1 Постановка задачи

Напишите программу для численного решения обыкновенного дифференциального уравнения с заданным начальным условием с помощью средств **SciPy**. Сравните результат вычисления с точным решением. Нарисуйте графики точного и численного решений, а также относительной ошибки численного решения.

5)
$$y'' + 2(y')^2 = 0, \quad \text{при } y(10) = 1, y'(10) = 1$$

12)
$$10y' + 25y = 0, \quad \text{при } y(0) = 0$$

2 Аналитическое решение

2.1 ОДУ второго порядка

Пусть x — аргумент. Заметим, что $y = 0$ — решение 5). Введем переменную

$$v = v(x) = y'_x$$
$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = v'_x$$

Тогда уравнение

$$y'' + 2(y')^2 = 0$$

запишется в виде

$$\begin{aligned}
&v' + 2v^2 = 0\\
&\frac{dv}{dx} = -2v^2\\
&\int v^{-2} dv = -2\int dx\\
&-\frac{1}{v} = -2x + C_1, \quad (C_1 = const)\\
&\frac{1}{v} = 2x - C_1\\
&v = \frac{1}{2x - C_1}
\end{aligned}$$

Задача Коши $v(10) = 1$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{20 - C_1} = 1\\
&20 - C_1 = 1\\
&C_1 = 19
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&y'_x = \frac{1}{2x - 19}\\
&\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2x - 19}\\
&\int dy = \int \frac{dx}{2x - 19} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x - 19)}{2x - 19}\\
&y = \frac{1}{2} \ln |2x - 19| + C_2
\end{aligned}$$

Задача Коши $y(10) = 1$:

$$\frac{1}{2} \ln |20 - 19| + C_2 = 1$$

$$\frac{1}{2} \ln 1 + C_2 = 1$$

$$C_2 = 1$$

Таким образом,

$$y = \frac{1}{2} \ln |2x - 19| + 1$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2} \ln |2x - 19| + 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

2.2 ОДУ первого порядка

Решим 12).

$$10y' + 25y = 0$$

Заметим, что $y = 0$ — решение.

$$10\frac{dy}{dx} + 25y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5}{2}y, \quad y \neq 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\frac{5}{2} \int dx$$

$$\ln |y| = -\frac{5}{2}x + C$$

$$y = e^{-2{,}5x+C} = e^{2{,}5x} \cdot e^C = Ce^{2{,}5x}$$

Задача Коши $y(0) = 0$:

$$C \cdot e^0 = 0$$

$$C = 0 \Longrightarrow y = 0 \text{ — точное решение.}$$

3 Решение с помощью SciPy

3.1 ОДУ второго порядка

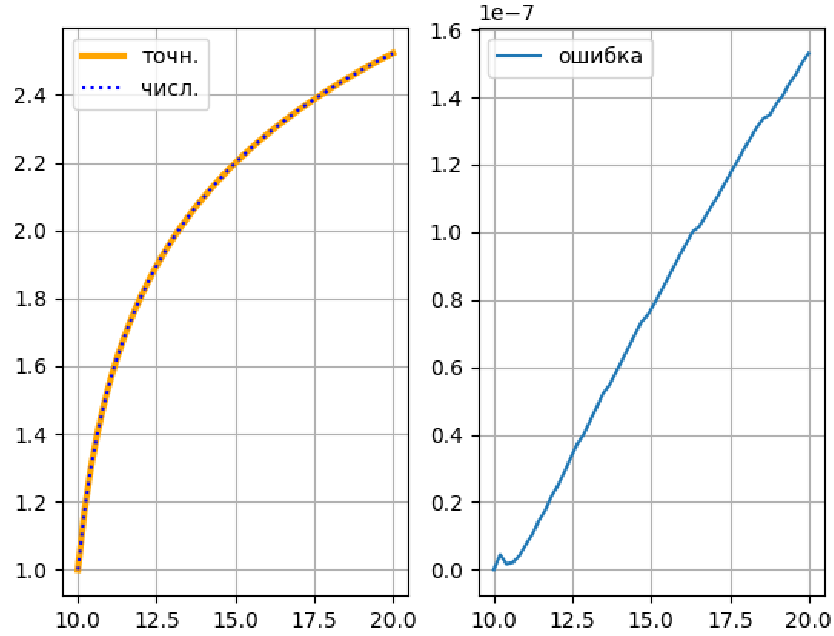
$$y''_{xx} + 2(y')^2 = 0$$

$$v(x) = y'_x$$

$$\frac{dv}{dx} + 2v^2 = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} = -2v^2 \\ \dfrac{dy}{dx} = v \end{cases}$$

Начальные условия: $y(10) = 1$, $v(10) = 1$.



3.2 ОДУ первого порядка

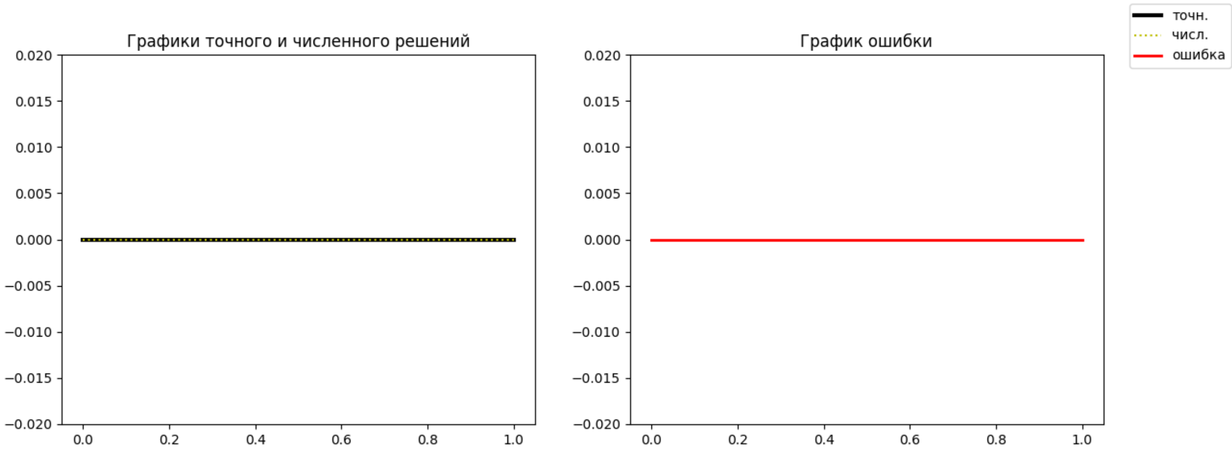
```python
from scipy import integrate
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def f(y, x):
    return -2.5*y

xi = np.linspace(0, 1, 50)
y0 = 0
numeric_solution = integrate.odeint(f, y0, xi)
exact_soluion = np.zeros(xi.size)
err = np.abs(exact_soluion-numeric_solution[:, 0])
for i in err:
    print("{0:.25f}".format(i))

fig = plt.figure(figsize=(14, 5))
ax1 = fig.add_subplot(1,2,1)
ax2 = fig.add_subplot(1,2,2)
ax1.set_ylim(-0.02, 0.02)
ax2.set_ylim(-0.02, 0.02)
ax1.plot(xi, exact_soluion, 'k', linewidth=3, label='точн.')
ax1.plot(xi, numeric_solution[:, 0], ':y', label='числ.')
ax2.plot(xi, err, 'r', linewidth=2, label='ошибка')
ax1.set_title("Графики точного и численного решений")
ax2.set_title("График ошибки")
fig.legend()
plt.show()
```

Создадим массив погрешностей вычисления между точным и численным решениями и выведем его с точностью до 25 знаков после запятой.

```
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
0.0000000000000000000000000
```

Version Control Run Python Packages TODO Python Console

Построим графики



4 Выводы

Библиотека Scipy позволяет достаточно точно и эффективно находить исленное решение ОДУ.