

四轴对象模型分析

一、内环 (rate) --二阶过阻尼时延

1.1 二阶推导--从微分方程到传递函数

1. 执行器 (电调+电机+桨叶) --一阶惯性
2. 力矩映射--静态增益
3. 机体--一阶惯性阻尼
4. 串联+总时延

标准二阶格式相关解释

1.2 二阶模型分析

A. 时域性质

单位阶跃响应 (不含时延)

由开环传递函数求其对单位阶跃输入的时域响应 $y(t)$

初始斜率

频域性质

与“延迟的帕德近似”关系

1.3 二阶模型简化到一阶(常用)

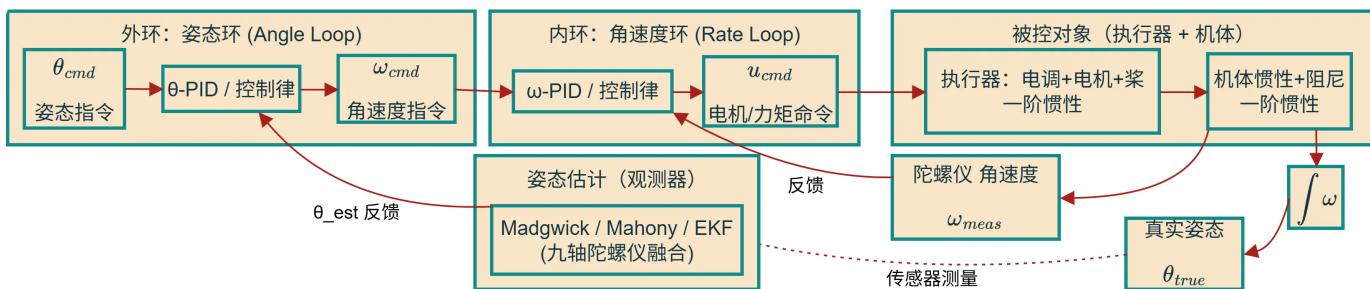
简化方式

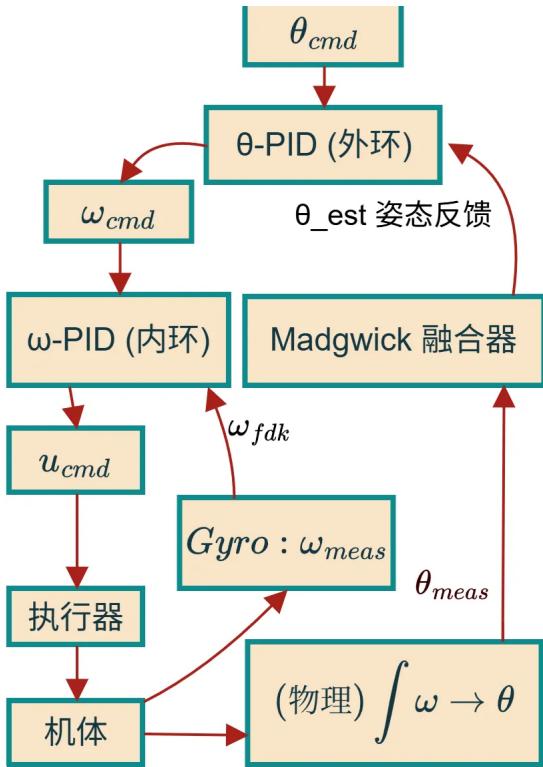
- a. 主导极点法
- b. 初始斜率匹配
- c. 数据驱动拟合

不可以主导极点近似的情形

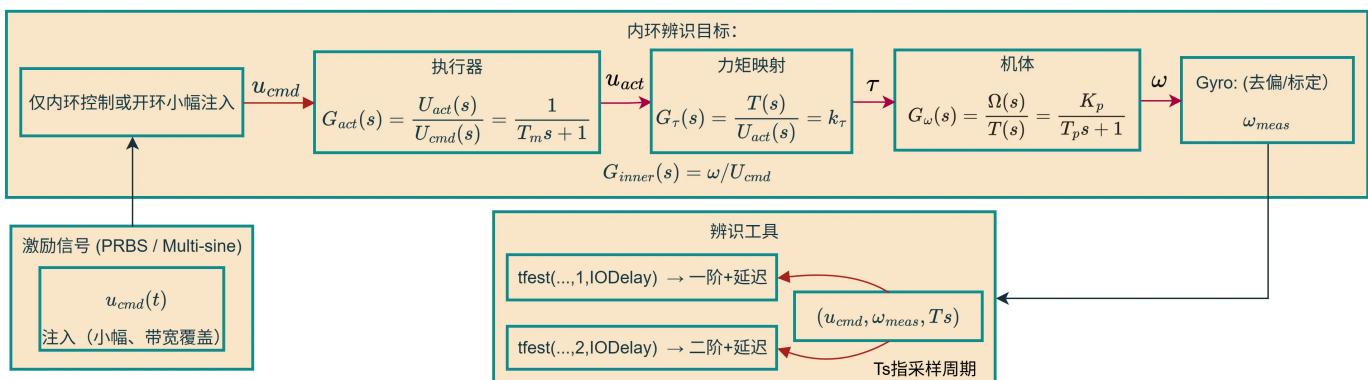
1.3 内环的反馈值不用Madgwick得出的 ω

二、外环





一、内环 (rate) --二阶过阻尼时延



1.1 二阶推导--从微分方程到传递函数

1. 执行器（电调+电机+桨叶）--一阶惯性

电调+电机+桨叶有滞后用一阶惯性系统描述响应： $T_m \dot{u}_{act} + u_{act} = u_{cmd}$

做拉普拉斯变换： $T_m s U_{act}(s) + U_{act}(s) = U_{cmd}(s)$

$$\text{整理得 } G_{act}(s) = \frac{U_{act}(s)}{U_{cmd}(s)} = \frac{1}{T_m s + 1}$$

- T_m : 执行器时间常数, 表示电机达到新转速需要 T_m 秒
- 当 $s=0$ (稳态) 时, 增益=1
- 频率越高, 幅值越小、相位越滞后

2. 力矩映射--静态增益

四轴飞行器的姿态变化由四个桨产生的升力差和反扭矩共同决定。

对于每个电机 i : $T_i = k_{th}\omega_i^2$ $Q_i = k_d\omega_i^2$

其中:

- T_i : 螺旋桨升力 (沿Z轴方向)
- Q_i : 螺旋桨阻力 (反扭矩)
- ω_i : 桨叶角速度 (rad/s), 电机机械转速
- k_{th} : 升力系数
- k_d : 阻力系数

在开环PWM控制下 $u_{act} \propto V \propto \omega^2$

FOC控制时 $u_{act} \propto i_q \propto \omega^2$

带入 $T_i = k_{th}u_{act}, i (i = 1, 2, 3, 4)$ $Q_i = k_du_{act}, i$

对于roll axis: $\tau_x = L(T_R - T_L) = Lk_{th}(u_{act,R} - u_{act,L})$

如果只看roll axis, 并且假设在小扰动下其他轴控制输入不变,

则可把两侧电机的差分命令表示为一个等效控制输入: $u_{act} = u_{act,R} - u_{act,L}$

滚转力矩可写成: $\tau = k_{th}Lu_{act}$, 令 $k_\tau = k_{th}L$ 得 $\tau = k_\tau u_{act}$

拉普拉斯变换后得到 $G_\tau(s) = \frac{T(s)}{U_{act}(s)} = k_\tau$

3. 机体--一阶惯性阻尼

当电机施加一个力矩 τ 给机体时, 机体不会瞬间改变角速度, 而是由转动惯量决定。刚体方程:

$$J\dot{\omega} = \tau - D\omega \quad \rightarrow \quad \dot{\omega} + \frac{D}{J}\omega = \frac{1}{J}\tau$$

做拉普拉斯变换: $(Js + D)\Omega(s) = T(s) \quad \rightarrow \quad G_\omega(s) = \frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js + D}$

化成标准一阶格式: $G_\omega(s) = \frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{K_p}{T_p s + 1}$, 其中 $T_p = \frac{J}{D}$, $K_p = \frac{1}{D}$ \$

- T_p : 机体时间常数, 描述角速度上升的“惯性慢”

4. 串联+总时延

$$u_{\text{cmd}} \rightarrow u_{\text{act}} \rightarrow \tau \rightarrow \omega$$

$$G(s) \equiv \frac{\Omega(s)}{U_{\text{cmd}}(s)} = \frac{k_\tau}{T_m s + 1} \cdot \frac{K_p}{T_p s + 1} \cdot e^{-Ls} = \frac{K e^{-Ls}}{(T_m s + 1)(T_p s + 1)}$$

其中 $K = k_\tau K_p = \frac{k_\tau}{D}$

不计时延: $G(s) \equiv \frac{\Omega(s)}{U_{\text{cmd}}(s)} = \frac{K}{(T_m s + 1)(T_p s + 1)}$

分母展开: $(T_m s + 1)(T_p s + 1) = T_m T_p s^2 + (T_m + T_p)s + 1$

标准二阶格式: $\frac{K}{\frac{\omega_n^2}{s^2} + \frac{2\xi}{\omega_n} s + 1}$ K --稳态增益, ω_n --自然频率, ξ --阻尼比

匹配到: $\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_m T_p}}$, $\xi = \frac{T_m + T_p}{2\sqrt{T_m T_p}}$

$T_m, T_p > 0$, 必有 $\xi > 1$ —— 过阻尼, 所以时域单调、无振荡, 这就是“看起来像一阶

阻尼系数	特征根	极点位置	单位阶跃响应
$\zeta = 0$, 无阻尼	$s_{1,2} = \pm j\omega_n$	一对共轭虚根	等幅周期振荡
$0 < \zeta < 1$, 欠阻尼	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$	一对共轭复根(左半平面)	衰减振荡
$\zeta = 1$, 临界阻尼	$s_{1,2} = -\omega_n$ (重根)	一对负实重根	单调上升
$\zeta > 1$, 过阻尼	$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \mp \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$	两个互异负实根	单调上升

ω_n 自然频率: 系统的固有频率, 当没有阻尼时, 是系统自由震荡的频率

过阻尼这里涉及的东西是自控原理的“线性系统的时域分析法”, 暂且跳过

 第三章 线性系统的时域分析法 – 控制理论笔记 Automation

标准二阶格式相关解释

回顾传递函数结构表达式

$$G(s) = K \cdot \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \cdot e^{-Ls}$$

- $s = z_i$ 零点 $s = p_i$ 极点

标准二阶系统无延迟传递函数: $G(s) = \frac{K\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$

求极点: $s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$ 得 $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}$

1.2 二阶模型分析

A. 时域性质

单位阶跃响应 (不含时延)

卷积时学到阶跃函数和冲激函数

令输入为单位阶跃 $u(t) = 1 \cdot 1(t)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{K}{(T_m s + 1)(T_p s + 1)} \cdot \frac{1}{s} \right\} = K \left[1 - \frac{T_p e^{-t/T_p} - T_m e^{-t/T_m}}{T_p - T_m} \right]$$

若 $T_m = T_p = T$, 极限式: $y(t) = K \left(1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-t/T} \right)$

由开环传递函数求其对单位阶跃输入的时域响应 $y(t)$

Laplace基本对 $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$

$$U(s) = \mathcal{L}\{1(t)\} = \frac{1}{s}$$

线性时不变系统输入输出关系: $Y(s) = G(s)U(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}$

把Y(s)部分分支展开, 查表或反变换得 $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

暂且跳过

初始斜率

$$\dot{y}(0_+) = \frac{K}{T_m + T_p}$$

频域性质

与”延迟的帕德近似“关系

1.3 二阶模型简化到一阶(常用)

!!!注意，直接把二阶对象的实测响应，以一阶+延迟的结构去拟合（时域/频域）：

$$G_{1st}(s) = \frac{K e^{-Ls}}{T_{eq}s + 1}$$

得到最小误差的 T_{eq} 。这往往比纯理论更贴近真实系统。在Matlab实操时是这样做的

简化方式

模型阶次约简-->在关心的频段内快极点对幅相影响可忽略

为什么能省略：主导极点近似/时间尺度分离

若 $\frac{1}{T_m}$ 远大于闭环临界频率 ω_c ，则 $\left| \frac{1}{j\omega T_m + 1} \right| \approx 1$ ， $\angle \approx 0^\circ$ ， $\forall \omega \leq \omega_c$

带宽不能拉到接近 $\frac{1}{T_m}$

省略了执行器的一阶极点，对应 T_m

常见数量级

看不懂，有关带宽待学

在内环设计的工作频带（例如带宽 15–40 Hz）内，执行器极点要么已经远高于交越频率，要么对幅相影响非常小

a. 主导极点法

适用：极点分离明显

优点：闭环带宽预测更稳妥，不易乐观

$$T_{eq} \approx \max(T_m, T_p)$$

b. 初始斜率匹配

适用：两个极点相近（重根附近）

缺点：当极点分离时会高估时间常数，显得过慢

二阶单位阶跃初始斜率： $\dot{y}(0_+) = K/(T_m + T_p)$ 。令一阶初始斜率 K/T_{eq} 相同，则：

$$T_{\text{eq}} \approx T_m + T_p$$

执行器极快时： $T_m \rightarrow 0$ $G_\omega(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{T_ps + 1}$ 一阶延迟

c. 数据驱动拟合

直接拿实测数据用一阶模型拟合

不可以主导极点近似的情形

- 高带宽内环
- 执行器变慢/加入强滤波
 - 拟合时相位明显滞后，就要把极点加回来
- 需要做频响精配或前馈补偿（motor feedforward, 逆模型前馈）
 - 需要准确包含执行器极点
- 非最小相位/强时延场景

1.3 内环的反馈值不用Madgwick得出的 ω

1. 额外极点/时延（相位滞后）

- Madgwick有“互补滤波”本质（陀螺积分 + 加/磁计校正），等效为低通/带通环节，会引入时间常数与纯滞后。
- 你辨识到的将是“机体极点 \times 执行器极点 \times Madgwick极点 (+延迟)”，导致你以为对象是二阶/三阶甚至非最小相位。

2. 非线性 & 时变性

- 算法包含归一化、梯度下降校正、加速度/磁力计权重调节（ β 等参数），在机动、振动、磁干扰下权重会时变。
- 系统辨识通常假设LTI（线性时不变）；Madgwick 让输出端变成时变/非线性，破坏 LTI 假设。

3. 跨轴耦合

- 姿态解算在四元数/方向余弦矩阵空间里运行，小量测误差通过归一化与坐标变换会耦合到其他轴。
- 在 roll 通道做 SISO 辨识，Madgwick 会把 pitch/yaw 扰动“带进来”，让 SISO 模型被无关动态污染。

4. 与磁计、重力假设绑定

- Madgwick 依赖“加速度≈重力”假设与磁场参考。快速机动、有推力/横向加速度、磁干扰时，算法会引入校正滞后与误差，这不是被控对象的物理特性，却会被你“辨识”进去。

5. 数值微分与额外滤波的连锁效应

- 若从 Madgwick 的姿态（四元数/Euler角）再数值微分得到角速度，会引入微分噪声，随后又会加低通，等于再加一组极点。
- 最终输出端包含“Madgwick + LPF + 微分/平滑”的复合动态。

6. 辨识目标的“边界改变”

- 真正想辨识的是 $u_{cmd} \rightarrow$ 机体角速度 这一物理对象（执行器+机体）。
- 用 Madgwick 输出，相当于把传感器/算法并入被控对象，得到“被控对象 + 传感链”的综合模型；日后换滤波参数/算法，模型就变了，不具可移植性。

什么时候可以（或必须）用滤后的角速度？

- 若控制器本身用的就是滤后角速度闭环（即控制回路的反馈已包含 Madgwick/LPF），为了做闭环分析/整定，你可以用与控制器一致的信号做“系统级辨识”（plant+sensor in loop）。
 - 但要清楚：这得到的模型不等价于纯“执行器+机体”，而是“对象+传感链”的整体传递函数。
 - 做“控制器重设计/更换传感器”时，这个模型就不通用了。
- 最后做系统级微调，得出除了 K_p, K_i, K_d 以外的细致参数，这一步要用到滤后结果

二、外环

待更新