



Kokeessa saa vastata enintään kymmeneen tehtävään. Tähdellä (*) merkittyjen tehtävien maksimipistemäärä on 9, muiden tehtävien maksimipistemäärä on 6.

1. a) Ratkaise yhtälö $x^2 + 6x = 2x^2 + 9$.
 b) Ratkaise yhtälö $\frac{1+x}{1-x} = \frac{1-x^2}{1+x^2}$.
 c) Esitä polynomi $x^2 - 9x + 14$ ensimmäisen asteen polynomien tulona.

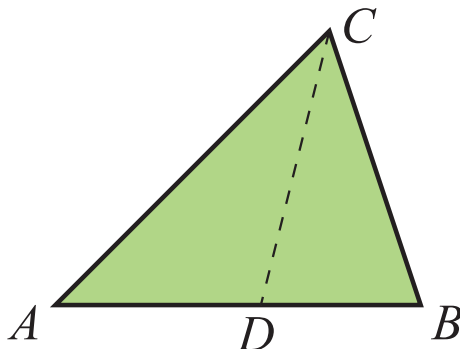
2. a) Millä muuttujan x arvoilla polynomin $P(x) = x^4 - x^3 + x$ derivaatta saa arvon 1?
 b) Määritä funktion $4x + \cos(4x)$ kaikki integraalifunktiot.
 c) Positiivinen luku a on 25 prosenttia pienempi kuin luku b . Kuinka monta prosenttia luku b on suurempi kuin a ?

3. a) Määritä vektoreiden $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ja $\vec{b} = 3\vec{i} + \vec{j}$ välisen kulman likiarvo asteen kymmenesosan tarkkuudella.
 b) Millä parametrin s arvolla vektorit $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j}$ ja $\vec{c} = s\vec{i} + (1-s)\vec{j}$ ovat yhdensuuntaiset?

4. Millä parametrin k arvoilla käyrien $y = kx^2$ ja $y = k(x-2)^2$ leikkauspisteeseen piirretyt tangentit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan?

5. Pisteestä $A(1, -1, 0)$ siirrytään 9 pituusyksikköä vektorin $\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$ suuntaan pisteeseen B ja siitä edelleen 10 pituusyksikköä vektorin $3\vec{i} - 4\vec{k}$ suuntaan pisteeseen C . Määritä pisteen C koordinaatit.

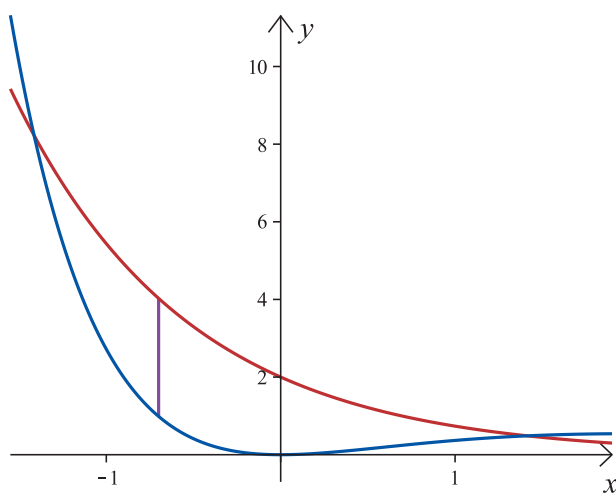
6. Kolmion ABC kulman C puolittaja leikkaa sivun AB pisteessä D . Pisteiden välisille etäisyyksille on voimassa $CD = 6$, $AD = 4$ ja $DB = 3$. Määritä kolmion sivujen AC ja BC pituuksien tarkat arvot.



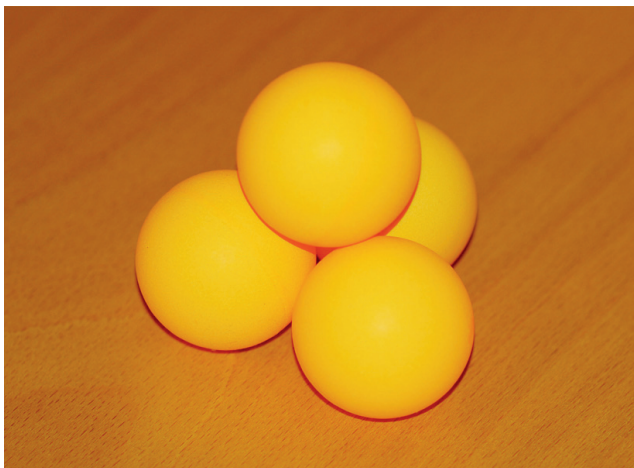
7. Laske integraali $\int_0^2 |x^3 - x| dx$.

8. Kaksipäiväisiin turnajaisiin osallistui kaikkiaan 329 ritaria. Heistä oli ensimmäisenä päivänä paikalla 302 ja toisena 285. Millä todennäköisyydellä turnajaisiin osallistunut ritari oli paikalla molempina päivinä?

9. Käyrien $y = 2e^{-x}$ ja $y = x^2 e^{-x}$ väliin jäävään rajoitettuun alueeseen asetetaan y -akselin suuntainen jana oheisen kuvion mukaisesti. Määritä tämän janan suurin mahdollinen pituus. Anna vastauksena tarkka arvo ja kaksidesimaalinen likiarvo.



10. Pöydällä on kolme samankokoista palloa, joista kukin koskettaa kahta muuta. Niiden päälle asetetaan neljäs samanlainen pallo, joka koskettaa kaikkia kolmea alkuperäistä palloa. Mikä on rakennelman korkeus? Anna vastauksena tarkka arvo pallojen säteen avulla lausuttuna.



Kuva: Pekka Alestalo 2012

11. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{kun } x \neq 0, \\ 1, & \text{kun } x = 0. \end{cases}$$

Laske integraalin $\int_0^1 f(x) dx$ likiarvo käyttämällä puolisuunnikassääntöä, kun jakovälejä on viisi.

12. Merkitään $R(x) = \frac{9x^2 - 1}{3x^2 - 5x - 2}$. Määritä raja-arvo

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} R(x)$

13. Osoita epäsuoraa todistusta käyttämällä, että $\sqrt[3]{2}$ ei ole rationaaliluku.

***14.** Tarkastellaan tasokäyrää, jonka yhtälö on $2x^2 + 2y^2 - 3xy - 2x + 2y - 4 = 0$.

- Määritä käyrän ja koordinaattiakselien leikkauspisteet. (2 p.)
- Osoita, että kaikki leikkauspisteet ovat saman ympyrän kehällä, ja määritä tämän ympyrän yhtälö. (3 p.)
- Suora kulkee origon ja b-kohdan ympyrän keskipisteen kautta. Missä pisteissä tämä suora leikkaa alkuperäisen käyrän? (2 p.)
- Onko alkuperäinen käyrä ympyrä? (2 p.)

***15.** Kaava $f_k(x) = 2^{-k} \left| \sin(2^k x) \right|$ määrittelee jokaisella $k = 0, 1, 2, \dots$ funktion $f_k : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$.

- Piirrä funktioiden f_0 , f_1 ja f_2 kuvaajat välillä $[-\pi, \pi]$. (2 p.)
- Laske integraalit $\int_0^\pi f_k(x) dx$, kun $k = 0, 1, 2$. (2 p.)
- Määritä lausekkeen $A_n = \sum_{k=0}^n \int_0^\pi f_k(x) dx$ tarkka arvo kaikilla $n = 0, 1, 2, \dots$ (3 p.)
- Laske raja-arvo $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$. (2 p.)

