管理决策理论与方法

汪燕敏

2022/3/30

前言

使用教材：
茆诗松，汤银才. 贝叶斯统计. 北京：中国统计出版社，2012
参考教材：
James O.Berger. 统计决策理论和贝叶斯分析 (第二版)(英文版). 北京：世界图书出版公司，2004

第一章决策中的收益、损失与效用

决策就是对一件事要做决定。它与推断的差别在于是否涉及后果。统计学家在做推断时，是按统计理论进行的，很少或根本不考虑推断结论在使用后的损失。可决策者在使用推断结果时，必须与得失联系在一起考虑。能给他带来利润的就使用，使它遭受亏损的就不会被采用。
度量得失的尺度，就是损失函数。它是著名统计学家瓦尔德在 1940 年代引入的一个概念。损失函数与决策环境密切相关，因此，从实际归纳出损失函数是决策成败关键。把损失函数加入贝叶斯推断就形成贝叶斯决策论。
损失函数被称为贝叶斯统计中的第四种信息。

仅使用先验信息的决策问题称为**无数据（或无样本信息）的决策问题**。
仅使用抽样信息的决策问题称为**统计决策问题**。
先验信息和抽样信息都用的决策问题称为**贝叶斯决策问题**。

1.1 决策问题的三要素

行动集，状态集和损益函数。

损益函数：收益函数，亏损函数，支付函数和成本函数。

例 1.1.1：设甲乙两人进行一种游戏，甲手中有三张牌（1，2，3），乙手中也有三张牌（A,B,C）。游戏的规则是双方各自独立地出牌，按下表计算甲的得分和乙的得分。

表 1: 甲的得分矩阵/乙的失分矩阵

	1	2	3
A	3	-2	0
B	1	4	-3
C	-4	-1	2

例 1.1.2：某农作物有两个品种：产量高但抗旱能力弱的品种 a_1 和抗旱能力强但产量低的品种 a_2。在明年雨量不能准确预知的情况下，农民应选拔哪个品种可使每亩收益最大呢？

表 2: 种植的收益矩阵

	a_1	a_2
θ_1	1000	200
θ_2	-200	400

例 1.1.3：一位投资者有一笔资金要投资，有如下几个投资方向供他选择：

购买股票，根据市场情况，可净赚 5000 元，但也可能坤孙 10000 元;

存入银行，不管市场情况净赚 1000 元。

表 3: 投资的收益矩阵

	a_1	a_2
θ_1	5000	1000
θ_2	-10000	1000

这种人与自然界的博弈问题称为决策问题。在决策问题中，主要是寻求人对

自然界（或社会）的最优策略。这取决于博弈者对自然界（或社会）的信息了解程度。

决策问题的三要素

1. 状态集 $\Theta = \{\theta\}$
状态集 Θ 可以只含有限个状态，也可以含有无穷个状态。
状态可以用实数表示，此时状态称为状态参数，简称为参数。其状态集 Θ 常由一些实数组成，这样的状态集又称为参数空间。
常见的参数空间是一个区间（a，b）。

2. 行动集 $\mathscr{A} = \{a\}$
一般行动集至少有两个行动，供人们决策只用。

3. 收益函数 $Q(\theta, a)$
收益函数的值可正可负。
当状态集和行动集都仅含有有限个元素时，收益值可以排成一个矩阵，这个矩阵称为收益矩阵。
状态集和行动也可以是连续的。

例 1.1.4：某水果商店准备购进一批苹果投放市场，购进价格为每公斤 0.65 元，售出价格为每公斤 1.1 元。如果购进数量大于市场需求量，超出部分就必须以每公斤 0.3 元的价格处理。在市场需求量一时无法弄清的情况下，该商店的经理该做如何决策？

1.2 决策准则

1.2.1 行动的容许性

定义 1.2.1 在给定的决策问题中，$\mathscr{A}$ 中的行动 a_1 称为是容许的，假如在 $\mathscr{A}$ 中不存在满足如下两个条件的行动 a_2，
1. 对所有的 $\theta \in \Theta$, 有 $Q(\theta, a_2) \geq Q(\theta, a_1)$;
2. 至少有一个 θ, 可使上述不等式严格成立。
假如这样的 a_2 存在的话，则称 a_1 是非容许的。假如二个行动 a_1 和 a_2 的收益函数在 Θ 上处处相等，则称行动 a_1 和 a_2 是等价的。

例 1.2.1：设某决策问题的收益矩阵为

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 6 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

1.2.2 决策准则

1. 差中求好准则 (悲观准则)

第一步，对每一个行动选出最小的收益；
第二步，在所有选出的最小收益中选取最大值。

例 1.2.2：某厂准备一年后生产一种新产品，如今有三个方案供选择：改建本厂原有生产线（a_1 ）；从国外引进一条自动化生产线（a_2 ）；与兄弟厂协助组织 “一条龙” 生产线（a_3）。厂长预计一年后市场对此新产品的需求量大致可分为三种：较高（θ_1）；一般（θ_2）；较低（θ_3）。厂长算得收益矩阵为

$$\begin{pmatrix} 700 & 980 & 400 \\ 250 & -500 & 90 \\ -200 & -800 & 90 \end{pmatrix} \tag{2}$$

2. 好中求好准则 (乐观准则)

第一步，对每一个行动选出最大的收益；
第二步，在所有选出的最大收益中选取最大值。

例 1.2.2 的分析

3. 折中准则

第一步，在 0 和 1 之间选一个数 a，称为乐观系数，用它来表示决策者对面临的决策问题所持的乐观程度。越接近于 1，决策者越乐观；越接近于 0，决策者越悲观。
第二步，对每一个行对计算

$$H(a) = \alpha \max_{\theta\in\Theta} Q(\theta, a) + (1-\alpha) \min_{\theta\in\Theta} Q(\theta, a)$$

第三步，取行动 a_0, 使得 $H(a_0)$ 达到最大，即

$$H(a_0) = \max_{a \in \mathscr{A}} H(a)$$

例 1.2.2 的分析,$\alpha = 0.8$

换一种思路来考察。先不要求厂长给出乐观系数，只假设乐观系数为 α, 然后做一些分析后再做决策。为此先算出个行动下的 $H(\alpha_i)$。画图。

1.3 先验期望准则

1.3.1 先验期望准则

先验期望准则和二阶矩准则

$$\bar{Q}(\theta, a) = E^{\theta} Q(\theta, a)$$
$$Var[Q(\theta, a)] = E^{\theta} Q(\theta, a)^2 - [E^{\theta} Q(\theta, a)]^2$$

使先验平均收益达到最大的行动，称为先验期望准则下的最优行动。若此种最优行动不止一个，其中先验方差达到最小的行动成为二阶矩准则下的最优行动。例 1.2.2 的分析，假设 $\pi(\theta_1) = 0.6$,$\pi(\theta_2) = 0.3$,$\pi(\theta_3) = 0.1$

最优行动不一样。什么原因呢？从贝叶斯观点看，上述三个准则可纳入先验期望准则，只不过他们选用了不同的先验分布而已。

表 4: 投资的收益矩阵

市场需求量	$\theta_1(high)$	$\theta_2(median)$	$\theta_3(low)$
悲观准则下	0	0	1
乐观准则下	1	0	1
折中准则下	0.8	0	0.2
先验期望准则下	0.6	0.3	0.1

例 6：例 1.1.4 采用 [500，2000] 上的均匀分布作为 θ 的先验分布，求先验期望收益。

例：某花店主每天从农场以每棵 5 元的价格购买若干棵牡丹花，然后以每棵 10 元之价格出售。如果当天卖不完，余下的牡丹花做垃圾处理。这样店主

就要少赚钱，甚至当日要亏本。为了弄清市场需求，店主连续记录过去 50 天出售牡丹花的棵数，整理的记录见下表。试问该店主每天应购进多少棵牡丹花出售，才为最优行动。

θ	14	15	16	17	18	19	20
$\pi(\theta)$	0.08	0.22	0.2	0.14	0.14	0.12	0.1

1.3.2 两个性质

定理在先验分布的情况下，收益函数 $Q(\theta,a)$ 的线性变换 $kQ(\theta,a)+c(k>0)$ 不会改变先验期望准则下的最优行动。定理设 Θ_1 为状态集 Θ 的一个非空子集，假如在 Θ_1 上的收益函数 $Q(\theta,a)$ 都加上一个常数 c, 而在 Θ 上的先验分布不变，则在先验期望准则下的最优行动不变。

1.4 损失函数

1.4.1 从收益到损失

这里谈的损失函数不是负的收益，也不是亏损。某商店一个月的经营收益为-1000 元，即亏 1000 元。这是对成本而言的。在这里不称其为损失，而称其为亏损。我们所讲的损失是指“该转而没有转到的钱”。例 1.4.1 某公司购进某种货物可分为大批、中批和小批三种行动，依次记为 a_1,a_2,a_3。未来市场需求量可分为高、中、低三种状态，依次记为 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$。三个行动在不同市场状态下获得的利润如下（单位：千元）

$$\begin{pmatrix} 10 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2.7 & -0.8 & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

这是一个收益矩阵。现在按照损失的含义改写为损失矩阵。

1.4.2 损失函数

在一个决策问题中假设状态集为 $\Theta=\{\theta\}$, 行动集为 $\mathscr{A}=\{a\}$，而定义在 $\Theta\times\mathscr{A}$ 上的二元函数 $L(\theta,a)$ 称为损失函数。由收益函数容易获得损失函

数。当自然界（或社会）处于 θ 时，最大收益为 $\max_{a\in\mathscr{A}} Q(\theta,a)$, 此时采取行动 a 所引起的损失为

$$L(\theta,a)=\max_{a\in\mathscr{A}} Q(\theta,a)-Q(\theta,a)$$

类似地，当决策用支付函数 $W(\theta,a)$ 度量时，由于它时越小越好，自然界（或社会）处于 θ 时的最小支付为

$$\min_{a\in\mathscr{A}} W(\theta,a)$$

例 1.4.2 某公司购进一批货物投放市场。若购进数量 a 低于市场需求量 θ（即 $a\leq\theta$）, 每吨可赚 15 万元。若购进数量 a 超过市场需求量 θ（即 $a\leq\theta$），超过部分每吨反而要亏 35 万元。由此写出收益函数和损失函数。

例 1.4.3 某制药厂制成一种新的止痛剂。为了决定新药是否投放市场，投放多少，价格如何等问题，需要了解此种新的止痛剂在市场的占有率 θ。

在这个问题中，要估计收益较为困难，我们改用直接估算损失。

1.4.3 损失函数下的悲观准则

第一步，对每个行动 a, 选出最大损失值；第二步，在所有选出的最大损失值中再选出其中最小者。这与收益函数下的悲观准则具有相同的策略思想，但决策结果有时一致，有时不一致。例 1.4.4：根据 1.4.1 的收益矩阵和损失矩阵，采用悲观准则。

例 1.4.5：某决策问题的收益矩阵为

$$\begin{pmatrix} 19 & 20 \\ 10000 & 20 \end{pmatrix} \tag{4}$$

求最优行动。如果把该矩阵换算为损失矩阵。求最优行动。

1.4.4 损失函数下的先验期望准则

1.5 常用损失函数

平方损失函数

线性损失函数

0-1 损失函数

多元二次损失函数

二行动线性决策问题的损失函数

1.6 效用函数

1.6.1 效用和效用函数

1.6.2 效用的测定

1.6.3 效用尺度

1.6.4 常见的效用曲线

直线型效用曲线

上凸型效用曲线

下凸型效用曲线

混合型的效用曲线

1.6.5 用效用函数做决策的例子

1.6.6 从效用到损失

第二章贝叶斯决策

2.1 贝叶斯决策问题

可供决策使用的信息可以归纳为如下两种信息：
(1) 先验信息
(2) 抽样信息
对上述二中信息的使用期刊，形成不同的决策问题。
(1) 仅使用先验信息的决策问题称为无数据的决策问题；
(2) 仅使用抽样信息的决策问题称为统计决策问题；
(3) 两种信息都用的决策问题称为贝叶斯决策问题。
例 2.1.1 某工厂的产品每 100 件装成一箱运交顾客。在向顾客交货前面临如下两个行动的选择：
a_1: 一箱中逐一检查
a_2: 一箱中一件也不检查
写出支付函数；
写出损失函数。
假如工厂取区间 (0,0.12) 上的均匀分布作为 θ 的先验分布，按先验期望准则求最优行动。
假如工厂决定先在每箱中抽取两件进行检查，设 X 为其不合格品数，则 $X \sim b(2,\theta)$。然后工厂根据 X 的取值 (可能取 0，1，2 三种) 再选择行动。此种利用抽样信息的决策问题就是统计决策问题。若再使用 θ 的先验分布 U(0,0.12)，则就构成一个贝叶斯决策问题。

例 2.1.2 某制药厂制成一种新的止痛剂。为了决定新药是否投放市场，投放多少，价格如何等问题，需要了解此种新的止痛剂在市场的占有率 θ。假如厂长采用 [0,1] 上的均匀分布作为 θ 的先验分布;
如果从特约经销店得知，在 n 个购买止痛剂的顾客中有 x 人买了新的止痛剂。这是 $X \sim b(n,\theta)$。
定义一个贝叶斯决策问题，(1) 有一个可观察的随机变量 X, 它的密度函数

依赖于位置参数 θ，且 $\theta \in \Theta$.
(2) 在参数空间 Θ 上有一个先验分布 $\pi(\theta)$ (3) 有一个行动集 $\mathscr{A} = \{a\}$ 。在对 θ 做点估计时，一般取 $\mathscr{A} = \Theta$。在对 θ 做区间估计时，行动 a 就是一个区间，Θ 上的一切可能的区间构成行动集 $\mathscr{A}$。在对 Θ 作假设检验时，$\mathscr{A}$ 只含有两个行动：接收或拒绝。(4) 在 $\Theta \times \mathscr{A}$ 上定义了一个损失函数 $L(\theta, a)$, 它表示参数为 θ 时，决策者采用行动 a 所引起的损失。

从上述可以看出，一个贝叶斯决策问题比一个决策问题多了两项要素：一是先验分布；二是总体分布，并从此总体分布抽取一个样本，就可以获得似然函数。另外，从贝叶斯统计看，一个贝叶斯决策问题比一个贝叶斯推断问题多一个损失函数。或者说，把损失函数引进统计推断就构成贝叶斯决策问题。这样就把贝叶斯推断与经济效益联系起来了。以后按后验平均损失越小越好来进行统计推断，从而形成贝叶斯决策。

2.2 后验风险准则

2.1.1 后验风险

损失函数 $L(\theta, a)$ 对后验分布 $\pi(\theta|x)$ 的期望称为*后验风险*，记为 $R(a|x)$

$$R(a|x) = E^{\theta|x}[L(\theta, a)]$$

后验分线就是用后验分布计算的平均损失。例 2.2.1 在例 2.2.1 的产品检查问题中，规定从每箱产品中随机抽检两件，得到一个样本 $x = (x_1, x_2)$, 其中 x_1 为第 i 件产品的不合格品数。$x = x_1 + x_2$ 为 θ 的充分统计量，且 $x \sim b(2, \theta)$, 这就是样本分布。另外从历史资料得知，该厂产品的不合格品率 θ 不超过 0.12. 且取均匀分布 U(0,0.12) 作为 θ 的先验分布。### 2.1.2 决策函数定义 2.2.2 在给定的贝叶斯决策问题中 D={$\delta(x)$} 是其决策函数类，则称

$$R(\delta|x) = E^{\theta|x}[L(\theta, \delta(x))], x \in \chi, theta \in \Theta$$

为决策函数 $\delta = \delta(x)$ 的后验风险。假如在决策函数类 D 中存在这样的决策函数 $\delta' = \delta'(x)$, 它在 D 中具有最小的后验风险，即

$$R(\delta'|x) = \min_{\delta \in D} R(\delta(x)|x)$$

则称 $\delta'(x)$ 为后验风险准则下的最优决策函数，或称贝叶斯决策函数，或贝叶斯解。

当参数空间 Θ 与行动集 $\mathscr{A}$ 相同，均为某个实数集时，满足上式的 $\delta'(x)$ 又称为 θ 的贝叶斯解或贝叶斯估计。

这里应着重强调的是定义 2.2.2 中的前提，即在给定贝叶斯决策问题中讨论贝叶斯解或贝叶斯估计。所谓“给定贝叶斯决策问题”主要是指给定如下三个前提：

样本 x 的联合密度函数 $p(x|\theta)$; 参数空间 Θ 上的先验分布 $\pi(\theta)$; 定义在 $\Theta\times\mathscr{A}$ 上的损失函数 $L(\theta,a)$.

例 2.2.3 设 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 是来自正态分布 $N(0,1)$ 的一个样本。又设参数 Θ 的先验分布为共轭先验分布 $N(0,\tau^2)$, 其中 τ 已知。而损失函数为 0-1 损失函数

$$L(\theta,\delta)=\begin{cases}0, & |\delta-\theta|\le\epsilon\\ 1, & |\delta-\theta|>\epsilon\end{cases}$$

求参数 θ 的贝叶斯估计。例 2.2.4 在新的止痛剂的市场占有率 θ 的估计问题中已经给出损失函数

$$L(\theta,\delta)=\begin{cases}2(\delta-\theta), & 0<\theta<\delta\\ \delta-\theta, & \delta\le\theta\le 1\end{cases}$$

药厂厂长对市场占有率 θ 无任何先验信息。另外在市场调查中，在 n 个购买止痛剂的顾客中又 x 人买了新的止痛剂，这时可得 θ 的后验分布

$$\theta|x\sim Be(x+1,n-x+1)$$

在后验风险准则下对 θ 做出贝叶斯估计。

例 2.2.5 设样本 x 只能来自密度函数 $p_0(x)p_1(x)$ 中的一个。为了研究样本到底俩字哪个分布，我们来考虑如下的简单假设的检验问题：

$$H_0:x\ \ p_0(x),H_1:x\ \ p_1(x)$$

此时参数空间可认为是 $\Theta=\{0,1\}$。在 Θ 上的先验分布可设为

$$P(\theta=0)=\pi_0,P(\theta=1)=\pi_1$$

再取如下损失函数

$$L(i,j)=1-\delta_{ij}$$

其中

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

2.3 常用损失函数下的贝叶斯统计

2.4 抽烟信息期望值

2.5 最佳样本量的确定

2.6 二行动线性决策问题的 EVPI

第三章统计决策理论

3.1 风险函数

3.2 容许性

3.3 最小最大准则

3.4 贝叶斯风险

3.5 贝叶斯估计的性质