1. 概述

输入加权和 $u_j = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ji} V_i + I_j, x_j = g(u), x_j = g(u_j)$

其中输入 $V_j = f(x_j)$，I_j : 外界的输入

1.1. 输入类型

1.1.1. 离散型

$$x_j = u_j \quad V_j = f(x_j) = \begin{cases} 1 & x_j \geqslant 0 \\ -1 & x_j < 0 \end{cases}$$

1.1.2. 连续型

$$\frac{\mathrm{d}x_j}{\mathrm{d}t} = -x_j + \sum_{i=1}^{n} \omega_{ji} V_j + I_j \quad V_j = f(x_j) = \frac{1}{1+e^{-x_j}} \quad f(x_j) \text{ 有多种选择}$$

1.2. 相空间的状态

1.2.1. 稳定性（平衡点）

状态轨迹最终收敛到状态空间的某一点

- 渐近稳定点

  在稳定点 $\vec{x}^*$ 的邻域 δ 内，从任何 点状态出发的轨迹都收敛到 $\vec{x}^*$

  $\vec{x}^*$: 吸引子 δ : 吸引域
- 不稳定的稳定点
- 伪稳定点

1.2.2. 极限环

1.2.3. 发散（不存在稳定点）

1.2.4. 混沌

在有限范围内发散、对初始条件很敏感

1.3. 应用

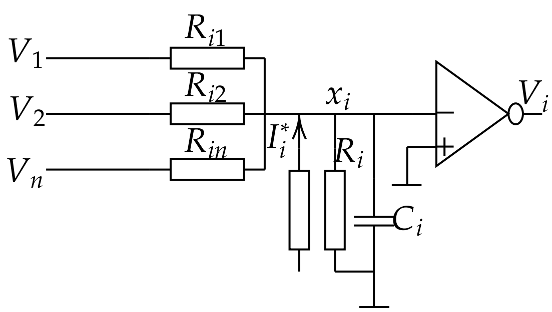
连续网络：优化　离散网络：联想记忆

2. 连续型反馈网络

2.1. 概述

$u_j=\sum_{i=1}^{n}\omega_{ji}V_j+I_i \quad \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{x_i}{I_i}+u_i \quad V_i=f(x_i) \quad f(\cdot):sigmoid$ 函数

硬件结构



$$C_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{x_i}{R_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k_{ij}}(V_j-x_i)+I_i^*$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}&=-\frac{x_i}{C_iR_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_iR_{ij}}(V_j-x_i)+\frac{I_i^*}{C_i}\\&=-\left(\frac{1}{C_iR_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_iR_{ij}}\right)x_i+\frac{1}{C_i}\sum_{j=1}^{n}\frac{V_j}{R_{ij}}+\frac{I_i^*}{C_i}\end{aligned}$$

令 $\frac{1}{I_i}=\frac{1}{C_iR_i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{C_jR_j},\omega_{ij}=\frac{V_j}{C_iR_{ij}},I_i=\frac{I_i^*}{C_i} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{I_i}x_i+\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}V_j+I_i$

则可知矢量 $\vec{x}=-\left[\frac{1}{I}\right]\vec{x}+[\omega]\vec{V}+\vec{I}$，其中 $\left[\frac{1}{I}\right]=diag\left(\frac{1}{I_1},\frac{1}{I_2},\cdots,\frac{1}{I_n}\right)$

2.2. 稳定性讨论

2.2.1. lyapunov 李亚普诺夫函数法

$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,t) \quad i=1,2,\cdots,n \quad f_i()$：非线性函数

对于该状态方程，找到一个可微的函数 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，若 $V(x_1,x_2,\cdots,x_n)\geqslant 0$，且 $x_i=0,i=1,2,\cdots,n$ 时，$V(x_1,\cdots,x_n)=0$，则该函数为 lyapunov 函数

若 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$，则该系统稳定

2.2.2. 能量函数 —— 对 lyapunor 函数的推广

对于 $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,t),i=1,2,\cdots,n$ ，找到可微的函数 $E(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，

若 $|E|<m$，则有界，若 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$，则系统稳定

对于连续反馈网络的能量函数定义为

$$E=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}V_iV_j-\sum_{i=1}^{n}I_iV_i+\sum_{i=1}^{n}\int_0^{V_i}\frac{1}{I_i}f^{-1}(\eta)\mathrm{d}\eta\quad V_i=f(x_i)\ \ f^{-1}(V_i)=x_i$$

- $|E|\leqslant\dfrac{1}{2}\sum_i\sum_j\omega_{ij}|V_i||V_j|+\sum_i|I_i||V_i|+\sum_{i=0}^{n}\int_0^{V_i}\dfrac{1}{I_i}f^{-1}(\eta)\,\mathrm{d}\eta=E_{max}$ 有界
- 如果 $\omega_{ij}=\omega_{ji},V_i=f(x_i)$ 单调上升，则 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\leqslant 0$

  证明：

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}&=-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\omega_{ij}V_j\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}-\frac{1}{2}\sum_i\sum_j\omega_{ji}V_i\frac{\mathrm{d}V_j}{\mathrm{d}t}-\sum_i I_i\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{I_i}\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}\\
&=\sum_i\left(-\sum_j\omega_{ij}V_j-I_i+\frac{x_i}{I_i}\right)\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}\\
&=\sum_i\left(-\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t}\right)\\
&=\sum_i\left[-\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)\right]\\
&=-\sum_i\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2\qquad\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\geqslant 0\ \text{单调上升}
\end{aligned}$$

$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=0$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0$，网络达到稳定

2.3. 优化

目标函数 $J(\vec{x})$ $\vec{x}\in R^n$，约束条件 $g(\vec{x})$，优化：在 $g(\vec{x})$ 的约束下，使得 $J(\vec{x})$ 最小

用连续反馈神经网络求解时，构造能量函数，从而求解

$$E=J(\vec{x})+Cg(\vec{x})\ \Rightarrow\ \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\sum_i\frac{\partial E}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\text{，当}\ \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial E}{\partial x_i},\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}=\sum_i\left[-\left(\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\leqslant 0$$

当 $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 0$ 时，求得稳定点

或当 $\dfrac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial E}{\partial V_i}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \sum\limits_i \dfrac{\partial E}{\partial V_i}\dfrac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = -\sum\left(\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\right)^2 \leqslant 0$

2.4. 设计步骤

- 设计能量函数 E，并加上 $\sum\limits_i \dfrac{1}{I_i}\int_0^{V_i} f^{-1}(\eta)\,\mathrm{d}\eta$
- 使得 $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\partial E}{\partial x_i}$
- 由状态方程 $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{x_i}{I_i} + \sum\limits_{j=1}^{n}\omega_{ij}V_j + I_i$，得到 ω_{ij}, I_i
- 用电路实现

2.5. 应用

2.5.1. A/D 转换：输入模拟量 A $\rightarrow$ 输出数字量 $V_i \in \{0,1\}$ "四位"

构建能量函数：目标函数 $J(\vec{V}) = \dfrac{1}{2}\left(A - \sum\limits_{i=0}^{3} V_i 2^i\right)^2 \rightarrow 0$

约束条件 $g(\vec{V}) = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=0}^{3}\left(2^i\right)^2 (V_i - 1)V_i$

$$E = \frac{1}{2}\left(A - \sum_{i=0}^{3} V_i 2^i\right)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{3}\left(2^i\right)^2 (V_i - 1)V_i + \sum_{i=0}^{3}\frac{1}{I_i}\int_0^{V_i} f^{-1}(\eta)\,\mathrm{d}\eta \quad ①$$

$$\frac{\partial E}{\partial V_i} = -\frac{\mathrm{d}V_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{\partial V_i}{\partial x_i}\cdot\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -C_i\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \quad \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_i} \approx C_i\right)$$

由 ① 式得 $\dfrac{\partial E}{\partial V_i} = -2^2 A + \sum\limits_{j=0}^{3} 2^{i+j} V_j + 2^{2i-1} + \dfrac{x_i}{I_i} = -C_i\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} \xlongequal{\text{令 } C_i=1} -\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$

其中 $\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{x_i}{I_i} - \sum\limits_{\substack{j=0\\ i\neq j}}^{3} 2^{i+j} V - 2^{2i-1} + 2^i A$

对照 $\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = -\frac{x_i}{I_i} + \sum_{j=0}^{n} \omega_{ij} V_j + I_i$，可得

$$\omega_{ij} = -2^{i+j}\ (i \neq j), I_i = -2^{2i-1} + 2^i A, \omega_{ij} = \omega_{ji}$$

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -2^2 & -2^3 \\ -2 & 0 & -2^3 & -2^4 \\ -2^2 & -2^3 & 0 & -2^5 \\ -2^3 & -2^4 & -2^5 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} I_0 = -0.5 + A \\ I_1 = -2 + 2A \\ I_2 = -8 + 4A \\ I_3 = -32 + 8A \end{cases}$$

2.5.2. TSP（旅行商）问题

问题：旅行商跑遍 n 个城市所走的距离最短

城市 \ 顺序	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1

关联矩阵（每一行、每一列只有一个元素为 1，其余为 0）

关联矩阵元素：V_{xi}

目标函数：$J(\vec{V}) = \frac{D}{2} \sum_{x} \sum_{\substack{i \\ x \neq y}} \sum_{y} d_{xy} V_{xi} (V_{y,i+1} + V_{y,i-1})$

约束条件：$g(\vec{V}) = \frac{A_1}{2} \sum_{i} \sum_{\substack{x \\ x \neq y}} \sum_{y} V_{xi} V_{yi} + \frac{A_2}{2} \sum_{x} \sum_{\substack{i \\ i \neq j}} \sum_{j} V_{xi} V_{xj} + \frac{A_3}{2} \left(\sum_{x} \sum_{i} V_{xi} - n \right)^2$