第一章　　几何光学

1.1、几何光学的基本概念

基本概念

- 本身发光或者被其他光源照明后发光的几何点称为发光点(点光源)。

在几何光学中，发光点被抽象为一个既无体积又无大小只有几何位置的几何点。

- 发光体向四周发出的带有辐射能量的几何线条称为光线。

几何光学中光线被抽象成既无直径又无体积只有位置和方向的几何线。

成立条件：

（1）光波波长远小于空间障碍物或反射、折射界面尺寸

（2）介质是均匀和各向同性的

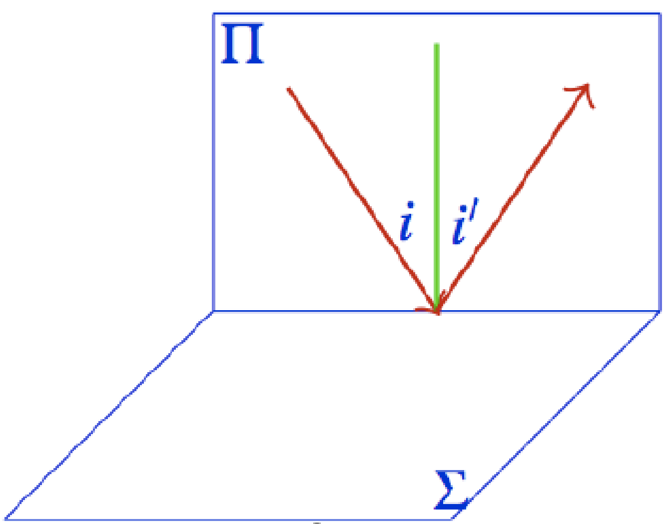
（3）光强不是很强

1.2、几何光学的实验定律

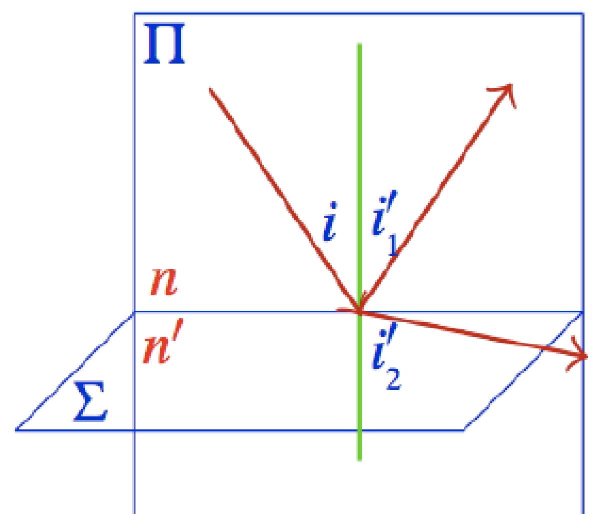
- 光的直线传播定律

光在真空或均匀介质中沿直线传播。

- 光的反射定律
- 光的折射定律



$$i = i'$$

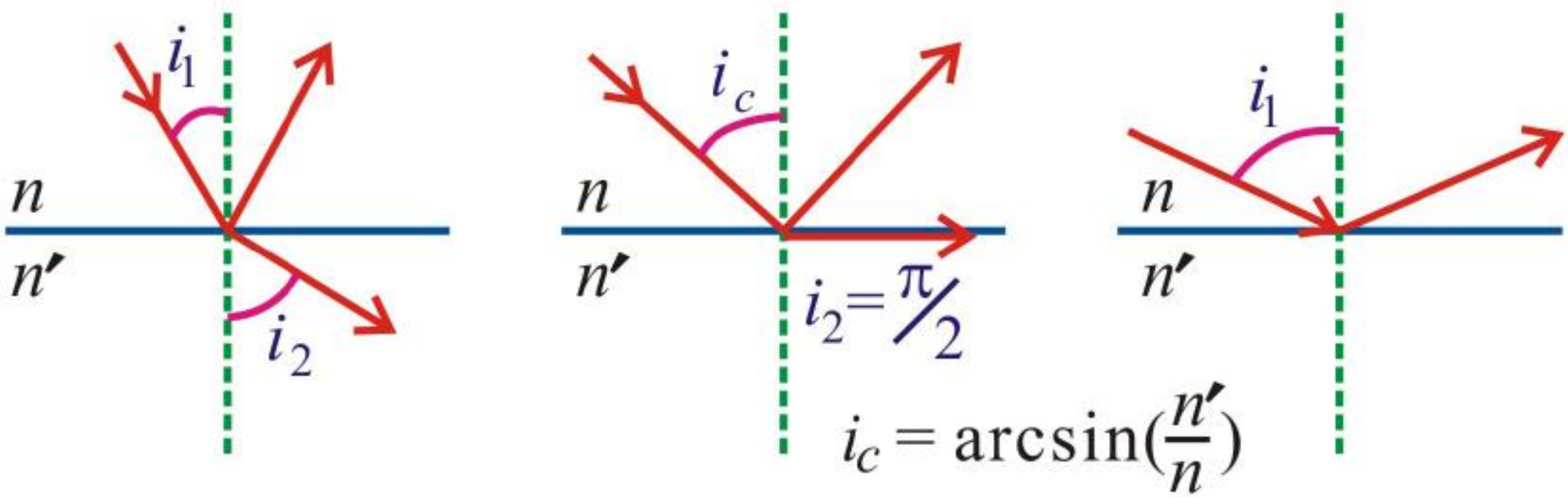


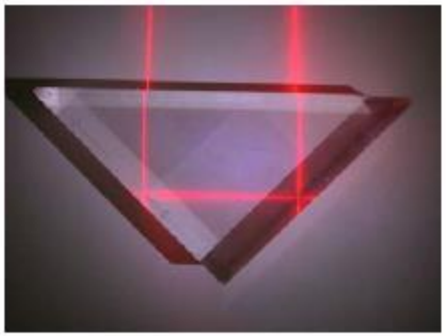
斯涅尔定律

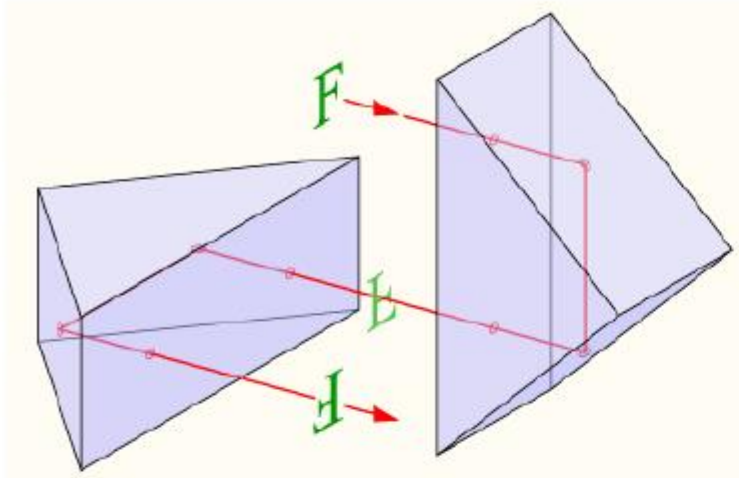
$$n \sin i = n' \sin i'_2$$

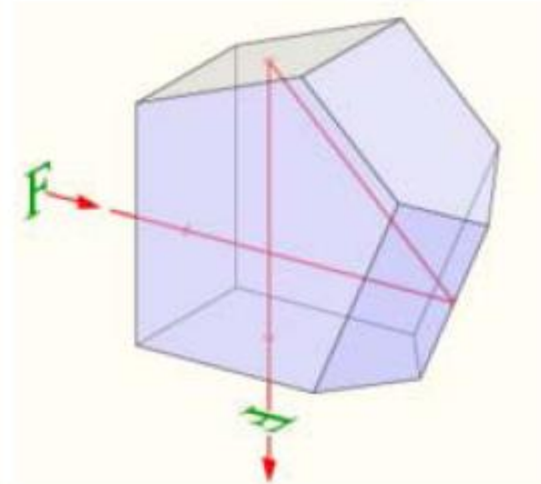
●折射率大的介质称为光密介质(optically thicker medium)，折射率小的介质称为光疏介质(optically thinner medium)。

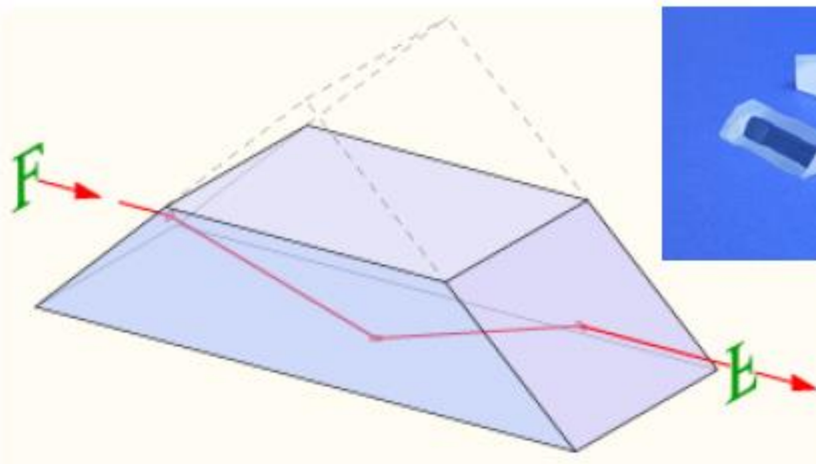
●当光从光密介质射到光疏介质表面时(内反射)，可能会出现全反射现象。

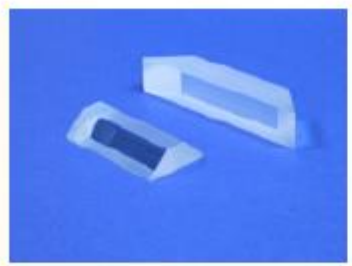





F

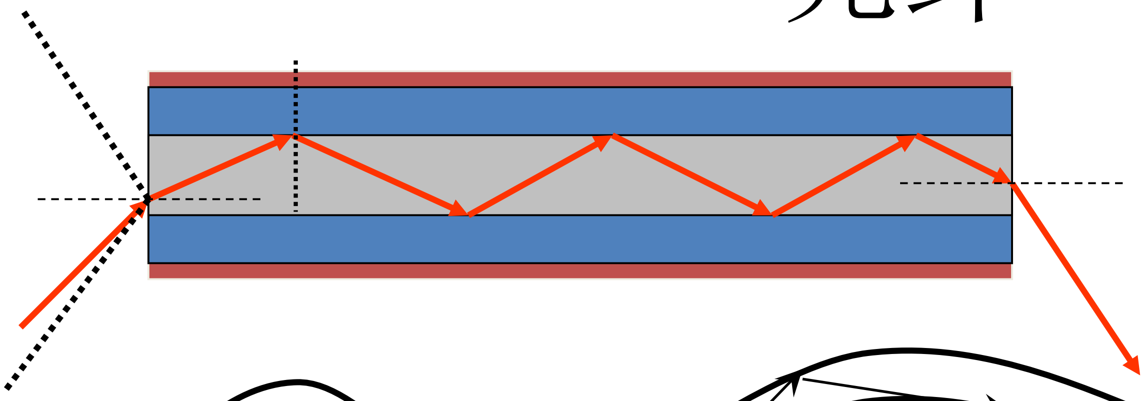

F


F

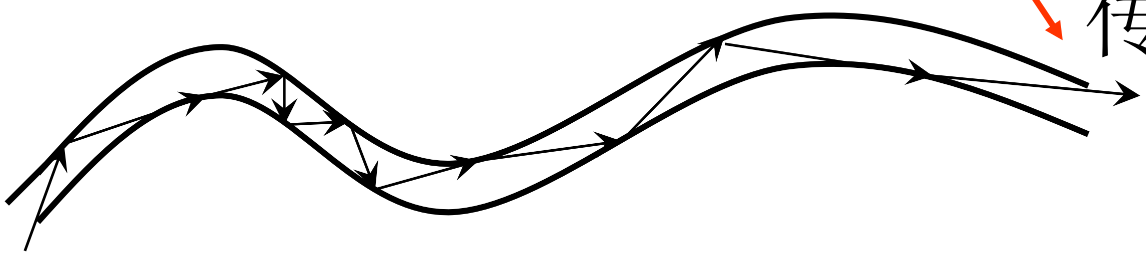


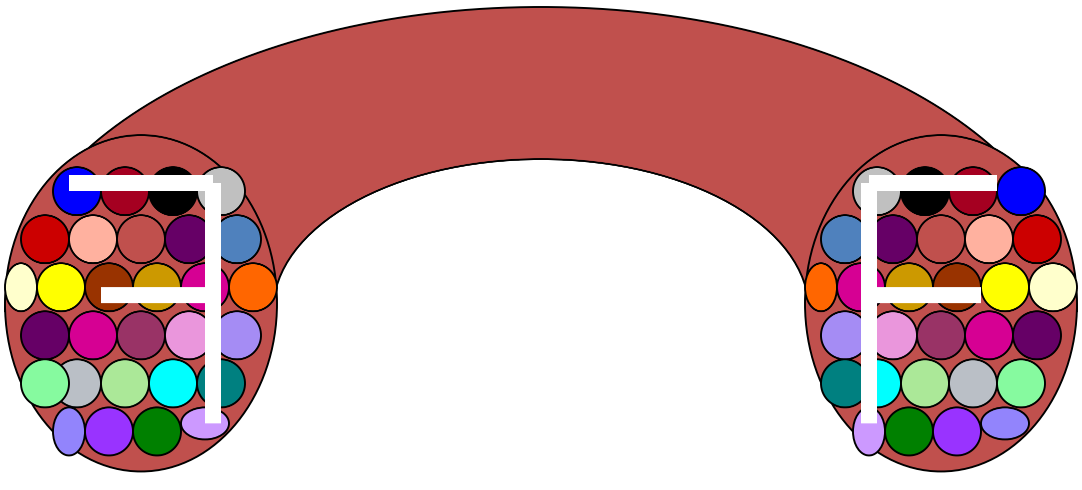

SAMSUNG
GX
schneider-KREUZNACH

光纤



单根光线不能传输图像

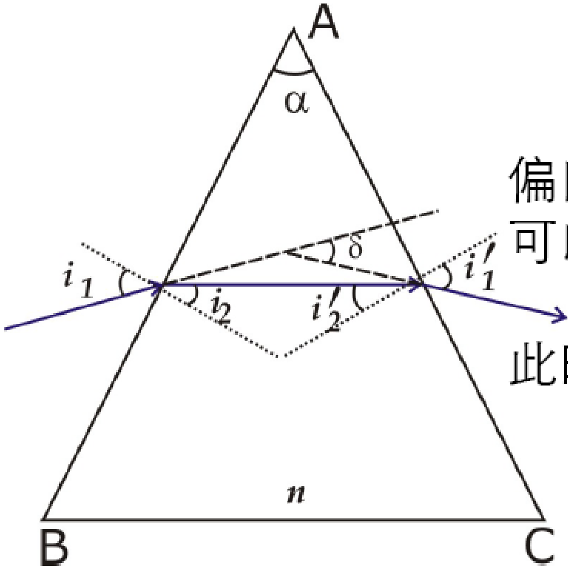




三棱镜是由透明介质做成的棱柱体，其横截面为三角形。

- 棱镜偏向角与顶角的关系

$$\delta=(i_1-i_2)+((i_1'-i_2')=(i_1+i_1')-(i_2+i_2')$$



$$\alpha=i_2+i_2'$$

$$\therefore\delta=i_1+i_1'-\alpha$$

偏向角有最小值,称为最小偏向角 δ_m

可以证明,产生最小偏向角的充要条件是

$$i_1=i_1',i_2=i_2'$$

此时

$$n=\frac{\sin\frac{\alpha+\delta_m}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

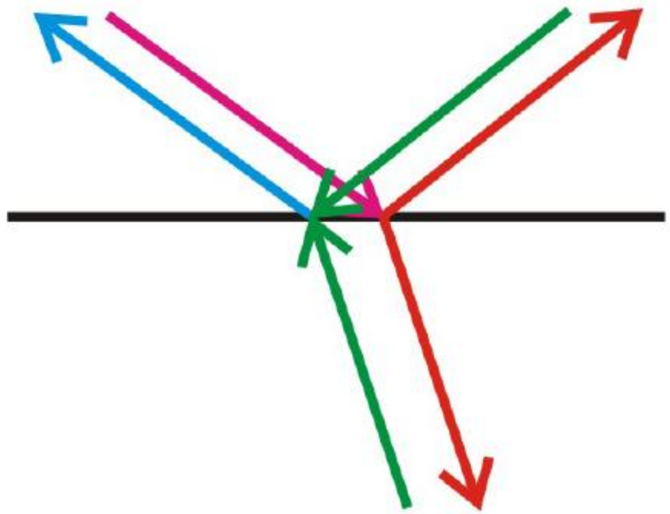
可以用来测量棱镜材料的折射率。

➢ **光的独立传播定律：**

自不同方向或由不同物质发出的光线相交，对每一光线的独立传播不发生影响

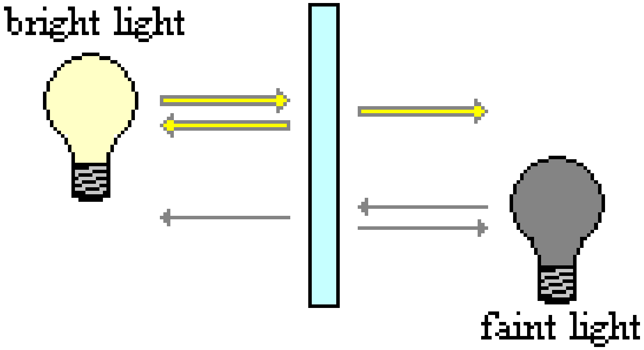
➢ **光路可逆原理**

在光的传播、反射、折射中，光线如果沿折射和反射方向入射时，相应的反射光和折射光将沿原来的入射光方向。



对成像系统，物和像是共轭的。

单向镜子



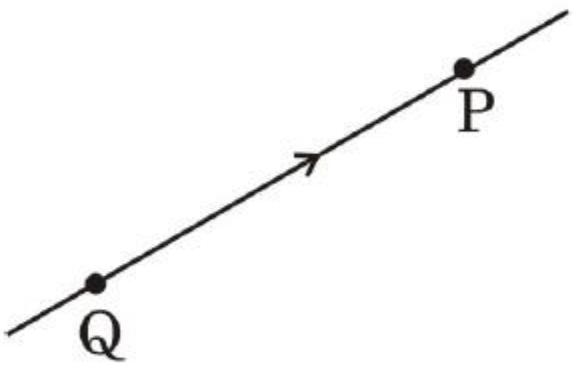
左侧的房间里面，光线非常强，而右侧的光则非常弱。

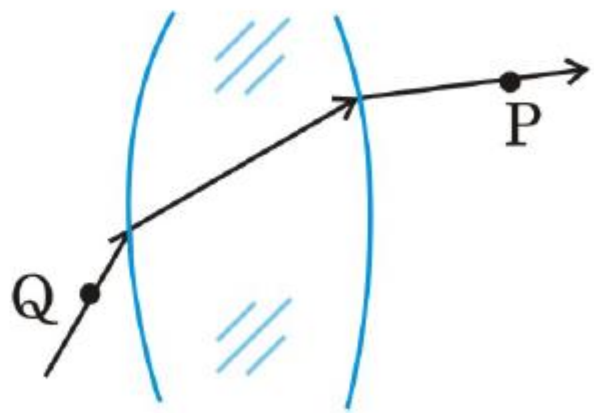
1.3、费马原理

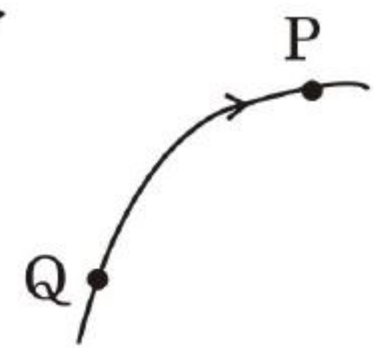
1. 光程

折射率X光经过的路程

光在介质中传播所需要的时间＝光程/真空中光速





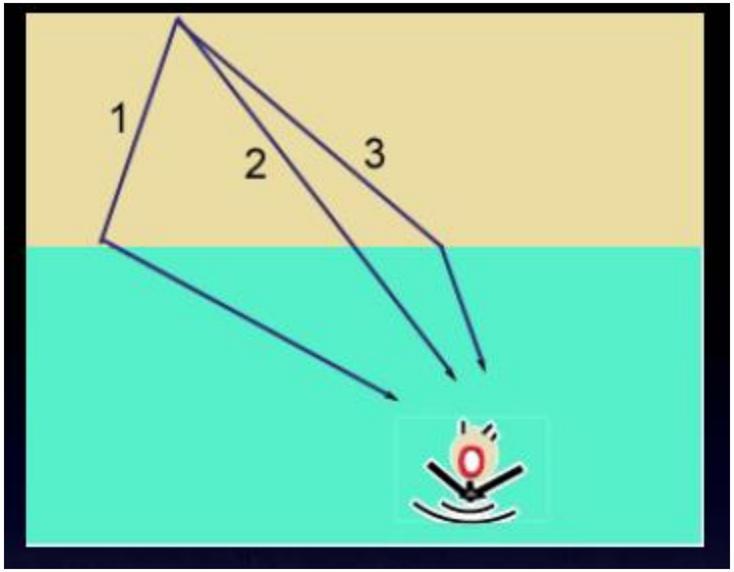


$$L = nl \qquad L = \sum n_i l_i \qquad L = \int_P^Q n(\vec{r})\,\mathrm{d}l$$

- 你在湖边看到一个小孩溺水，你希望用最快的速度去救他，该怎么办？

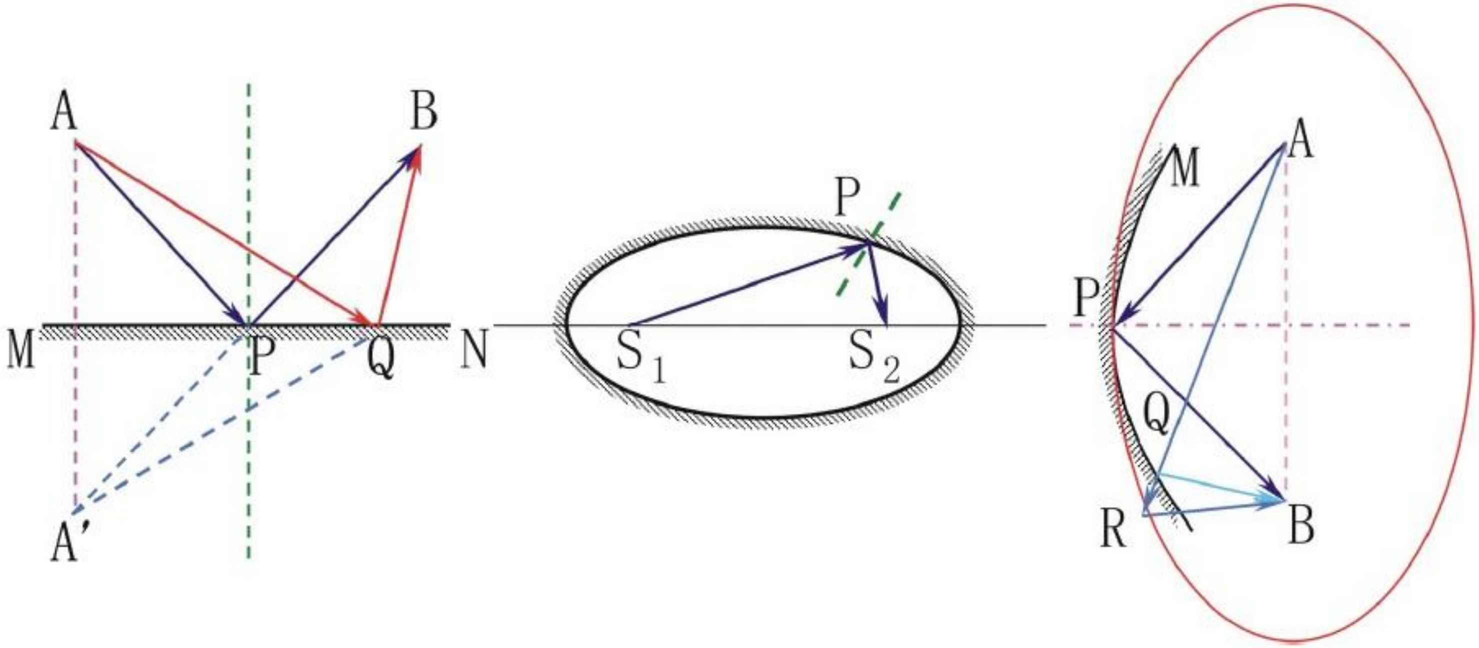
当然你不会选择(1)，但是你也会放弃直线(2)，而改以(3)来取代，为什么？

- 费马用同样的想法描述光行进的路径，称为费马原理。

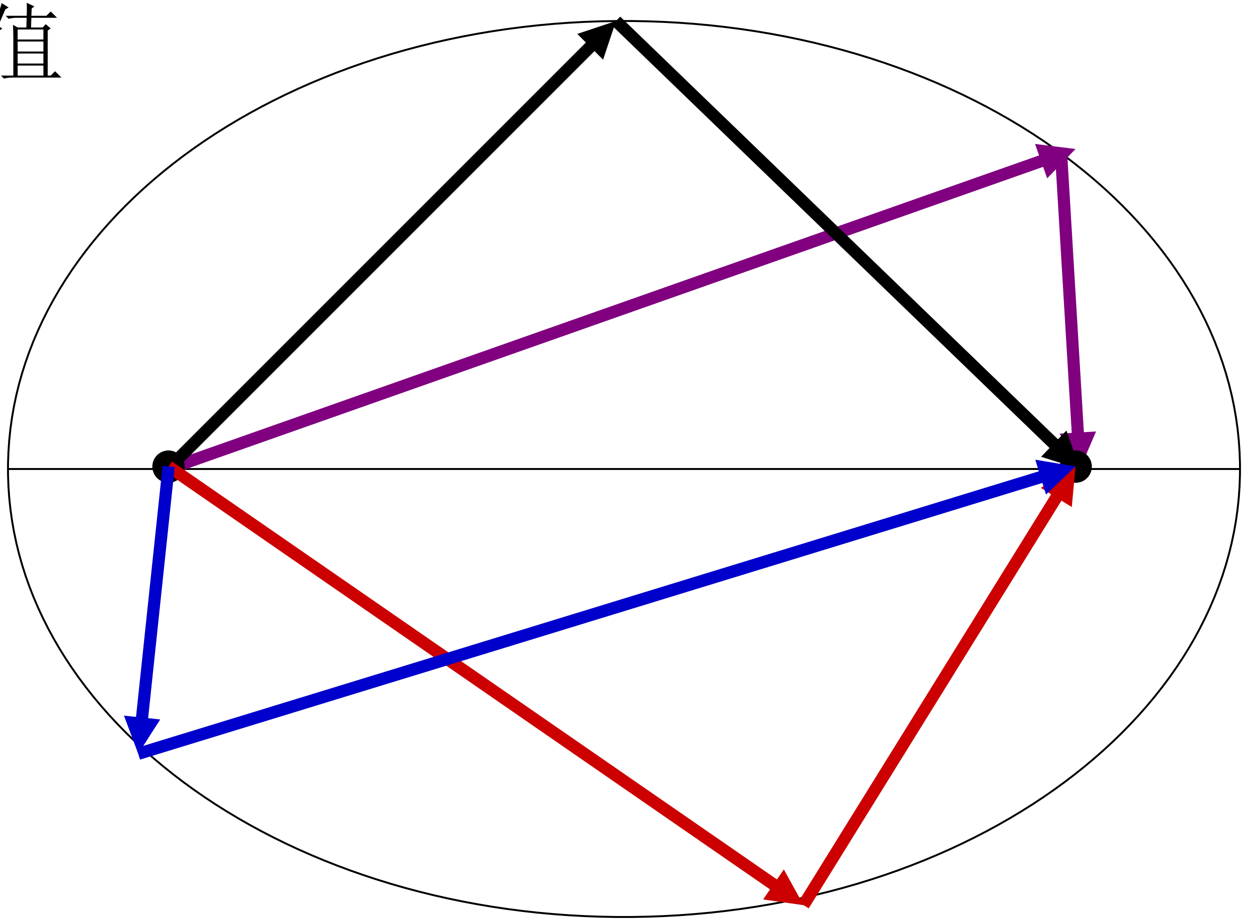


2. 费马原理：『给定的两点间，光沿光程平稳的路径传播。』

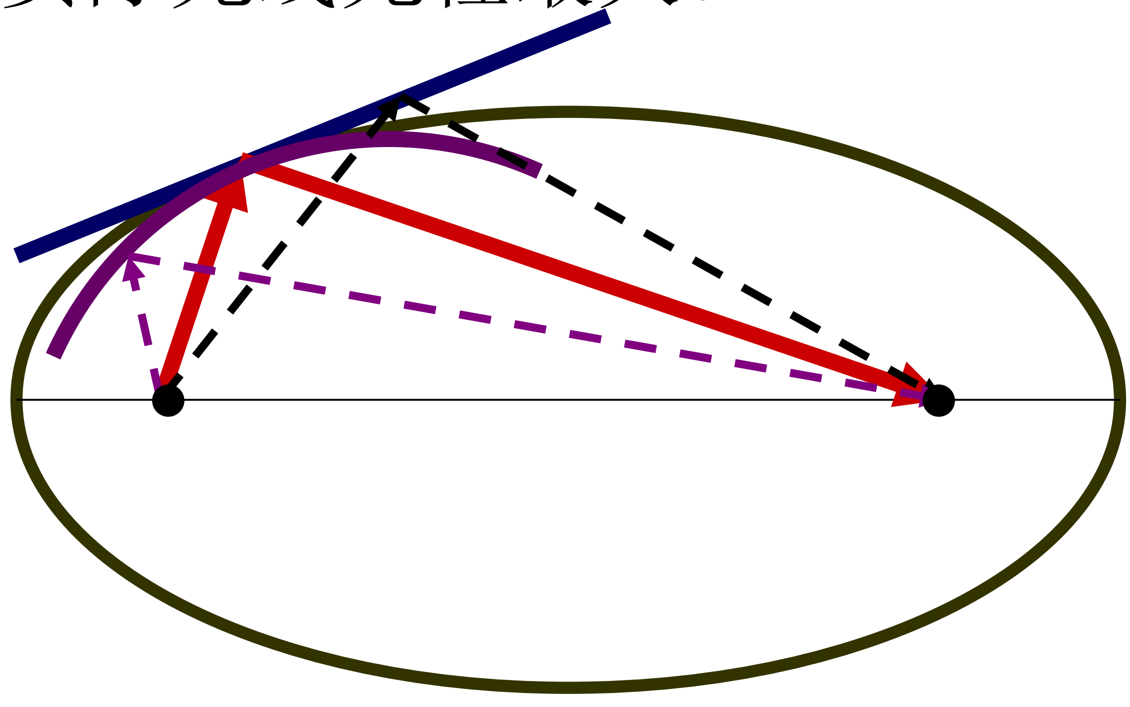
平稳：极值(极大、极小)或者为稳定值。

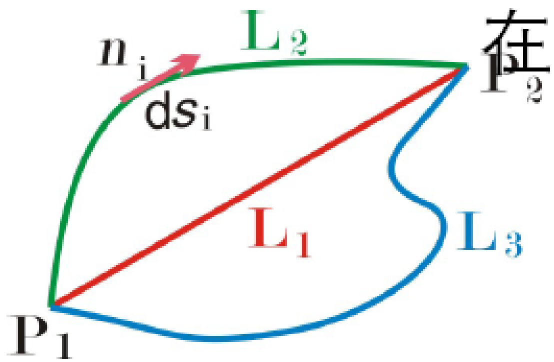


椭球面内两焦点间光的路径，光程为恒定值



在椭球面上一点作相切的平面和球面，则经平面反射的光线中，实际光线光程最小，经球面反射的光线中，实际光线光程最大。

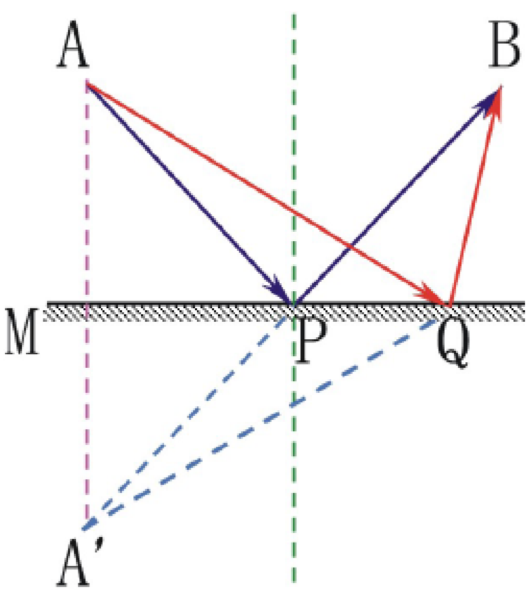


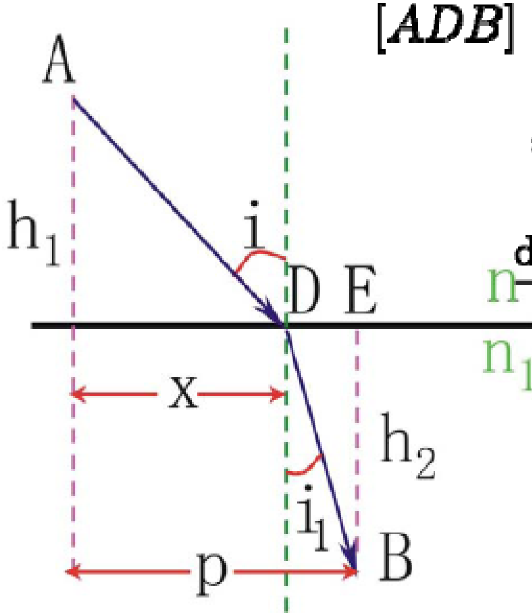


在数学上，费马原理用变分表示为

$$\delta(\overline{P_1P_2}) = \delta\left[\int_{P_1}^{P_2} n\,\mathrm{d}s\right] = 0$$

费马原理是一个基本假设，可以导出光的反射定律和折射定律。





$$\overline{[ADB]} = n\overline{AD} + n_1\overline{DB}$$

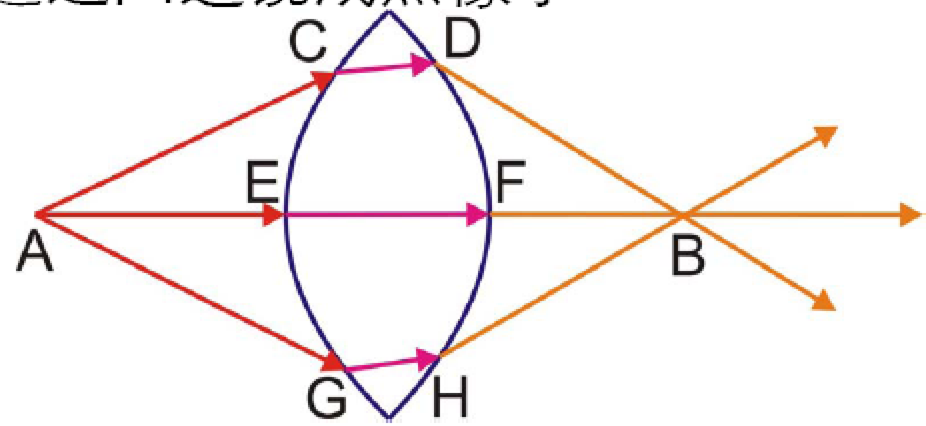
$$= n\sqrt{h_1^2 + x^2} + n_1\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}(\overline{[ADB]})}{\mathrm{d}x} = \frac{n_1 x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{n_2(p-x)}{\sqrt{h_2^2 + (p-x)^2}}$$

$$= n\sin i - n_1 \sin i_1 = 0$$

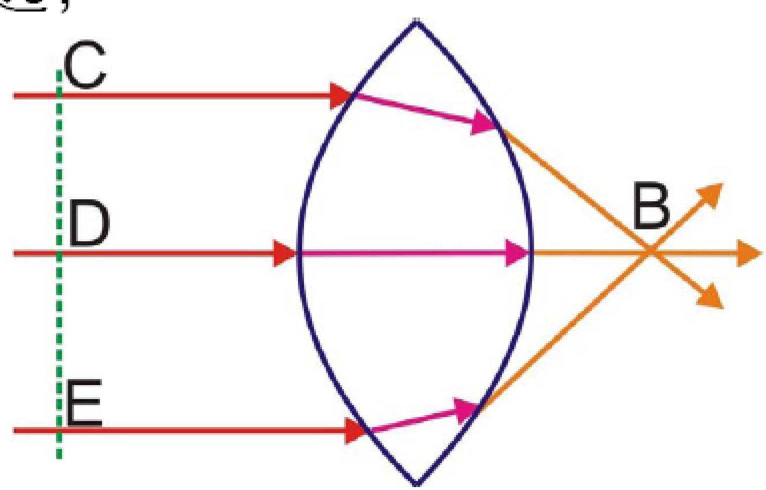
3. 费马原理与成像：等光程原理

- 点物A通过凸透镜成点像于B

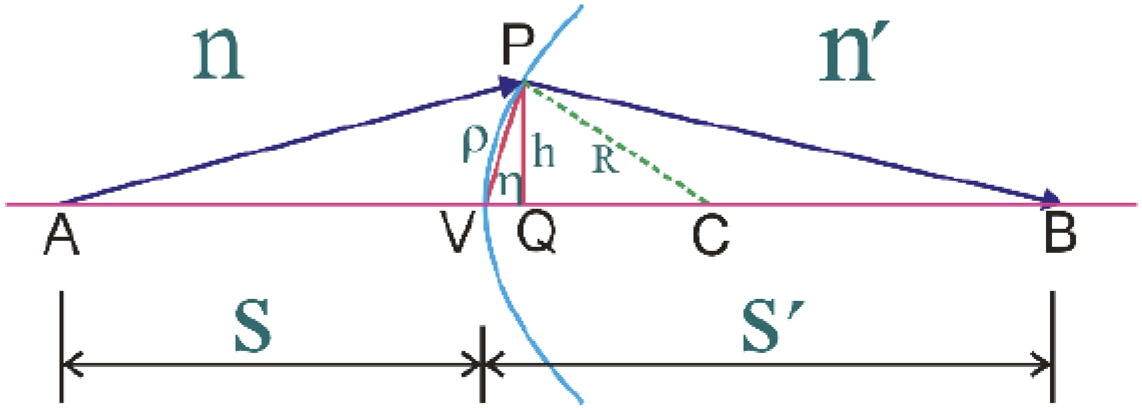


按照费马原理，ACDB，AEFB，AGHB这些光线的光程必然相等，这就是物像之间的等光程性。

若点物在无穷远，



- 单一折射球面近轴成像



- 按等光程原理，成像时光程取稳定值，$\therefore [APB]=[AVB]$。而$[APB]=n\overline{AP}+n'\overline{PB}$，$[AVB]=ns+n's'$。
- $\overline{AP}=\sqrt{(s+\eta)^2+h^2}$

$$\left.\begin{aligned} h^2 &= \rho^2-\eta^2 \\ R^2 &= h^2+(R-\eta)^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \eta=\frac{\rho^2}{2R} \Rightarrow \overline{AP}=s\sqrt{1+\frac{\rho^2}{s}\left(\frac{1}{s}+\frac{1}{R}\right)}$$

- 当$\rho \ll R$，$\rho \ll s$时，作二项式展开，得

$$\overline{AP} = s + \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{R}\right)$$

- 用同样的方法可得

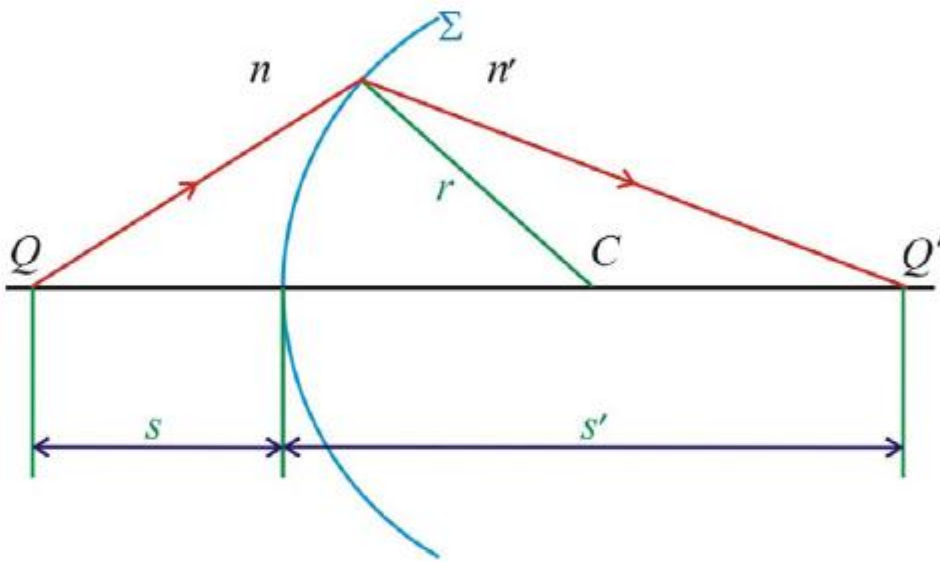
$$\overline{PB} = s' + \frac{\rho^2}{2}\left(\frac{1}{s'} - \frac{1}{R}\right)$$

- 代入$n\overline{AP} + n'\overline{PB} = ns + n's'$可得

$$\frac{n'}{s'} + \frac{n}{s} = \frac{n' - n}{R}$$

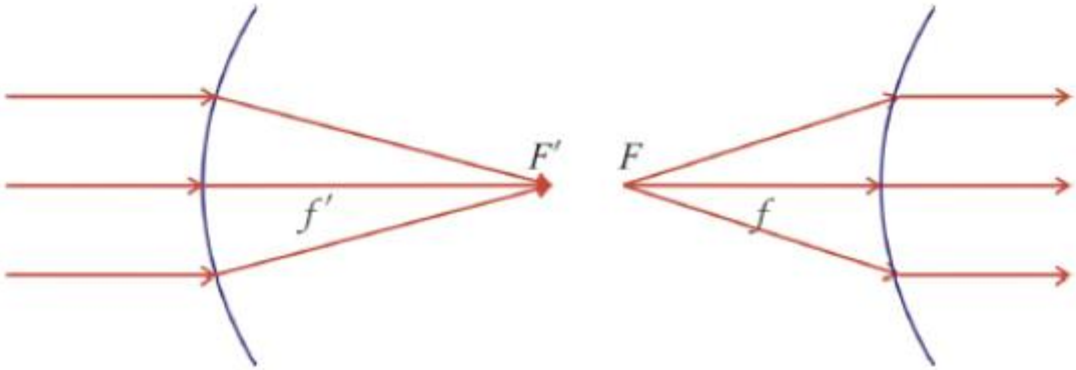
1.4、光在单球面上的近轴成像

单球面折射成像的物像距公式
上节我们用等光程原理给出了



$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

- $\frac{n'-n}{r}$称为球面的光焦度，记作Φ，它反映了球面屈折光线的本领。
- $\Phi>0$，球面使入射光会聚;$\Phi<0$，球面使入射光发散。
- 光焦度单位：屈光度　$1D=1m^{-1}$



- 像方焦点：当物点位于光轴上无穷远，入射光线平行于主光轴，所得的像点称为像方焦点，记为F'
- 从球面顶点到像方焦点的距离称为像方焦距

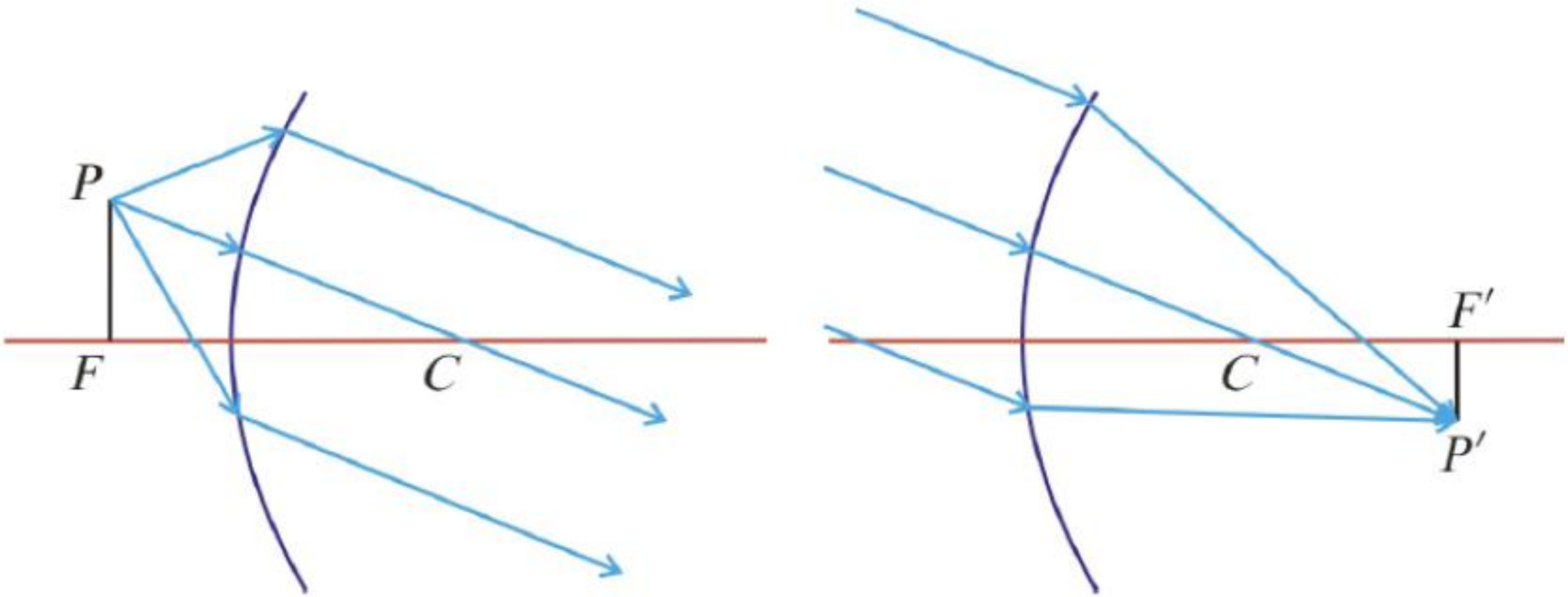
$$f' = s'|_{s=\infty} = \frac{n'}{n'-n}r$$

- 若物点位于主光轴上一点时，它发出的光束经球面折射后平行于主光轴。这一物点称为物方焦点，记为F。
- 从物方焦点到球面顶点的距离f称为物方焦距

$$f = s|_{s'=\infty} = \frac{n}{n'-n}r$$

- 物方焦平面和像方焦平面

  过焦点F, F'分别做一平面垂直于主光轴。傍轴近似下，这两个平面分别称为物方焦平面和像方焦平面。

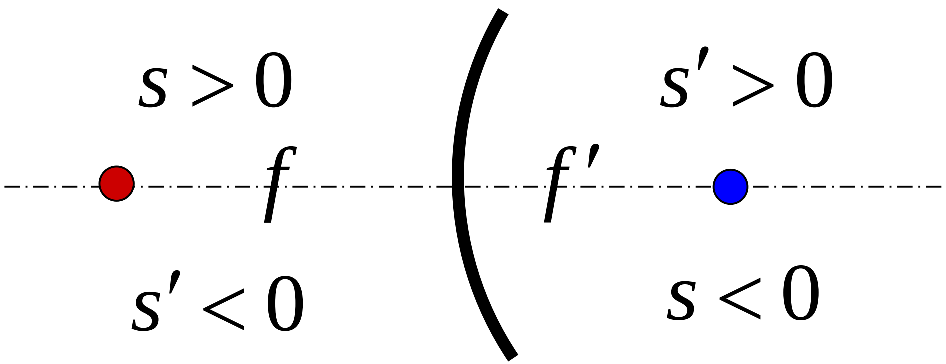


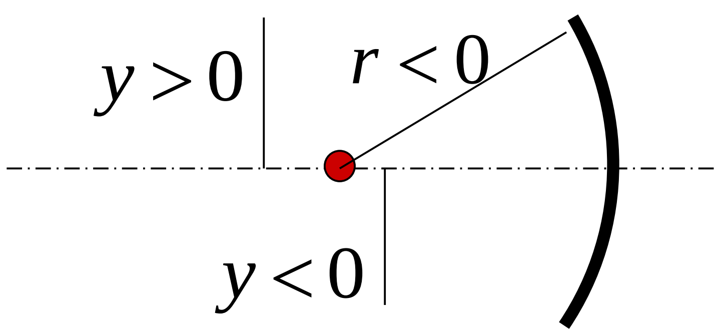
几何光学的符号约定

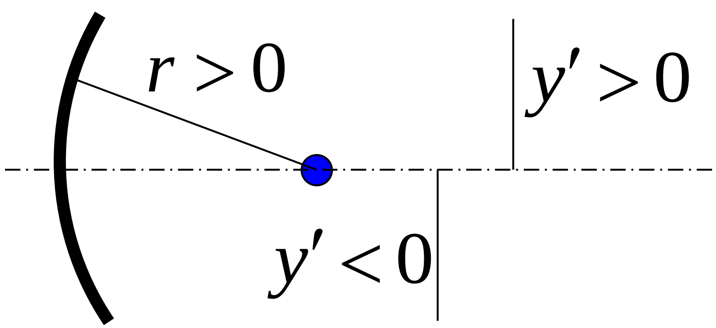
假设光线自左向右入射

- （1）物点在顶点左侧，物距s>0；物点在球面右侧，物距s<0。
- （2）对于折射球面，像点在顶点右侧，像距s‘>0；像点在顶点左侧，像距s’<0。对于反射球面， 像点在顶点右侧，像距s‘<0；像点在顶点左侧，像距s’>0。
- （3）球面曲率中心在顶点右侧，其曲率半径r>0；球面曲率中心在顶点左侧，r<0。

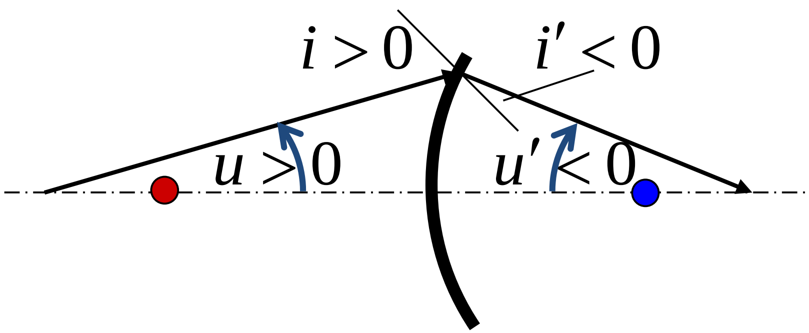
- （4）线段在主光轴之上，y>0；线段在主光轴之下，y<0。

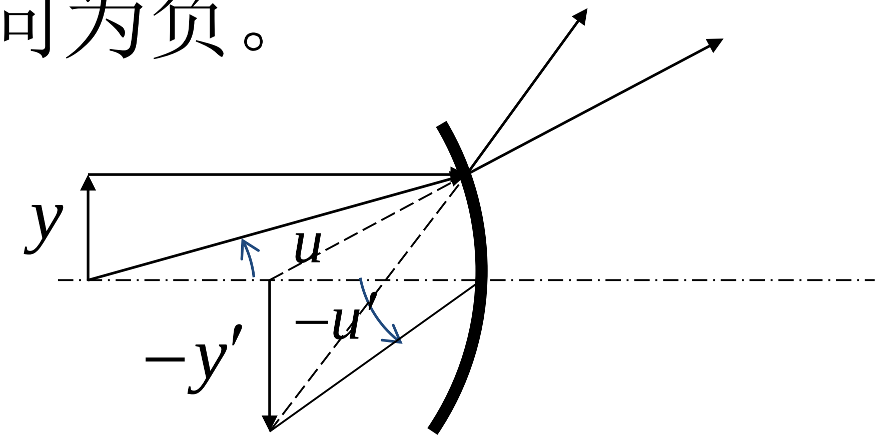






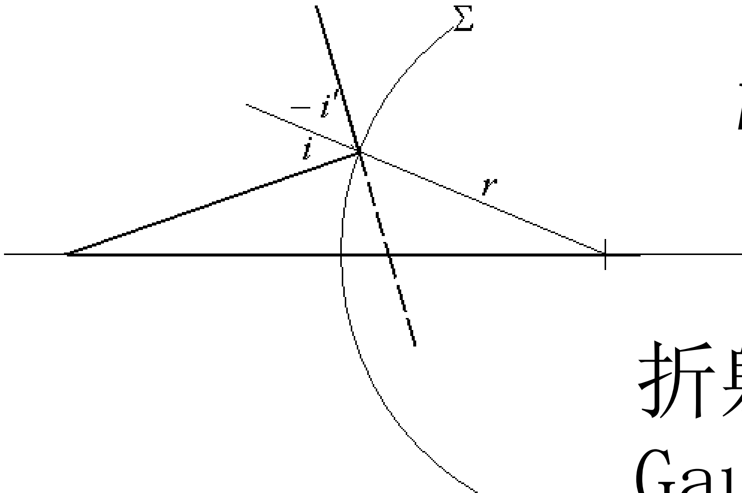
- （5）角度自主光轴或球面法线算起，逆时针方向为正，顺时针方向为负。





- （6）图中所标均为绝对值，对于是负值的参数，应在其前面加上负号。

由折射球面物像公式推导反射球面物像公式



$$i' = -i \quad \because n\sin i = n'\sin i'$$

$$\therefore n' = -n$$

折射球面 Gauss公式 $\dfrac{n'}{s'} + \dfrac{n}{s} = \dfrac{n'-n}{r}$

$$\frac{-n}{-s'} + \frac{n}{s} = \frac{-n-n}{r} = -\frac{2n}{r} \Rightarrow \frac{n}{s'} + \frac{n}{s} = -\frac{2n}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s'} + \frac{1}{s} = -\frac{2}{r} \qquad f = f' = \frac{-r}{2}$$

- 高斯公式和牛顿公式

  - 高斯公式
    物、像方焦距相互关系

$$\frac{f'}{f}=\frac{n'}{n},\quad \Phi=\frac{n'-n}{r}=\frac{n'}{f'}=\frac{n}{f}$$

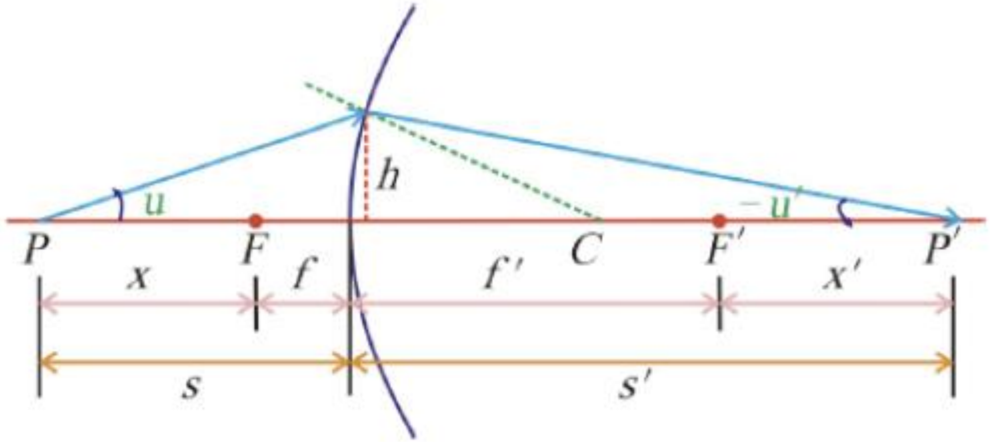
而

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n'-n}{r}$$

消去折射率，用f和f'代替，可以得到

$$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$$

- 牛顿公式



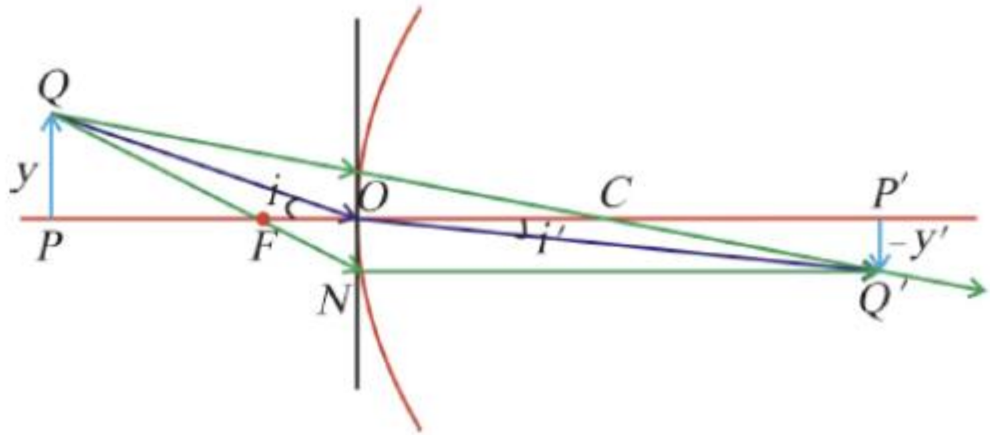
如果不以球面顶点而分别以物、像方焦点为量度物距和像距的基准点，即用焦物距x和焦像距x'来表示，可以得到

$$x = s - f, \quad x' = s' - f'$$

$$\therefore xx' = ff'$$

- 傍轴物点成像与横向放大率

  - 傍轴物点成像



  - 像高与物高之比，称为横向放大率。

$$V = \frac{y'}{y}$$

$$\triangle PQF \sim \triangle NOF \Longrightarrow \frac{-y'}{y} = \frac{f}{x}$$

$$\therefore V = -\frac{f}{x} = -\frac{x'}{f'}$$

- 又

$$\frac{\tan i}{\tan i'} \approx \frac{\sin i}{\sin i'} = \frac{n'}{n}$$

$$\therefore \frac{ny}{s} = -\frac{n'y'}{s'}, \quad V = \frac{y'}{y} = -\frac{ns'}{n's}$$

- $V > 0$时，y'与y同号，物正立时像也正立，s与s'异号，物像必然一虚一实；$V < 0$时，y'与y异号，物正立则像为倒立，s与s'同号，物像必然同虚实。
- 轴上物点的角放大率

$$\gamma = \frac{u'}{u} = -\frac{s}{s'}$$

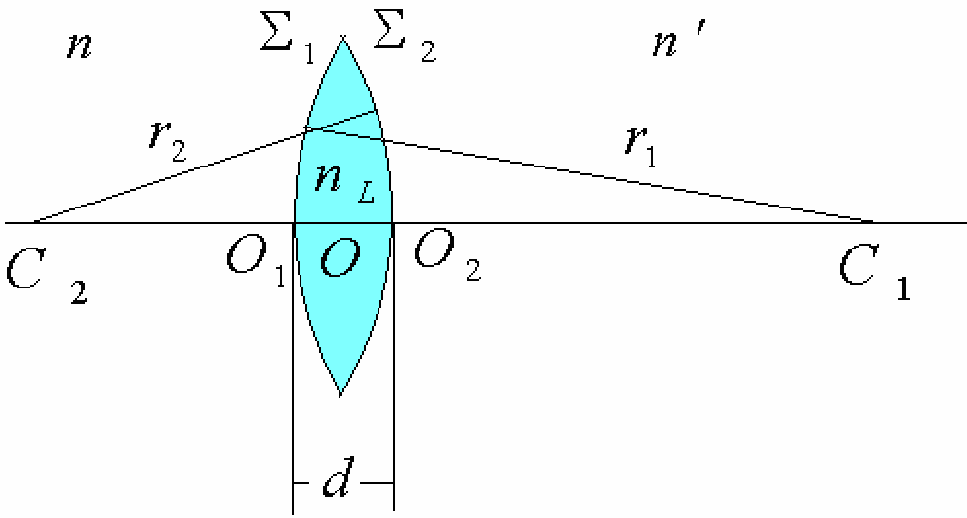
- 拉格朗日-亥姆霍兹不变量

$$ynu = y'n'u' = \cdots \text{可推广至共轴多球面情况}$$

1.5 、薄透镜成像

薄透镜

由两个折射球面组成，过两球面圆心的直线为光轴，顶点间距*d*。

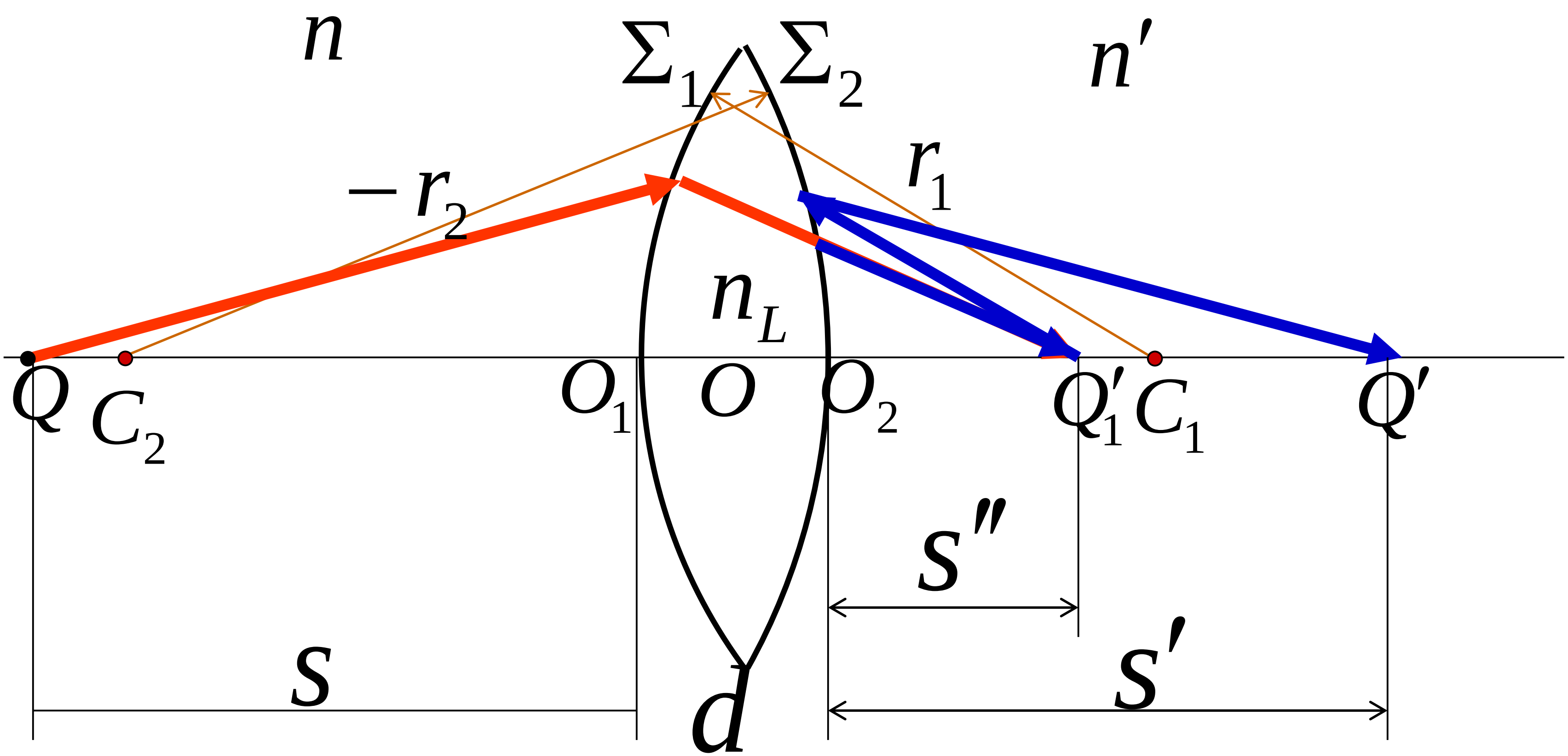


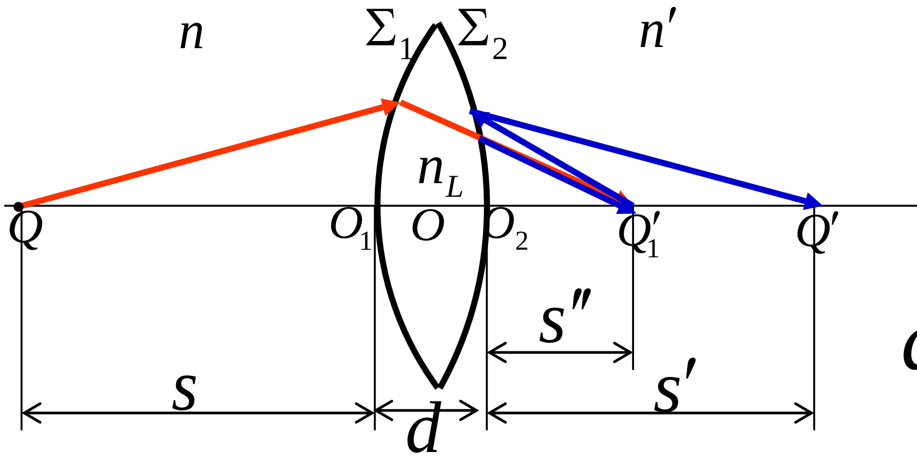
如果满足 $d << r_1, r_2, |s|, |s'|$

就是薄透镜，通常可以 $d = 0$

可以认为，两球面顶点重合，称为光心，记为O。

1．用逐次成像法推导





第一次成像

$$\frac{n_L}{s''+d}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}$$

$$d=0 \qquad \frac{n_L}{s''}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}$$

$$\Phi_1=\frac{n_L-n}{r_1}$$

第二次成像　物在像方，虚物

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n_L}{-s''}=\frac{n'-n_L}{r_2} \qquad \Phi_2=\frac{n'-n_L}{r_2}$$

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}=\Phi_1+\Phi_2=\Phi$$

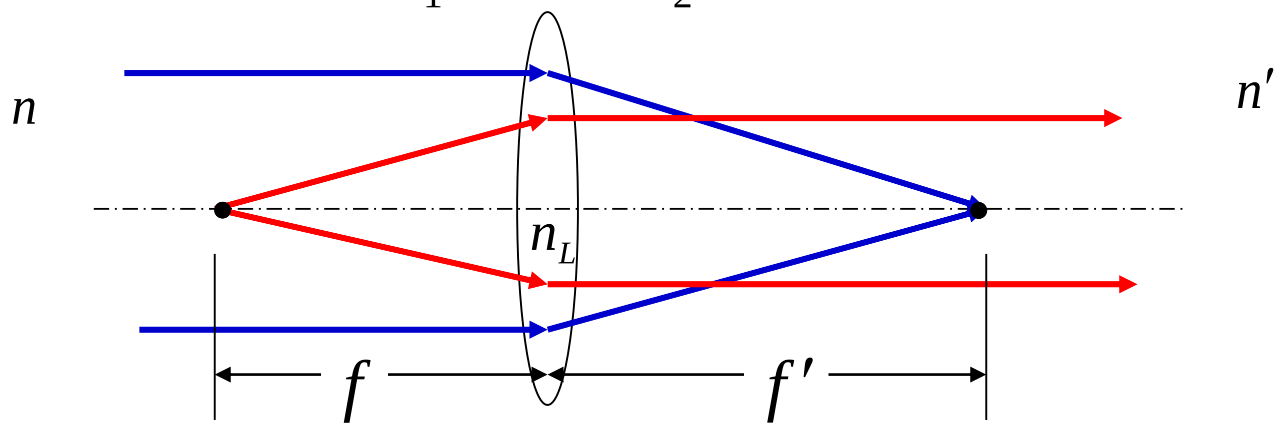
$$\Phi=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}$$

薄透镜的光焦度

2． 薄透镜的焦点与焦平面

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2}$$

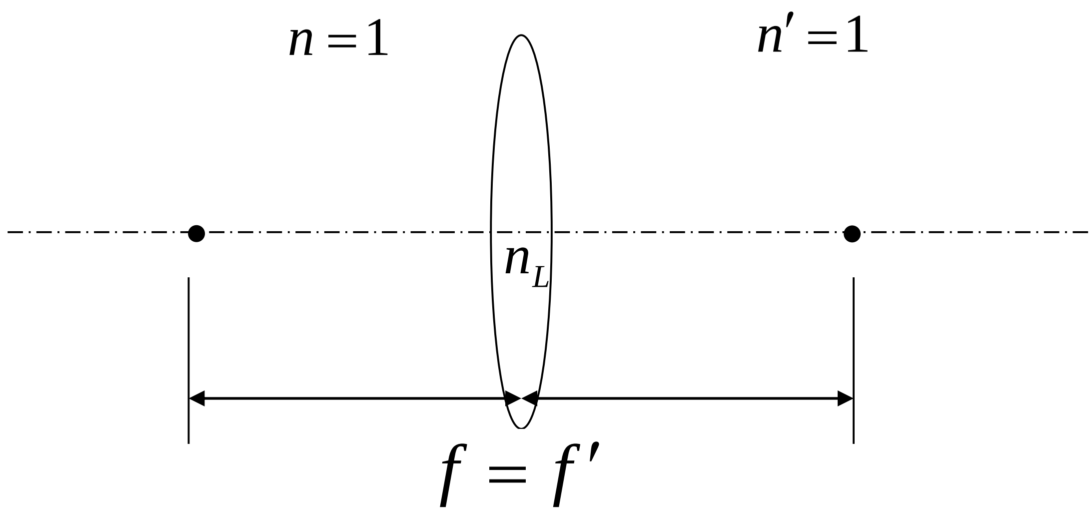
$s'=\infty$ $$f=\frac{n}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}=\frac{n}{\Phi}$$ 物方焦距



$s=\infty$ $$f'=\frac{n'}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}=\frac{n'}{\Phi}$$ 像方焦距

空气中的薄透镜

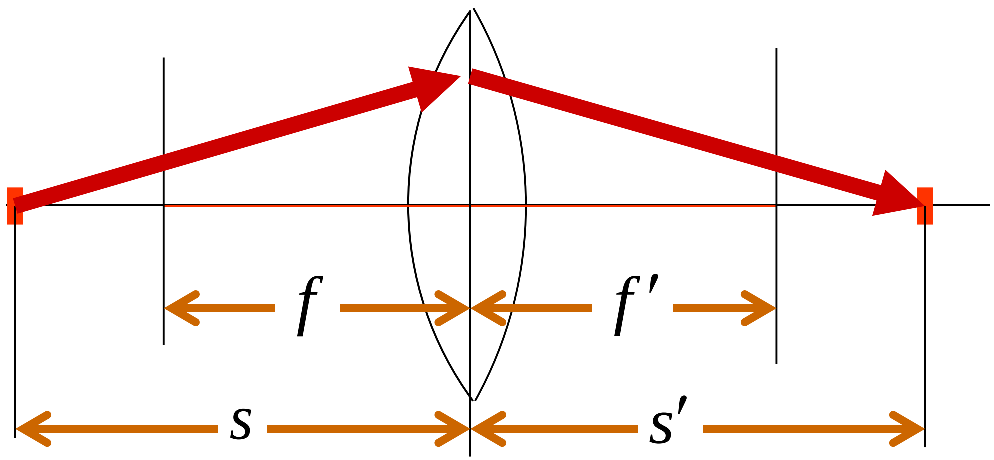
$$n = n' = 1 \quad f = f' = \frac{1}{(n_L - 1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})}$$ 磨镜者公式



Gauss物像公式

$$\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}=\frac{n_L-n}{r_1}+\frac{n'-n_L}{r_2} \qquad \frac{1}{\dfrac{n_L-n}{r_1}+\dfrac{n'-n_L}{r_2}}\left(\frac{n'}{s'}+\frac{n}{s}\right)=1$$

距离从光心算起 $$\frac{f'}{s'}+\frac{f}{s}=1$$

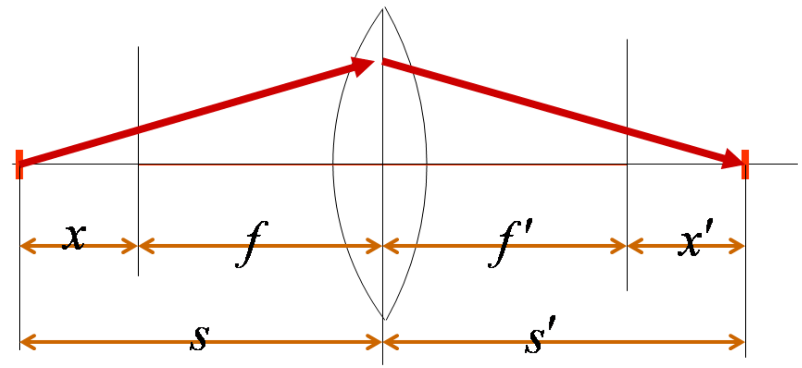


图示

Newton物像公式

$$s = x + f \qquad s' = x' + f' \qquad \frac{f'}{x' + f'} + \frac{f}{x + f} = 1$$

距离从焦平面算起



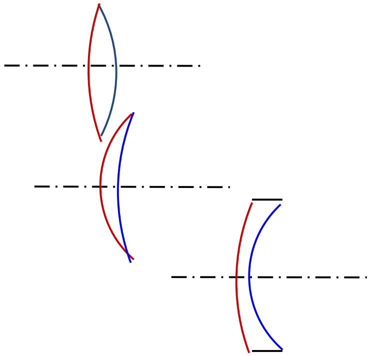
$$\cancel{xf'} + \cancel{ff'} + \cancel{x'f} + ff' = x'x + \cancel{x'f} + \cancel{xf'} + \cancel{ff'}$$

$$xx' = ff' \quad \text{Newton物像公式}$$

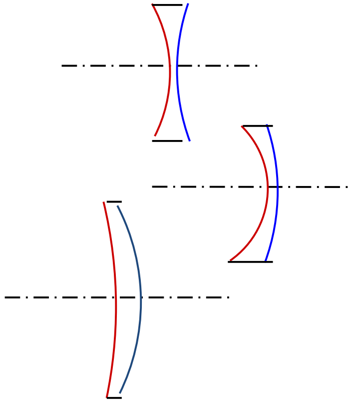
$$f = f' = \frac{1}{(n_L - 1)(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})}$$

正透镜 $\frac{1}{r_1} > \frac{1}{r_2}$　　负透镜 $\frac{1}{r_1} < \frac{1}{r_2}$

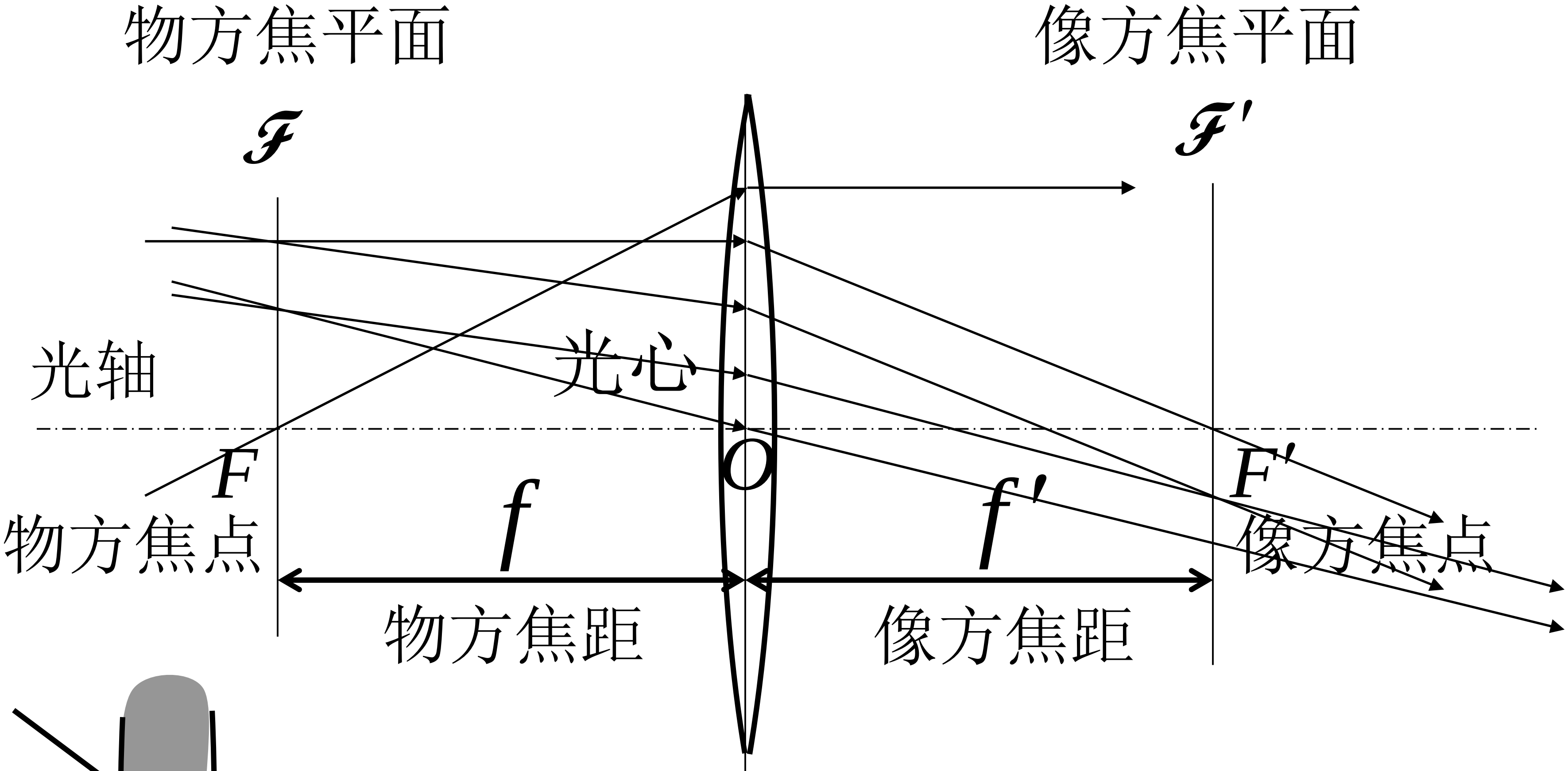
$$r_1 > 0 \quad \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} r_2 < 0 \\ r_2 > 0 \,\&\, r_2 > r_1 \end{array} \right. \Rightarrow f = f' > 0 \\ r_2 > 0 \,\&\, r_2 < r_1 \Rightarrow f = f' < 0 \end{cases}$$

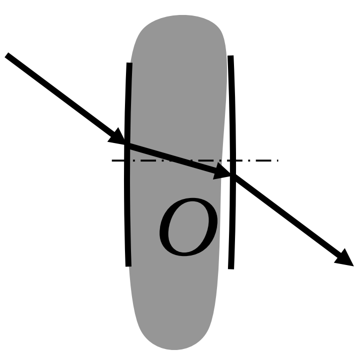


$$r_1 < 0 \quad \begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} r_2 > 0 \\ r_2 < 0 \,\&\, |r_2| > |r_1| \end{array} \right. \Rightarrow f = f' < 0 \\ r_2 < 0 \,\&\, |r_2| < |r_1| \Rightarrow f = f' > 0 \end{cases}$$



从Fermat原理看，这是很自然的结果。



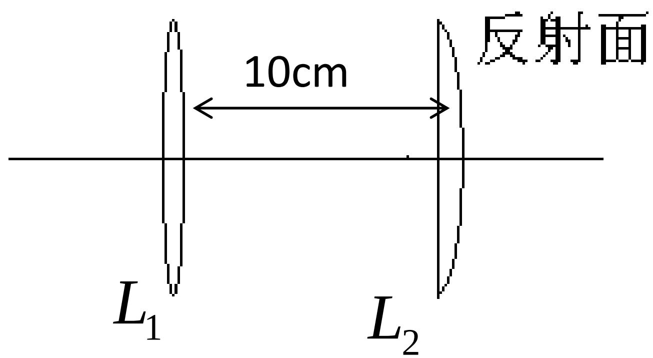


两侧折射率相等，通过光心的光线方向不变

透镜组的逐次成像计算法

- 对第一个透镜用成像公式计算，确定像的位置
- 将该像作为第二个透镜的物，再次进行成像，依次逐个进行。
- 如果像是下一个透镜的实物，则直接应用公式进行计算；如果是虚物，则其物距是负值。

例 L_1和L_2为薄透镜，L_1的焦距为4cm，L_2材料的折射率为1.5，球面半径为12cm，球面上镀有反射膜。L_1和L_2间距为10cm，物在前5.6cm处，求Q点最后成像的位置。



L_2的焦距为 $$f_2=\frac{1}{0+\frac{1-1.5}{-12}}=24\text{cm}$$ 凹面镜焦距为 $$f_3=-\frac{r}{2}=6\text{cm}$$

共有5次成像　(1)经L_1，像距为 $$s_1'=\frac{s_1 f_1}{s_1-f_1}=\frac{5.6\times4}{5.6-4}=14\text{cm}$$

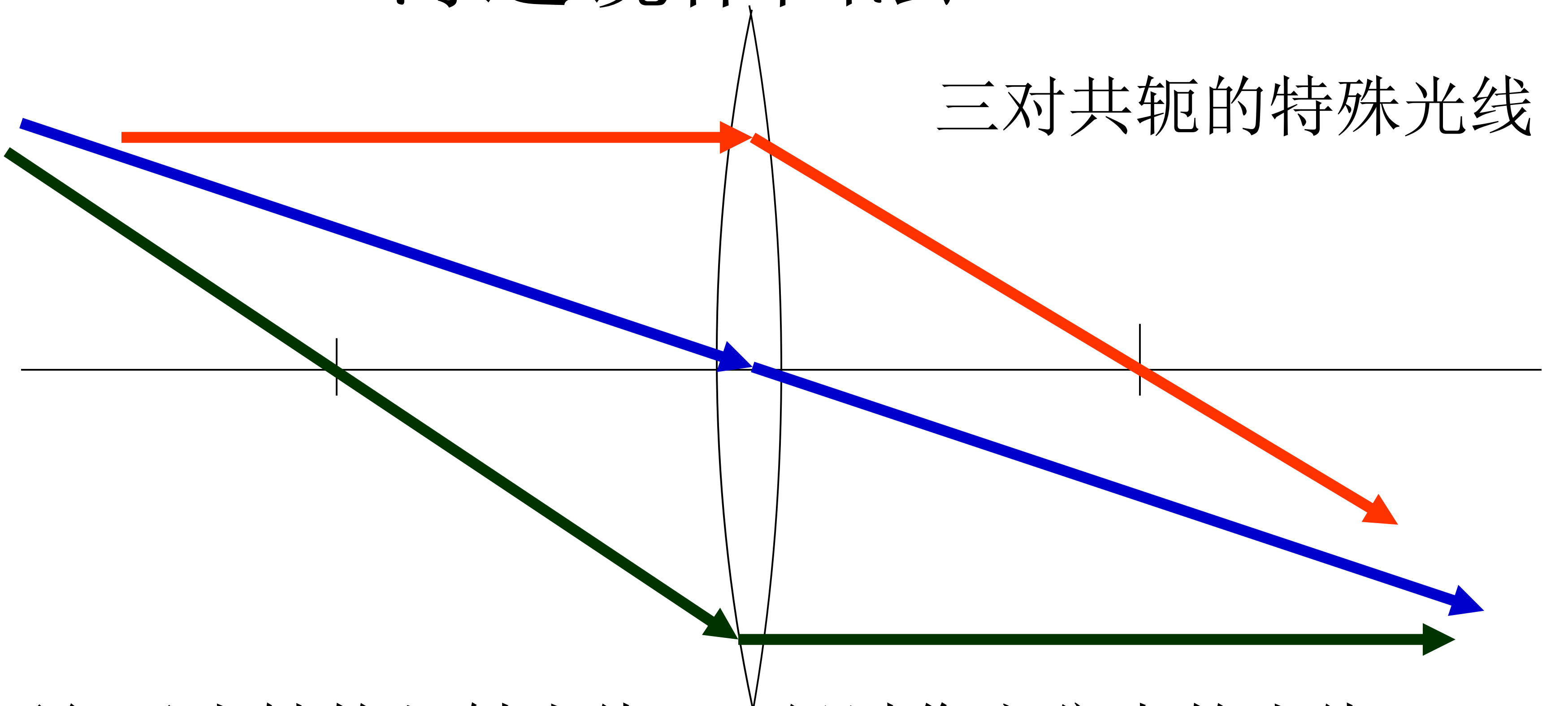
(2)再经L_2成像 $s_2=-4\text{cm}$ $$s_2'=\frac{s_2 f_2'}{s_2-f_2}=\frac{-4\times(24)}{-4-24}=\frac{24}{7}\text{cm}$$

(3)经球面反射镜 $s_3=-\frac{24}{7}\text{cm}$ $s_3'=\frac{24}{11}\text{cm}$

(4)反射光经L_2成像 $s_4=-\frac{24}{11}\text{cm}$ $$s_4'=\frac{s_4 f_2'}{s_4-f_2}=\frac{-\frac{24}{11}\times24}{-\frac{24}{11}-24}=2\text{cm}$$

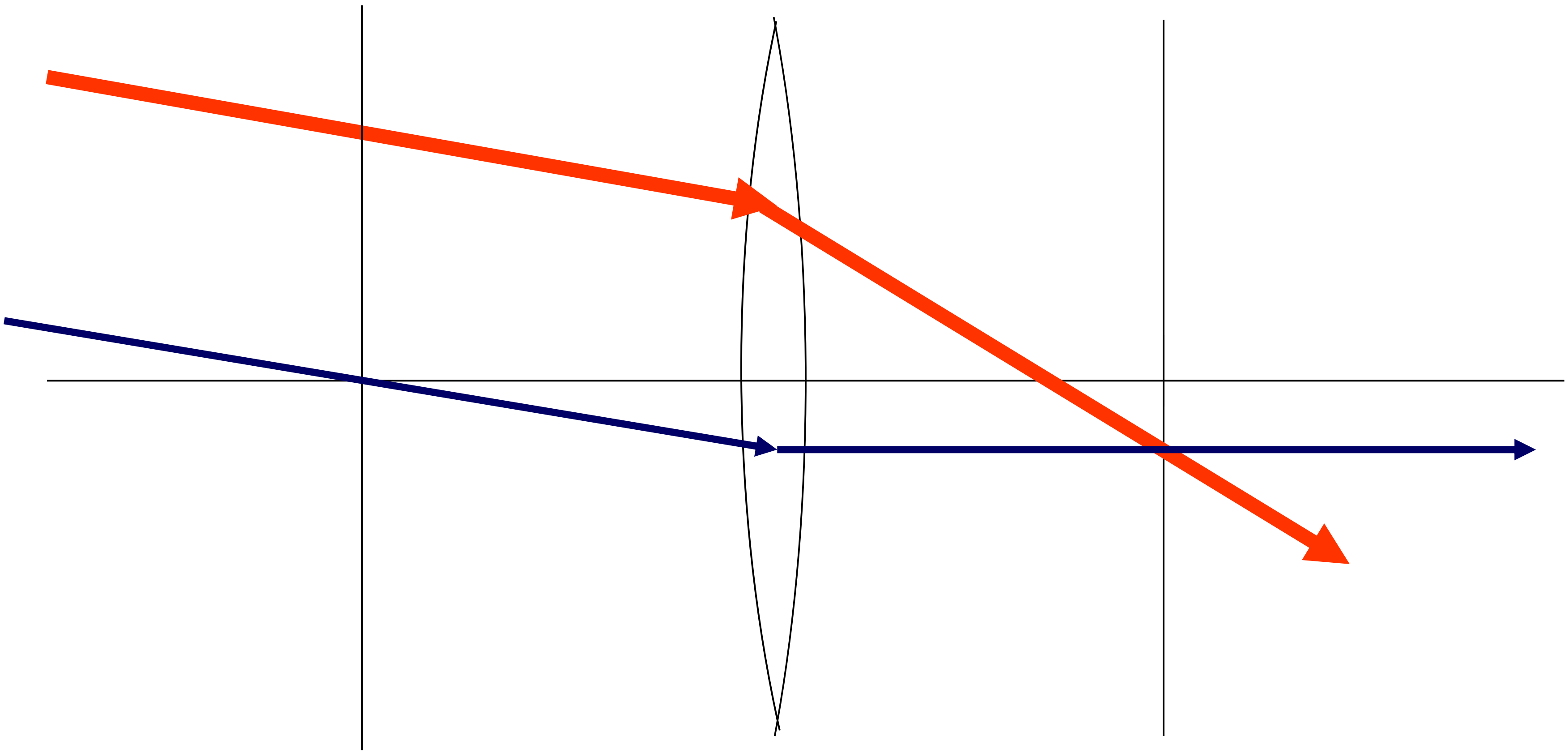
(5)再经L_1成像 $s_5=8\text{cm}$ $s'=8\text{cm}$

1.6、 薄透镜作图法

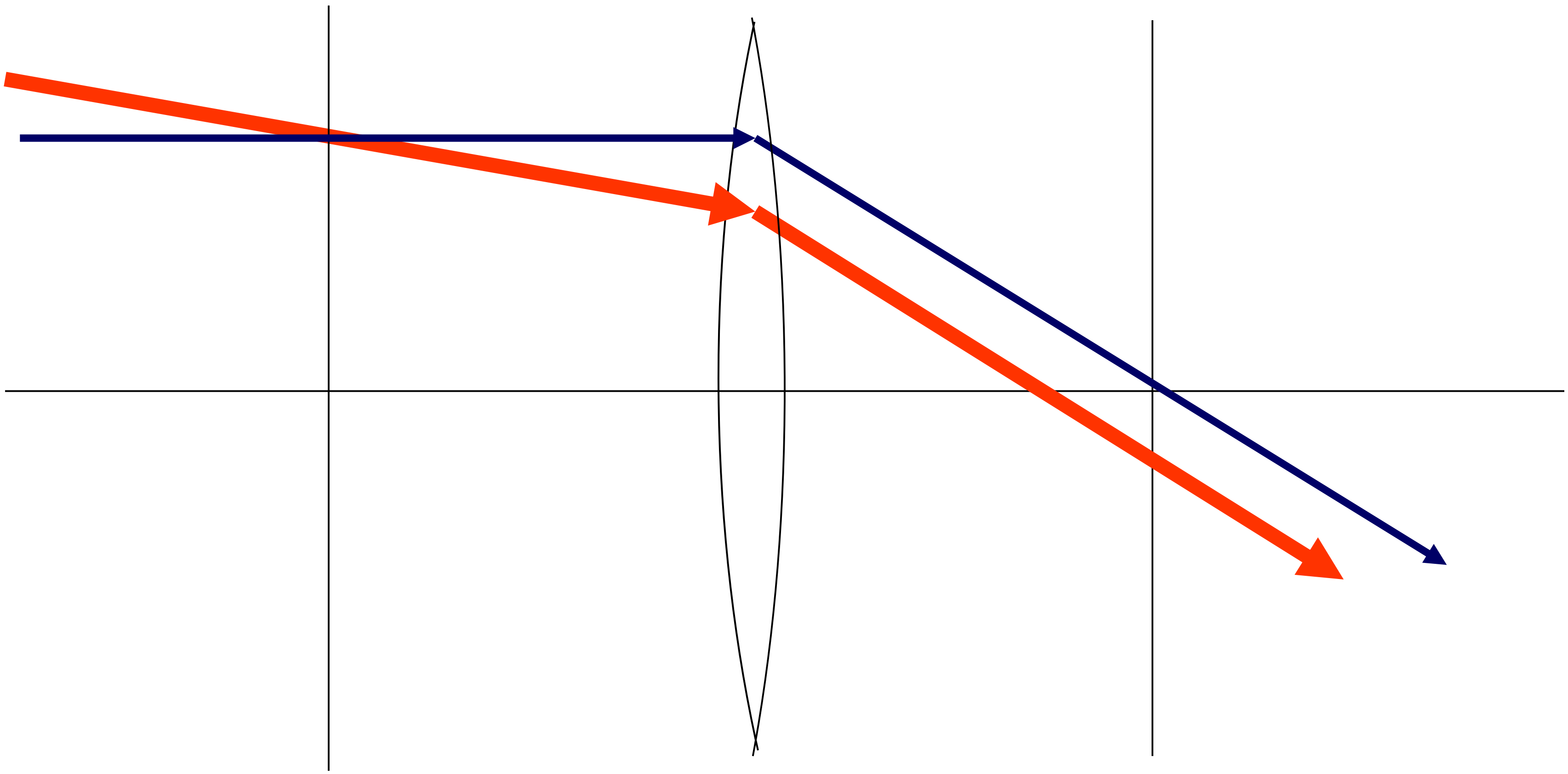


平行于光轴的入射光线←→经过像方焦点的光线
经过物方焦点的光线←→平行于光轴的像方光线
经过透镜光心的入射光线←→经过透镜光心的像方光线

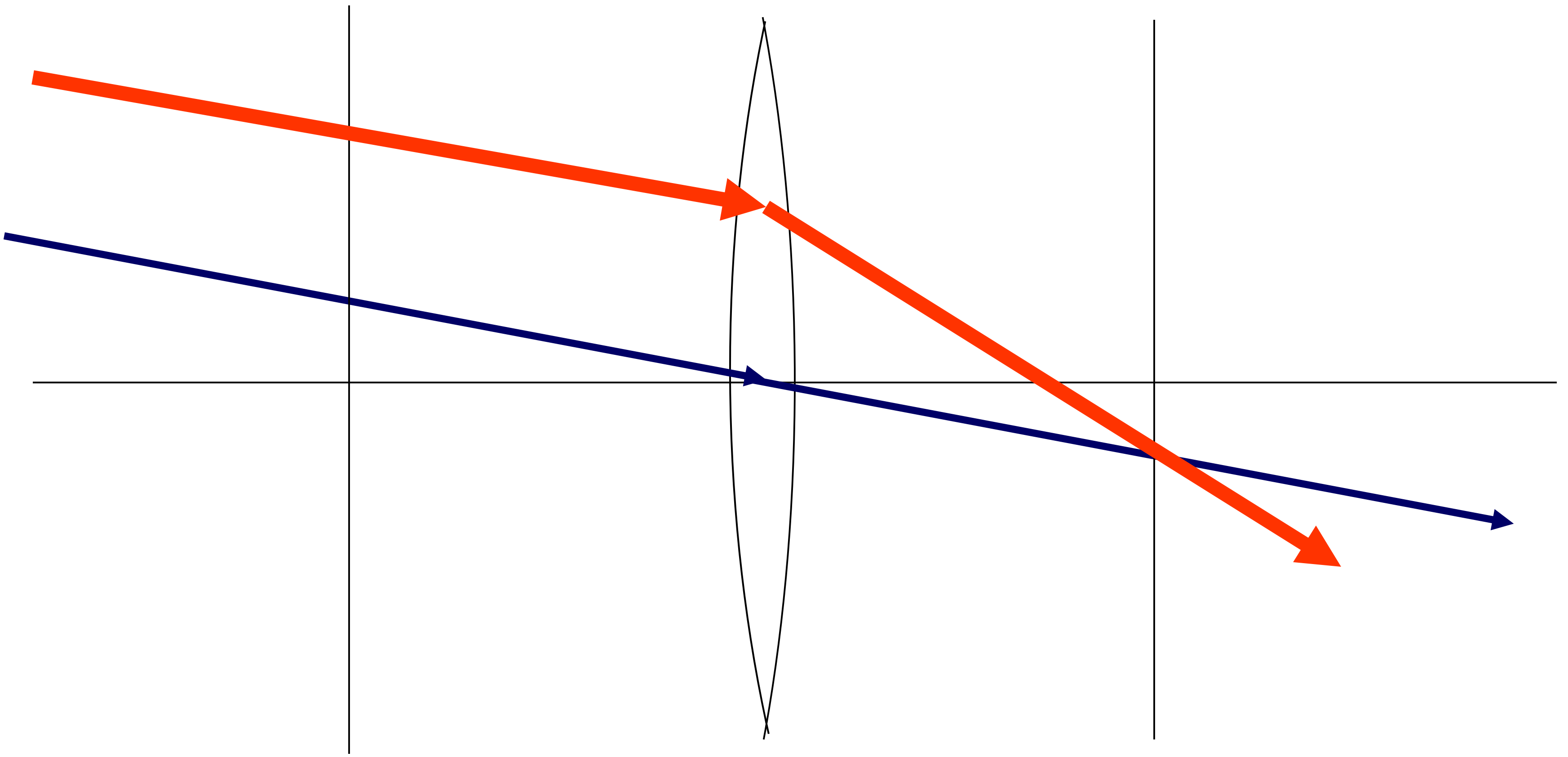
正透镜作图法



物方平行光线，汇聚于像方焦平面同一点

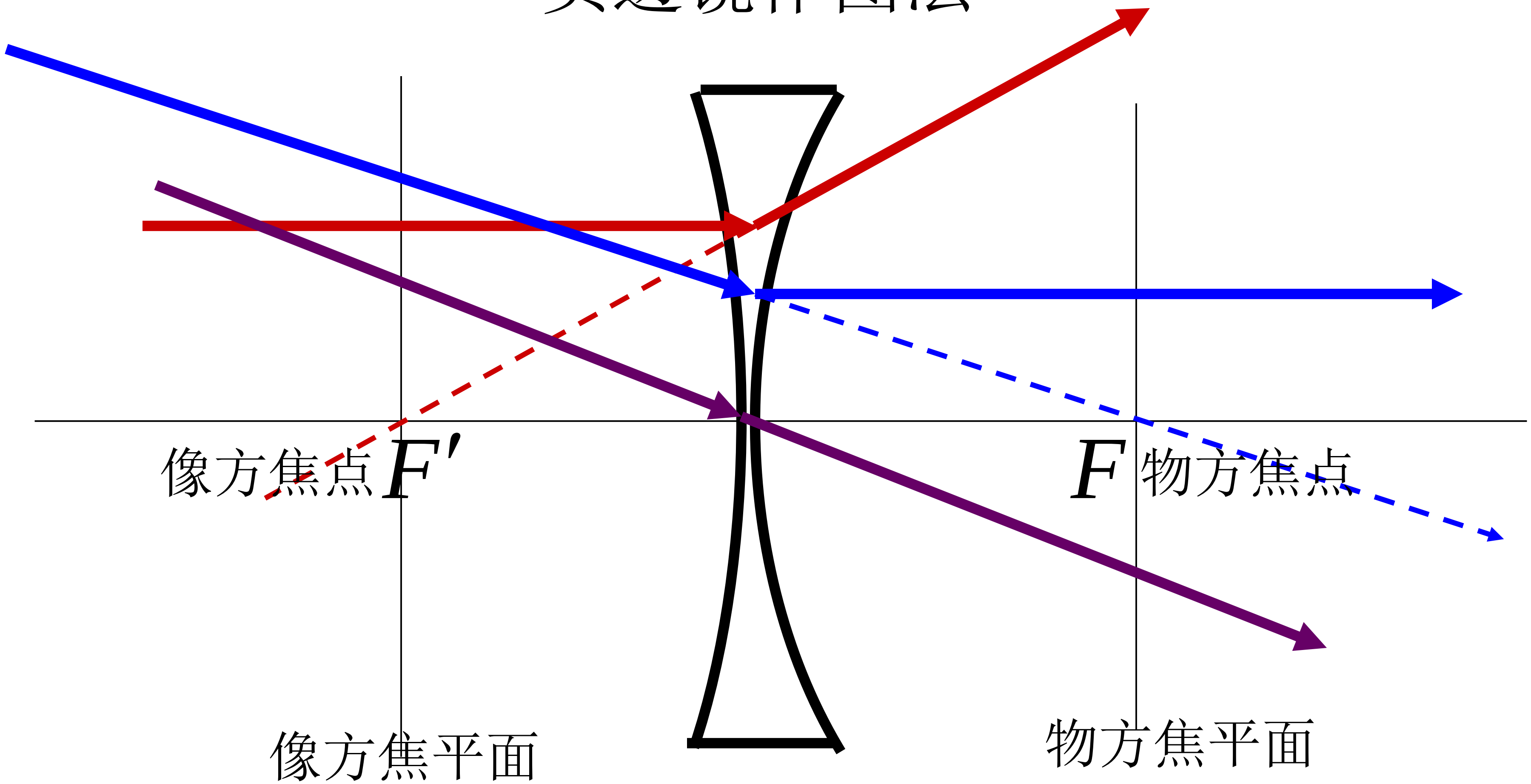


来自物方焦平面上同一点的光线，在像方为平行光线



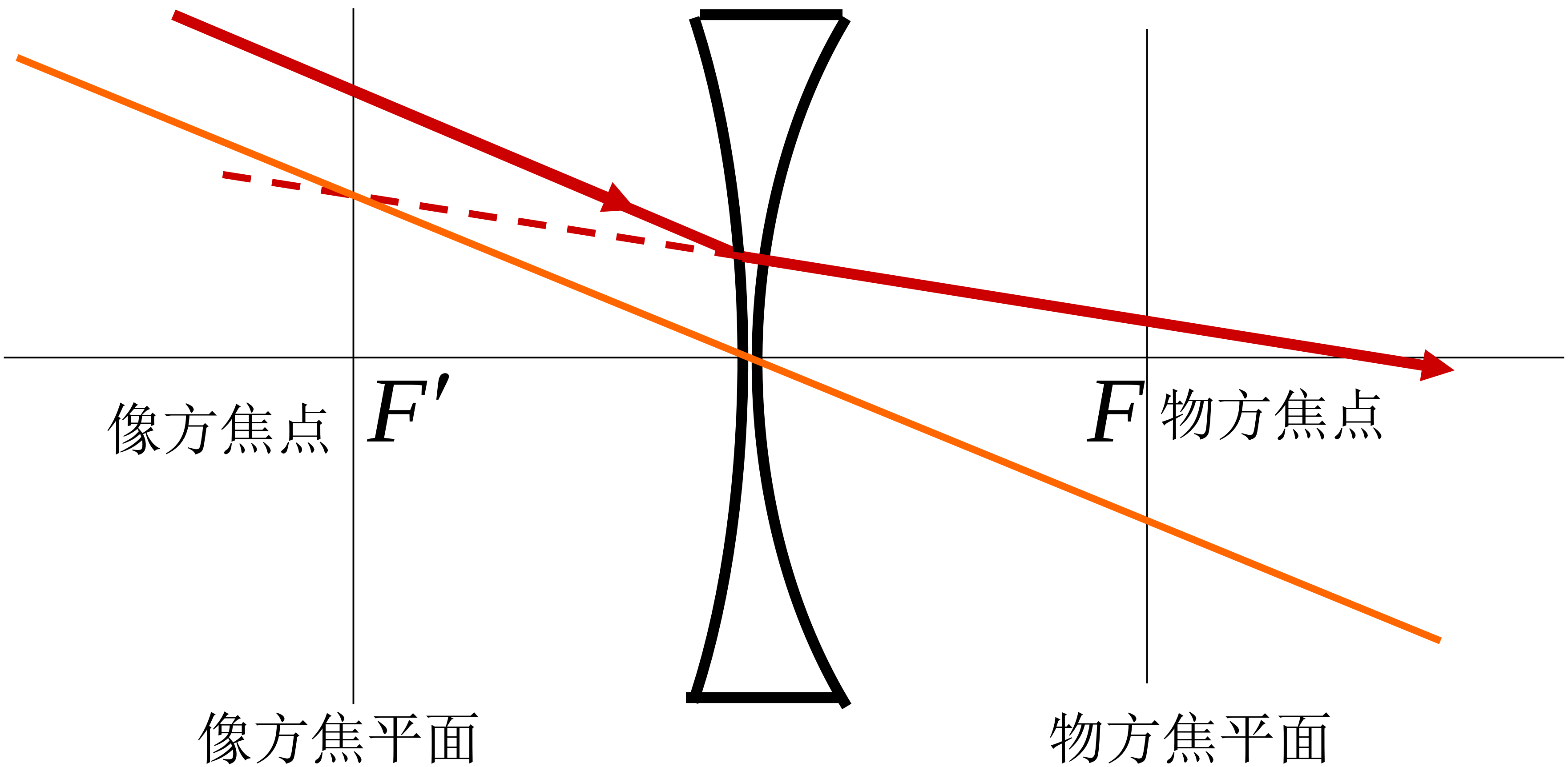
利用经过透镜光心的光线

负透镜作图法

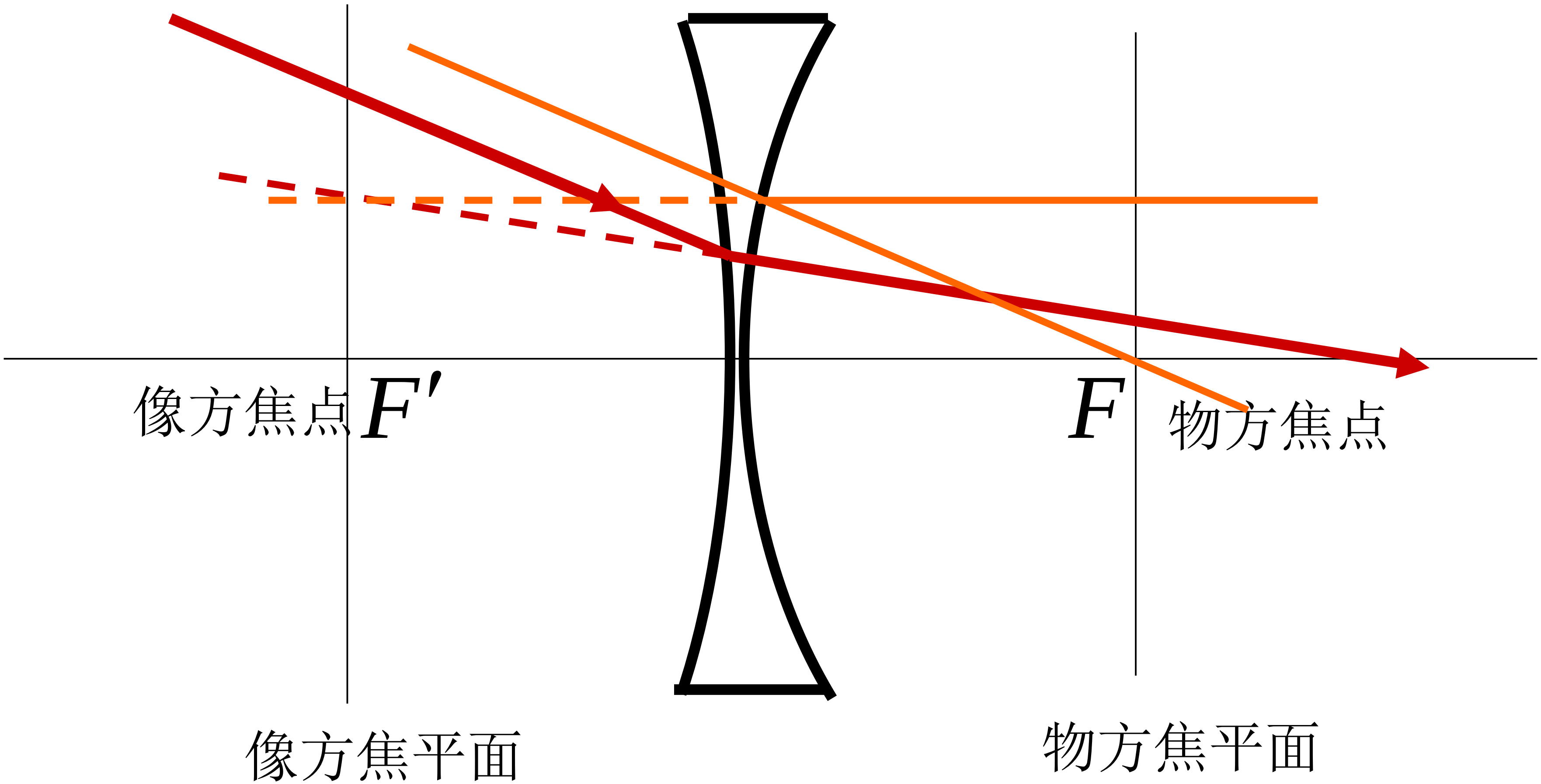


平行于光轴的入射光线←→经过像方焦点的光线
经过透镜光心的入射光线←→经过透镜光心的像方光线
经过物方焦点的光线←→平行于光轴的像方光线

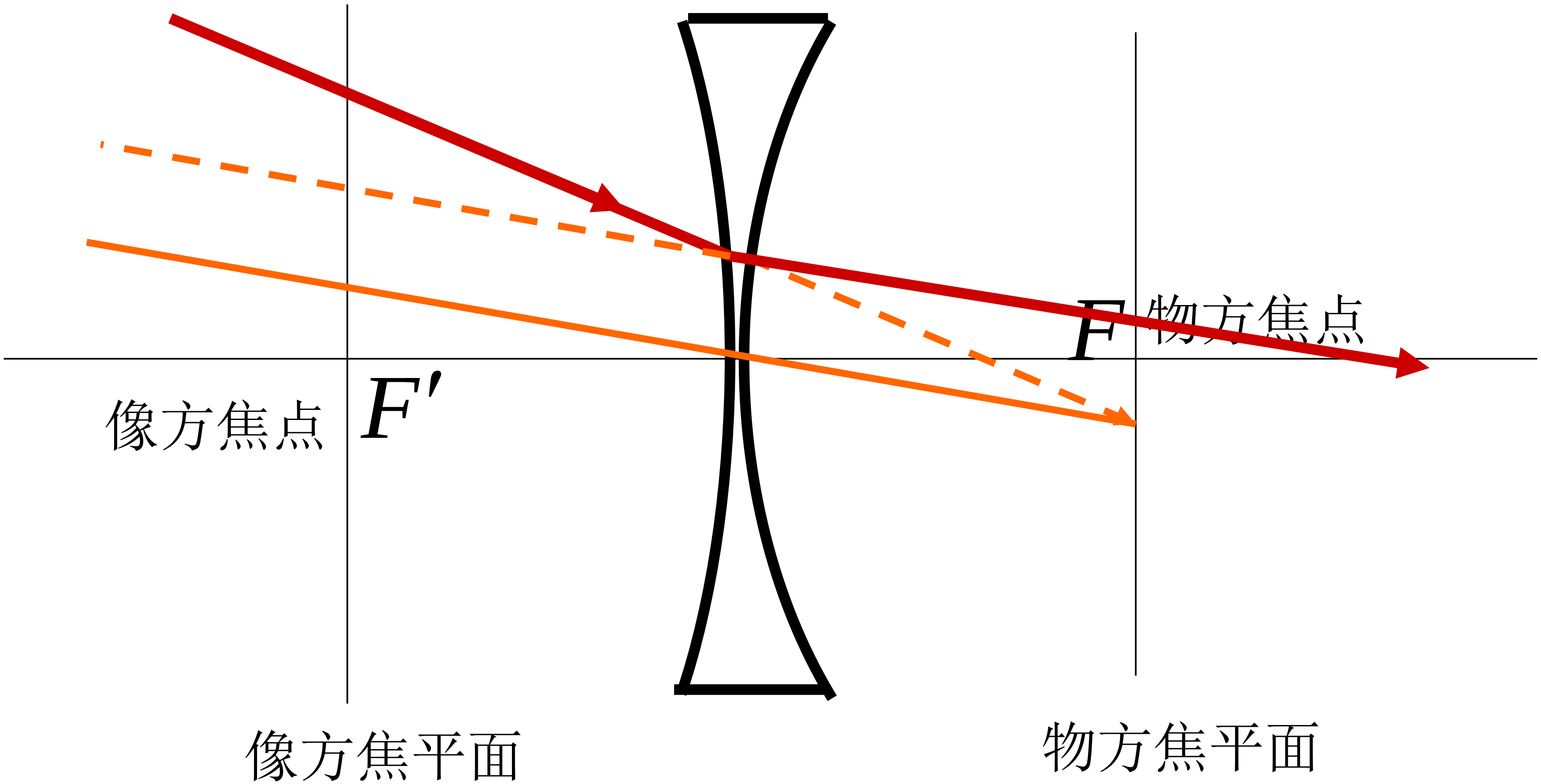
平行入射光汇聚于像方焦平面同一点

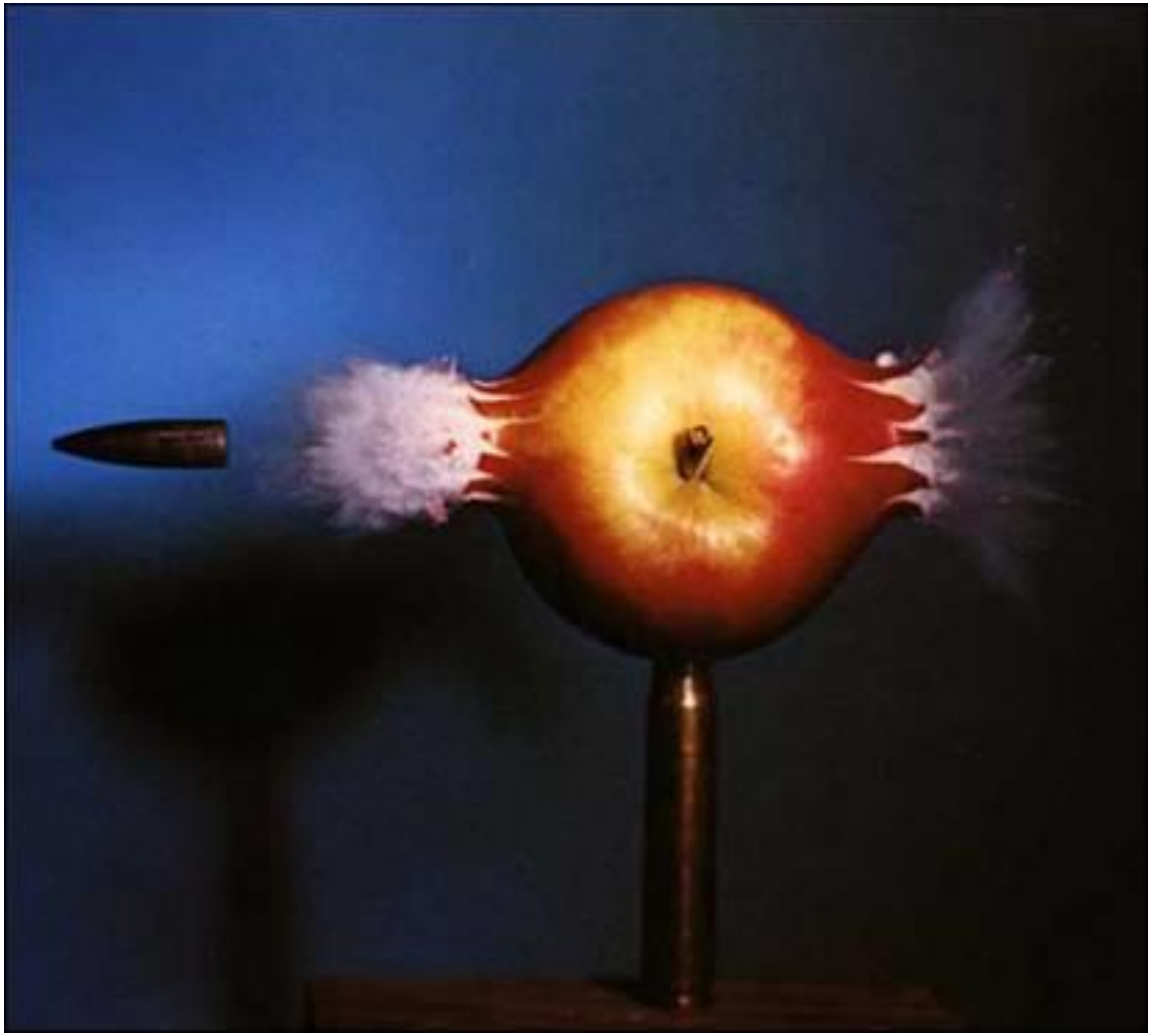


经过物方焦点的光线在像方平行于光轴



经过物方焦平面同一点的光线，在像方相互平行






eby.cc