

工程结构优化

wyyjtu@gmail.com

2012 年 11 月 12 日

1 问题

如图 1, 已知 P_1, P_2, P_3, P_4 四点的三维空间坐标和两个角度值 α, β 。求 P_a, P_b 点的坐标, 使 P_a 和 P_1, P_2 共线、 P_b 和 P_3, P_4 共线, 同时满足

$$\angle P_1 P_a P_b = \alpha, \quad \angle P_a P_b P_4 = \beta.$$

2 求解

2.1 问题分析

由于求解 P_a, P_b 的显式表达式非常复杂, 而且还有多种情况, 比如没有实数解、实数解在设计域以外等等。这里采用了工程结构优化设计方法, 不仅可以找到设计域内满足要求的精确解, 还能在没有精确解时找到设计域内最接近给定的 α, β 值的最优解。

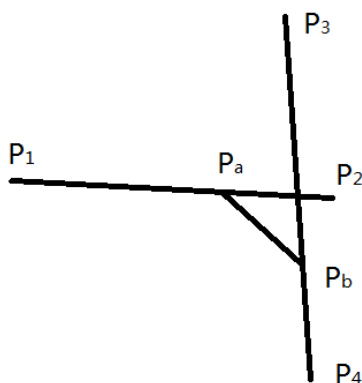


图 1: 问题

两点 P_a, P_b 之间的距离记为 L_{ab} , 同理有 $L_{a1}, L_{b4}, L_{12}, L_{34}$ 。假设

$$m = \frac{L_{a1}}{L_{12}}, \quad n = \frac{L_{b4}}{L_{34}},$$

那么用两个设计变量 $m, n \in [0, 1]$ 就可以确定 P_a, P_b 点的坐标

$$P_a = mP_2 + (1 - m)P_1, \quad P_b = nP_3 + (1 - n)P_4,$$

和 $\angle P_1 P_a P_b, \angle P_a P_b P_4$ 的大小

$$\begin{aligned} \angle P_1 P_a P_b &= g(m, n) = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{P_a P_1} \cdot \overrightarrow{P_a P_b}}{|\overrightarrow{P_a P_1}| |\overrightarrow{P_a P_b}|} \right), \\ \angle P_a P_b P_4 &= h(m, n) = \arccos \left(\frac{\overrightarrow{P_b P_4} \cdot \overrightarrow{P_b P_a}}{|\overrightarrow{P_b P_4}| |\overrightarrow{P_b P_a}|} \right). \end{aligned}$$

定义一个目标函数 $f(m, n)$ 来反应 $\angle P_1 P_a P_b, \angle P_a P_b P_4$ 在任意点 (m, n) 时和目标角度值 α, β 的偏差

$$f(m, n) = \sqrt{(\angle P_1 P_a P_b - \alpha)^2 + (\angle P_a P_b P_4 - \beta)^2}.$$

这里的目标函数 $f(m, n)$ 也就是表征 (m, n) 是不是最优设计点的评价指标。目标函数 $f(m, n)$ 的函数值越小, 表示 (m, n) 和要求的值越接近, 最优解是目标函数取得最小值的点。 $f(m, n)$ 的最小值分为以下两种情况:

- $f(m, n)_{\min} = 0$, 极值点是使 $\angle P_1 P_a P_b, \angle P_a P_b P_4$ 等于 α, β 的解;
- $f(m, n)_{\min} > 0$, 极值点不能使 $\angle P_1 P_a P_b, \angle P_a P_b P_4$ 精确满足要求, 而是在设计域内使角度值最接近 α, β 的解。

2.2 结构优化问题

结构优化问题可以提成:

$$\text{find } m, n \tag{1}$$

$$\text{min } f(m, n) \tag{2}$$

$$\text{s.t. } 0 \leq m \leq 1 \tag{3}$$

$$0 \leq n \leq 1 \tag{4}$$

也就是求最优的设计变量 m, n , 使目标函数 $f(m, n)$ 最小, 约束条件为方程 3, 4。

```
% initialize
p1 = [2900, 200, 1700];
p2 = [6200, 0, 1500];
p3 = [5900, 2600, 1200];
p4 = [6100, -1700, 1100];
alpha = 135;
beta = 135;
```

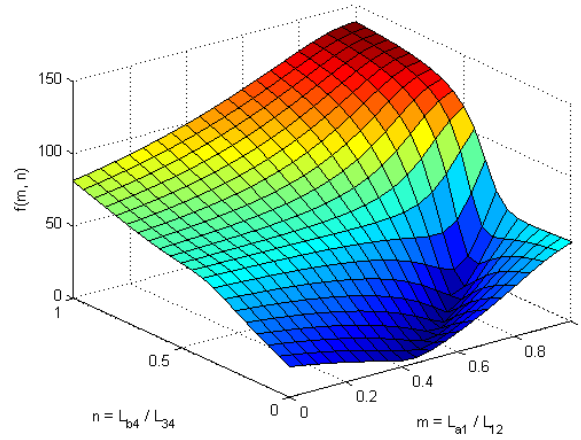


图 2: 初始值

图 3: 目标函数

2.3 优化结果

在图 2 所示的初始值下，目标函数 $f(m, n)$ 在 m, n 的设计域 $[0, 1]$ 内分布情况如图 3。用序列二次规划算法求解，使目标函数取得最小值的最优解为：

When $(m, n) = (0.723550421138, 0.223498396303)$:
 $f(m, n) = 0.000003$

pa = (5287.716390, 55.289916, 1555.289916)
 pb = (6055.300321, -738.956896, 1122.349840)

alpha = 134.999999
 beta = 135.000003

最优解对应的角度值，在误差允许范围内是满足工程需要的。

对不同的问题，可以在程序里修改图 2 所示的初始值，用 MATLAB 重新计算。