

1 Постановка задачи

Напишите программу для численного вычисления определённого интеграла с помощью средств **SciPy**. Сравните результаты вычисления с различными функциями интегрирования с точным решением.

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{4}$$

2 Аналитическое решение

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$$

Сделаем замену

$$t = \cos x,$$

тогда новые пределы интегрирования равны

$$\alpha = \cos(0) = 1$$

$$\beta = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \implies 1 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x = t$$

$$d(\cos x) = dt$$

$$-\sin x dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{-\sin x}$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - t^2}$$

$$dx = -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.$$

Таким образом,

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = - \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t\sqrt{1 - t^2}}$$

В интеграле

$$- \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t\sqrt{1 - t^2}}$$

сделаем замену переменной

$$t = \frac{1}{u}$$
$$dt = d(u^{-1}) = -\frac{du}{u^2}$$

$$\left. \begin{array}{l} u = \frac{1}{t} \\ 1 \leq t \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow 1 \leq u \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} - \int_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} &= - \int_1^{2/\sqrt{2}} \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{1-\frac{1}{u^2}}} = - \int_1^{2/\sqrt{2}} \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{\frac{u^2-1}{u^2}}} = \\ &= - \int_1^{2/\sqrt{2}} \frac{-\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u}\sqrt{u^2-1}} = \int_1^{2/\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \ln|u + \sqrt{u^2-1}| \Big|_1^{2/\sqrt{2}} = \\ &= \ln \left| \frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}-1} \right| - \ln|1 + \sqrt{1^2-1}| = \\ &= \ln \left| \frac{2}{\sqrt{2}} + 1 \right| \approx 0,8813735870195429. \end{aligned}$$

3 Решение с помощью SciPy

```
1 import numpy as np
2 import scipy as sp
3
4 # определяем подынтегральную функцию
5 def f(x):
6     return 1/np.cos(x)
7
8 # вычисляем определенный интеграл при помощи метода quad
9 print(sp.integrate.quad(f, 0.0, np.pi/4)[0])
10
11 # вычисление решения, полученного при ручном счете интеграла
12 print(np.log(2.0/np.sqrt(2)+1.0))
```

↓ 0.881373587019543
⇒ 0.8813735870195429