

# 高压油管的压力控制

## 摘要

本文主要研究高压油管内的压力控制问题，以质量守恒定律为理论依据，通过寻找压力、密度随时间变化的函数关系，求出供油、喷油系统的工作时间及参数，建立了基于质量关系与连续方程的压力控制模型，借助二分法与差异演化算法求解。

### 对于问题一：

(1) 要求在给定入口恒定压力时尽可能稳定管内压力，即管内燃油质量不变，以此依据质量守恒定律建立起喷入质量与喷出质量的等式关系。由于喷出燃油具有周期性，在此我们只考虑一个周期内的质量变化。由喷嘴处已知压力、喷油速率与时间关系图可求得喷出燃油质量，喷入燃油质量为恒定压力下流速对时间的积分，解出一次工作时间内单向阀开启时间，最后解得  $t = 0.28ms$ 。

(2) 要求将高压油管内压力经过一定时间增加并稳定在某个压力下，管内压力的上升本质上是管内燃油质量的增加，随着质量增加管内压力也在不断改变，通过压力改变量与密度改变量正比关系得到高压油管内部压力随时间改变的迭代关系式，利用二分法求解出升压所需时间。

**对于问题二：**为使管内压强稳定，进出油的质量需要保持一致，质量受体积与密度影响，供油系统进入到高压油管内的燃油质量由单向阀开启直到关闭过程中每一时刻的质量增量累加而成，而在过程中压力与密度一直随时间变化，我们求解出压力随时间变化的函数，利用迭代方法求解数值解后，利用压力改变量与密度改变量正比例关系求出密度关于时间变化的函数，对体积与密度进行积分求得进入管内燃油质量。喷油系统工作周期由针阀随时间变化的函数而决定，利用喷油系统的结构依据解析几何求出质量随时间的函数，对二者函数做比较求出角速度  $0.85rad/ms$ 。

### 对于问题三：

(1) 要求在增加一个喷油嘴的条件下对喷油和供油策略进行调整。此时两个喷油嘴的喷油规律相同，即单位时间内出油质量为原来的两倍。对于进油系统改变凸轮旋转的角速度可以改变进入高压油管的燃油质量；对于喷油系统改变针阀在最高处的停留时间可以改变周期内喷出的燃油。为了维持高压油管内压强稳定，进出的燃油质量应相等，进而可以建立凸轮角速度与针阀运动时间的一般化函数，根据函数关系对喷油和供油策略进行调整。

(2) 要求在单向阀下侧安置一减压阀，通过使油管内燃油回流来缓冲进油时管内压力，进一步增强管内压力的稳定性。我们通过设定高压油管内燃油的压强阈值范围来控制减压阀的开关时间，依据质量守恒定律列出等式求解即可。

**关键词：**质量守恒定律 二分法 差异演化算法 连续积分方程

# 一、问题重述

## 1.1 问题背景

燃油发动机在社会各方面发展都有极大的作用，燃油进入高压油管与喷出过程是许多燃油发动机工作的基础，通过研究喷射过程调节前后压力尽可能提高燃油机工作效率，减少污染显得尤为重要。

## 1.2 题目重述

高压燃油系统的工作原理为燃油经过高压油泵进入高压油管，再由喷油嘴喷出，通过控制高压油泵单向阀开闭，使燃油进入和喷出工作周期具有一定的间歇性，利用在此过程中高压油管内压力的变化使得所喷出的燃油量出现偏差提高燃油发动机的工作效率。

**问题 1.** 给定某高压油管的内腔长度为 500mm，内直径为 10mm，供油入口小孔直径为 1.4mm，通过单向阀开关控制供油时间的长短，单向阀每打开一次后就要关闭 10ms。喷油器每秒工作 10 次，每次工作时喷油时间为 2.4ms，喷油器工作时从喷油嘴 B 处向外喷油的速率已知。入口压力恒定为 160 MPa，高压油管内的初始压力为 100 MPa。现将油管内的压力尽可能稳定在 100 MPa 左右

(1) 如何设置单向阀每次开启的时长？

(2) 若要将高压油管内的压力从 100 MPa 增加到 150 MPa，且分别经过约 2 s、5 s 和 10 s 的调整过程后稳定在 150 MPa，单向阀开启的时长应如何调整？

**问题2.** 实际工作时，燃油进入由柱塞腔控制，出油由喷油嘴的针阀控制。燃油进入是通过凸轮驱动柱塞上下运动，给定凸轮参数信息，柱塞向上运动时压缩柱塞腔内的燃油，当柱塞腔内的压力大于高压油管内的压力时，柱塞腔与高压油管连接的单向阀开启，燃油进入高压油管内。柱塞腔内直径为5mm，柱塞运动到上止点位置时，柱塞腔残余容积为 $20\text{mm}^3$ 。柱塞运动到下止点时，低压燃油会充满柱塞腔（包括残余容积），低压燃油的压力为0.5 MPa。喷油器喷嘴结构如图所示，针阀直径为2.5mm、密封座是半角为 $9^\circ$ 的圆锥，最下端喷孔的直径为1.4mm。针阀升程为0时，针阀关闭；反之针阀开启，燃油向喷孔流动并喷出。在一个喷油周期内针阀升程与时间的关系给出。要求在问题1中给出的喷油器工作次数、高压油管尺寸和初始压力下，确定凸轮的角速度，使得高压油管内的压力尽量稳定在100 MPa左右。

**问题3.** 在问题2的基础上，再增加一个喷油嘴，每个喷嘴喷油规律相同，且为了更有效地控制高压油管的压力，将在D处安装一个单向减压阀。单向减压阀出口为直径为1.4mm的圆，打开后高压油管内的燃油可以在压力下回流到外部低压油路中，从而使得高压油管内燃油的压力减小。

(1) 喷油和供油策略应如何调整？

(2) 请给出高压油泵和减压阀的控制方案。

# 二、问题分析

## 2.1 问题一的分析

问题一要求通过改变单向阀供油时间长短来控制高压油管内的压力，本质为进出油质量差关系的问题。考虑第一小问要求高压油管内部压强稳定在 100MPa，等价条件为进出质量  $m_1$ 、 $m_2$  在整个过程中相等。因此我们在此等式条件下利用进、出口已知压强得到二者各自流体密度，结合流速公式得到入口的工

作时间。利用固定的休息时间 $10ms$ 求出一个周期内的工作次数，进一步求出每次单向阀开启时长。

第二小问要求我们将高压油管内压力从 $100MPa$ 稳定增加至 $150MPa$ ，此时固定周期内进入管内质量大于流出质量，管内的压力随时间变化，需要改变的体积随管内压力变化，因此我们利用压力改变量与质量改变量的正比关系找出 $\Delta t$ 前一时刻 $t_i$ 与后一时刻 $t_{i+1}$ 的压力变化量，给出压力与时间变化的关系式，利用二分法对 $\Delta t$ 迭代求出逼近 $150MPa$ 的最优时长，即为单向阀开启时长。

## 2.2 问题二的分析

问题二在问题一的基础上给出具体进油的凸轮泵油机制与出油的喷嘴结构，要求我们计算出管内压强稳定在 $100MPa$ 时凸轮的角速度。显然为了使管内压强稳定，即进出油的质量需要保持一致，需要分别计算进油、出油两部分体积及密度变化规律利用质量的等式关系计算角速度。

对于凸轮工作系统，一个周期内高压油泵中燃油的质量与压力、密度、体积都与时间有关，为了求出质量的变化量我们需要构造出密度随时间变化的函数 $\rho(t)$ ，但在分析凸轮运动过程中压力是一个显著量，因此我们转化为求解压力与时间的关系函数 $P(t)$ ，结合附件给出极径与极角得到凸轮具体参数信息，找出油泵内高度变化量与极径的函数关系，可以得到油泵内体积变化函数 $V(t)$ 。利用所得关系积分求解在压缩与回程两个 $100MPa$ 临界值之间的质量改变量，即为凸轮在一个工作周期的质量改变量。

对于针阀工作系统，喷油密度恒定为 $100MPa$ ，所以只需计算出体积随工作时间变化的函数关系即可得到出口的质量改变量。体积改变量由升程高度决定，根据升程为0及升程距离突变点可计算出临界点高度，再由附件所给针阀升程与时间关系拟定高度与时间的函数关系，联立得到体积与时间的变化函数，对应当前 $100MPa$ 压力下的密度求出质量改变量。

## 2.3 问题三的分析

问题三第一小问要求在问题二的基础上改变出油系统的喷油嘴个数，考虑喷油和供油策略的调整。为了更完整的考虑策略改变，我们仍依据质量改变量相等给出供油喷油都为变量的情况下二者的函数关系式。假设凸轮供油系统角速度为 $\omega$ 的情况下，利用第二问中求出的 $P(t)$ 关系式，由压力与密度改变量的正比例关系进一步得到 $\rho(t)$ ，将其与油泵压缩高度改变量结合计算出左侧供油系统质量改变量 $\Delta m$ 。由于右侧现包含两个喷油嘴，且在一个工作周期内二者喷油质量和仍等于供油质量和，则一个喷油嘴喷出质量为 $\frac{\Delta m}{2}$ ，考虑在 $\frac{\Delta m}{2}$ 下喷油策略的调整。

由于在针阀系统中改变喷油量具体表现为针阀抬起高度恒定时的 $\Delta t$ ，即通过改变 $\Delta t$ 的大小来影响喷油量。我们用升程、 $\Delta t$ 、返程对喷油体积进行积分求和，令进、出油质量相等可解得 $\omega$ 与针阀系统 $\Delta t$ 关系式，最终通过调整供油系统中凸轮的角速度和喷油系统中喷油嘴针阀运动曲线调整策略。

第二小问考虑在单向阀下侧安置一减压阀，通过使油管内燃油回流来缓冲进油时管内压力，进一步保持管内压力的稳定性。则左侧凸轮系统供油量的质量函数关系式需要在模型二中的 $\int_T \rho(t)v(t)dt$ 进入燃油总质量中减去回流的质量。为了合理稳定高压油管内压力，我们依据管内压力变化曲线 $P(t)$ 的取值设定开、关

减压阀，当压力处于阈值范围内开启减压阀，即左侧系统最终进入燃油质量为  $\int_T \rho(t)v(t) - \int_T \rho(t)v(t)I_{t \in (tP1, tP2)} dt$ ，此质量与右侧两个喷油嘴合计出油质量相等，反解出供油、喷油系统的参数来确定高压油泵与减压阀的控制方案。

### 三、模型假设

1. 不考虑油管在流动过程中的损失量及泄露、气穴现象影响；
2. 不考虑单向阀与针阀所受到的摩擦阻力及喷油系统的弹性变形；
3. 不考虑温度对压力、密度的影响；
4. 假设油路不受压力波影响；

### 四、符号说明

数学符号	符号表示的具体意义	量纲
$m$	质量	$mg$
$\rho$	燃油密度	$mg/mm^3$
$P$	压力	$MPa$
$V$	体积	$mm^3$
$T$	周期	$ms$
$\omega$	角速度	$rad/ms$
$Q$	单位时间内燃油流量	$mm^3/ms$
$d$	针阀运动升程高度	$mm$
$\Delta H$	柱塞变化高度	$mm$

### 五、模型的建立与求解

#### 5.1 问题一模型的建立

##### 5.1.1 管内恒压时单向阀时间设置

第一小问要求在入口处为  $160MPa$  恒压，出口处为  $100MPa$  压力的条件下给定单向阀开启时间使得高压油管内压力稳定在  $100MPa$  左右。此时管内压强恒定情况较简单，我们仅考虑一维的情况，通过质量、压力、密度与流速的关系得出进出口质量改变量并使二者在一次工作时间内保持相等。

由质量守恒定律： $\Delta m_{入} = \Delta m_{出}$

**对出口处质量：**已知工作时间、次数及喷油速率等参数信息，根据速率对时间的累积可得到一次工作下喷油嘴出油体积，乘以当前压力下密度则为出口质量

改变量。

喷油嘴一次工作喷油体积：  $\int_0^{2.4} v(t) dt$

其中  $2.4ms$  为一次工作时间，  $v(t)$  为喷油速率函数。

$$v(t) = \begin{cases} 50t^2 & t \in [0, 0.2) \\ 20t - 2 & t \in [0.2, 2.2) \\ -50t^2 + 240t - 244 & t \in [2.2, 2.4) \\ 0 & t \in [2.4, 100) \end{cases}$$

喷油口一次工作喷油质量：  $\Delta m_1 = \int_0^{2.4} v(t) dt \rho_{100}$

对入口处质量：已知入口处压力恒为  $160MPa$ ，可由压力变化量与密度变化量的正比关系求出该压力下的燃油密度，进一步由流量公式  $Q = CA \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho}}$  得到单位时间内入口燃油体积改变量，由流量对时间  $t$  积分乘以密度则为入口处质量改变量。

$$\text{出口处密度：} \begin{cases} \rho_{160} = \rho_{100} + \Delta \rho \\ \frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{E}{\rho} \end{cases}$$

$$\text{出口处燃油流速：} Q = CA \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho_{160}}}$$

$$\text{出口处单位时间喷油质量：} m = Q \rho_{160}$$

由出口、入口质量改变量相等反解单向阀工作时间：

$$\Delta m_{\text{入}} = \Delta m_{\text{出}}, \text{ 即 } Qt \rho_{160} = V_{\text{出}} \rho_{100}$$

由质量等式关系可知在喷油嘴一次工作时间内入口需平均工作时间，题目已知喷油器固定关闭间隔  $10ms$ ，我们由  $1s$  内总时间减总工作时间则为总关闭时间，除去休息时间则为单向阀工作次数，则可用总工作时间除以次数算出单向阀每次开启的时长。

$$1s \text{ 内休息总时间为：} 1000 - 10t, \text{ 单位为 } ms$$

$$1s \text{ 内 } A \text{ 口工作次数为：} \frac{1000 - 10t}{10}$$

$$\text{则 } A \text{ 口每次工作时间平均为：} \bar{t} = \frac{10t}{\frac{1000 - 10t}{10}} = \frac{100t}{1000 - 10t}$$

### 5.1.2 管内升压时单向阀时间设置

题目要求在  $2s, 5s, 10s$  时间内压力增加为  $150MPa$  并且稳定，与恒压时不同的是，此时入口质量大于出口的质量。当每次增加  $\Delta m$  质量时相应的压力也增加  $\Delta P$ ，随着时间的增加压力  $P$  也在不断改变，由容器体积不变我们通过压力改变量与密度改变量正比关系可得到高压油管内部压力随时间改变的迭代关系式。已知压力初值与结束值，对迭代等式利用二分法遍历求出固定工作时间  $\Delta t$  即为上升阶段单向阀开启时间。在油管内部压力达到  $150MPa$  时需要改变单向阀工作时间来维持压力稳定，利用第一小问模型求出当内部恒压为  $150MPa$  时的时间。

压力改变量与密度该变量关系：

$$\frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{E}{\rho}$$

密度与质量关系：

$$m = \rho v$$

但在此时油管体积为定值，则密度改变量与质量改变量成正比：

$$\Delta \rho = \frac{\Delta m}{v} \quad \text{此时定值 } v = Sh = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 h = \quad d = 10mm, h = 500mm$$

则压力改变量  $\Delta P$  与时间改变量  $\Delta t$  函数迭代关系为：

$$\Delta P = P_{i+1} - P_i = \frac{E}{\rho_i} \frac{\Delta m}{v} = \frac{E_i}{\rho_i} \frac{\rho_i c \left(\frac{d}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{2(P_{i+1} - P_i)}{\rho_i}} \Delta t - 0.85 * 44}{12500\pi}$$

利用上述迭代式初值条件  $P_0 = 100$ ,  $P_n = 150$  求解工作时间  $\Delta t$ 。

## 5.2 问题一模型的求解

### 5.2.1 恒压下的问题求解

$$\text{首先求解出口处密度: } \begin{cases} \rho_{160} = \rho_{100} + \Delta \rho \\ \frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{E}{\rho} \end{cases}$$

代入  $\rho_{100} = 0.85mg/mm^3$ ,  $\Delta P = 160 - 100 = 100MPa$ , 此时  $E = 2171.4MPa$ , 得到  $\Delta \rho \approx 0.023$ , 则  $\rho_{160} = 0.873$ 。

$$\text{出口处燃油流速: } Q = CA \sqrt{\frac{2\Delta P}{\rho_{160}}}$$

代入  $C = 0.85$ ,  $A = \pi r^2$ ,  $r = 0.7mm$ 。

出口处单位时间喷油质量:  $m = Q\rho_{160}$

$$\text{则出口质量改变量为: } \Delta m_1 = \int_0^{2.4} v(t) dt \rho_{100} = \left( \int_0^{0.2} + \int_{0.2}^{2.2} + \int_{2.2}^{2.4} \right) v(t) dt = 44mm^3$$

$\Delta m_{\text{入}} = \Delta m_{\text{出}}$ , 即  $Qt\rho_{160} = V_{\text{出}}\rho_{100}$ ,  $t = 2.79s$ 。

1s 内休息总时间为:  $1000 - 10t = 972.1s$

1s 内 A 口工作次数为:  $\frac{1000 - 10t}{10} \approx 97$  次

则 A 口每次工作时间平均为:  $\bar{t} = \frac{10t}{1000 - 10t} = \frac{100t}{1000 - 10t} = 0.28ms$

### 5.2.2 基于二分法检索的增压下的问题求解

所求  $P(t)$  关系式不能直接由微分方程得到显示解, 所以我们利用差分形式给出压力改变量与时间改变量迭代关系式如下:

$$\Delta P = P_{i+1} - P_i = \frac{E}{\rho_i} \frac{\Delta m}{v} = \frac{E_i}{\rho_i} \frac{\rho_i c \left(\frac{d}{2}\right)^2 \sqrt{\frac{2(P_{i+1} - P_i)}{\rho_i}} \Delta t - 0.85 * 44}{12500\pi}$$

已知初值条件初值条件  $P_0=100$ ，迭代终止条件  $P_n=150$ ，为了充分考虑运算时间与精度选取初始步长  $\Delta t=0.05$ 。

二分法检索是给定一固定数集，我们希望能快速确定所要查找的数是否在这个数集中。首先对集合中的数据进行排序得到数表。查看正中间的数字，若相等则停止迭代，否则不相等则分为两种情况，若需要查找的数比中位数小，就递归用同样方法查看左半部分，若要查找的数比中间的数大，就查看表的右半部分。在此迭代式中压力改变量随  $P$  随着时间  $\Delta t$  增加而增加，将所取  $\Delta t$  迭代至恒定压力  $150MPa$  左右时用二分法思想对  $\Delta t$  进行大小调整，从而求出满足迭代等式的时间间隔  $\Delta t$  作为单向阀开启时间。

算法流程：

- Step1:** 带入初始步长  $\Delta t=0.05$ ，由压力初值  $P_0=100$ ，依次计算出  $P_2, P_3 \cdots P_i \cdots P_n$ ；
- Step2:** 由迭代终止条件  $P_n=150$  计算出当前  $\Delta t$  距离终止条件数值的带符号距离差  $\Delta d$ ，通过改变  $\Delta t_i$  算出不同的距离差；
- Step3:** 取不同时间步长的区间终点，如果  $\Delta d_i * \Delta d_{i+1} < 0$ ，则区间变为  $[\Delta t_i, \Delta t_{i+1}]$ ，否则就在  $[\Delta t_{i-1}, \Delta t_i]$ ；
- Step4:** 当  $|\Delta d_i - 0| < \varepsilon$  时， $\Delta t_i$  为所求工作时间

表 1 管内压力从 100 MPa 增加到 150 Mpa 的单向阀开启时长

	2s	5s	10s
单向阀开启时长/ms	0.4507	0.3488	0.2996

### 5.3 问题二模型的建立

问题二在问题一的基础上将具体进油的凸轮泵油机制与出油的喷嘴结构工作机制给出，要求我们计算出管内压强稳定在  $100MPa$  时凸轮的角速度。显然为了使管内压强稳定，进出油的质量需要保持一致，则问题需要分别计算进油、出油各部分体积及质量变化规律利用质量的等式关系计算角速度。

解决问题二本质为分析进油的凸轮工作系统及出油的针阀工作系统工作时间、燃油量等参数性质，得到两个系统工作原理及参数进而计算出各自系统下燃油压强与体积、质量的改变量，但由于在压缩周期过程中压力、密度、体积都在改变，所以我们基于质量守恒定律建立等式关系迭代求解角速度。

#### 5.3.1 针对针阀工作系统的燃油喷出量计算

对于针阀工作系统，喷油密度恒定为  $100MPa$ ，所以只需计算出体积随工作时间变化的函数关系即可得到出口的质量改变量。体积改变量由升程高度决定，根据升程为 0 及升程距离突变点可计算出临界点高度，再由附件所给针阀升程与时间关系拟定高度与时间的函数关系，联立得到体积与时间的变化函数，对应当前  $100MPa$  压力下的密度求出质量改变量。

附件中给出针阀运动曲线时间与升程距离的离散点，我们利用此点进行曲线拟合得到针阀升程与时间的变化函数：

$$\Delta H = f(t)$$

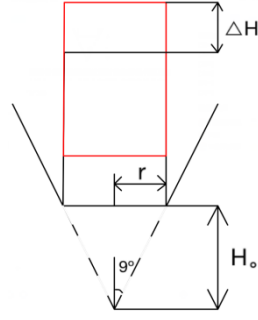


图 1 针阀内部结构图

在针阀系统中可以利用针阀刚触碰密封座时的临界条件算出  $H_0$ ，此后根据针阀升程与时间  $t$  的函数减去  $H_0$  所在虚线体积则为实际出油体积。体积公式为：

$$\begin{cases} V = V_1 - V_0 = \frac{1}{3} S \Delta h \\ V_1 = \frac{1}{3} \pi (H_0 \tan 9^\circ)^2 H_0 \end{cases}$$

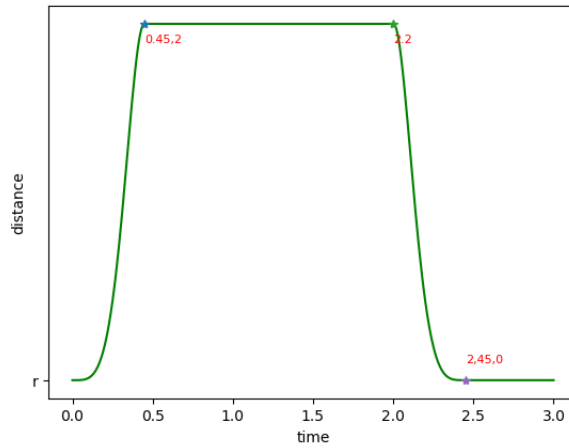


图 2 针阀随时间运动规律

由图可知针阀随时间运动曲线规律与第一问中趋势一致。

联立求解得  $V = \frac{\pi}{3} (\tan 9^\circ)^2 [(\frac{0.7}{\tan 9^\circ} + d)^3 - (\frac{0.7}{\tan 9^\circ})^3]$ 。最终得到体积  $V$  随时间  $t$  的变化函数关系曲线，再由体积函数乘以对应密度得到喷出燃油质量。

### 5.3.2 针对凸轮工作系统的燃油进入量计算

此时左侧供油系统的燃油来自于高压油泵的柱塞腔出口，凸轮驱动柱塞上下运动，推动柱塞挤压燃油改变密度与压力，当柱塞腔内的压力大于高压油管内压力时，控制燃油进入的单向阀开启，然后从柱塞腔进入高压油管内。当柱塞运动到上止位点时，开始向下运动，但此时管口仍有燃油进入，直至柱塞腔内燃油压力达到临界条件即压力小于  $100\text{MPa}$  时停止进入燃油。



在此过程中柱塞腔内燃油压力、体积、密度一直在变化，由质量守恒定律可知求解总目标仍为凸轮一个运动周期内燃油进入管内质量，则需要计算出密度与体积。体积可由凸轮边缘曲线运动建立极径与运动高度关系求得，密度可通过求解压力变化函数求得。

### (1) 管口出油前压缩过程

$$\rho_0 V_0 = \rho_{100} V_{100}$$

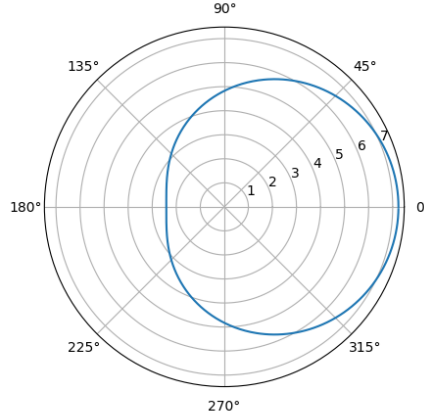


图 3 凸轮边缘形状

由附件所给极径与极角数据拟合出凸轮边缘形状，可知凸轮长轴与短轴长度，通过此信息计算出柱塞上升、下降高度与凸轮极径关系，进一步得到体积。

### (2) 喷油过程

由压力改变量与密度改变量呈正比例关系可知：

$$\frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{E}{\rho}$$

此时压力、弹性模量与密度都为时间  $t$  的函数，对上式关于  $t$  求导：

$$\frac{1}{E} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

将  $\rho = \frac{m(t)}{v(t)}$  带入可得：

$$\frac{1}{E} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{v(t)} \frac{dm(t)}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{m(t)}{v^2(t)} \frac{dv}{dt}$$

上述方程称为连续方程，第一项是单位时间内纯进入容积内的燃油容积，第二项为集中容积的变化率。让将方程应用在柱塞腔增压时，第一项为单位时间从柱塞经过单向出油阀的燃油量即  $Q$ 。则我们带入流量  $Q$  计算公式得到：

$$\frac{v(t)}{E} \frac{dP}{dt} = CA \sqrt{\frac{2(P-100)}{\rho(P)}} - \frac{dv}{dt}$$

上式为关于  $t$  函数的微分式，但在此不清楚压力  $P$  关于  $t$  的解析解具体形式，若需要得到  $P(t)$  则需要近似数值求解。

### (3) 迭代函数

将上述关系等式转化为第  $i-1$  次与第  $i$  次压力  $P$  的迭代函数：

$$V(i)(P_{i+1}-P_i) = CA \sqrt{\frac{2(P_i-100)}{\rho}} E_i \Delta t - (V_{i+1}-V_i) E_i$$

#### (4) 喷出体积

此处给出凸轮极角与极径关系，而极径的转动带动柱塞上下运动，即可以找出极径与柱塞压缩高度的关系函数。进一步通过迭代函数求解向上压缩过程与向下压缩过程  $P(t)$  为  $100\text{MPa}$  的临界值时间，计算出柱塞高度变化量，即可得到体积变化量。体积公式为：

$$V_{i+1} = (r(\omega, t + \Delta t) - r_{\min}) \pi r^2$$

#### (5) 喷出质量

由  $m = \rho v$  可知，由于此问中  $\rho$ 、 $v$  都为时间  $t$  的函数，为了求出累积质量改变量，需要对二者乘积关于时间  $t$  积分，公式如下：

$$m = \int_{t_{P上=100}}^{t_{P下=100}} \rho(t) v(t) dt$$

### 5.3.3 基于质量守恒定律的恒压模型

结合基于凸轮工作系统的燃油进入量计算与基于针阀系统的燃油喷出量计算，为了维持高压油管内压力的数值稳定，需要使在一个周期范围内燃油进入量与喷出量相等，即  $\Delta m_{\text{入}} = \Delta m_{\text{出}}$ ，联立喷入喷出过程即为最终的基于质量守恒定律的高压油管压力控制模型：

$$\begin{cases} \Delta m_{\text{入}} = \Delta m_{\text{出}} \\ V_{\text{出}} = \frac{\pi}{3} (\tan 9^\circ)^2 \left[ \left( \frac{0.7}{\tan 9^\circ} + d \right)^3 - \left( \frac{0.7}{\tan 9^\circ} \right)^3 \right] \\ m_{\text{出}} = V_{\text{出}} * \rho_{100} \\ \frac{v(t)}{E} \frac{dP}{dt} = CA \sqrt{\frac{2(P-100)}{\rho(P)}} - \frac{dv}{dt} \\ \frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{E}{\rho} \\ V_{i+1} = (r(\omega, t + \Delta t) - r_{\min}) \pi r^2 \\ m_{\text{进}} = \sum \int \rho(t) v(t) dt \end{cases}$$

### 5.4 基于启发式算法的问题二模型的求解

问题二的求解主要在于压力  $P$  关于时间  $t$  的函数，在实际求解数值解时，考虑到运行效率无法直接给定步长  $\Delta t$  遍历，所以我们反解给定角速度  $\omega$  求出最合理的时间所对应的角速度作为最优解。

求解时考虑到遍历算法计算量大且运行效率低，我们采用带约束的优化迭代差异演化  $DE$  算法进行求解。

#### 5.4.1 差异演化 $DE$ 算法

该算法一种基于实数编码的含有保优思想的贪婪遗传算法。差异进化算法包

含变异和交叉操作，结合题中从初值压强 $100MPa-150MPa$ 叠加过程中呈现上升趋势，将 $P_i$ 与 $P_{i+1}$ 差值正负作为选择条件，差异进化算法采用淘汰机制来更新种群。算法的原理为对个体进行方向扰动，以达到对个体的函数值进行选择的目的，不利用函数的梯度信息，所以对函数的可导性、连续性及其余分析性质没有要求，适用性比较强。

算法步骤：

**Step1:**初始化种群，在此为 $P_0=100MPa$ ；

**Step2:**变异操作， $DE$ 通过差分策略实现个体变异，在此选用按顺序选取种群中两个不同个体，将其向量差缩放后与待变异个体进行向量合成，即：

$$v_i(g+1) = x_{r1}(g) + F * (x_{r2}(g) - x_{r3}(g)), i \neq r1 \neq r2 \neq r3$$

其中 $F$ 为缩放因子， $x_i(g)$ 表示第 $g$ 代种群中第 $i$ 个个体。在进化过程中，为了保证解的有效性，必须判断“染色体”中各“基因”是否满足边界条件，如果不满足边界条件，则“基因”用随机方法重新生成。

**Step3:**交叉操作，对第 $g$ 代种群及其变异中间体进行个体间交叉操作：

$$u_{j,i}(g+1) = \begin{cases} v_{j,i}(g+1) & \text{if } rand(0,1) \leq CR \\ x_{j,i}(g) & \text{otherwise} \end{cases}$$

**Step4:**选择操作，采用贪婪算法选择个体。计算变异后个体适应度，若降低则恢复此个体。在此处为比较 $P_i, P_{i+1}$ 之差，若为后者大则选取，否则停止迭代。

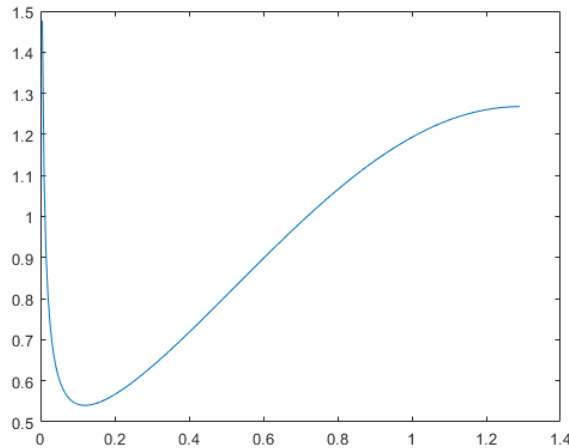


图4 送入油管的油的质量随时间增加量  
最终得到最优解 $\omega=0.8575rad/ms$

#### 5.4.2 角速度 $\omega$ 的参数检验

在 $Simulink$ 仿真检验中，利用开发的高压共轨燃油喷射系统对课题组开发的轨压控制策略进行软件在环测试，模型输入参数主要包括目标轨压、发动机转速和喷油脉宽。在此我们选用正解参数 $\omega$ 并结合误差项作出图像，查看二者函数离差。

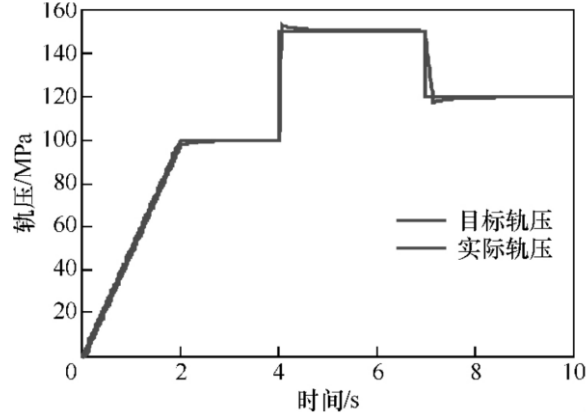


图 5 仿真检验误差图像

由图像可知目标压力与解得角速度带入压力误差较小，所求角速度较好。

### 5.5 问题三模型的建立

问题三第一小问要求在问题二的基础上改变出油系统的喷油嘴个数，改变喷油和供油安排策略。在此仍依据质量改变量相等给出供油喷油为变量时的二者的一般化函数关系式。根据函数关系式考虑供油喷油的燃油量关系，调整角速度 $\omega$ 改变供油，调整喷油嘴改变喷油量，使高压油管内压力达到平衡。

#### 5.5.1 基于两个喷油嘴的策略调整模型

假设凸轮供油系统角速度为 $\omega$ 的情况下，利用第二问模型中求出的 $P(t)$ 关系式，由压力与密度改变量的正比例关系进一步得到 $\rho(t)$ ，与油泵压缩高度改变量结合计算出左侧供油系统质量改变量 $\Delta m$ 。由于右侧现包含两个喷油嘴，且在一次工作周期内二者喷油质量和仍等于供油质量和，则一个喷油嘴喷出质量为总质量一半即 $\frac{\Delta m}{2}$ ，考虑在 $\frac{\Delta m}{2}$ 下喷油策略的调整。

##### (1) 管口出油前压缩过程

$$\rho_0 V_0 = \rho_{100} V_{100}$$

##### (2) 喷油过程

由压力改变量与密度改变量呈正比例关系可知：

$$\frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{E}{\rho}$$

此时压力、弹性模量与密度都为时间 $t$ 的函数，对上式关于 $t$ 求导：

$$\frac{1}{E} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}$$

将 $\rho = \frac{m(t)}{v(t)}$ 带入可得：

$$\frac{1}{E} \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{1}{v(t)} \frac{dm(t)}{dt} - \frac{1}{\rho} \frac{m(t)}{v^2(t)} \frac{dv}{dt}$$

上述方程称为连续方程<sup>[1]</sup>，第一项是单位时间内纯进入容积内的燃油容积，第二项为集中容积的变化率。让将方程应用在柱塞腔增压时，第一项为单位时间从柱塞经过单向出油阀的燃油量即 $Q$ 。则我们带入流量 $Q$ 计算公式得到：

$$\frac{v(t)}{E} \frac{dP}{dt} = CA \sqrt{\frac{2(P-100)}{\rho(P)}} - \frac{dv}{dt}$$

上式为关于 $t$ 函数的微分式，但在此不清楚压力 $P$ 关于 $t$ 的解析解具体形式，若需要得到 $P(t)$ 则需要近似数值求解。

### (3) 迭代函数

将上述关系等式转化为第 $i-1$ 次与第 $i$ 次压力 $P$ 的迭代函数：

$$V(i)(P_{i+1}-P_i) = CA \sqrt{\frac{2(P_i-100)}{\rho_i}} E_i \Delta t - (V_{i+1}-V_i) E_i$$

### (4) 喷出体积

此处给出凸轮极角与极径关系，而极径的转动带动柱塞上下运动，即可以找出极径与柱塞压缩高度的关系函数。进一步通过迭代函数求解向上压缩过程与向下压缩过程 $P(t)$ 为 $100MPa$ 的临界值时间，计算出柱塞高度变化量，即可得到体积变化量。体积公式为：

$$V_{i+1} = (r(\omega, t + \Delta t) - r_{\min}) \pi r^2$$

### (5) 喷出质量

由 $m = \rho v$ 可知，由于此问中 $\rho$ 、 $v$ 都为时间 $t$ 的函数，为了求出累积质量改变量，需要对二者乘积关于时间 $t$ 积分，公式如下：

$$m = \int_{t_{P=100}}^{t_{P=100}} \rho(t) v(t) dt$$

由于针阀系统改变喷油量具体表现为喷油速率恒定时的 $\Delta t$ ，即通过改变 $\Delta t$ 的大小来影响喷油量。我们用升程、 $\Delta t$ 、返程对喷油速率进行积分求和，另进、出油质量相等可解得 $\omega$ 与针阀系统 $\Delta t$ 关系式如下：

最终通过调整供油系统、喷油系统的设定参数来调整策略。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta m_{\text{出}} = \frac{\Delta m_{\text{入}}}{2} \\ d = f(\Delta t) \\ V_{\text{出}} = \frac{\pi}{3} (\tan 9^\circ)^2 \left[ \left( \frac{0.7}{\tan 9^\circ} + d \right)^3 - \left( \frac{0.7}{\tan 9^\circ} \right)^3 \right] \\ m_{\text{出}} = V_{\text{出}} * \rho_{100} \\ \frac{v(t)}{E} \frac{dP}{d2t} = CA \sqrt{\frac{2(P-100)}{\rho(P)}} - \frac{dv}{dt} \\ \frac{\Delta P}{\Delta \rho} = \frac{E}{\rho} \\ V_{i+1} = (r(\omega, t + \Delta t) - r_{\min}) \pi r^2 \\ m_{\text{进}} = \sum \int \rho(t) v(t) dt \\ d = \begin{cases} 2.01 \exp - \left( \frac{x-0.4543}{0.1655} \right)^2 & x \in [0, 0.45) \\ 2(t-0.45) & x \in [0.45, 0.45 + \Delta t) \\ 2.017 \exp - \left( \frac{x-0.443}{0.1661} \right)^2 & x \in [0.45 + \Delta t, 0.9 + \Delta t) \end{cases} \end{array} \right.$$

最终求得左侧装置角速度 $\omega$ 与右侧装置 $\Delta t$ 函数关系为：

$$\omega = 1.595 \exp - 50 \Delta t (2.284 * \exp^{49} * (\Delta t)^3 - 2.958 \exp^{49} (\Delta t)^2 + 1.437 \exp^{49} \Delta t + 3.992 \exp^{49}) + 0.8562$$

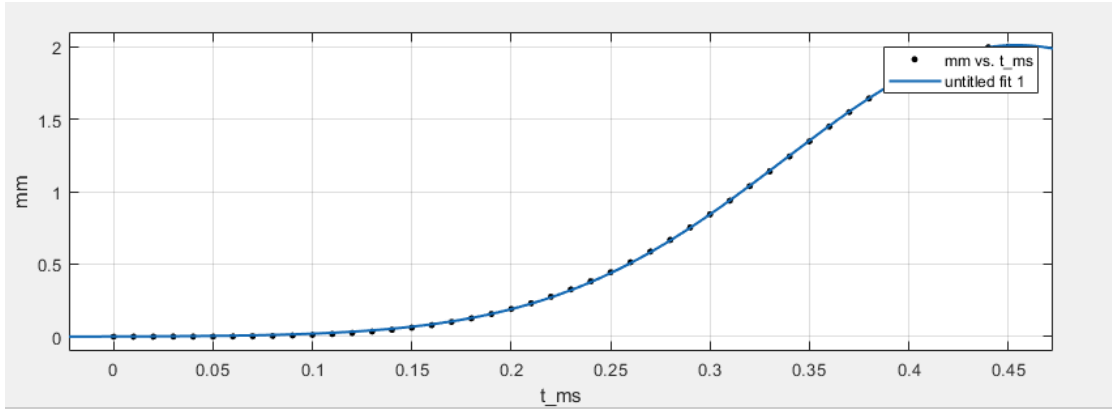


图 6 针阀高度随时间变化函数(上升)

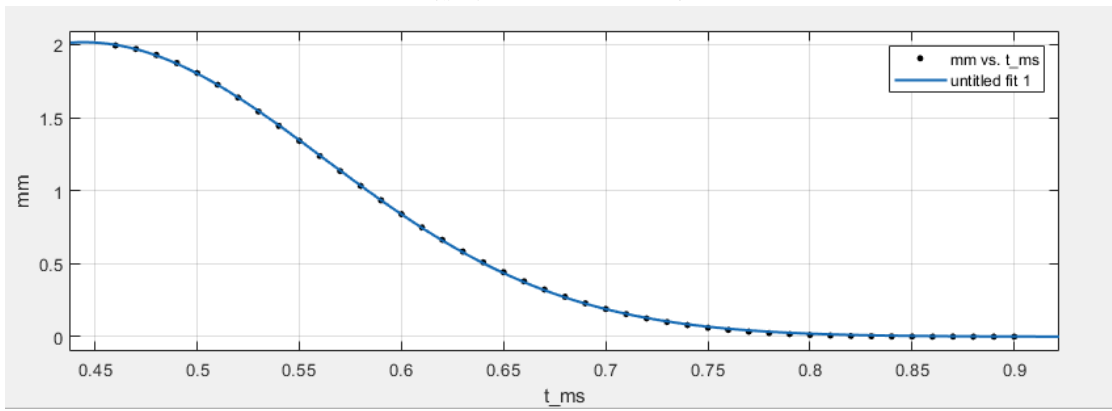


图 7 针阀高度随时间变化函数(下降)

### 5.5.2 加入减压泵考虑的控制方案决策

第二小问考虑在单向阀下侧安置一减压阀,通过使油管内燃油回流来缓冲进油时管内压力,进一步增强管内压力的稳定性。则在质量等式关系中左侧凸轮系统供油量的质量函数关系式需要在模型二中的  $\int_T \rho(t)v(t)dt$  进入燃油总质量中减去回流的质量。为了合理稳定高压油管内压力,我们依据管内压力变化曲线  $P(t)$  的取值设定开、关减压阀,当压力处于阈值范围内开启减压阀,即左侧系统燃油量函数需要减去压力处在阈值内的回流部分,此处我们加入示性函数表达此分段函数,此质量与右侧两个喷油嘴合计出油质量相等,反解出供油、喷油系统的参数来确定高压油泵与减压阀的控制方案。

左侧系统燃油进入质量代数和:

$$\int_T \rho(t)v(t) - \int \rho(t)v(t) I_{t \in (tP1, tP2)} dt$$

右侧系统燃油喷出质量:

$$\begin{cases} \int v(t)\rho dt \\ V_{\text{出}} = \frac{\pi}{3} (\tan 9^\circ)^2 [(\frac{0.7}{\tan 9^\circ} + d)^3 - (\frac{0.7}{\tan 9^\circ})^3] \end{cases}$$

根据质量守恒定律使二者质量相等,得到控制方案决策模型:

$$\begin{cases} \int v(t) \rho dt \\ V_{\text{出}} = \frac{\pi}{3} (\tan 9^\circ)^2 [(\frac{0.7}{\tan 9^\circ} + d)^3 - (\frac{0.7}{\tan 9^\circ})^3] \\ \int_T \rho(t) v(t) - \int_T \rho(t) v(t) I_{t \in (tP1, tP2)} dt \end{cases}$$

## 六、模型优缺点

### 模型优点

1. 以质量为解决问题的核心，通过刻画质量的变化来构造模型，使不同的问题在解决时回归到同一变量，具有统一的衡量标准；
2. 使用迭代的思想，考虑每一时刻高压油管内液体的密度与压强的变化以及前两者对进出高压油管流量的影响，在尽可能小的时间间隔内考虑管内压强的动态变化；
3. 在转速发生改变时，通过调节喷油脉宽使高压油管内的压强保持在一个相对稳定的状态；
4. 加入控制元件减压阀，在一定范围的管内压强下使减压阀工作，在进口压力不断变化的情况下，保持出口压力在设定的范围内，保护高压油管。

### 模型缺点

1. 在第二问求解压力随时间变化函数时，位置函数关系形式选用迭代近似求解，选取的离散点未能完全拟合函数。

## 七、模型的改进

1. 燃油在高压油管内流动的过程可以模拟为一元不稳定流动，其数学模型可以通过流动连续性方程和动量方程来建立。在此基础上第三问两个喷油嘴的实际脉冲宽度受其分布的具体位置影响；
2. 第二文中由于反解角速度  $\omega$ ，未能进行严格的分布函数或关系式对参数验证。在此可为角速度构造检验统计量进行假设检验。

## 八、参考文献

- [1] 蔡梨萍. 基于 MATLAB 的柴油机高压喷油过程的模拟计算[D]. 华中科技大学, 2005.
- [2] 郭延超, 胡友耀, 王梦华, 刘泉, 酒建刚, 任浩杰. 基于 Simulink 的高压共轨燃油喷射系统模型研究[J]. 拖拉机与农用运输车, 2015, 42(06): 40-42+50.
- [3] 王钧效, 陆家祥, 张锦杨, 张锡朝. 柴油机喷油过程模拟计算中的几个经验公式研究[J]. 车用发动机, 2001(05): 6-11.
- [4] 林荣文, 董锡明. 柴油机高压油管压力波数字信号的采集、处理和仿真及

故障辨识的研究[J]. 中国铁道科学, 2001(02):136-137.

[5] 祁雪乐, 宋健, 王会义, 李亮. 基于 AMESim 的汽车 ESP 液压控制系统建模与分析[J]. 机床与液压, 2005(08):115-116+122.

[6] 崔昊, 王育才, 吕建国. 基于 MATLAB/SIMULINK 的阀控液压缸动态特性仿真与优化[J]. 机械传动, 2007(04):67-68+117.

[7] 郭延超, 胡友耀, 王梦华, 刘泉, 酒建刚, 任浩杰. 基于 Simulink 的高压共轨燃油喷射系统模型研究[J]. 拖拉机与农用运输车, 2015, 42(06):40-42+50.



## 附录

### 1. IWO.m

```
DataDim=15;
PosMin=-20*ones(1,DataDim);
PosMax=20*ones(1,DataDim);
PosRange=[PosMin; PosMax];
Functname='Fitness';

IterNo=300;
Smax=3;Smin=1;
pop_max=40;
[OUT1,gbest1,gbestval1]=IWO(Functname,DataDim,PosRange,IterNo,Smax,Smin,pop_max);
plot(OUT1);
return;
```

### 2. Text-Elastic Modulus.py

```
import sys
import pymysql.cursors
import os
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
F_list=[];E_list=[]
def check_data():
    db = pymysql.connect(host = "localhost",port = 3306,user = "root",password =
    "",db="text-elastic-modulus")
    cur = db.cursor()
    sql_F = "select F from sheet1;"
    cur.execute(sql_F)
    results_F = cur.fetchall()
    global F_list
    for row in results_F:
        F_list.append(float(row[0]))
    print(F_list)
    sql_E= "select E from sheet1;"
    cur.execute(sql_E)
    results_E=cur.fetchall()
    global E_list
    for datas in results_E:
        E_list.append(float(datas[0]))
    print(E_list)
    plt.figure()
    plt.plot(F_list,E_list,'g')
    plt.show()
```

```

        db.commit()
        db.close()
if __name__=="__main__":
    check_data()

```

### 3. Text-Question2-injector.py

```

import sys
import pymysql.cursors
import os
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
import pandas as pd
ms_list=[];mm_list=[]
def check_data():
    db = pymysql.connect(host = "localhost",port = 3306,user = "root",password =
    "",db="text-elastic-modulus")
    cur = db.cursor()
    sql_ms = "select 1_ms from sheet1_injector_1;"
    cur.execute(sql_ms)
    results_ms = cur.fetchall()
    global ms_list
    for row in results_ms:
        ms_list.append(float(row[0]))
    print(ms_list)
    sql_mm= "select 1_mm from sheet1_injector_1;"
    cur.execute(sql_mm)
    results_mm=cur.fetchall()
    global mm_list
    for datas in results_mm:
        mm_list.append(float(datas[0]))
    print(mm_list)
    plt.figure()
    plt.plot(ms_list,mm_list,'g')
    plt.show()
    db.commit()
    db.close()
if __name__=="__main__":
    check_data()

```

### 4. Text\_Function2\_Question2.m

```

clear all;clc;
load r_len.mat
load theta.mat
pa=[];rou=[];E=[];

```

```

for j=1:518
    rou=[rou,0.85+(j*2.5097*10^(-5))];
    pa=[pa,100+0.4983*j];
    E=[E,2171.4+2.3590*j];
    j=j+1;
end
W_results=[];
for i=2:518

W_results_row=(2.413+pi*(r_len(1,i)*theta(1,i)-r_len(i-1)*theta(i-1))*pi+2.413*pi)/((2*(pi^2)*((r_
_len(1,i-1)^2)-(r_len(1,i-1)^2)-(r_len(1,i-1))))/628)-0.85*(0.7^2)*((2*E(1,i-1)*pi)/628)*sqrt((2*(pa(
1,i-1)-100))/rou(1,i-1)));
    if W_results_row>0
        W_results=[W_results,W_results_row];
    else
        W_results=[W_results];
    end
    i=i+1;
end
[lie,hang]=size(W_results);
W_results_true=[W_results(1,1)];
% 内存炸了。
% for t=2:hang
%     W_results_true=[W_results_true,W_results(1,t)+W_results_true];
%     t=t+1;
% end
Qt=[];
for k=1:258
    Qt=[Qt,k*0.005];
    k=k+1;
end
disp(W_results)
plot(Qt,W_results)
syms x;
f=1/(int((-338)*(x^9)+2096*(x^8)-5507*(x^7)+7980*(x^6)-6958*(x^5)+3738*(x^4)-1218*(x^3)+2
28.3*(x^2)-21.33*x+1.26,0,1.29));
f=vpa(f,4);
disp(f)

```

##### 5. Question1.m

```

clear all;clc;
load E_3.mat
load P_3.mat
% syms t

```

```

% P_total=[];
% P_1=((E_3(1,1)/0.85)*(0.85*t)*(0.7)^2*sqrt(((2*(100+50/20-100))/0.85)-0.85*44))/(12500*pi);
% P_total=[P_total,P_1];
% for i =2:20
%
P_2=((E_3(1,i)/0.85)*(0.85*t)*(0.7)^2*sqrt(((2*(100+50/20-100))/0.85)-0.85*44))/(12500*pi);
%     P_2=P_2-P_1;
%     disp(P_2)
%     P_total=[P_total,P_2];
%     P_2=[];
%     i=i+1;
% end
% disp(P_total)
P_0=((E_3(1,1)/0.85)*(0.85*0.1)*(0.7)^2*sqrt(((2*(100+50/20-100))/0.85)-0.85*44))/(12500*pi);
v_B=[];V_B=[];P_total_imag=[];
for t=0:240
    if t>=0 && t<=20
        v_B_i=t;
        v_B=[v_B,v_B_i];
    elseif t>20 && t<=220
        v_B_i=20;
        v_B=[v_B,v_B_i];
    elseif t>220 && t<=240
        v_B_i=-1*t+240;
        v_B=[v_B,v_B_i];
    end
    v_B_i=[];
    t=t+1;
end
for T=0:240
    if T>=0 && T<=20
        V_B_i=(1/200)*T;
        V_B=[V_B,V_B_i];
    elseif T>20 && T<=220
        V_B_i=0.2*T-2;
        V_B=[V_B,V_B_i];
    elseif T>220 && T<=240
        V_B_i=(-1/200)*(T)^2+2.4*T-244;
        V_B=[V_B,V_B_i];
    end
    V_B_i=[];
    T=T+1;
end
T_num=20;%change the generations of the dates.

```

```

P_total=[];
P_1=((E_3(1,1)/0.85)*(0.85*t)*(0.7)^2*sqrt(((2*(100+50/20-100))/0.85)-0.85*44))/(12500*pi);
P_total=[P_total,P_1];
for i =2:100

P_2=((E_3(1,i)/(0.85+0.13*i))*((0.85+0.13*i)*t)*(0.7)^2*sqrt(((2*(100+50/20-100))/(0.85+0.13*i)
)-(0.85+0.13*i)*44))/(12500*pi);
    %P_2=P_2-P_1;
    P_total=[P_total,P_2];
    P_2=[];
    i=i+1;
end
[lie,hang]=size(P_total);
for imag_num=1:hang
    P_total_imag=[P_total_imag,(imag(P_total(1,imag_num))/5)];%change the datas.
    imag_num=imag_num+1;
end
Qt=[];
for qt=1:100
    Qt=[Qt,qt];
    qt=qt+1;
end
x=Qt;y=P_total_imag;
plot(Qt,P_total_imag)
disp(P_total_imag)

```

#### 6. Text\_Question3\_function.m

```

clear all;clc;
syms x;
t=[];
for i=1:90
    t=[t,i*0.01];
end
f=[];
for j=1:90
    if t(1,j)>=0 && t(1,j)<=0.45
        f_j=2.01*exp(-((t(1,j)-0.4543)/0.1655)^2);
        f=[f,f_j];
    elseif t(1,j)>=0.45 && t(1,j)<=0.9
        f_j=2.017*exp(-(((t(1,j))-0.443)/0.1661)^2);
        f=[f,f_j];
    end
    j=j+1;
end
end

```

```

f_results_1=int((pi/3)*(tan(9)^2)*(((0.7/tan(9))+(2.01*exp(-(x-0.4543)/0.1655)^2)))^3)-(0.7/tan(
9))^3,0,0.45);
f_results_1=f_results_1*0.85;
f_results_2=int((pi/3)*(tan(9)^2)*(((0.7/tan(9))+(2.017*exp(-(x-0.443)/0.1661)^2)))^3)-(0.7/tan(
9))^3,0,0.45);
f_results_2=f_results_2*0.85;
f_results=[vpa(f_results_1,4)+vpa(f_results_2,4)];%变化区域的总面积计算: Dv*delta(t)
syms T;%恒定增量随时间而速率恒定 (B1,B2)
f_results_T=int((pi/3)*(tan(9)^2)*(((0.7/tan(9))+2*T)^3)-(0.7/tan(9))^3,0.45,T+0.45);
f_results=[f_results+(f_results_T)*0.85+0.5403];
% W=1.595e-50*T*(2.284e49*(T)^3 - 2.958e49*(T)^2 + 1.437e49*T + 3.922e49) + 0.8562;
disp(vpa(f_results,4))

```

#### 7. Text\_Enreances.m

```

clear all;clc;
%syms p q
%f1=log(p)/log(q);
%v=int(f1,p,q);
%disp(v)
%syms pa
%E=1489*exp(0.00284*pa)+48.79*exp(0.01376*pa);
%k_100MPa=(1489*exp(0.00284*100)+48.79*exp(0.01376*100))/0.85;
%rou=E/k_100MPa;%假设这里的燃油系数 k 在管道弹性限度内不发生任何改变
syms x
f=1476*exp(0.00401*x);
k=int(f,x);
disp(k)
% x = linspace(1:1000:100);
% f=[];
% for i =x
%     f=[1476*exp(0.00401*i), f];
% end
%a=(147600000*exp((401*100)/100000))/401;
%disp(a)

```