informaci jen o amplitudách, tedy o argumentech $|C_k|$. Chybí ještě informace o počátečních fázích, tedy $arg(C_k)$. Tuto informaci podává *fázové frekvenční spektrum*.

2.2 Fázové frekvenční spektrum

Fázové frekvenční spektrum podává informace o počátečních fázích jednotlivých harmonických signálů. Její hodnota se pohybuje v rozmezí 0 až 2π resp. $-\pi$ až $+\pi$.

2.3 Příklad

Jako příklad bude uveden signál obdélníkového tvaru.