Signals and Systems

A.V. OPPENHEIM, *et al.*

第2章 线性时不变系统

Linear Time-Invariant Systems

本章主要内容：

- 信号的时域分解——用$\delta(n)$表示离散时间信号；用$\delta(t)$表示连续时间信号。
- LTI系统的时域分析——卷积积分与卷积和。
- LTI系统的微分方程及差分方程表示。
- LTI系统的框图结构表示。
- 奇异函数。

2.0 引言 (Introduction)

由于LTI系统满足齐次性和可加性，并且具有时不变性的特点，因而为建立信号与系统分析的理论与方法奠定了基础。

基本思想：如果能把任意输入信号分解成基本信号的线性组合，那么只要得到了LTI系统对基本信号的响应，就可以利用系统的线性特性，将系统对任意输入信号产生的响应表示成系统对基本信号的响应的线性组合。

- **问题的实质：**

1. 研究信号的分解：即以什么样的信号作为构成任意信号的基本信号单元，如何用基本信号单元的线性组合来构成任意信号；

2. 如何得到LTI系统对基本单元信号的响应。

- **作为基本单元的信号应满足以下要求：**

1. 本身尽可能简单，并且用它的线性组合能够表示（构成）尽可能广泛的其它信号；

2. LTI系统对这种信号的响应易于求得。

如果解决了信号分解的问题，即：若有

$$x(t)=\sum_i a_i x_i(t) \qquad x_i(t)\rightarrow y_i(t)$$

$$\downarrow$$

则 $$y(t)=\sum_i a_i y_i(t)$$

- **分析方法：**

将信号分解可以在时域进行，也可以在频域或变换域进行，相应地就产生了对LTI系统的时域分析法、频域分析法和变换域分析法。

2.1 离散时间LTI系统：卷积和

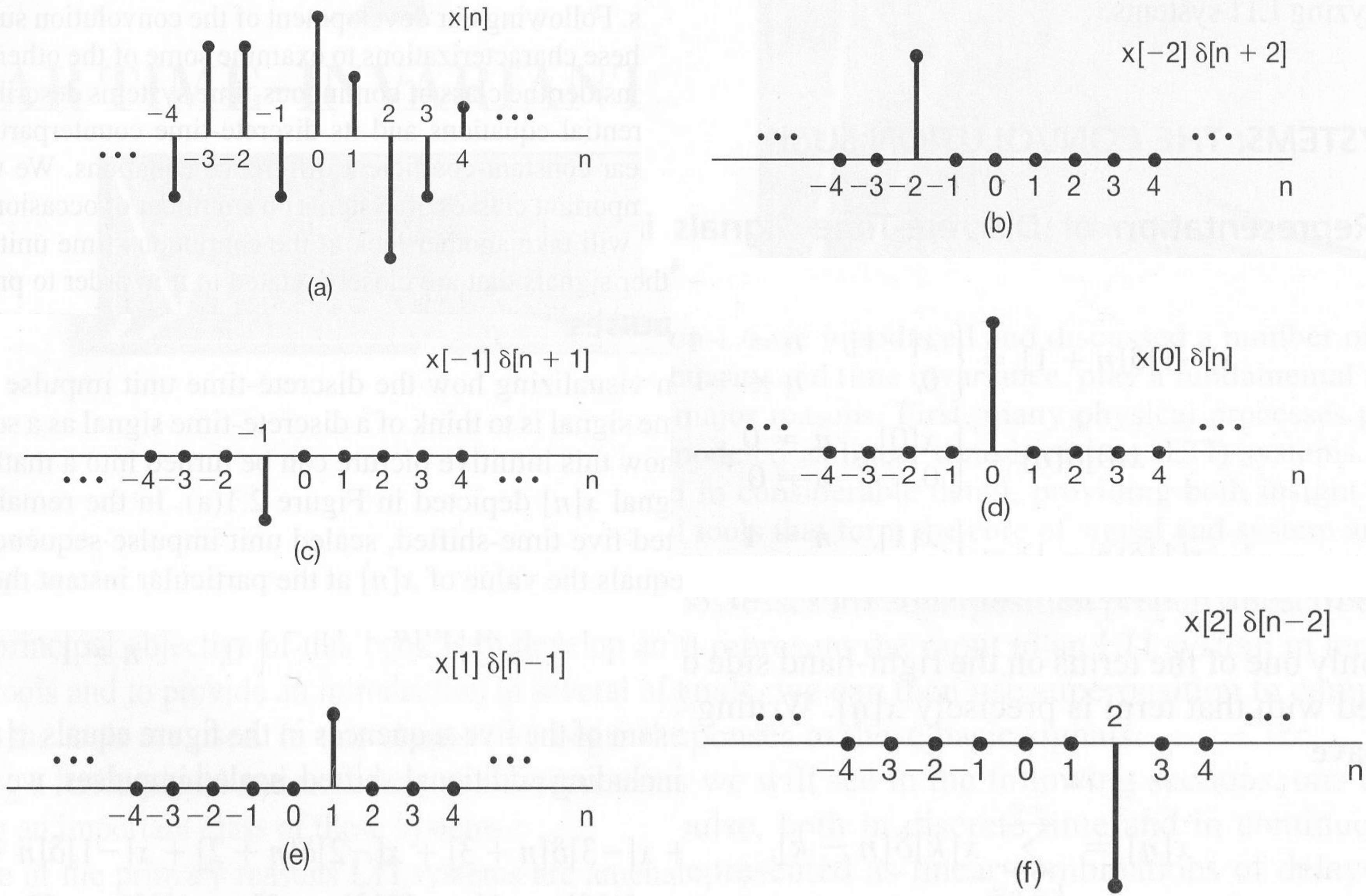
(Discrete-Time LTI Systems:The Convolution Sum)

一. 用单位脉冲表示离散时间信号

离散时间信号中,最简单的是 $\delta(n)$,我们已经看到可以由它的线性组合构成 $u(n)$，即：

$$u(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta(k)=\sum_{k=0}^{\infty}\delta(n-k)$$

对任何离散时间信号 $x(n)$,如果每次从其中取出一个点，就可以将信号拆开来，每次取出的一个点都可以表示为不同加权、不同位置的单位脉冲。


x[n]
(a)
x[−2] δ[n + 2]
(b)
x[−1] δ[n + 1]
(c)
x[0] δ[n]
(d)
x[1] δ[n−1]
(e)
x[2] δ[n−2]
(f)

于是有：
$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

表明：任何信号$x(n)$都可以被分解成移位加权的单位脉冲信号的线性组合。

二. 卷积和（Convolution sum）

如果一个线性系统对 $\delta(n-k)$ 的响应是$h_k(n)$，由线性特性就有系统对任何输入 $x(n)$ 的响应为：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h_k(n)$$

若系统具有时不变性，即：

若 $\delta(n)\rightarrow h(n)$，则 $\delta(n-k)\rightarrow h(n-k)$

因此，只要得到了LTI系统对$\delta(n)$的响应$h(n)$

—— 单位脉冲响应(impulse response)，

就可以得到LTI系统对任何输入信号$x(n)$的响应：

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)$$

这表明：一个LTI系统可以完全由它的单位脉冲响应来表征。这种求得系统响应的运算关系称为卷积和（The convolution sum）。

三. 卷积和的计算

计算方法：

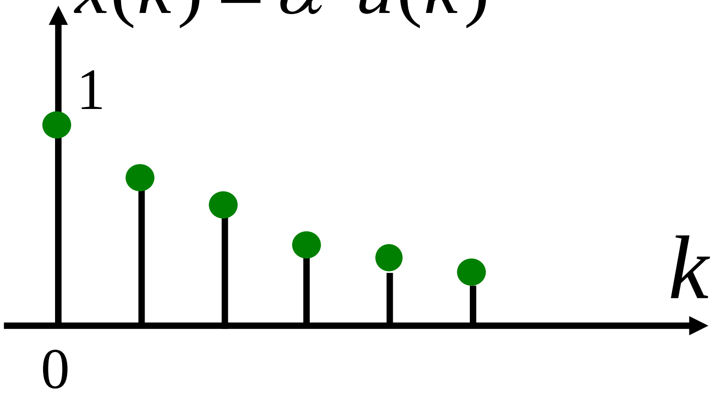
有图解法、列表法、解析法（包括数值解法）。

运算过程：

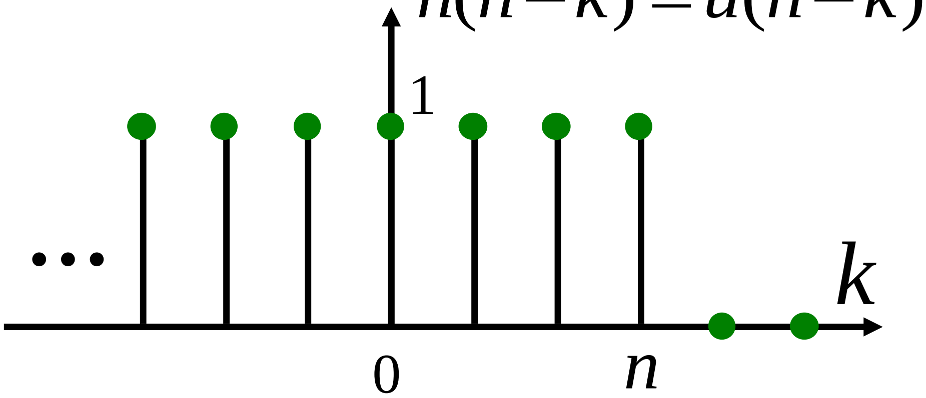
将一个信号 $x(k)$ 不动，另一个信号经反转后成为$h(-k)$,再随参变量 n 移位。在每个n值的情况下，将$x(k)$与 $h(n-k)$ 对应点相乘，再把乘积的各点值累加，即得到 n 时刻的 $y(n)$ 。

例1： $x(n)=\alpha^{n}u(n) \quad 0<\alpha<1 \qquad h(n)=u(n)$

$x(k)=\alpha^k u(k)$



$h(n-k)=u(n-k)$



$$y(n)=x(n)*h(n)$$

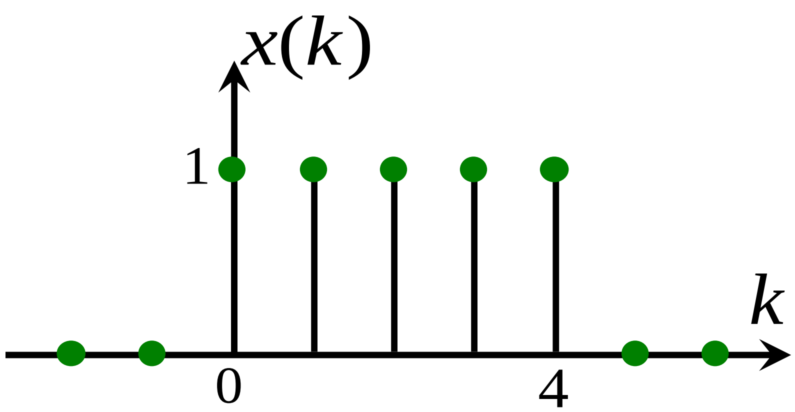
$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha^k u(k)u(n-k)$$

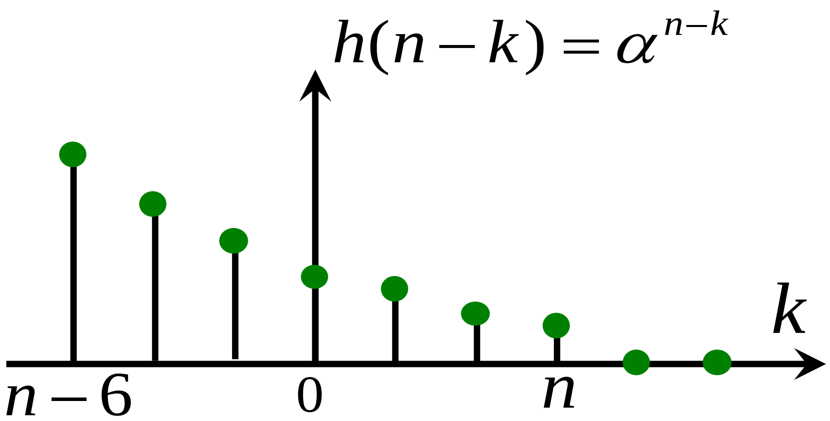
$$=\sum_{k=0}^{n}\alpha^k=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}u(n)$$

例2：

$$x(n)=\begin{cases}1 & 0\le n\le 4\\ 0 & otherwise\end{cases}$$

$$h(n)=\begin{cases}\alpha^{n} & \alpha>1,0\le n\le 6\\ 0 & otherwise\end{cases}$$





① $n<0$ 时， $y(n)=0$

② $0\le n\le 4$ 时， $$y(n)=\sum_{k=0}^{n}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\sum_{k=0}^{n}\alpha^{-k}$$

$$=\alpha^{n}\cdot\frac{1-\alpha^{-(n+1)}}{1-\alpha^{-1}}=\frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

③ $4\le n\le 6$ 时， $$y(n)=\sum_{k=0}^{4}\alpha^{n-k}=\alpha^{n}\cdot\frac{1-\alpha^{-5}}{1-\alpha^{-1}}$$

$$=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}$$

④ $6\le n\le 10$ 时， $$y(n)=\sum_{k=n-6}^{4}\alpha^{n-k}=\frac{\alpha^{n-4}-\alpha^{7}}{1-\alpha}$$

⑤ $n>10$ 时， $y(n)=0$

Page-65: 例2.5

通过图形帮助确定反转移位信号的区间表示，对于确定卷积和计算的区段及各区段求和的上下限是很有用的。

例3. 列表法

分析卷积和的过程，可以发现有如下特点：

① $x(n)$ 与 $h(n)$ 的所有各点都要遍乘一次；

② 在遍乘后，各点相加时，根据 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$，参与相加的各点都具有 $x(k)$ 与 $h(n-k)$ 的宗量之和为 n 的特点。

		$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$	$x(3)$
$h(n)$	$x(n)$	1	0	2	1
$h(-1)$	1	1	0	2	1
$h(0)$	2	2	0	4	2
$h(1)$	0	0	0	0	0
$h(2)$	3	3	0	6	3
$h(3)$	1	1	0	2	1

$y(-1)$ $y(0)$ $y(1)$ $y(2)$ $y(3)$ $y(4)$ $y(5)$ $y(6)$

优点：计算非常简单。

缺点：①只适用于两个有限长序列的卷积和；

②一般情况下，无法写出 $y(n)$ 的封闭表达式。

2.2 连续时间LTI系统：卷积积分

（Continuous-Time LTI Systems:The convolution integral）

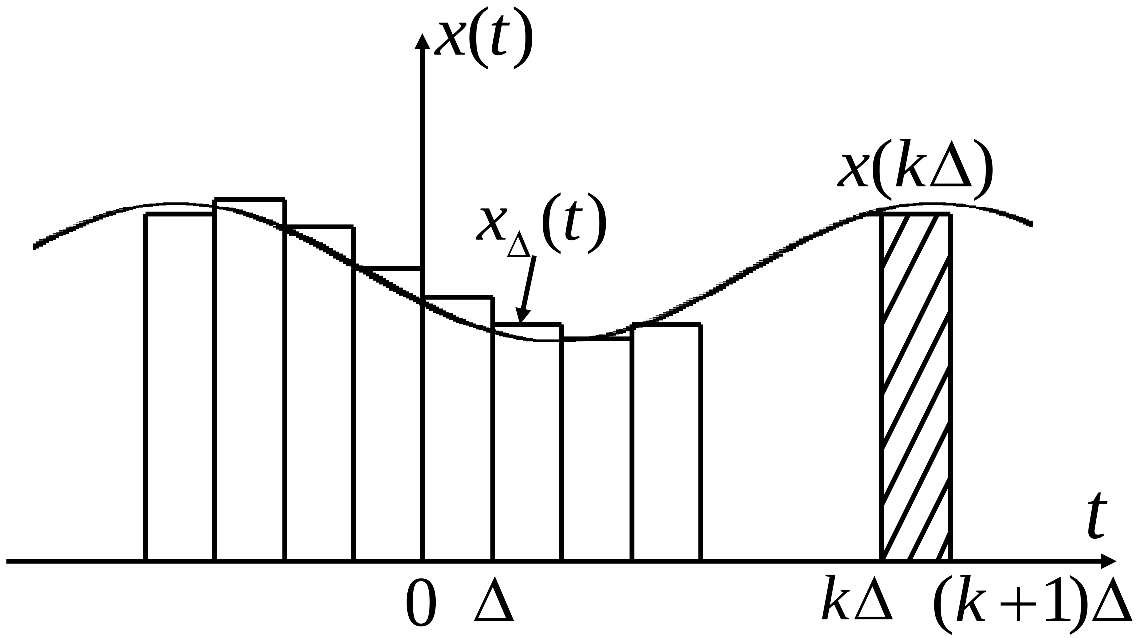
一. 用冲激信号表示连续时间信号

与离散时间信号分解的思想相一致，连续时间信号应该可以分解成一系列移位加权的单位冲激信号的线性组合。至少单位阶跃与单位冲激之间有这种关系：

$$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)d\tau$$

对一般信号 $x(t)$，可以将其分成很多Δ宽度的区段，用一个阶梯信号$x_{\Delta}(t)$近似表示$x(t)$。当$\Delta\to 0$ 时，有

$$x_{\Delta}(t)\to x(t)$$



引用 $\delta_\Delta(t)$**，即：** $\delta_\Delta(t)=\begin{cases}1/\Delta & 0<t<\Delta \\ 0 & otherwise\end{cases}$

则有： $\Delta\delta_\Delta(t)=\begin{cases}1 & 0<t<\Delta \\ 0 & otherwise\end{cases}$

第 k 个矩形可表示为： $x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$

这些矩形叠加起来就成为阶梯形信号 $x_\Delta(t)$

即： $$x_\Delta(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\cdot\Delta$$

当 $\Delta\rightarrow 0$ 时， $k\Delta\rightarrow\tau$ $\quad\Delta\rightarrow d\tau$ $\quad\sum\rightarrow\int$

$$\delta_\Delta(t-k\Delta)\rightarrow\delta(t-\tau)\qquad x_\Delta(t)\rightarrow x(t)$$

于是： $$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

表明：任何连续时间信号 $x(t)$ 都可以被分解成移位加权的单位冲激信号的线性组合。

二. 卷积积分（The convolution integral）

与离散时间系统的分析类似，如果一个线性系统对 $\delta(t-\tau)$ 的响应为 $h_\tau(t)$，则该系统对 $x(t)$ 的响应可表示为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h_\tau(t)d\tau$$

若系统是时不变的，即：若 $\delta(t)\rightarrow h(t)$，则有:

$\delta(t-\tau)\rightarrow h(t-\tau)$ 于是系统对任意输入 $x(t)$ 的响应可表示为：

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau=x(t)*h(t)$$

表明:LTI系统可以完全由它的单位冲激响应 $h(t)$ 来表征。这种求得系统响应的运算关系称为卷积积分（The convolution integral）。

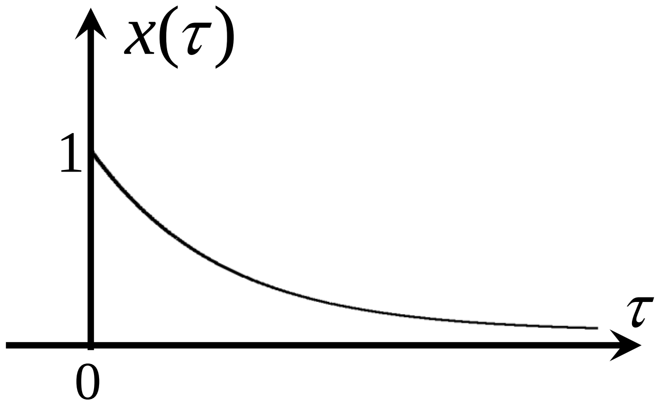
三. 卷积积分的计算

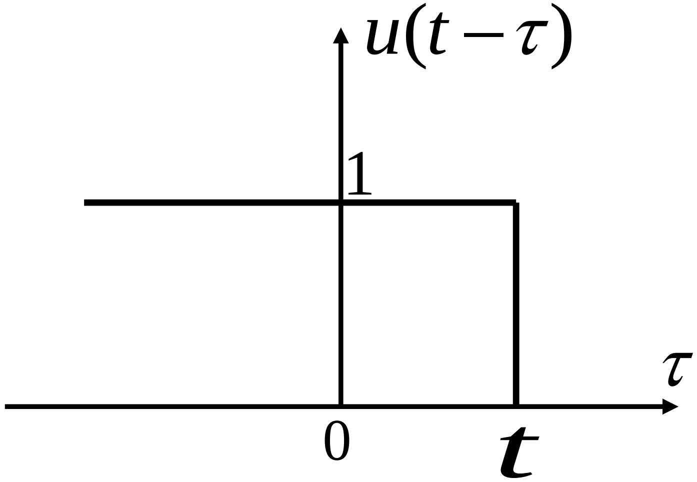
卷积积分的计算与卷积和很类似，也有图解法、解析法和数值解法。

运算过程的实质也是：参与卷积的两个信号中，一个不动，另一个反转后随参变量 t 移动。对每一个 t 的值，将 $x(\tau)$ 和 $h(t-\tau)$ 对应相乘，再计算相乘后曲线所包围的面积。

通过图形帮助确定积分区间和积分上下限是很有用的。

例1: $x(t)=e^{-at}u(t),\quad a>0\qquad h(t)=u(t)$





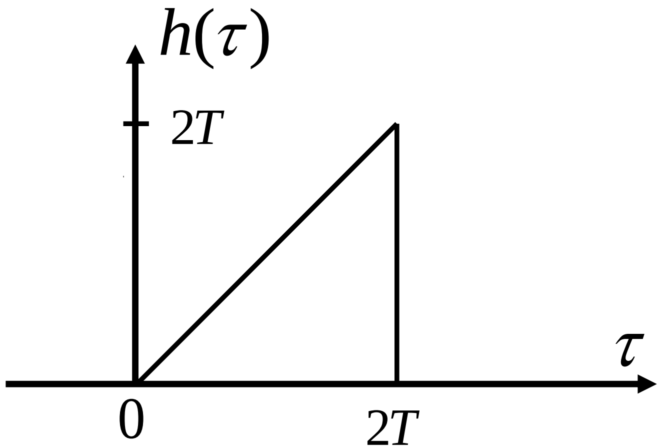
$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)$$

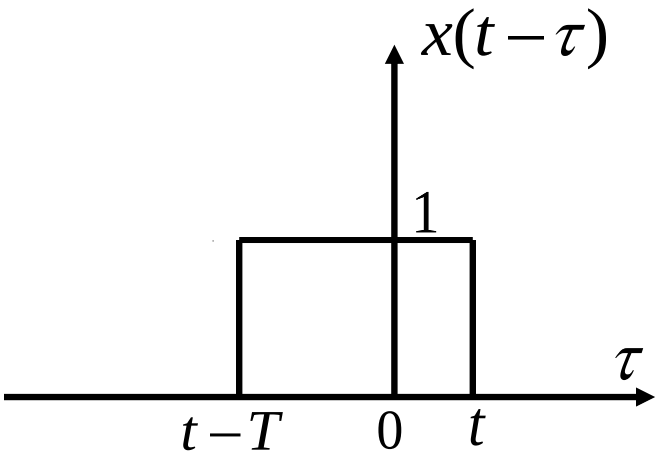
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-a\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{0}^{t}e^{-a\tau}d\tau=\frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)$$

例2：

$$x(t)=\begin{cases}1 & 0<t<T\\ 0 & otherwise\end{cases} \qquad h(t)=\begin{cases}t & 0<t<2T\\ 0 & otherwise\end{cases}$$





$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

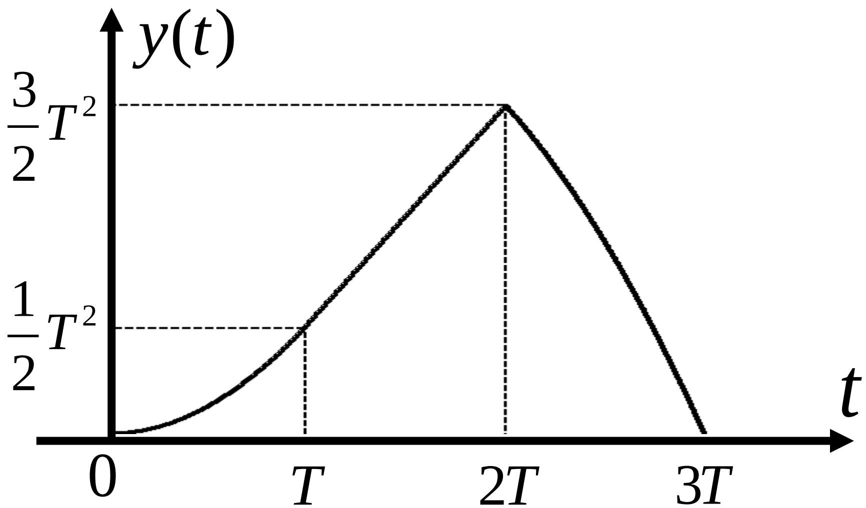
① 当 $t<0$ 时, $y(t)=0$

② 当 $0<t<T$ 时, $y(t)=\int_0^t \tau d\tau=\frac{1}{2}t^2$

③ 当 $T<t<2T$ 时, $y(t)=\int_{t-T}^t \tau d\tau=Tt-\frac{1}{2}T^2$

④ 当 $2T<t<3T$ 时, $y(t)=\int_{t-T}^{2T} \tau d\tau=2T^2-\frac{1}{2}(t-T)^2$

⑤ 当 $t>3T$ 时, $y(t)=0$



Page-74: 例2.8

2.3 线性时不变系统的性质

（Properties of Linear Time-Invariant Systems）

一. 卷积积分与卷积和的性质

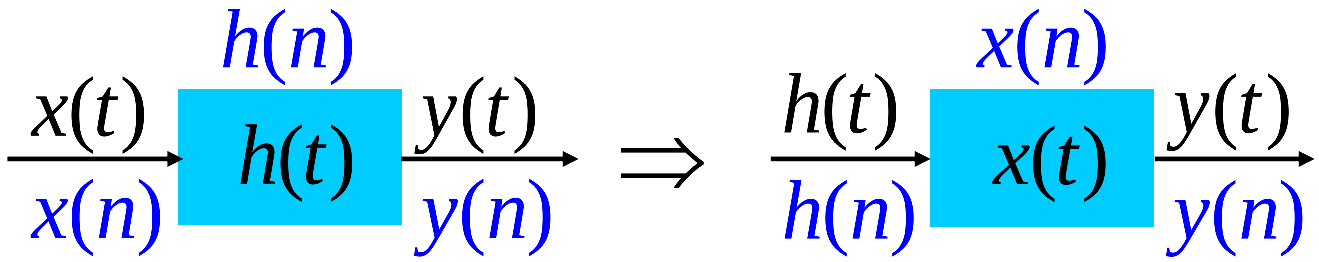
1. 交换律:

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(n-k)h(k)=h(n)*x(n)$$

$$y(t)=x(t)*h(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-\tau)h(\tau)d\tau=h(t)*x(t)$$



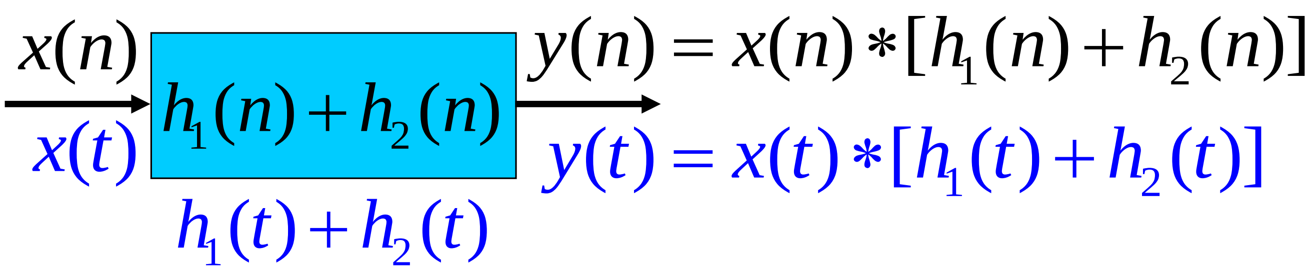
结论：

一个单位冲激响应是 $h(t)$ 的LTI系统对输入信号 $x(t)$ 所产生的响应，与一个单位冲激响应是$x(t)$的LTI系统对输入信号$h(t)$ 所产生的响应相同。

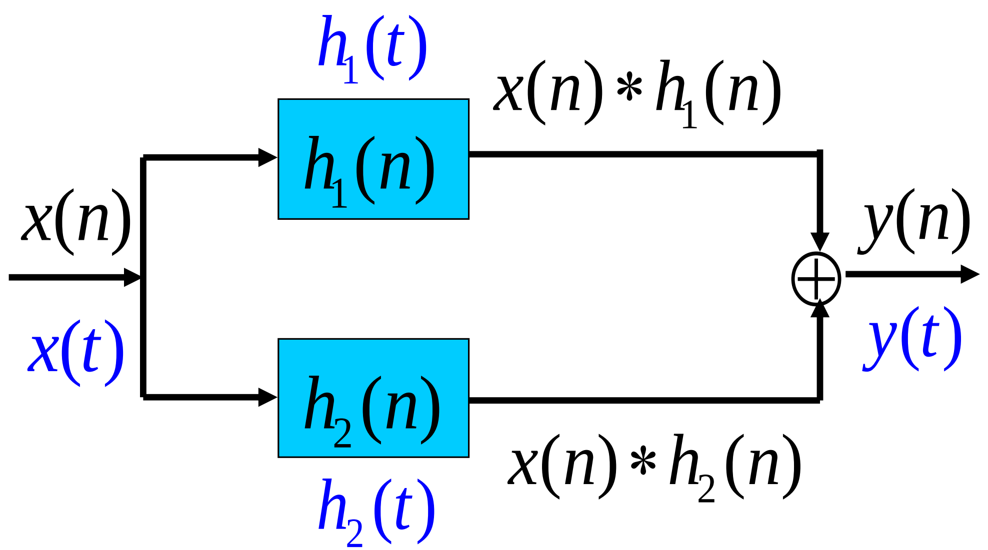
2. 分配律：

$$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

$$x(t)*[h_1(t)+h_2(t)]=x(t)*h_1(t)+x(t)*h_2(t)$$



$\Rightarrow$

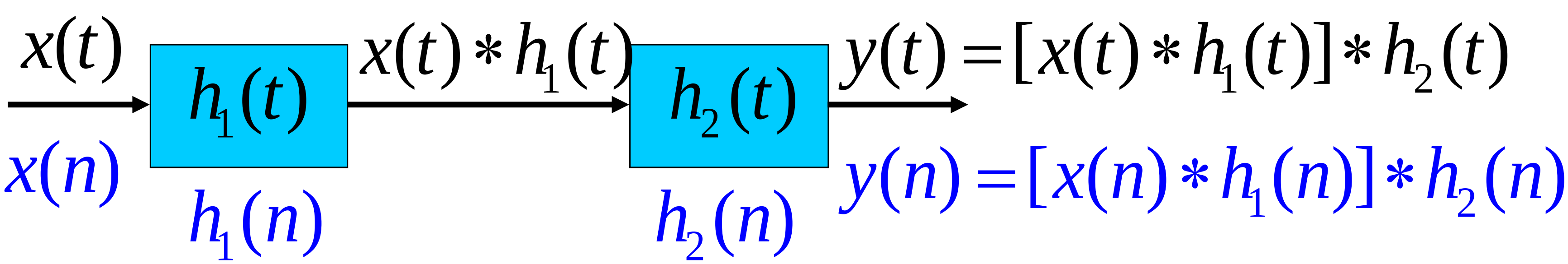


结论：两个LTI系统并联，其总的单位脉冲(冲激)响应等于各子系统单位脉冲(冲激)响应之和。

3. 结合律:

$$[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$$

$$[x(t)*h_1(t)]*h_2(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$$



$\Rightarrow$

$x(t)$ → $h_1(t)*h_2(t)$ → $y(t)=x(t)*[h_1(t)*h_2(t)]$

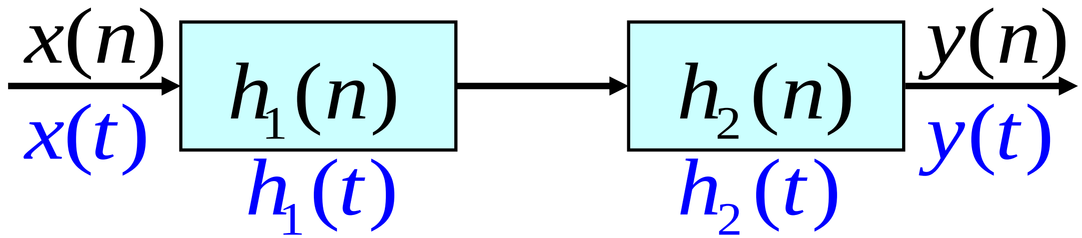
$x(n)$ → $h_1(n)*h_2(n)$ → $y(n)=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]$

结论:

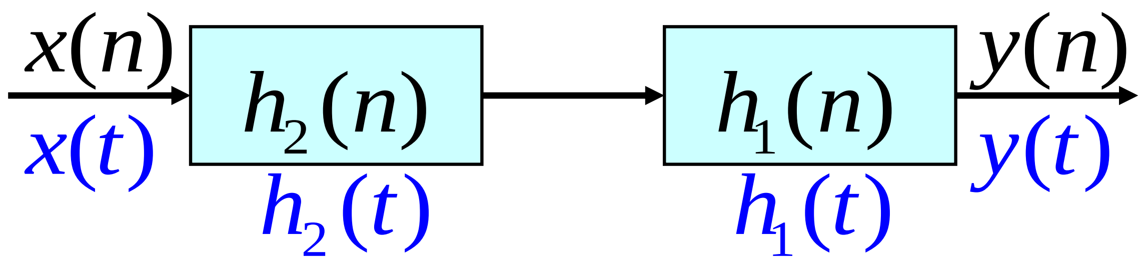
- **两个LTI系统级联时，系统总的单位冲激(脉冲)响应等于各子系统单位冲激(脉冲)响应的卷积。**
- **由于卷积运算满足交换律，因此，系统级联的先后次序可以调换。**

$$x(n)*h_1(n)*h_2(n)=x(n)*h_2(n)*h_1(n)$$

$$x(t)*h_1(t)*h_2(t)=x(t)*h_2(t)*h_1(t)$$



$=$



产生以上结论的前提条件：

①系统必须是LTI系统；

②所有涉及到的卷积运算必须收敛。

如： $x(t) \longrightarrow \boxed{\text{平方}} \longrightarrow \boxed{\text{乘2}} \longrightarrow y(t)=2x^2(t)$

若交换级联次序，即成为：

$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{乘2}} \longrightarrow \boxed{\text{平方}} \longrightarrow y(t)=4x^2(t)$

显然与原来是不等价的。因为系统不是LTI系统。

又如：若 $h_1(n)=\delta(n)-\delta(n-1), \quad h_2(n)=u(n)$ **，**
虽然系统都是LTI系统。当$x(n)=1$**时，如果交换级联次序，则由于**$x(n)*u(n)$ **不收敛，因而也是不允许的。**

$x(n)=1 \longrightarrow \boxed{h_1(n)} \xrightarrow{0} \boxed{h_2(n)} \longrightarrow y(n)=0$

4. 卷积运算还有如下性质：

卷积积分满足微分、积分及时移特性：

①若 $x(t)*h(t)=y(t)$，则

$$x'(t)*h(t)=x(t)*h'(t)=y'(t)$$

$$[\int_{-\infty}^{t}x(\tau)d\tau]*h(t)=x(t)*[\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau]=[\int_{-\infty}^{t}y(\tau)d\tau]$$

②若 $x(t)*h(t)=y(t)$，则

$$x(t-t_0)*h(t)=x(t)*h(t-t_0)=y(t-t_0)$$

卷积和满足差分、求和及时移特性：

① 若 $x(n)*h(n)=y(n)$，则

$$[x(n)-x(n-1)]*h(n)=x(n)*\left[h(n)-h(n-1)\right]$$
$$=y(n)-y(n-1)$$

$$[\sum_{k=-\infty}^{n}x(k)]*h(n)=x(n)*[\sum_{k=-\infty}^{n}h(k)]=\sum_{k=-\infty}^{n}y(k)$$

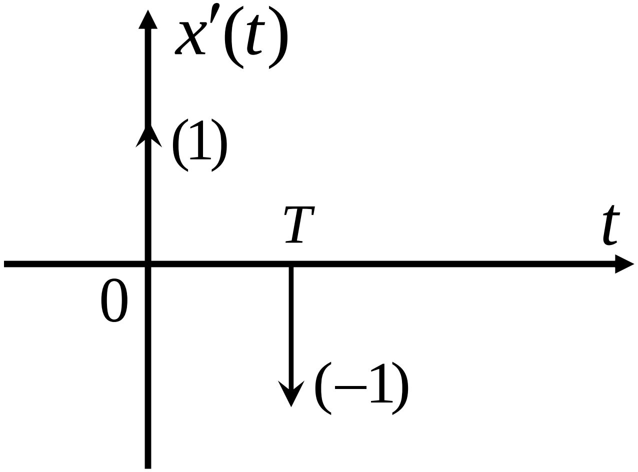
② 若 $x(n)*h(n)=y(n)$，则

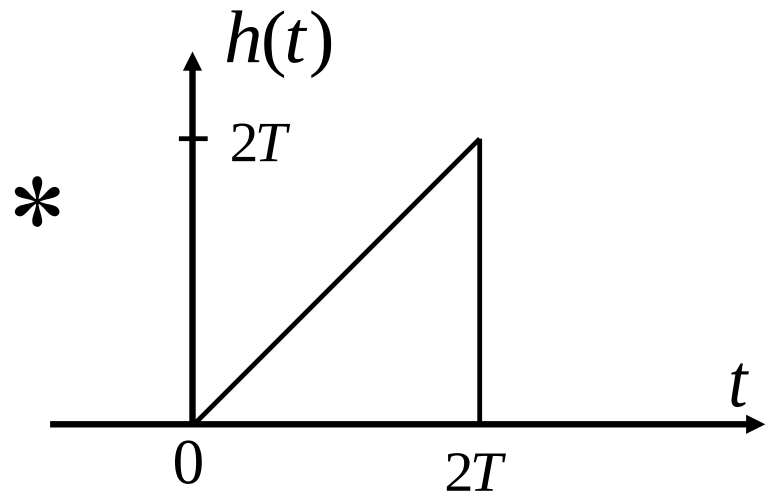
$$x(n-n_0)*h(n)=x(n)*h(n-n_0)=y(n-n_0)$$

恰当地利用卷积的性质可以简化卷积的计算：

例如：小节2.2中的例2

将 $x(t)$ **微分一次有:** $x'(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$

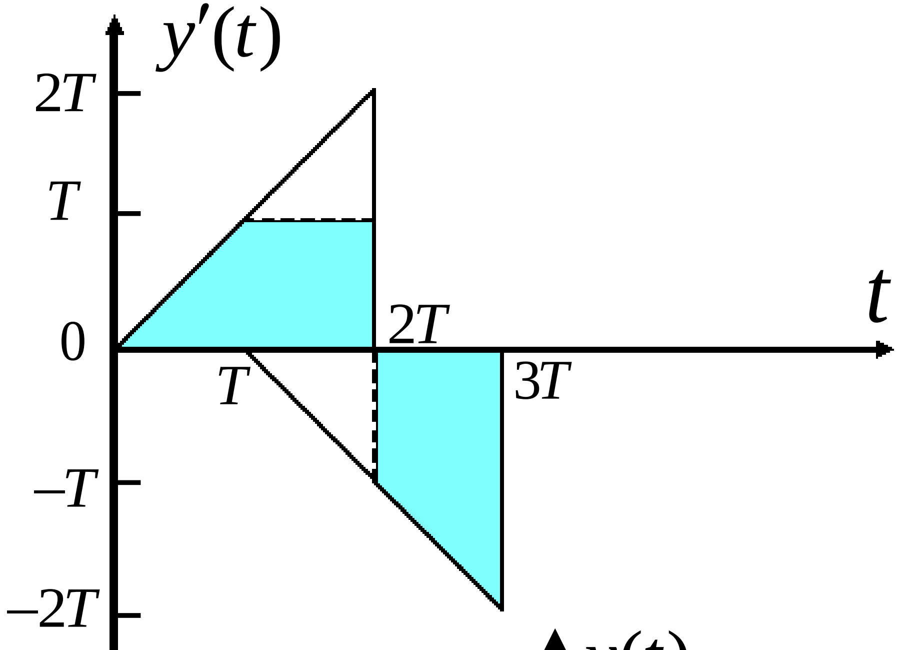




根据微分特性有:

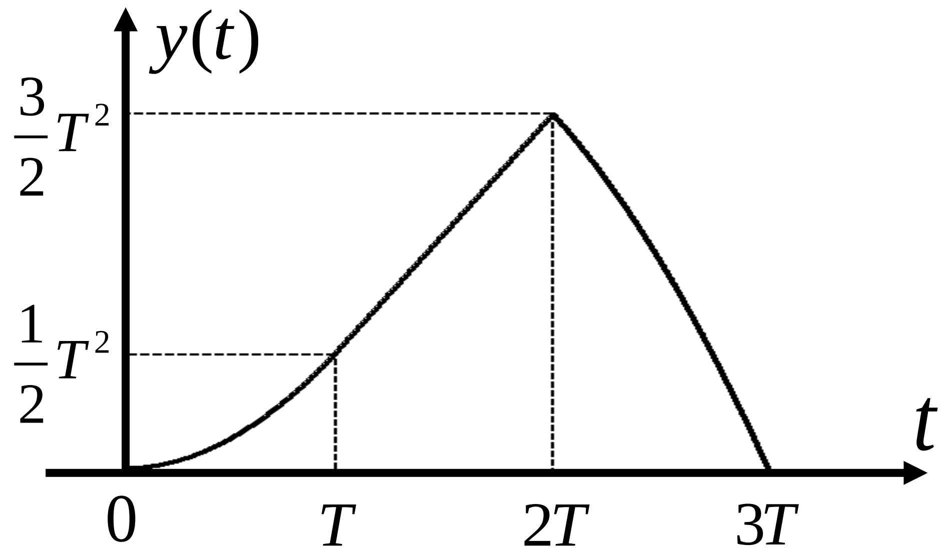
$$y'(t)=x'(t)*h(t)=h(t)*[\delta(t)-\delta(t-T)]$$

$$=h(t)-h(t-T)$$



利用积分特性即可得:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} y'(\tau)d\tau$$



二.LTI系统的性质

LTI 系统可以由它的单位冲激/脉冲响应来表征，因而其特性（记忆性、可逆性、因果性、稳定性）都应在其单位冲激/脉冲响应中有所体现。

1. 记忆性：

根据 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$，如果系统是无记忆的，

则在任何时刻 n，$y(n)$ 都只能和n时刻的输入有关，和式中只能有 $k=n$ 时的一项为非零，因此必须有：

$$h(n-k)=0,\quad k\neq n$$ 即：$\boxed{h(n)=0,\quad n\neq 0}$

所以，无记忆系统的单位脉冲/冲激响应为：

$$h(n)=k\delta(n) \qquad h(t)=k\delta(t)$$

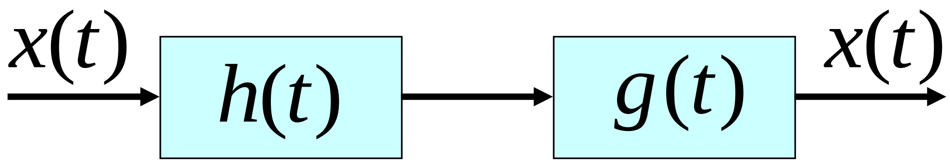
此时，$x(n)*h(n)=kx(n) \quad x(t)*h(t)=kx(t)$

当$k=1$时系统是**恒等系统**。

如果LTI系统的单位冲激/脉冲响应不满足上述要求，则系统是**记忆的**。

2. 可逆性：

如果LTI系统是可逆的，一定存在一个逆系统，且逆系统也是LTI系统，它们级联起来构成一个恒等系统。



因此有： $h(t)*g(t)=\delta(t)$ $\quad h(n)*g(n)=\delta(n)$

例如：延时器是可逆的LTI系统， $h(t)=\delta(t-t_0)$**，其逆系统是** $g(t)=\delta(t+t_0)$**，显然有：**

$$h(t)*g(t)=\delta(t-t_0)*\delta(t+t_0)=\delta(t)$$

累加器是可逆的LTI系统，其 $h(n)=u(n)$**，其逆系统是** $g(n)=\delta(n)-\delta(n-1)$**，显然也有：**

$$\begin{aligned} h(n)*g(n)&=u(n)*[\delta(n)-\delta(n-1)]\\ &=u(n)-u(n-1)=\delta(n) \end{aligned}$$

但差分器是不可逆的。微分器也是不可逆的。

3. 因果性：

由 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)$，当LTI系统是因果系统时，在任何时刻 n，$y(n)$都只能取决于 n 时刻及其以前的输入，即和式中所有 $k>n$ 的项都必须为零，

即：
$$h(n-k)=0, \qquad k>n$$

或：
$$\boxed{h(n)=0, \qquad n<0}$$

对连续时间系统有：$\boxed{h(t)=0, \qquad t<0}$

这是LTI系统具有因果性的充分必要条件。

4. 稳定性：

根据稳定性的定义，由 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$，若 $x(n)$ 有界，则 $|x(n-k)|\le A$；若系统稳定，则要求 $y(n)$ 必有界，由

$$|y(n)|=\left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right|\le \sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)||x(n-k)|\le A\sum_{k=-\infty}^{\infty}|h(k)|$$

可知，必须有：$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty}$

对连续时间系统，相应有：$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty}$

这是LTI系统稳定的充分必要条件。

5. LTI系统的单位阶跃响应：

在工程实际中，也常用单位阶跃响应来描述LTI系统。单位阶跃响应就是系统对 $u(t)$ 或$u(n)$ 所产生的响应。因此有:

$$s(t)=u(t)*h(t) \qquad s(n)=u(n)*h(n)$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau \qquad h(t)=\frac{d}{dt}s(t)$$

$$s(n)=\sum_{k=-\infty}^{n}h(k) \qquad h(n)=s(n)-s(n-1)$$

LTI系统的特性也可以用它的单位阶跃响应来描述。

2.4 用微分和差分方程描述的因果LTI系统

(Causal LTI Systems Described by Differential and Difference Equations)

在工程实际中有相当普遍的一类系统，其数学模型可以用线性常系数微分方程或线性常系数差分方程来描述。分析这类LTI系统，就是要求解线性常系数微分方程或差分方程。

一.线性常系数微分方程

（Linear Constant-Coefficient Differential Equation）

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}, \qquad a_k, b_k$$ 均为常数

求解该微分方程，通常是求出通解$y_h(t)$和一个特解$y_p(t)$，则 $y(t)=y_p(t)+y_h(t)$ 。特解$y_p(t)$是与输入 $x(t)$同类型的函数，通解$y_h(t)$是齐次方程的解，即 $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}=0$ 的解。欲求得齐次解，可根据齐次方程建立一个特征方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0$ 求出其特征根。在特征根均为单阶根时，可得出齐次解的形式为：

$$y_h(t)=\sum_{k=1}^{N} C_k e^{\lambda_k t},$$

其中C_k 是待定的常数。

要确定系数 C_k，需要有一组条件，暂且称为**附加条件**。仅仅从确定待定系数C_k的角度来看，这一组附加条件可以是任意的，包括附加条件的值以及给出附加条件的时刻都可以是任意的。

当微分方程描述的系统是线性系统时，必须满足系统零输入—零输出的特性。也就是系统在没有输入，即 $x(t)=0$ 时，$y(t)=0$ 。此时，微分方程就蜕变成齐次方程，因而描述线性系统的微分方程其齐次解必须为零，这就要求所有的 C_k都为零。

也就是要求确定待定系数所需的一组附加条件的值必须全部为零，因此， LCCDE具有一组零附加条件时，才能描述线性系统。

可以证明：当这组零附加条件在信号加入的时刻给出时，LCCDE描述的系统不仅是线性的，也是因果的和时不变的。

在信号加入的时刻给出的零附加条件称为零初始条件。

结论：

LCCDE具有一组全部为零的初始条件可以描述一个因果的LTI系统。这组条件是：

$$y(0)=0,\ \ y'(0)=0,\ \ \text{L L},\ \ y^{(N-1)}(0)=0$$

如果一个因果的LTI系统由LCCDE描述，且方程具有零初始条件，就称该系统初始是静止的或最初是松弛的。

如果LCCDE具有一组不全为零的初始条件，则可以证明它所描述的系统是增量线性的。

二. 线性常系数差分方程:

(Linear Constant-Coefficient Difference Equation)

一般的线性常系数差分方程可表示为:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

与微分方程一样，它的解法也可以通过求出一个特解$y_p(n)$ 和通解，即齐次解$y_h(n)$来进行，其过程与解微分方程类似。

要确定齐次解中的待定常数，也需要有一组附加条件。同样地，当LCCDE具有一组全部为零的初始条件时，所描述的系统是线性、因果、时不变的。

对于差分方程，还可以将其改写为：

$$y(n)=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)\right]$$

可以看出：要求出 $y(0)$**，不仅要知道所有的**$x(n)$**，还要知道**$y(-1),y(-2),\cdots\cdots,y(-N)$**，这就是一组初始条件，由此可以得出** $y(0)$**。进一步，又可以通过**$y(0)$**和** $y(-1),y(-2),\cdots\cdots,y(-N+1)$ **求得** $y(1)$**,依次类推可求出所有**$n\geq 0$ **时的解。**

若将差分方程改写为：

$$y(n-N)=\frac{1}{a_N}\left[\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)-\sum_{k=0}^{N-1}a_k y(n-k)\right]$$

则可由 $y(1),y(2),\cdots\cdots,y(N)$ 求得 $y(0)$，进而由 $y(0)$, $y(1),y(2),\cdots\cdots,y(N-1)$ 可求得 $y(-1)$，依次可推出 $n\le 0$ 时的解。

由于这种差分方程可以通过递推求解，因而称为**递归方程（recursive equation）**。

当 $a_k=0,k\neq 0$ 时，差分方程变为：

$$y(n)=\sum_{k=0}^{M}\frac{b_k}{a_0}x(n-k)$$

此时,解方程不再需要迭代运算，因而称为非递归方程（nonrecursive equation）。显然，此时方程就是一个卷积和的形式，其中 $h(n)=\dfrac{b_n}{a_0},\quad 0\le n\le M$

此时，系统单位脉冲响应 $h(n)$ 是有限长的,因而把这种方程描述的LTI系统称为FIR（Finite Impulse Response）系统。将递归方程描述的系统称为IIR（Infinite Impulse Response）系统,此时系统的单位脉冲响应是一个无限长的序列。

FIR系统与IIR系统是离散时间LTI系统中两类很重要的系统，它们的特性、结构以及设计方法都存在很大的差异。

由于无论微分方程还是差分方程的特解都具有与输入信号相同的函数形式，即特解完全是由输入信号决定的，因而特解所对应的这一部分响应称为受迫响应或强迫响应。齐次解所对应的部分由于与输入信号无关，也称为系统的自然响应。

增量线性系统的响应分为零状态响应和零输入响应。零输入响应由于与输入信号无关，因此它属于自然响应。零状态响应既与输入信号有关，也与系统特性有关，因而它包含了受迫响应，也包含有一部分自然响应。

三.由微分和差分方程描述的LTI系统的方框图表示（Block-Diagram Representation of the LTI System described by LCCDE）

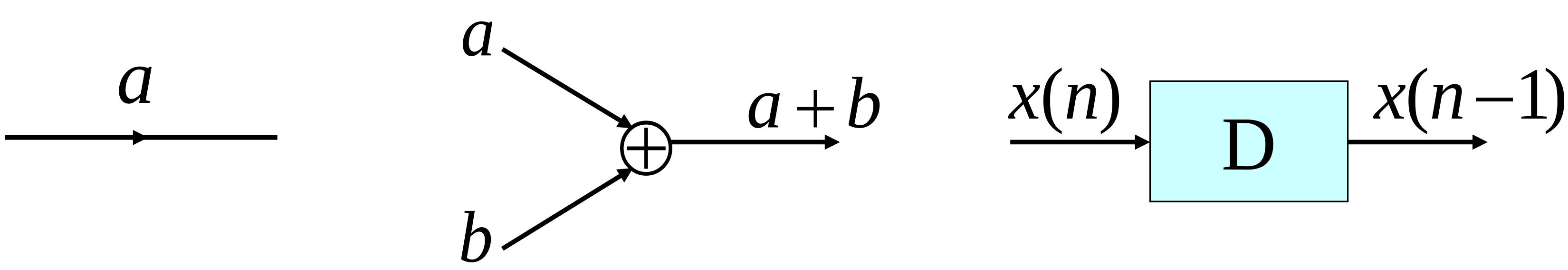
由LCCDE 描述的系统，其数学模型是由一些基本运算来实现的，如果能用一种图形表示方程的运算关系，就会更加形象直观；另一方面, 分析系统很重要的目的是为了设计或实现一个系统, 用图形表示系统的数学模型, 将对系统的特性仿真、硬件或软件实现具有重要意义。

不同的结构也会在设计和实现一个系统时带来不同的影响：如系统的成本、灵敏度、误差及调试难度等方面都会有差异。

1. 由差分方程描述的LTI系统的方框图表示：

由 $$y(n)=\frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)\right]$$ 可看出：

方程中包括三种基本运算：乘系数、相加、移位（延迟）。这些运算可用以下符号表示：

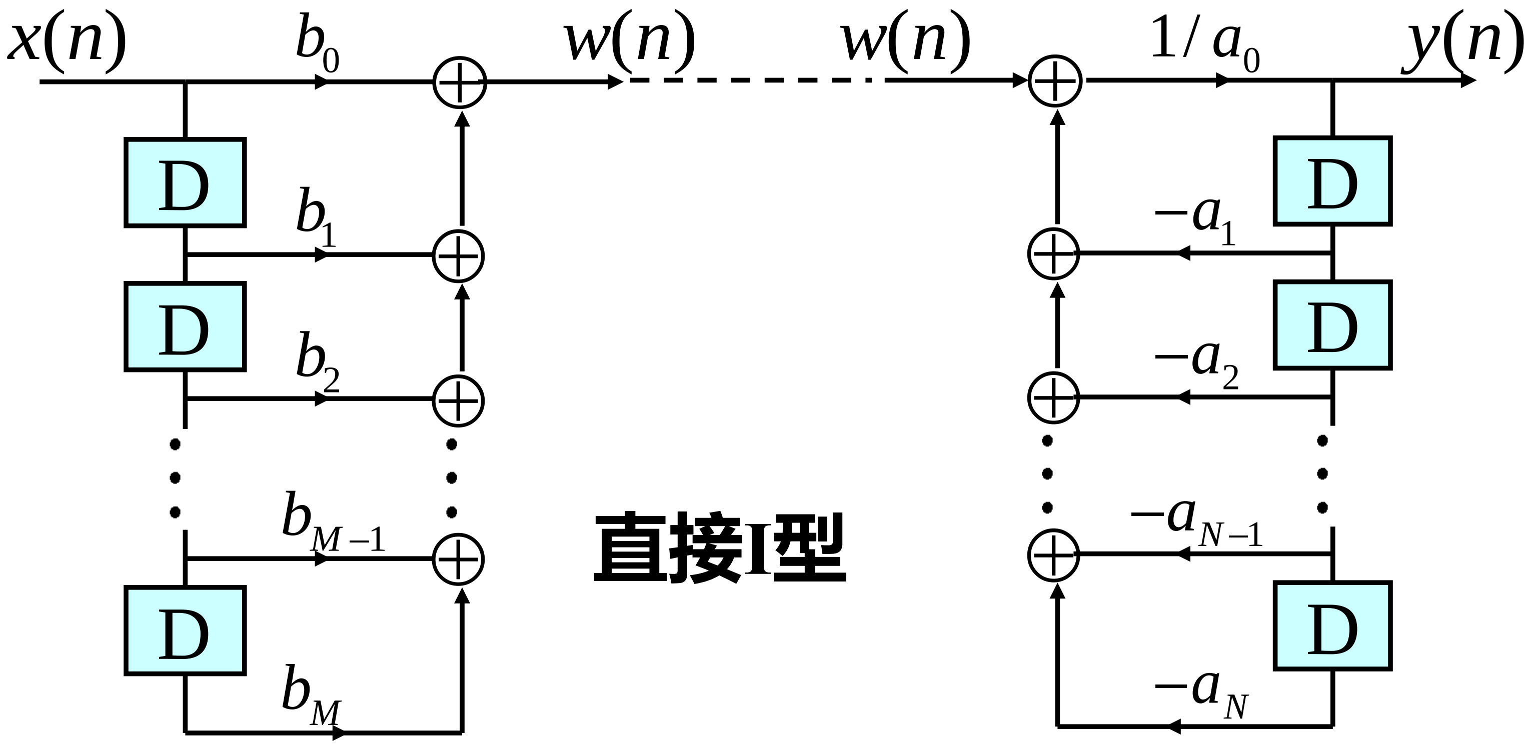


若令 $w(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$,则

$$y(n)=\frac{1}{a_0}\left[w(n)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)\right]$$

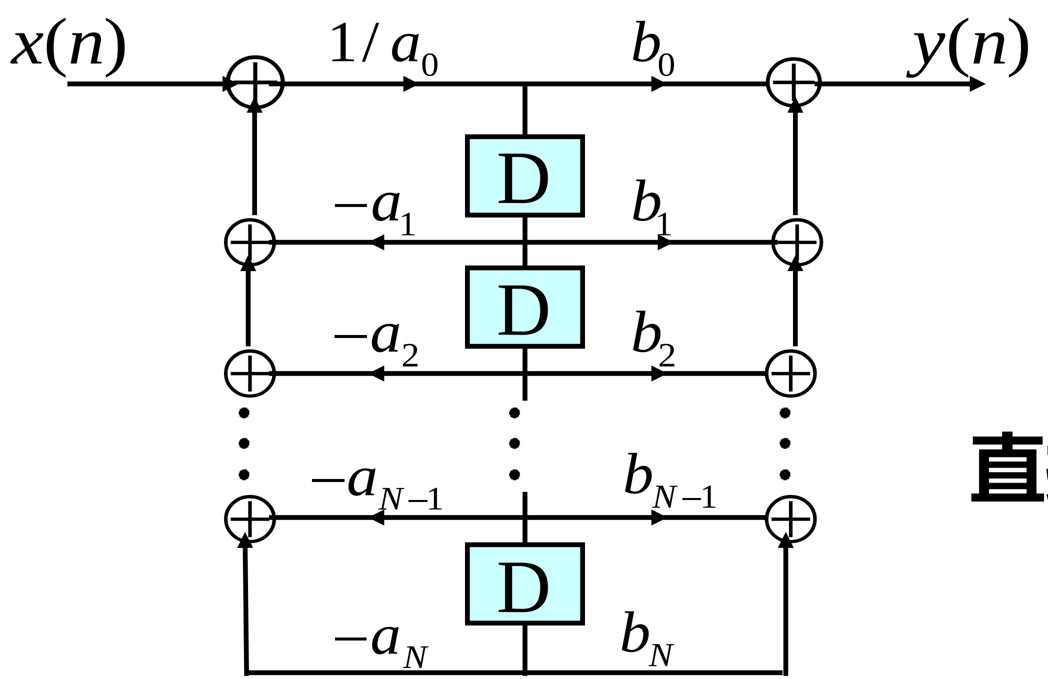
$$w(n)=\sum_{k=0}^{M}b_k x(n-k)$$

据此可得方框图：



直接I型

将其级联起来,就成为LCCDE描述的系统，它具有与差分方程完全相同的运算功能。显然, 它可以看成是两个级联的系统，可以调换其级联的次序, 并将移位单元合并，于是得到：



直接II型

2. 由微分方程描述的LTI系统的方框图表示：

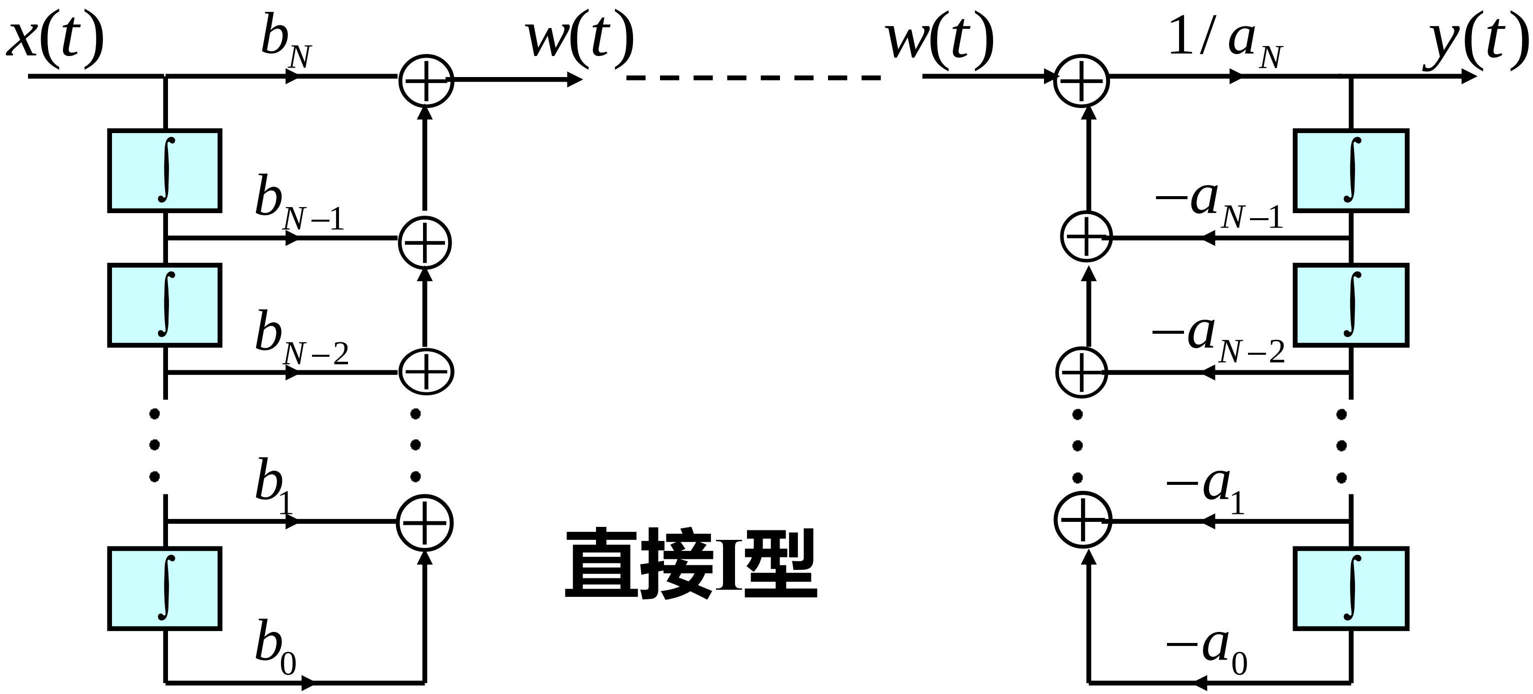
由 $\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$ 看出它也包括三种基本运算：微分、相加、乘系数。

但由于微分器不仅在工程实现上有困难，而且对误差及噪声极为灵敏，因此，工程上通常使用积分器而不用微分器。

将微分方程两边同时积分 N 次，即可得到一个积分方程：$\sum_{k=0}^{N} a_k y_{(N-k)}(t) = \sum_{k=0}^{N} b_k x_{(N-k)}(t)$

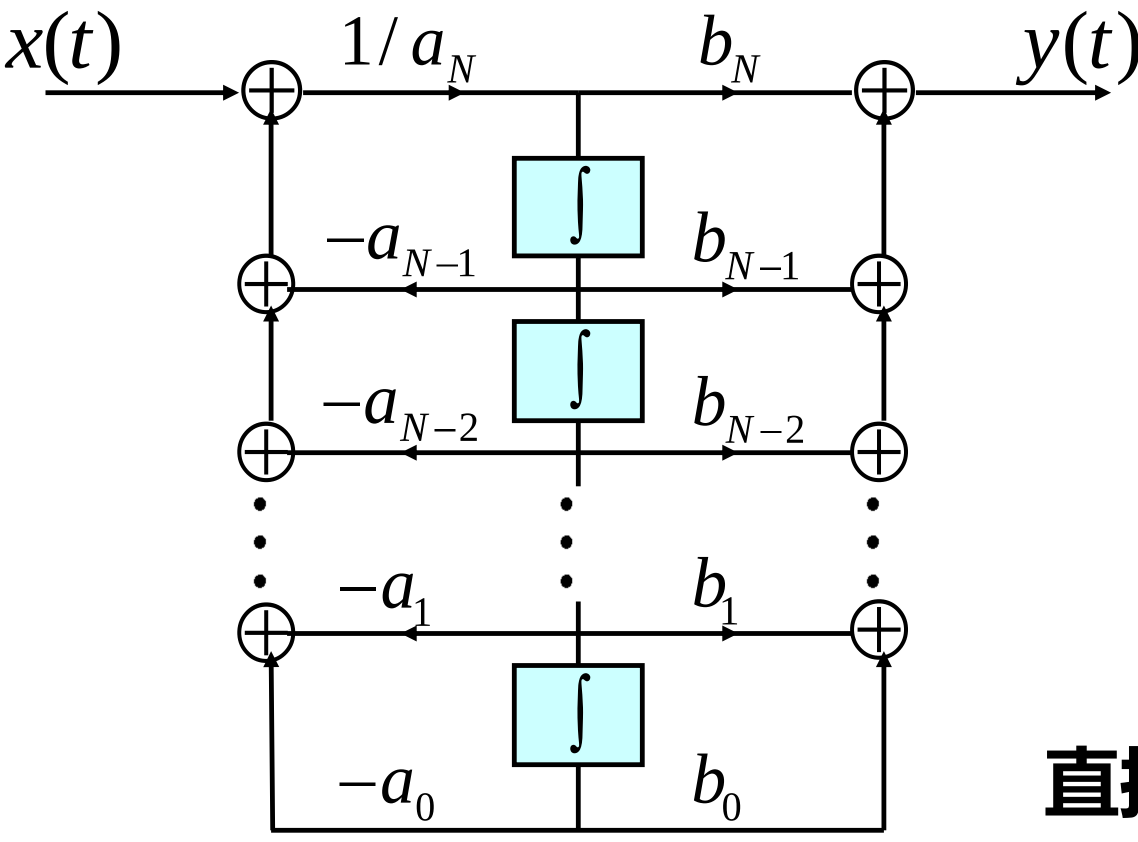
对此积分方程完全按照差分方程的办法有：

$$y(t)=\frac{1}{a_N}\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{N}b_k x_{(N-k)}(t)}_{w(t)}-\sum_{k=0}^{N-1}a_k y_{(N-k)}(t)\right]$$



直接I型

通过交换级联次序，合并积分器可得直接II型：



直接II型

2.5 小结（Summary）

本章主要讨论了以下内容：

1 信号的时域分解：

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$$

2 LTI系统的时域分析——卷积和与卷积积分

3 LTI系统的描述方法：

①用 $h(t)$、$h(n)$ 描述系统（也可用 $s(t)$、$s(n)$ 描述）；

②用LCCDE连同零初始条件描述LTI系统；

③ 用方框图描述系统（等价于LCCDE描述）。

4 LTI系统的特性与 $h(t)$、$h(n)$ 的关系：

- 记忆性、因果性、稳定性、可逆性与 $h(t)$、$h(n)$ 的关系；
- 系统级联、并联时，$h(t)$、$h(n)$ 与各子系统的关系。