1 Постановка задачи

Напишите программу для численного вычисления определённого интеграла с помощью средств **SciPy**. Сравните результаты вычисления с различными функциями интегрирования с точным решением.

$$\int \frac{dx}{\cos x}, \quad \text{от } 0 \text{ до } \frac{\pi}{4}$$

2 Аналитическое решение

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x}$$

Сделаем замену

$$t = \cos x,$$

тодга новые пределы интегрирования равны

$$\alpha = \cos(0) = 1$$
$$\beta = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$0 \le x \le \frac{\pi}{4} \Longrightarrow 1 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned}
\cos x &= t \\
d(\cos x) &= dt \\
-\sin x dx &= dt \\
dx &= \frac{dt}{-\sin x} \\
\sin x &= \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - t^2} \\
dx &= -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int\limits_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x} = -\int\limits_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t\sqrt{1 - t^2}}$$

В интеграле

$$-\int\limits_1^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t\sqrt{1 - t^2}}$$

сделаем замену переменной

$$t = \frac{1}{u}$$

$$dt = d(u^{-1}) = -\frac{du}{u^2}$$

$$\left.\begin{aligned} u = \frac{1}{t} \\ 1 \le t \le \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow 1 \le u \le \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$-\int\limits_{1}^{\sqrt{2}/2} \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}} = -\int\limits_{1}^{2/\sqrt{2}} \frac{-\dfrac{du}{u^2}}{\dfrac{1}{u}\sqrt{1-\dfrac{1}{u^2}}} = -\int\limits_{1}^{2/\sqrt{2}} \frac{-\dfrac{du}{u^2}}{\dfrac{1}{u}\sqrt{\dfrac{u^2-1}{u^2}}} =$$

$$= -\int\limits_{1}^{2/\sqrt{2}} \frac{-\dfrac{du}{u^2}}{\dfrac{1}{u}\dfrac{\sqrt{u^2-1}}{u}} = \int\limits_{1}^{2/\sqrt{2}} \frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right|\Big|_{1}^{2/\sqrt{2}} =$$

$$= \ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{4}{2}-1}\right| - \ln\left|1 + \sqrt{1^2-1}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| \approx 0{,}8813735870195429.$$

3 Решение с помощью SciPy

```python
import numpy as np
import scipy as sp

# определяем подынтегральную функцию
def f(x):
    return 1/np.cos(x)

# вычисляем определенный интеграл при помощи метода quad
res = sp.integrate.quad(f, 0.0, np.pi/4)
print(res[0])

# вычисление решения, полученного при ручном счете интеграла
print(np.log(2.0/np.sqrt(2)+1.0))
```

```
0.881373587019543
0.8813735870195429
```