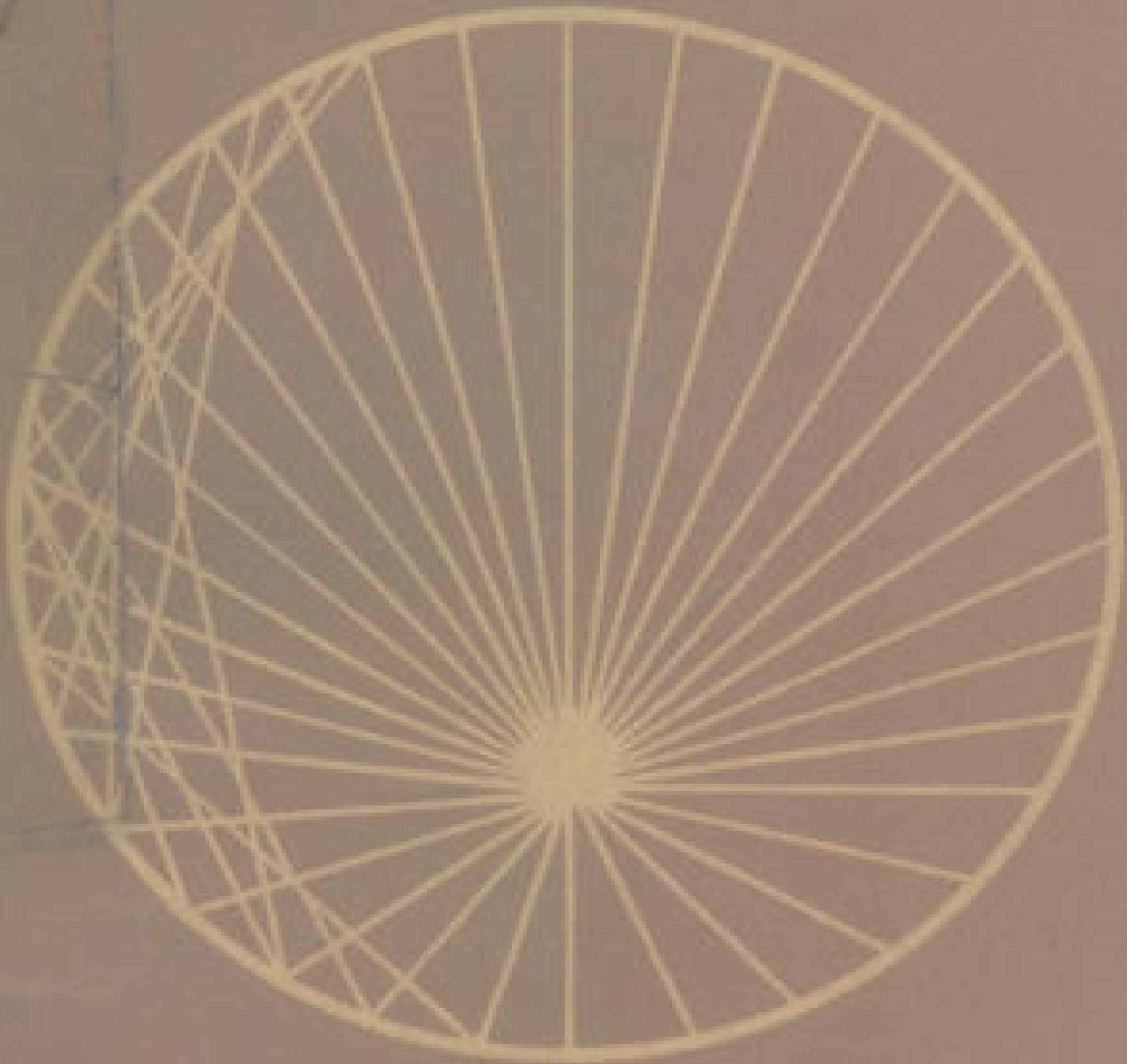


理论物理第一册

古典动力学

吴大猷

理论物理第一册

古典动力学

吴大猷 著

科学出版社

1 9 8 5

内 容 简 介

本书为著名物理学家吴大猷先生的著述《理论物理》（共七册）的第一册。《理论物理》是作者根据长期从事教学实践编写的一部比较系统全面的大学物理教材。本册分甲部（Lagrange 动力学）和乙部（Hamilton 动力学）两部分。甲部内容共分十二章：第一、二章讲述初等动力学的基本概念和基本原理；第三章讲述 Lagrange 方程；第四至第十一章分别讲述 Lagrange 方程对各种力学系统的应用；第十二章讲述 Gauss Hertz 及 Appell 原理。乙部内容共分八章：第一章讲述变分法；第二章讲述 Hamilton 原理与最小作用量原理；第三、四章讲述 Hamilton 正则方程和正则变换；第五章讲述古典力学中的时间可逆性；第六章讲述 Hamilton-Jacobi 理论；第七章讲述角与作用量变换，缓渐不变性；第八章讲述力学与光学。本书在大多数章节后都附有习题，以供读者研讨和学习。

本书根据台湾联经出版事业公司出版的原书翻印出版。作者对原书作了部分更正，李政道教授为本书的出版写了序言，我们对原书中一些印刷错误也作了订正。

本书可供高等院校物理系师生教学参考，也可供研究生阅读。

理论物理第一册

古 典 动 力 学

吴大猷 著

*

科 学 出 版 社 出 版

北京朝阳门内大街137号

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1983年5月第 一 版　　开本：850×1168 1/32

1983年7月第一次印刷　　印张：10 插页：精 2 平 4

统一书号：13031·2284

本社书号：3124·13—3

定价：布面精装 3.25 元

压膜平装 2.50 元

序言

吳大猷先生是國際著名的學者，在中國物理界，是和嚴濟慈、周培源、趙忠堯諸教授同時的老前輩。他的這一部《理論物理》，包括了“古典”至“近代”物理的全豹。1977年初，在台灣陸續印出。這幾年來對該省和東南亞的物理教學界起了很大的影響。現在中國科學院，特別是由於盧嘉錫院長和錢三强、嚴東生副院長的支持，決定翻印出版，使全國對物理有興趣者，都可以閱讀參考。

看到了這部巨著，聯想起在1945年春天，我初次在昆明遇見吳老師，很幸運地得到他在課內和課外的指導，從“古典力學”學習起至“量子力學”，其經過就相當於唸吳老師的這套叢書，由第一册開始，直至第七册。在昆明的這一段時期是我一生學物理過程中的大關鍵，因為有了紮實的根基，使我在1946年秋入芝加哥大學，可立刻參加研究院的工作。

1933年吳老師得密歇根大學的博士學位後，先留校繼續研究一年。翌年秋回國在北大任教，當時他的學生中有馬仕俊、郭永懷、馬大猷、虞福春等，後均致力物理研究有成。抗戰期間，吳老師隨北大加入西南聯大。這一段時期的生活是相當艱苦的，但是中國的學術界，還是培養和訓練了很多優秀青年。下面的幾

段是錄自吳老師的«回憶»一書：

"組成西南聯大的三個學校，各有不同的歷史。……北京大學規模雖大，資望也高，但在抗戰時期中，除了有很小數目的款，維持一個'北京大學辦事處'外，沒有任何經費作任何研究工作的。在抗戰開始時，我的看法是以爲應該爲全面抗戰，節省一切的開支，研究工作也可以等戰後再作。但抗戰久了，我的看法便改變了，我漸覺得爲了維持從事研究者的精神，不能讓他們長期的感到無法工作的苦悶。爲了培植及訓練戰後恢復研究工作所需的人材，應該在可能情形下，有些研究設備。西南聯大沒有此項經費，北大也無另款。……我知道祇好儘自己個人的力量做一點點工作了。……請北大在崗頭村租了一所泥牆泥地的房子做實驗室，找一位助教，幫着我把三稜柱放在木製架上拼成一個最原始形的分光儀，試着做些'拉曼效應'的工作。

"我想在二十世紀，在任何實驗室，不會找到一個拿三稜柱放在木架上做成的分光儀的了。我們用了許多腦筋，得了一些結果。……

"1941 年秋，有一位燕京大學畢業的黃昆，要來北大當研究生隨我工作，他是一位優秀的青年。我接受了他，讓他半時作研究生，半時作助教，可以得些收入。那年上學期我授'古典力學'，下學期授'量子力學'。班裏優秀學生如楊振寧、黃昆、黃授書、張守廉等可以說是一

個從不易見的羣英會。……

"1945年日本投降前，是生活最困難的時期。每月發薪，紙幣滿箱。因爲物價飛躍，所以除了留些做買菜所需外，大家都立刻拿去買了不易壞的東西，如米、炭等。……我可能是教授中最先擺地攤的，……抗戰初年，託人由香港、上海帶來的較好的東西，陸續的都賣去了。等到1946年春復員離昆明時，我和冠世的東西兩個手提箱便足够裝了。"

就在1946年春，離昆明前吳老師還特爲了我們一些學生，在課外另加工講授"近代物理"和"量子力學"。當時聽講的除我以外，有朱光亞、唐敖慶、王瑞駪和孫本旺。

在昆明時，吳老師爲了北京大學的四十週年紀念，寫了《多原分子的結構及其振動光譜》一書，於1940年出版。這本名著四十多年來至今還是全世界各研究院在這領域中的標準手册。今年正好是中國物理學會成立的五十週年，科學出版社翻印出版吳大猷教授的《理論物理》全書，實在是整個物理界的一大喜事。

李政道

1982年8月

寫於瑞士日内瓦

總序

若干年來，由於與各方面的接觸，筆者對台灣的物理學教學和學習，獲有一個印像：(一)大學普通物理學課程之外，基層的課程，大多强納入第二第三兩學年，且教科書多偏高，量與質都超過學生的消化能力。(二) 學生之天資較高者，多眩於高深與時尚，不知或不屑於深厚基礎的奠立。(三) 專門性的選修課目，琳瑯滿目，而基層知識訓練，則甚薄弱。

一九七四夏，筆者擬想以中文編寫一套筆者認為從事物理學的必須有的基礎的書。翌年夏，得褚德三、郭義雄、韓建珊（交通大學教授）三位之助，將前此教學的講稿譯為中文，有 (1) 古典力學，包括 Lagrangian 和 Hamiltonian 力學，(2) 量子論及原子結構，(3) 電磁學，(4) 狹義與廣義相對論等四册。一九七六年春，筆者更成 (5) 熱力學，氣體運動論與統計力學一册。此外將有 (6) 量子力學一册，稿在整理中。

這些册的深淺不一。筆者對大學及研究所的物理課程，擬有下述的構想：

第一學年：普通物理（力學，電磁學為主）；微積分。

第二學年：普通物理（物性，光學，熱學，近代物理）；高等微積分；中等力學（一學期）。

第三學年：電磁學（一學年）及實驗．量子論（一學年）。

第四學年：熱力學（一學期）；狹義相對論（一學期）；量子力學（引論）（一學年）。

研究院第一年：古典力學（一學期）；分子運動論與統計力學（一學年）；量子力學（一學年）；核子物理（一學期）。

研究院第二年：電動力學（一學年）；專門性的課目，如固體物理；核子物理，基本粒子；統計力學；廣義相對論等，可供選修。

上列各課目，都有許多的書，各有長短。亦有大物理學家，集其講學精華，編著整套的書，如 Planck, Sommerfeld, Landau 者。Landau-Lifshitz 大著既深且博，非具有很好基礎不易受益的。Sommerfeld 書雖似較易，然仍是極嚴謹有深度的書，不宜輕視的。筆者本書之作，是想在若干物理部門，提出一個綱要，在題材及着重點方面可作為 Sommerfeld 書的補充，為 Landau 書的初階。

筆者深信，如一個教師的講授或一本書的講解，留給聽者或讀者許多需要思索、補充、擴展、涉獵、旁通的地方，則聽者讀者可獲得較多的益處。故本書風格，偏於簡練，課題範圍亦不廣。偶以習題的方式，引使讀者搜索，擴大正文的範圍。

筆者以為用中文音譯西人姓名，是極不需要且毫無好處之舉。故除了牛頓，愛恩斯坦之外，所有人名，概用西文。*

* 商務印書館出版之中山自然科學大辭典中，將 Barkla, Blackett, Lamb, Bloch, Brattain, Townes 譯為巴克納，布拉克，拉目，布勞克，布勞頓，湯里士，錯誤及不準確可見。

本書得褚德三，郭義雄，韓建珊三位交通大學教授之助，單越（清華大學）教授的校閱，筆者特此誌謝。

吳大猷

1977 年元旦

目　　錄

甲部　Lagrangian 動力學

乙部 Hamiltonian 動力學

第一章

初等動力學大綱

1 引言

物理現象的研究，必須由某些基本的觀念着手。(在力學中，這些觀念係空間、時間及質量)。然後，由於經驗的累積，我們可引入其他觀念，用這些基本概念表示出來。實驗的結果，乃是藉這些觀念間的關係式敘述之。由經驗結果所得來的各觀念間的關係，經過歸納及普遍化的程序，即成爲物理定律。

但僅用些許觀念和他們間的關係來描述各物理現象，是不够滿足能獲得對各種現象有簡單的一統的敘述的企求的。任何物理上的理論應該包括：(1) 某些基本概念，及由經驗的累積所得的，以這些基本概念爲基礎而推導出來的其他觀念，(2) 關於這些物理觀念，所假定的一些假設或原理，及 (3)所有從這些假定，按邏輯推展出來的結論。一個成功的理論的必需條件爲：其所有推演出的結論，務皆與經驗上的結果相符合。滿足這標準的理論

中，我們可選擇其較簡單及能預告更多的新結果的。但這所謂「簡單」也者，並無不變的意義，且有時只是因人而異的喜惡觀點和其他的考慮而定的。

力學的理論，有幾個不同的形式。最著名的就是牛頓所完成的。牛頓力學係以運動方程式的形式，表示出一些基本的假定。但其他含義完全相同的形式，如 Lagrange 方程式，Hamilton 原理，以及正則方程等，皆可以作爲動力學理論的起點。這些理論，內容相同而祇是形式的不同，他們的不同處，僅是在對不同目的的應用上的方便而已。對一比較簡單的問題，Newton 運動方程式是比較方便的。然在比較高深領域的研討，則變分原理及其他的形式，較爲適宜。

本書的目的，主要是提供動力學原理的各不同表示法。甲部是 Lagrange 方程式和其應用，乙部是變分原理，包括 Hamilton-Jacobi 理論)，及其在量子論中的應用。

2 基本概念

A 時間、空間、速度與加速度

空間係我們最基本的觀念之一，因此很難用其他更爲基本的概念來解釋它。在實際問題上，空間的一維間距可用標準的剛體尺來度量。時間也是最基本的概念之一，在實際問題上，通常可以一週期性發生的事件（如地球繞日，或分子振動等具有不變的週期者）度量之。

速度及加速度，則可由上述兩概念導出。我們可以定義

$$v_x=\frac{dx}{dt}, \qquad 或 \qquad \boldsymbol{v}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{r}$$

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}, \quad 或 \quad \boldsymbol{a}=\frac{d}{dt}\boldsymbol{v}=\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r} \tag{I-1}$$

B 質量、力及動量

在比較初等的書中，有時候可以發現質量的定義如下：質量$=\frac{力}{加速度}$，而力則定義爲：力＝質量×加速度，顯然前一個定義，只有當力的定義與質量完全獨立無關時，才有意義，而後一定義，則只有當質量的定義與力完全獨立無關時，才具意義。不根據力的定義而作的質量定義，是由 Mach 所建議的。

玆考慮三質點，1, 2, 3，並假設此三質點係依次以每兩個互相作用。從實驗上，我們可以發現這作用力的性質是無關重要的。今設想質點 1, 2，以一彈簧連住。此對質點係由壓緊彈簧的靜止位置開始運動。我們可以發現，不論起始條件如何，這兩個質點的加速度方向永遠相反，且其數值，總是成一比例關係。其他每對的質點亦然。實驗的結果，可表示如下：

$$a_{12}=-k_{21}a_{21}, \quad a_{13}=-k_{31}a_{31}; \quad a_{23}=-k_{32}a_{32} \tag{I-2}$$

a_{12} 係質點 1 受到質點 2 之作用所獲之加速度。k_{ij} 均爲常數。由實驗可發現這些常數滿足下列關係：

$$k_{32}=\frac{k_{31}}{k_{21}} \tag{I-3}$$

玆將 k_{ij} 寫成下式

$$k_{32}=\frac{m_3}{m_2}, \quad k_{31}=\frac{m_3}{m_1}, \quad k_{21}=\frac{m_2}{m_1}, \tag{I-4}$$

m_1, m_2, m_3 均係正數，除他們間的一個公因數外，他們的值是任意的。如將（I-4）代入實驗公式（2），則（2）可寫爲

$$m_1 a_{12} = -m_2 a_{21},\quad m_1 a_{13} = -m_3 a_{31},\quad m_2 a_{23} = -m_3 a_{32} \qquad \text{(I-5)}$$

我們可以擇取質點 1 作「參考質點」(單位)，則可將

$$m_2 = \frac{m_2}{m_1} = -\frac{a_{12}}{a_{21}} \qquad \text{(I-6)}$$

定義爲 m_2 之質量。(以「參考質點」1 之質量爲一單位)

上述的定義，係以經驗結果（2），（3），（即加速度之測定）爲基礎，與力的正確定義獨立無關的（雖然我們隱含了第三定律的特殊形式（2）的結果），而且完全與「重量」的觀念（由於重力）毫無關係。我們要注意的是，用這種方法定義出來的質量（稱爲慣性質量）與由下式

$$\text{質量} = \frac{\text{重量}}{g} \qquad \text{(I-7)}$$

（g 係重力加速度）所定義的質量，並非是天經定義的務須相等的。事實上，Einstein 係因體認到此一質量的相等而發展出他的廣義相對論的引力理論的。

定義了「質量」之後，我們即可以下式來定義物理學的力，

$$f = ma \qquad \text{(I-8)}$$

而動量(Newton 稱之爲運動量 quantity of motion)則定義如下

$$p = mv \qquad \text{(I-9)}$$

3 Newton 運動定律

第一定律：物體如不受外力，則靜者恒靜，動者恒以等速，繼續運動。

此一定律，可視爲對於力的性質上的定義，所謂力者，卽可改變一物體速度之原因也。

第二定律：物體動量的變化率等於作用於此物體上之力。

此定律，驟觀之，似係對（8）式所定義之力，給予一個數量性的定義，但實不僅是一個定義而已。如力 $\boldsymbol{F}$ 係一空間座標的已知函數，則此第二定律可寫成下列微分方程式：

$$m\frac{d^2}{dt^2}\boldsymbol{r}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) \tag{I-10}$$

此方程式，加上起始條件，卽可完全決定一物體在時間 t 時的位置。動力學各種形式的原理，卽此第二定律也。

第三定律：作用與反作用，其值相等但方向相反。此定律乃第（2）式所表示的事實的一個普遍的陳述。

4 功、動能與位能

作用於一物體之力 F，如移動物體一距離 dr 時，則此力 F 所做的功可定義如下：

$$dw=F_xdx+F_ydy+F_zdz=(\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}) \tag{I-11}$$

對一有限位移，則此力對該物所作的功爲

$$w=\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=m\int_{r_1}^{r_2}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\cdot d\boldsymbol{r}=\frac{m}{2}\int_{r_1}^{r_2}d\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}mv^2\Big|_{r_1}^{r_2} \tag{I-12}$$

上式說明了將物體所作的功，可使物體增加 $\frac{1}{2}mv^2$ 的能量。$\frac{1}{2}mv^2$ 定義爲物體的動能。

今如有一空間的非向量函數 $V(r)$，使力 F 可從下面的運算導出，即

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}，\text{餘類推，或}\ \boldsymbol{F}=-\nabla V \tag{I-13}$$

則

$$\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{r_1}^{r_2}\nabla V\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{r_1}^{r_2}dV$$
$$=V(r_1)-V(r_2) \tag{I-14}$$

故由（12）式卽得

$$\left(\frac{1}{2}mv^2+V\right)_{r_1}=\left(\frac{1}{2}mv^2+V\right)_{r_2} \tag{I-15}$$

函數 V 稱爲位能。（15）式說明了動能與位能之和，係一常數。一動力系統，如有這樣的函數 V 存在，則此系統稱爲守恆(conservative) 系統。（13）式乃積分 $\int_{r_1}^{r_2}dw=\int_{r_1}^{r_2}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ 與積分路徑（$\boldsymbol{r}_1$ 至 $\boldsymbol{r}_2$）無關的必要與充份條件。

5 守恆定理及 Hamiltonian 函數對時、空位移的不變性

考慮一個質點系統，設 f_{ij} 爲質點 j 作用於質點 i 之力，而 F_i 爲質點 i 所受之外力，則第二定律成

$$m_i\boldsymbol{a}=\sum_j \boldsymbol{f}_{ij}+\boldsymbol{F}_i \tag{I-16}$$

如將上式作所有質點之和，並對時間 t 積分（t_1 至 t_2），則由第三定律知

$$f_{ij}=-f_{ji}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i m_i\frac{d^2r_i}{dt^2}dt=\sum_i\int_{t_1}^{t_2}F_i dt \tag{I-17}$$

或

$$\sum_i m_i v_i\Big|_{t_1}^{t_2}=\sum_i\int_{t_1}^{t_2}F_i\,dt \tag{I-18}$$

如不受外力，卽，$F_i=0$，則上式卽爲

$$\sum_i m_i v_i=\text{時間常數} \tag{I-19}$$

此卽動量守恒定理。

我們可以其他形式來表示此一動量守恒律，一系統的總能量可寫爲

$$H=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+V(x_1,\cdots,x_n) \tag{I-20}$$

將系統中的所有質點，沿某一方向，（如 x–方向）作一任意位移 X。如能量 H 仍保持不變，則可得

$$V(x_1+X,x_2+X,\cdots,x_n+X)=V(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{I-21}$$

及

$$F_i=-\frac{\partial V}{\partial x}=0$$

就此系統言，其動量沿著該方向 x 的分量係一常數。普遍言之，我們可以認爲：一系統的動量守恒，係與此系統對任何線性位移時之總能量（Hamiltonian 函數）不變性有關。

同理，總能量（20）守恒，則與一個系統對時間座標位移時，

其 Hamilton 函數的不變性有關。此可由（20）所代表之總能量 H 的簡單情況得知，由（20）式則

$$\frac{dH}{dt}=\sum_{x}^{z}\left(\frac{\partial H}{\partial x}v_x+\frac{\partial H}{\partial v_x}a_x\right)+\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$=\sum_{x}^{z}\left(\frac{\partial V}{\partial x}+ma_x\right)v_x+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$=0,\ \text{如}\ \frac{\partial H}{\partial t}=0 \tag{I-22}$$

上式係利用（13）式，即 $ma_x=F_x=-\frac{\partial V}{\partial x}$，得出的。比較普遍性的證明，將在以後用 Hamilton 方程式來證明。（見本書乙部第三章）

6 Galileo–Newtonion 相對性原理

在 Galileo-Newton 的力學中，「時間」係認爲一「絕對的」及「宇宙共同性」的，即：在所有參考系中的時間均相同。今考慮座標系 X, Y, Z，在此座標中，一質點的運動方程式可寫爲

$$m\ddot{x}=F_x,\quad m\ddot{y}=F_y,\quad m\ddot{z}=F_z \tag{I-23}$$

F_x，F_y，F_z 係 x, y, z 的函數，設 $X'Y'Z'$ 爲一沿 X 軸，以速度 v 相對 XYZ 系運動的座標，則 $X'Y'Z'$ 系的座標 x', y', z' 與 XYZ 系的座標 x, y, z 間的關係，可寫爲如下

$$x=x'+vt,\quad y=y',\quad z=z' \tag{I-24}$$

茲令 $F(F_x, F_y, F_z)$ 爲一 x, y, z 點及 x_r, y_r, z_r 間距離的函數，則由（24）可知

$$\boldsymbol{F}(x, y, z)=\boldsymbol{F}(x', y', z')$$

且由（24）亦可得

$$\dot{x}=\dot{x}',\ \dot{y}=\dot{y}',\ \dot{z}=\dot{z}'$$

因此（23）式變爲

$$m\ddot{x}'=F_x(x',y',z'),\ \text{餘類推} \tag{I-25}$$

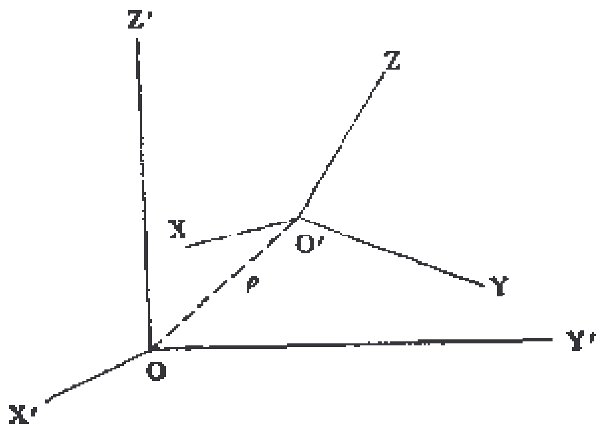
上式卽爲 $X'Y'Z'$ 系中的運動方程式。可見在兩個互相以等速作相對運動的座標系中，運動方程式的形式是相同的。因此在自己座標系中，我們不可能以任何力學上的方法，來測知自己座標系的均勻運動也。

我們假定兩個以等速作相對運動的座標系的時間 t，是同一個時間。但 Einstein 對時間及空間度量的觀念,作了一番謹愼而深入的分析後，終於創立了他的相對論。在相對論中，絕對的時間，是毫無意義的。(詳見第四册，第一部，狹義相對論)。

7　轉動座標系統與 Coriolis 定理

在很多問題中（如在轉動中的地球上的運動; Faucault 擺，貿易風），有時必需（或至少是爲了方便）以一個本身在運動中的座標來叙述一個系統的運動。

設 $\mathbf{r}'(x',y',z')$ 係一個質點在一個固定座標系的位置向量，$\mathbf{r}(x,y,z)$ 則係其在任意運動的座標系的位置向量。再假設 $\rho(\xi,\eta,\zeta)$ 係從前者之原點至後者原點間之向量。二座標軸間的方向餘弦（direction cosines），見下表（26）



	X	Y	Z
X'	α_1	β_1	γ_1
Y'	α_2	β_2	γ_2
Z'	α_3	β_3	γ_3

(I–26)

$$\sum\alpha_i^2=\sum\beta_i^2=\sum\gamma_i^2=1$$

$$\sum\alpha_i\beta_i=\sum\beta_i\gamma_i=\sum\gamma_i\alpha_i=0$$

$\boldsymbol{r}'$ 及 $\boldsymbol{r}$ 之關係，如以向量表示，卽爲

$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{\rho}+T\boldsymbol{r},$$

T 係方向餘弦之張量（26），或以直角座標表示，則爲

$$\begin{aligned} x'&=\xi+\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z \\ y'&=\eta+\alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z \\ z'&=\zeta+\alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z \end{aligned} \tag{I–27}$$

質點對固定軸的速度爲

$$\dot{x}'=\dot{\xi}+\alpha_1\dot{x}+\beta_1\dot{y}+\gamma_1\dot{z}+\dot{\alpha}_1x+\dot{\beta}_1y+\dot{\gamma}_1z \tag{I–28}$$

或

$$\dot{\boldsymbol{r}}'=\dot{\boldsymbol{\rho}}+T\dot{\boldsymbol{r}}+\dot{T}\boldsymbol{r}$$

則沿着運動軸方向（但係對固定座標）的速度分量爲：

$$\begin{aligned} V'_x&=\dot{x}'\alpha_1+\dot{y}'\alpha_2+\dot{z}'\alpha_3 \\ &=V_x+\dot{x}+(\alpha_1\dot{\gamma}_1+\alpha_2\dot{\gamma}_2+\alpha_3\dot{\gamma}_3)z \\ &\qquad+(\alpha_1\dot{\beta}_1+\alpha_2\dot{\beta}_2+\alpha_3\dot{\beta}_3)y \end{aligned} \tag{I–29}$$

其中　　$V_x=\dot{\xi}\alpha_1+\dot{\eta}\alpha_2+\dot{\zeta}\alpha_3$

V_x 係0點速度，對 $X'Y'Z'$ 之 x-方向分量。（29）式中括號內的兩個項係由運動軸的方向餘弦對時間的變化率所產生者，此可以較簡單之形式表示如下:

考慮 $\rho(\xi,\eta,\zeta)=0$ 之情形，在此情形下，運動座標 XYZ 只能對原點0轉動（0與 $0'$ 重疊）。設 $w(w_x, w_y, w_z)$ 爲運動座標的瞬時角速度，並設沿着運動座標軸的單位向量爲 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$，則

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

且相對固定座標之速度爲

$$\boldsymbol{v}'=\dot{x}\boldsymbol{i}+\dot{y}\boldsymbol{j}+\dot{z}\boldsymbol{k}+x\frac{d}{dt}\boldsymbol{i}+y\frac{d}{dt}\boldsymbol{j}+z\frac{d}{dt}\boldsymbol{k} \qquad \text{(I-30)}$$

但因

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\boldsymbol{i}&=-w_y\boldsymbol{k}+w_z\boldsymbol{j}\\ &=w_y[\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}]+w_z[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}]\\ &=w_x[\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}]+w_y[\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}]+w_z[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}]\\ &=[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{i}]\end{aligned} \qquad \text{(I-31)}$$

同理

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{j}=[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{j}],\quad \frac{d}{dt}\boldsymbol{k}=[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{k}],$$

故（30）變成

$$\boldsymbol{v}'=\dot{\boldsymbol{r}}+[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}] \qquad \text{(I-32)}$$

卽使 $\dot{\boldsymbol{r}}=0$(卽固定于轉動座標中的一點)，由於 XYZ 座標系的轉動，此點 r 對於固定座標仍有一速度 $[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]$。

以（29）式的最後兩項，與（32）式中 $[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]$ 的 x-分量

比較，卽可得以方向餘弦及其時間導數表示的瞬時角速度$\boldsymbol{w}$(w_x, w_y, w_z)，卽*

$$w_x=-\sum\beta_i\dot{\gamma}_i,\quad w_y=-\sum\gamma_i\dot{\alpha}_i,\quad w_z=-\sum\alpha_i\dot{\beta}_i \tag{I-33a}$$

轉動座標系統，不僅可引致 (32) 式之 $[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]$ 之速度，且亦引致新的加速度。此加速度（相對一固定座標，而以轉動系之座標 $\boldsymbol{r}$ 及速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 表示）可求得如下：我們知道加速度對速度所具有之關係，與速度對位置向量所具有者同，故只要將 (32) 式中之 $\boldsymbol{r}$ 以 $\boldsymbol{v}$ 代之，卽可得到對固定座標系之加速度，卽，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}'&=\dot{\boldsymbol{v}}+[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{v}]\\&=\ddot{\boldsymbol{r}}+2[\boldsymbol{w}\times\dot{\boldsymbol{r}}]+[\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r}]+[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]]\\&=\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_c+\boldsymbol{a}_t\end{aligned} \tag{I-34}$$

其中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}_r&=\ddot{\boldsymbol{r}}\\\boldsymbol{a}_c&=2[\boldsymbol{w}\times\dot{\boldsymbol{r}}]\\\boldsymbol{a}_t&=[\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r}]+[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]]\end{aligned} \tag{I-35}$$

$\boldsymbol{a}_r$ 係相對加速度，卽，如座標不轉動時 ($\boldsymbol{w}=\dot{\boldsymbol{w}}=0$) 的加速度；$\boldsymbol{a}_c$ 稱爲 Coriolis 加速度；$\boldsymbol{a}_t$，則謂之「運輸加速度」(acceleration of transportation)，此卽固定於運動系中之質點 ($\dot{\boldsymbol{r}}=0$)，被運動座標 ($\boldsymbol{w}=0$) 帶着走時之加速度。如 $\dot{\boldsymbol{w}}=0$，則 $\boldsymbol{a}_t$ 變爲平常的向心加速度，在此情形下，卽得

$$[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]]=-\boldsymbol{r}(\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{w})+\boldsymbol{w}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{w})$$

---

* 由(33a)，可得

$$\dot{\alpha}_i=w_z\beta_i-w_y\gamma_i,\quad \dot{\beta}_i=w_x\gamma_i-w_z\alpha_i,\quad \dot{\gamma}_i=w_y\alpha_i-w_x\beta_i \tag{I-33b}$$

$$[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]]_x=-x(w_y^2+w_z^2)+w_x(yw_y+zw_z)$$

餘類推。如又有 $w_x=w_y=0$, $w_z\neq0$, 則得

$$[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]]_x=-xw_z^2$$
$$[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]]_y=-yw_z^2 \qquad \text{(I-35a)}$$
$$[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]]_z=0$$

及

$$[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]]=-\boldsymbol{r}w_z^2$$

此即向心加速度。

(34) 式所得之結果，可由下述定理表示之:

在轉動座標系中的質點，其加速度係由 $\ddot{\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{a}_c+\boldsymbol{a}_t$ 組成。此系統亦可視爲一靜止系統（即僅有 $\ddot{\boldsymbol{r}}$ 之加速度)如下，假如我們除了原來所存在的力外，再另加上 $-m(\boldsymbol{a}_c+\boldsymbol{a}_t)$的假力(fictitious forces)。

8 剛體的轉動

爲轉動運動的描述，其適宜的觀念，是此種運動的量，乃角速度 ω 及角加速度 α。ω 及 α 的定義如下

$$\omega=\frac{d}{dt}\theta,\quad \alpha=\frac{d^2}{dt^2}\theta \qquad \text{(I-36)}$$

θ 係繞瞬時轉動軸所作的角位移。

在轉動動力學中，我們定義轉動慣量 I 及動量矩(即角動量) $\mathfrak{M}$, 以代替在線性運動中的質量及動量。一個質點系統（座標依次爲 x_i, y_i, z_i）的 $\mathfrak{M}$ 的定義如下

$$\mathfrak{M}_z=\sum_i m_i(x_i\dot{y}_i-y_i\dot{x}_i)，\text{或}$$

$$\mathfrak{M}=\sum_i m_i[\boldsymbol{r}_i\times\dot{\boldsymbol{r}}_i] \tag{I-37}$$

茲考慮剛體的普遍性運動，設 $O'X'Y'Z'$ 爲一固定的座標系。另 $OXYZ$ 則爲固定於物體，因之隨物體運動之座標系。在後者中，物體中之某點 p 之座標 x, y, z，按定義，乃

$$\dot{x}=\dot{y}=\dot{z}=\ddot{x}=\ddot{y}=\ddot{z}=0 \tag{I-38}$$

設兩座標系的軸與軸之間的瞬時方向餘弦，有如（26）式所示。固定座標系中某一點 p 之座標，可由（27）式得出。茲定義

$$\begin{aligned}\lambda&=x'\alpha_1+y'\alpha_2+z'\alpha_3\\ \mu&=x'\beta_1+y'\beta_2+z'\beta_3\\ \nu&=x'\gamma_1+y'\gamma_2+z'\gamma_3\end{aligned} \tag{I-39}$$

這些量（λ, μ, ν）即係 p 對固定座標系（但係沿運動軸 $OXYZ$ 之瞬時方向測量）的座標。如引用（27）及（26）兩式，即得

$$\lambda=\lambda^0+x,\quad \mu=\mu^0+y,\quad \nu=\nu^0+z \tag{I-40}$$

此處

$$\lambda^0=\xi\alpha_1+\eta\alpha_2+\zeta\alpha_3，\quad \mu^0=\xi\beta_1+\eta\beta_2+\zeta\beta_3，\quad \nu^0=\xi\gamma_1+\eta\gamma_2+\zeta\gamma_3$$

由（32）及（38）式，則 p 對固定座標之速度可得爲

$$\dot{\lambda}=\dot{\lambda}^0+[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]_x，\text{餘類推} \tag{I-41}$$

$\boldsymbol{w}$ 係物體的瞬時角速度。

物體之角動量 $\mathfrak{M}$，依照（37）及引用（40）及（41）二式，可得爲

$$\mathfrak{M}_z=\sum m_i(\lambda_i\dot{\mu}_i-\mu_i\dot{\lambda}_i)$$

$$=\sum m_i[(\lambda^0+x_i)(\dot{\mu}^0+w_z x_i-w_x z_i)-$$
$$-(\mu^0+y_i)(\dot{\lambda}^0+w_y z_i-w_z y_i)$$

如將物體的質量中心，取爲原點，卽

$$\sum m_i x_i=\sum m_i y_i=\sum m_i z_i=0$$

則上式可簡化爲

$$\mathfrak{M}_z=M(\lambda^0\dot{\mu}^0-\mu^0\dot{\lambda}^0)-(\sum m_i x_i z_i)w_x$$
$$-(\sum m_i y_i z_i)w_y+[\sum m_i(x_i^2+y_i^2)]w_z$$

上式之首項 $M(\lambda^0\dot{\mu}^0+\dot{\mu}\dot{\lambda}^0)$ 係一位於物體之質心，質量等於物體之質量的點，所具有之角動量。

對一繞固定點轉動之剛體，我們可取該固定點，做爲運動座標之原點（卽 $\lambda^0=\mu^0=\nu^0=\dot{\lambda}^0=0$），在此情況下，則此首項之值爲零。

如我們定義對 $OXYZ$ 軸之轉動慣量及慣量積如下

$$\begin{aligned}&A=\sum m_i(y_i^2+z_i^2),\quad B=\sum m_i(z_i^2+x_i^2),\\&C=\sum m(x_i^2+y_i^2),\quad D=\sum m_i y_i z_i,\\&E=\sum m_i z_i x_i,\quad F=\sum m_i x_i y_i\end{aligned}\tag{I-42}$$

則 $\mathfrak{M}$ 之分量可得爲

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_x&=\quad Aw_x-Fw_y-Ew_z\\\mathfrak{M}_y&=-Fw_x+Bw_y-Dw_z\\\mathfrak{M}_z&=-Ew_x-Dw_y+Cw_z\end{aligned}\tag{I-43}$$

由上述，可見 $\mathfrak{M}$ 與 $\boldsymbol{w}$，在通常情況下，並非同方向。卽使當座標軸之擇取，使

$$D=E=F=0\tag{I-44}$$

時，$\mathfrak{M}$ 及 w 亦非互相平行的。滿足（44）式之座標軸，稱爲物

體之主軸 (principal axes)。*

下面爲關於剛體運動的兩個基本定理:

定理: 一個剛體的運動，可視爲二種運動所組成，卽質量中心，受到所有外力作用所引起的運動，加上物體在外力作用下，繞質心所作的轉動。

設 $O'X'Y'Z'$ 係一固定座標系。又設 OXYZ 之原點O係固定於物體之質心，並平行於 $O'X'Y'Z'$ 座標系者。如 $\overline{O'O}$ 之分量爲 ξ, η, ζ，則

$$x'_i=\xi+x_i,\quad y_i'=\eta+y_i,\quad z_i'=\zeta+z_i \tag{I-47}$$

$$\sum m_i x_i=\sum m_i y_i=\sum m_i z_i=0$$

故

$$\sum m_i(x_i'\ddot{y}_i'-y_i'\ddot{x}_i')=M(\xi\ddot{\eta}-\eta\ddot{\xi})+\sum m_i(x_i\ddot{y}_i-y_i\ddot{x}_i)$$

茲令 F_{xi}, F_{yi}, F_{zi} 爲作用于 m_i 之外力的分量，則運動方程式卽爲

$$\sum_i m_i(\ddot{\xi}+\ddot{x}_i)=\sum F_{xi},\quad \text{餘類推,}$$

$$M(\xi\ddot{\eta}-\eta\ddot{\xi})+\sum m_i(x_i\ddot{y}_i-y_i\ddot{x}_i)$$
$$=\sum[(\xi+x_i)F_{yi}-(\eta+y_i)F_{xi}]$$

上二式可簡化爲

---

* A, B, C, D, E, F 之來源如下。一物體繞着一方向餘弦爲 α, β, γ 之線轉動時，其轉動慣量爲

$$I=\sum m_i(r_i^2-\sigma_i^2)=\sum m_i(x_i^2+y_i^2+z_i^2)-\sum m_i(\alpha x_i+\beta y_i+\gamma z_i)^2$$
$$=A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2-2D\beta\gamma-2E\gamma\alpha-2F\alpha\beta \tag{I-45}$$

A, B, C, D, E, F 係如 (42) 所定義者。此二次曲面 (45) $Ax^2+By^2+Cz^2-2Dyz-2Ezx-2Fxy=1$ 稱爲慣量橢球 (momental ellipsoid)，如變換至主軸系，則上式卽簡化爲 $A'x'^2+B'y'^2+C'z'^2=1$　　(I-46)

$$M\ddot{\xi}=\sum F_{xi}$$

$$\sum m_i(x_i\ddot{y}_i-y_i\ddot{x}_i)=\sum(x_iF_{yi}-y_iF_{xi}),$$ 餘類推，

即，一物體繞質心之轉動，宛如質心係靜止的一樣。

定理（König 定理）：一個剛體之動能，係其質心的平移運動的動能，加上繞質心（質心視爲固定）運動之轉動動能。

證：用與（47）相同之座標，即得

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x}_i'^2+\dot{y}_i'^2-\dot{z}_i'^2)$$

$$=\frac{1}{2}M(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2)+\frac{1}{2}\sum m_i\{(w_yz_i-w_zy_i)^2+(w_zx_i-w_xz_i)^2+(w_xy_i-w_yx_i)^2\}$$

$$=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}\sum m_i[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}_i]^2 \tag{I-48}$$

上式可寫成如下之另一形式，即

$$T=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}(Aw_x^2+Bw_y^2+Cw_z^2-2Dw_yw_z-2Ew_zw_x-2Fw_xw_y) \tag{I-49}$$

$A, B, C, \cdots$ 係如（42）式定義之轉動慣量。現設 I 係物體繞瞬時轉軸的轉動慣量，此瞬時轉軸之方向餘弦顯然爲

$$\alpha=\frac{w_x}{w},\quad \beta=\frac{w_y}{w},\quad \gamma=\frac{w_z}{w}$$

則由（45）知，（49）式可重寫爲

$$T=\frac{1}{2}Mv^2+\frac{1}{2}Iw^2 \tag{I-50}$$

此即所需證明也。

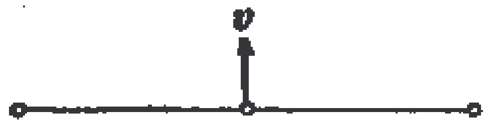
習題

1. 一細桿，長 2a，質量 M，置於光滑的平面上。開始時，以垂直於桿的方向，猛擊一端。求該桿的瞬時的轉動中心。

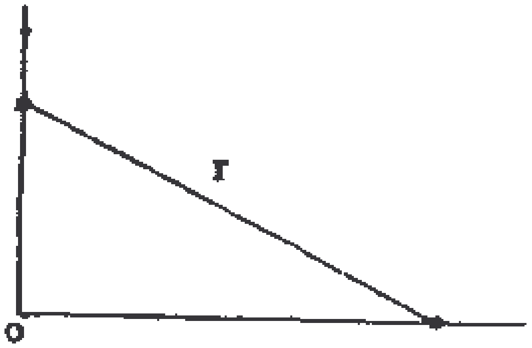
2. 兩條細桿，長各爲 2a，質量各爲 M，接連成可屈折的一直條，置於光滑的平面桌上。開始時，以垂直於桿的方向，猛擊一端。求每桿的瞬時角速度。

3. 一條軟的繩子，置於桌上。開始時有長爲 x_0 的一段，垂懸桌邊。求當時間爲 t 時下垂的一段的長度，並證明能量積分係該運動的積分之一。

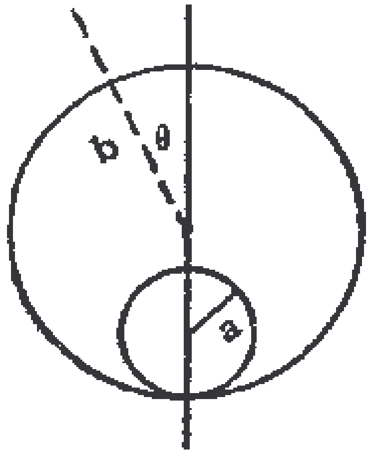
4. 三個等質量的質點，以等距離繫於一柔軟的繩上，此繩以直線形置於光滑的桌面。開始時，中央的質點，有速度 v 在與繩垂直的方向運行，兩端的質點則係靜止的。試證當兩端的二質點相遇時，其速度爲 $\frac{2}{3}v$。



5. 有二以直角相交的光滑鐵絲，每絲上有一珠可沿絲滑動，如圖。二珠的質量相等。二珠互相吸引的定律爲 $V(r)$。證明無論二珠在任何二點以靜止狀態開始運行，二珠皆必同時到達 O 點（無論 $V(r)$ 爲何式）。



6. 一圓柱之半徑爲 a，繞軸之慣性矩爲 Mk^2。將此柱置於一平



放之固定空心圓管內，管內半徑爲 $b>a$，如圖，證明經過兩軸之平面的蕩動，與一長度爲

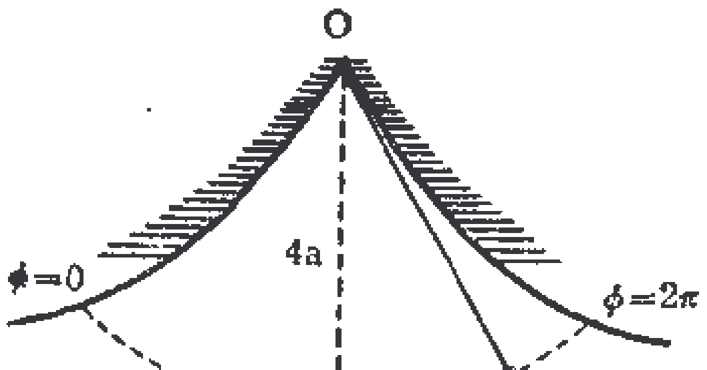
$$\frac{1}{a^2}(b-a)(a^2+k^2)$$

之單擺相同。

7. 一個擺線（cycloid）係由一個圓輪邊緣上一固定點當輪在平線上滾動時所描之軌跡。其參數式的方程式爲

$$x=a(\phi-\sin\phi),\quad y=a(1-\cos\phi)$$

茲將上的擺線倒轉，如圖，其方程式乃成



$$x=a(\phi-\sin\phi)$$
$$-y=a(1+\cos\phi)$$

茲以長爲 $4a$ 之線，自O點懸一質量 m，使線切擺線而擺蕩。證明此擺線擺之週期，與擺輻無關（故稱同週時擺 isochronous pendulum）。

註：此擺乃 Christian Huygen 1673 年所發明。

8. 如使（42）式中之 A, B, C, D, E, F 寫爲下式

$$I_{xx}=A,\quad I_{yy}=B,\quad I_{zz}=C,\quad I_{yz}=I_{zy}=D,$$

$$I_{zx}=I_{xz}=E,\quad I_{xy}=I_{yx}=F$$

證明第（45）式可作下三張量之積

$$I=(\alpha\ \beta\ \gamma)\begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

第二章

虛功原理；d'Alembert 原理

Newton 的運動定律，可用爲建立動力學的基礎。但我們亦可以其他的原理，如 d'Alembert 原理，變分原理，及 Hamilton-Jacobi 理論等爲動力學的基本原理，由此出發而建立整部動力學來。Lagrange 就是以 d'Alembert 原理爲他的名著「解析力學」的出發點的。

1 虛功原理

在外力作用下的 n 質點系統，如可自由運動，則按第二定律，其運動方程式可寫爲

$$m_i\ddot{x}_i = X_i,\ \text{餘類推},\ i=1,\cdots n \tag{II-1}$$

使各質點在平衡狀態的必要及充足條件，爲

$$X_i = Y_i = Z_i = 0,\ i=1,\cdots,n \tag{II-2}$$

設 $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ 係完全任意之位移，則對這些位移，所作之功

$$\delta w = \sum_i (X_i\,\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z_i\delta z_i) \tag{II-3}$$

在（II-2）式所定義之平衡狀態下，應等於零。且如 δx_i 等果係任意値，則 $\delta w=0$ 亦爲平衡之充足條件。故 $\delta w=0$ 與（2）式

所代表者，乃係完全相同也。

如質點在外力 X_i, Y_i, Z_i 作用下，並不能完全的自由運動，而係受到某些幾何條件的約束時，我們可將力寫爲外力 $X', Y',$ Z'，及由約束所產生的力 X^*, Y^*, Z^* 之和。則在此情形下，平衡的必要及充足條件 (2) 卽可寫爲

$$X_i'+X_i^*=0, \quad Y_i'+Y_i^*=0, \quad Z_i'+Z_i^*=0$$

$$i=1, \cdots, n \qquad (\text{II}-4)$$

或
$$\delta w=\sum[(X_i'+X_i^*)\delta x_i+\cdots]=0 \qquad (\text{II}-5)$$

此式中之 δx_i 等，係完全任意之變化。然因有約束的條件存在，故位移是不能任意，而需滿足下式條件的

$$f_\alpha(x_1, y_1, z_1, x_2 \cdots z_n, t)=0, \quad \alpha=1, \cdots, \mu \qquad (\text{II}-6)$$

μ 爲約束條件之數目。δx 等在固定時刻 t 時，需滿足 (6) 式，故

$$\sum\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i\right)=0, \quad \alpha=1, \cdots, \mu \qquad (\text{II}-7)$$

滿足 (7) 式之 δx 等，謂之虛位移 (Virtual displacements)*。

在理論動力學中所遇的所有情形，所謂約束也者，係當系統按照約束條件作位移時，對約束力所作的功係零的。例如：一質點在一表面或曲線上運動，其由約束所產生的反作用力、與此表面或曲線垂直時，則此情形下，約束力所作的功，顯然爲零也。茲推廣此一說法如下：所有約束力均不作功，故

$$\delta w^*=\sum(X_i^*\delta x_i+Y_i^*\delta y_i+Z_i^*\delta z_i)=0 \qquad (\text{II}-8)$$

---

* 約束條件有時不能以 (6) 式的表示，而係下列不能積分成 (6) 式的方程式的

$$\sum_i(a_{\alpha i}dx_i+b_{\alpha i}dy_i+c_{\alpha i}dz_i+g_\alpha dt)=0 \qquad (\text{II}-11)$$

在此情形下，該系統稱爲非完全 (nonholonomic) 系統。以後我們將討論此情形。

在此情況下，平衡的必要及充足條件（5）變爲

$$\delta w' = \sum (X_i' \delta x_i + Y_i' \delta y_i + Z_i' \delta z_i) = 0 \qquad (\text{II}-9)$$

δ 等係表示虛位移。(9) 式所代表的條件，稱爲**虛功原理**。

(9) 式爲必要條件，可由 (5) 及 (8) 式見之，而其爲充足條件，則並不顯而易見，蓋 δ 並非任意的，故我們不能由 (5) 式及 (7) 或 (8) 式所限定之 δ 等而得到 $X_i'+X_i^*=Y_i'+Y_i^*=Z_i'+Z_i^*=0$ 之結論也。此充足性可證明如下：設這些力，在 $t=0$ 時，產生下列之加速度，即

$$m_i \ddot{x}_i = m\alpha_i,\quad \ddot{y}_i = \beta_i,\quad \ddot{z}_i = \gamma_i \text{ 等},$$

故 (5) 式變爲

$$\sum m_i (\alpha_i \delta x_i + \beta_i \delta y_i + \gamma_i \delta z_i) = 0 \qquad (\text{II}-10)$$

δ 等滿足 (7) 及 (8) 式。如約束力係永久性者，即

$$\frac{\partial f_\kappa}{\partial t} = 0,$$

則由 (7) 式可得

$$\sum_i \left(\frac{\partial f_\kappa}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f_\kappa}{\partial y_i} \dot{y}_i + \frac{\partial f_\kappa}{\partial z_i} \dot{z}_i \right) = 0 \qquad (\text{II}-12)$$

今對 t 微分之，因在 $t=0$ 時 $\dot{x}_i = \dot{y}_i = \dot{z}_i = 0$，故

$$\sum_i \left(\frac{\partial f_\kappa}{\partial x_i} \ddot{x} + \frac{\partial f_\kappa}{\partial y_i} \ddot{y}_i + \frac{\partial f_\kappa}{\partial z_i} \ddot{z}_i \right) = 0 \qquad (\text{II}-13)$$

因此初加速度 $\ddot{x}_i |_{t=0} = \alpha_i$ 與虛位移均滿足相同之方程式 (7)，故

$$\delta x_i = k\alpha_i,\quad \delta y_i = k\beta_i,\quad \delta z_i = k\gamma_i \qquad (\text{II}-14)$$

k 係一常數。

以 (14) 式代入 (10) 式，則可得

$$\sum km_i(\alpha_i^2+\beta_i^2+\gamma_i^2)=0 \tag{Ⅱ-15}$$

因每項均 $\geqslant 0$，故上式僅當 $\alpha_i=\beta_i=\gamma_i=0$ 始可滿足。故此系統係在平衡之狀態。

欲得由約束所產生之力，我們可用 Lagrange 方法。以 λ_α 乘（7）式，並作對 α 之和，然後將所得式加入（9）式，即得

$$\sum_i\left[\left(X_i'+\sum_\alpha^\mu\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\right)\delta x_i+(\cdot\cdot)\delta y_i+(\cdot\cdot)\delta z_i\right]=0 \tag{Ⅱ-16}$$

δx 等滿足（7）式。但 μ 個 λ 值是任意值。我們將擇取 λ 等使 μ 個 δ 的係數爲零，即

$$\left.\begin{cases} X_1'+\sum_\alpha\lambda_\alpha\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_1}=0 \\ X_2'+\sum_\alpha\lambda_\alpha\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_2}=0 \\ \cdots\cdots\cdots \end{cases}\right\}\ \mu\text{ 個方程式} \tag{Ⅱ-17}$$

這些式祇有當（17）的 μ 個方程式係線性獨立無關時有解，亦即謂當下（$3n\times\mu$）矩陣

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial x_2} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial z_n} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z_n}\cdots\cdots\cdots & \dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_n} \end{matrix}\right| \tag{Ⅱ-18}$$

爲 μ 秩（rank）時，（17）式始有解。

因有 $3n-\mu$ 個 δ 等是任意的，故我們可選擇其他之 $3n-\mu$ 個 δ 等爲任意值。如使（16）式成立，則此 $3n-\mu$ 個 δ 的係數

務須爲零。此 $3n-\mu$ 個方程式加上 (17) 式中的 μ 個方程式，卽得

$$X_i'+\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}=0, \quad Y_i'+\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}=0,$$

$$Z_i'+\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}=0 \tag{II-19}$$

以此與 (4) 式比較，卽得

$$X_i^*=\sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}, \text{ 餘類推。} \tag{II-20}$$

例題: 在一平滑水平面上之質點，其約束條件 $f(x, y, z)=0$ 乃 $z=$常數，

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0, \ \frac{\partial f}{\partial z}=1\text{。因 } \delta x, \delta y \text{ 均任意，而}$$

$$\delta z=0, \quad X'=Y'=0$$

$$Z'=-mg, \ X^*=Y^*=0, \ Z^*=-Z'=mg, \text{ 而 } \lambda=mg$$

2 d'Alembert 原理

茲考慮一個無約束條件之質點系統。設作用力爲 X_i', Y_i', Z_i', 則運動方程式 (第二定律) 爲

$$m_i \ddot{x}_i=X_i', \text{ 餘類推} \tag{II-21}$$

因此

$$\sum_i [(-m_i\ddot{x}_i+X_i')\delta x_i+(-m_i\ddot{y}_i+Y_i')\delta y_i$$

$$+(-m_i\ddot{z}_i+Z_i')\delta z_i]=0 \tag{II-22}$$

δ 等係完全任意的。上式乃謂:「倒轉的有效力」$-m_i\ddot{x}_i$, $-m_i\ddot{y}_i$, $-m_i\ddot{z}_i$ 和外加的作用力，構成一個平衡的系統。這是顯然的。

其次，考慮一有約束條件的系統。設由約束所產生的力爲 X_i^*, Y_i^*, Z_i^* 等，則運動方程式可寫爲

$$m_i\ddot{x}_i = X_i' + X_i^*,\ \text{等,} \tag{II-23}$$

故

$$\sum_i [(-m_i\ddot{x}_i + X_i' + X_i^*)\delta x_i + (\cdots)\delta y_i + (\cdots)\delta z_i] = 0 \tag{II-24}$$

δ 等係完全任意的。如 δ 現在代表滿足下列方程式之虛位移，即

$$\sum_i \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\delta x_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\delta z_i \right) = 0,\ \alpha = 1, \cdots \mu \tag{II-25}$$

則可得

$$\sum_i [(-m_i\ddot{x}_i + X_i')\delta x_i + (\cdots)\delta y_i + (\cdots)\delta z_i] = 0 \tag{II-26}$$

蓋由虛功原理，知

$$\sum_i (X_i^*\delta x_i + Y_i^*\delta y_i + Z_i^*\delta z_i) = 0 \tag{II-27}$$

(26) 式即爲 d'Alembert 原理的數學式。在一動力學問題中，如引入「倒轉有效力」的觀念，則該動力學問題，即可簡化成一靜力學問題。此乃因在此情形下，各力係成平衡之狀態也。

約束力 X_i^*, Y_i^*, Z_i^* 可如下得之: 以 λ_α 乘 (25) 式，並作對 α 之和，再將其結果加入 (26) 式，則可得

$$\sum_i \left[\left(-m_i\ddot{x}_i + X_i' + \sum_\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i} \right)\delta x_i + (\cdots)\delta y_i + (\cdots)\delta z_i \right] = 0 \tag{II-28}$$

λ 之擇取，可先由使 μ 個 δ 等的係數爲零（此僅當矩陣（18）之秩數（rank）爲 μ 時方有此可能）；其他（$3n-\mu$）個 δ 等可取爲任意値，故其每個係數皆各別爲零，故即得

$$m_i\ddot{x}_i=X_i'+\sum_\alpha\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i},\ \text{等等,}\tag{Ⅱ-29}$$

$$X_i^*=\sum_\alpha\lambda_\alpha\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i};\ \alpha=1,\cdots,\mu\tag{Ⅱ-30}$$

（29）式稱爲 Lagrange 方程式之第一形式。

總結上節，解一個問題的眞正步驟如下：

i）利用（29）式，將 μ 個 λ 以 $x_i,\ddot{x}_i,X_i'$，等表示。

ii）將下式

$$\sum_i\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial f_\alpha}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)=0,\ \alpha=1,\cdots\mu$$

對 t 微分，則可得 μ 個方程式。然後將 μ 個 $\ddot{x}_i$，以其他 $3n-\mu$ 個 $\ddot{x}_i$ 及座標 x 等表示之。

iii）將這些式代入下 μ 個由 i）得來的方程式

$$\lambda_\alpha=\lambda_\alpha(x,\ddot{x},\cdots)$$

即可得

$$\lambda_\alpha=\lambda_\alpha\ (3n-\mu\ \text{個}\ \ddot{x}\ \text{等，及座標}\ x\ \text{等})$$

iv）將此 λ_α 等代入（29）式中其他 $3n-\mu$ 個方程式，即可得含有 $3n-\mu$ 個 $\ddot{x}$ 及座標 x 之 $3n-\mu$ 個方程式。

如虛位移 δx 等應滿足的約束條件不是（7）式，而係（11）式（所謂非完全系統），則上（29）方程式需代以下式

$$m\ddot{x}_i=X_i'+\sum_\alpha\lambda_\alpha a_{\alpha i},\ \text{餘類推}\tag{Ⅱ-29a}$$

此處之 $a_{\kappa i}$，係座標 x_i, y_i, z_i 的函數。

前述第（6）式的約束條件，可以隨時間變的。虛位移 δx_i 等，則係僅需滿足第（7）式在固定時間的約束條件，故和約束（6）與時變易無關。但如（6）式中有 t，則此約束所作之功，將不等於零。這可見之如下。

以 dx_i 乘第（29）式，dy_i，dz_i 乘（29）式之 y,z 等，因

$$\sum m_i(\ddot{x}_i dx_i+\ddot{y}_i dy_i+\ddot{z}_i dz_i)$$

$$=\frac{d}{dt}\left\{\sum\frac{1}{2}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)\right\}dt=dT$$

$$\sum\{X_i'dx_i+Y_i'dy_i+Z_i'dz_i\}=dW$$

$$\sum_i\left\{\frac{\partial f_\kappa}{\partial x_i}dx_i+\frac{\partial f_\kappa}{\partial y_i}dy_i+\frac{\partial f_\kappa}{\partial z_i}dz_i\right\}=df_\kappa-\frac{\partial f_\kappa}{\partial t}$$

故得

$$dT=dW-\sum_\kappa\lambda_\kappa\frac{\partial f_\kappa}{\partial t}dt \qquad (\text{II}-31)$$

末一項乃約束所作之功也。

如約束條件係如第（11）式，則（31）需代以

$$dT=dW-\sum_\kappa\lambda_\kappa g_\kappa dt \qquad (\text{II}-31\text{a})$$

習題

1. 試應用虛功原理於下列問題：

   (1) 槓桿

   (2) 舉重的滑車 (block and tackle)

   (3) 力矩及虛轉動

2. 試應用 d'Alembert 原理於下列各問題：

   (1) 剛體繞一固定軸的轉動

   (2) 質量 M 之昇降機，以繞一鼓形滑車 (drum)（其半徑爲 a，慣性矩爲 I）之纜提昇。

   (3) 一質點在一光滑之圓球的上半部運行，唯一之力乃地心引力。其起始點座標爲 z_0，速度 v_0 在該 z_0 點之切面上。問在何高度 z 時該質點將離開球面。

第三章

Lagrange 方程式

1 廣義座標

一個有 n 質點之系統，由於有 μ 個約束條件，僅有 $3n-\mu$ 個自由度。我們可以引入 $3n-\mu=m$ 個獨立參數，完全地定義出質點的位置。設座標 x_i, y_i, z_i，$i=1,\cdots,n$，與此 m 個參數（謂之廣義座標）間，可以下式表明其關係*:

$$x_i=x_i(q_1\cdots q_m),\quad y_i=y_i(q_1\cdots q_m),$$
$$z_i=z_i(q_1\cdots q_m) \tag{Ⅲ-1}$$

則可得

$$dx_i=\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}dq_k,\quad \dot{x}_i=\sum_k \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_k,\ \text{餘類推} \tag{Ⅲ-2}$$

及

$$ds_i^2=dx_i^2+dy_i^2+dz_i^2=\sum_{k,l} E_{k,l}^{(i)}dq_k\,dq_l \tag{Ⅲ-3}$$

$$E_{kl}^{(i)}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\frac{\partial x_i}{\partial q_l}+\frac{\partial y_i}{\partial q_k}\frac{\partial y_i}{\partial q_l}+\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\frac{\partial z_i}{\partial q_l}=q\text{之函數} \tag{Ⅲ-4}$$

---

* 如 (1) 式亦係 t 之顯函數，則下面結果均須修正。動能T將另包括 $\dot{q}$ 之一次項，此項將產生所謂的"廻轉力"，詳見第 八 章。

此系統之動能爲

$$T=\frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\frac{ds_i}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}\sum_i\sum_{k,l} m_iE_{kl}^{(i)}\dot{q}_k\dot{q}_l$$

$$\equiv\frac{1}{2}\sum_{k,l}a_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l \qquad (\text{III}-5)$$

T係 $\dot{q}$ 等之齊次二次式。由 Euler's 定理，可得

$$\sum_\alpha\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_\alpha}\dot{q}_\alpha=2T \qquad (\text{III}-6)$$

我們定義廣義動量如下：

$$p_k=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k} \qquad (\text{III}-7)$$

則

$$2T=\sum_k p_k\dot{q}_k \qquad (\text{III}-8)$$

今

$$p_k=\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\sum_i\frac{1}{2}m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)$$

$$=\sum m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k}+\dot{y}_i\frac{\partial\dot{y}_i}{\partial\dot{q}_k}+\dot{z}_i\frac{\partial\dot{z}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)$$

由（2）則上式變成

$$p_k=\sum m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+\dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+\dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)$$

因此上式之 p_r 可視爲動量 $m_i\dot{x}_i$，$m_i\dot{y}_i$，$m_i\dot{z}_i$ 沿着 q_k 方向之「投影」。功的元素爲

$$dW=\sum(X_idx_i+Ydy_i+z_idz_i)$$

$$\equiv\sum_k Q_kdq_k \qquad (\text{III}-9)$$

此處的

$$Q_k=\sum_i\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)\qquad(\text{III}-10)$$

乃相應於廣義座標 q_k 之「廣義力」。

2 Lagrange 方程式之推導

1）由 Newton 第二定律，知

$$m_i\ddot{x}_i=X_i,\quad m_i\ddot{y}_i=Y_i,\quad m_i\ddot{z}_i=Z_i\qquad(\text{III}-11)$$

$$m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=m_i\frac{d\dot{x}_i}{dt}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)-\dot{x}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\right]$$

等等，由（2）式，則

$$\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k}=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_l\frac{\partial x_i}{\partial q_l}\dot{q}_l\right)=\sum\frac{\partial^2x_i}{\partial q_l\partial q_k}\dot{q}_l=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\qquad(\text{III}-12)$$

故

$$m_i\ddot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}=m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial\dot{q}_k}\right)-\dot{x}_i\frac{\partial\dot{x}_i}{\partial q_k}\right]$$

$$=\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial}{\partial q_k}\right)\left(\frac{1}{2}m\dot{x}_i^2\right)$$

在上式中加入與 y_i，z_i 之相應式，且作對 i 之和，即得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=\sum_i\left(X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_k}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_k}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right)=Q_k\qquad(\text{III}-13)$$

此式稱爲 Lagrange 方程式之第二形式，或簡稱爲 Lagrange 方程式。

2）如由 d'Alembert 原理，則由（II-26），得

$$\sum_i[(-m_i\ddot{x}_i+X_i')\delta x_i+(\cdots)\delta y_i+(\cdots)\delta z_i]=0\qquad(\text{III}-14)$$

茲用 $\delta x_i=\sum\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\delta q_k$ 等及（10),（12）式，則可由（14）得到

$$\sum_k \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}-Q_k'\right]\delta q_k=0 \qquad (\text{III}-15)$$

因 δ 等係任意的，故我們即可得（13）式*

如一系統的作用力，可由位能函數 $V(x_1,\cdots,z_n)=V(q_1,\cdots,q_n)$ 導出時，即

$$Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (\text{III}-16)$$

則 Lagrange 方程式，可寫成

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=-\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (\text{III}-17)$$

茲定義 Lagrangian 函數爲

$$L\equiv T-V \qquad (\text{III}-18)$$

則（17）式成

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (\text{III}-19)$$

3 Lagrange 方程式之首次積分：循環座標

如 Lagrangian 函數 L 中，不包括某些座標，如，$q_1,\cdots,q_f$，則此些座標之 Lagrange 方程式，即可積分而得

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{\partial \dot{q}_i}=\frac{\partial L}{\partial q_i}=0$$

---

* 上述的 Lagrange 方程式的導法，有賴一個假設，即自由度的數目，與完全定義系統組態所需的 q 的數目相等。如此，則 δq 即可視爲任意的。此種系統稱爲完全（holonomic）系統。如系統的自由度數目小於定義該系統組態所需的 q 數目時，此系統稱爲非完全（nonholonomic）系統，在此情況下，我們則需某些修正的做法，詳見下文第十章。

或

$$p_i=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\text{常數}=\beta_i,\quad i=1,\cdots,f \qquad (\text{III}-20)$$

此 f 個首次積分，卽可用來將原系統的 m 個二次方程式的 $2m$ 次，降低爲 $2m-f$ 次。這種座標稱爲循環（或「可略」）座標。（見下文第 四 章）

在尋常情況下，此首次積分相當於簡單的守恒定律，如：

i）若 q_1 不在 L 中出現，且若 q_1 之變化 Δq_1 相當於整個系統經過距離 Δl（沿某一方向，如 x）之移動，則由（20）式可得

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=\sum_i m_i\left(\dot{x}_i\frac{\partial x_i}{\partial q_1}+\dot{y}_i\frac{\partial y_i}{\partial q_1}+\dot{z}_i\frac{\partial z_i}{\partial q_1}\right)$$

$$=\sum m_i\left(\dot{x}_i\frac{\Delta l}{\Delta q}+0+0\right)=\beta_1$$

或

$$\sum_i m_i\dot{x}_i=\text{常數} \qquad (\text{III}-21)$$

此卽沿 x 方向的動量守恒定律也。

ii）如 q_1 不在 L 中出現，且如 q_1 之變化 Δq_1，相當於整個系統繞某一方向（如，z 軸）作 $\Delta\phi$ 之轉動，則由極座標之變換，可知

$$y_i=r_i\sin\phi_i,\quad x_i=r_i\cos\phi_i,\quad d\phi_i=\frac{\partial\phi_i}{\partial q_1}dq_1=dq_1,$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial q_1}=\frac{\partial x_i}{\Delta\phi_i}=-r_i\sin\phi_i=-y_i,\quad \frac{\partial y_i}{\partial\phi_i}=x_i,\quad \frac{\partial z_i}{\partial\phi_i}=0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}=\sum m_i(x_i\dot{y}_i-y_i\dot{x}_i)=\sum m_i r_i^2\dot{\phi}^2=\beta_1 \qquad (\text{III}-22)$$

如一個系統的位能，與繞 z 軸的轉動位是無關時，上式卽係其 z 軸的角動量守恒之定律。

習題：一昆蟲以一均勻速度爬行於一桿上，此桿之兩端被限制於一平滑之水平圓環上，試求昆蟲及桿的運動。

4 Lagrange 方程式之首次積分：能量原理

如 $L(q, \dot{q})$ 並不明顯的與時間有關，(即不變之約束條件與靜位能 $V(q)$)，則可得

$$\frac{\partial L}{\partial t}=0$$

及

$$\frac{dL}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right)=\sum_i\left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i+\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i\right]$$

$$=\frac{d}{dt}\sum\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

或

$$\sum\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=\text{常數}=H \tag{Ⅲ-23}$$

此式係 t 之一次函數，乃該系統之首次積分。

如一系統之動能係 q 的齊次二次式，則由 (17) 式及 Euler 定理，

$$\sum_i\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\sum_i p_i\dot{q}_i=2T \tag{Ⅲ-24}$$

由 (18) 式，此乃

$$\sum\dot{q}_i\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-L=T+V \tag{Ⅲ-25}$$

因此，首次積分 $T+V=$常數，即爲能量守恒原則。

5 藉首次積分降低 Lagrange 方程式的階次：Routh 函數

從前二節中得知，如 Lagrangian 函數具有循環座標或與時間無關，則可即得 (20)，(23) 式之首次積分。本節將叙述如何藉這些首次積分，降低 Lagrange 方程式的階次 (order)。

在討論此問題之前，我們將作一簡單的數學引言。設 $F(x_1, x_2)$ 係 x_1，x_2 的函數，故其全微分 dF 爲

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2$$

茲使

$$p_1\equiv\frac{\partial F}{\partial x_1},\quad p_2\equiv\frac{\partial F}{\partial x_2}$$

故上式可寫爲

$$dF=p_1dx_1+p_2dx_2$$

設現欲將變數 x_2 代以 p_2，我們可定義另一函數 $G(x_1, p_2)$ 如下：

$$G(x_1, p_2)=x_2p_2-F(x_1, x_2)$$

或

$$dG=\frac{\partial G}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial G}{\partial p_2}dp_2$$

$$=-\frac{\partial F}{\partial x_1}dx_1-\frac{\partial F}{\partial x_2}dx_2+x_2\,dp_2+p_2\,dx_2$$

由此數式，可得

$$x_2=\frac{\partial G}{\partial p_2},\quad \frac{\partial F}{\partial x_1}+\frac{\partial G}{\partial x_1}=0$$

故上由 F 至 G 之變換式，乃成

$$G(x_1,p_2)=x_2\frac{\partial F}{\partial x_2}-F(x_1,x_2)$$

上述的變換，乃係所謂 Legendre 變換的一特例。此 Legendre 變換，不僅出現於力學（下文及本册乙部第三章），且亦見諸熱力學的熱力函數間的變換關係。（詳見乙部第三章及習題。）*

茲設 L 的座標 $q_1,\cdots,q_m$ 中，前面 f 個 $q_1,q_2,\cdots,q_f$ 係循環座標。相當於這些座標的首次積分爲

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}(q_{f+1},\cdots,q_m,\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_m)=\beta_i=\text{常數},\quad i=1,\cdots,f \qquad (\text{III}-26)$$

今自變數

$$q_{f+1},\cdots q_m,\quad \dot{q}_1,\cdots\dot{q}_f,\quad \dot{q}_{f+1},\cdots\dot{q}_m \qquad (\text{III}-27)$$

以 Legendre 變換，使之變成另一組之變數

$$q_{f+1},\cdots q_m,\quad \beta_1,\cdots\beta_f,\quad \dot{q}_{f+1}\cdots\dot{q}_m \qquad (\text{III}-28)$$

此 Legendre 變換爲

$$R(q_{f+1}\cdots q_m,\beta_1\cdots\beta_f,\dot{q}_{f+1}\cdots\dot{q}_m)$$
$$=L(q_{f+1}\cdots q_m,\dot{q}_1\cdots\dot{q}_m)-\sum_1^f\dot{q}_i\beta_i \qquad (\text{III}-29)$$

及（26）式中之 f 個方程式。

今

$$\delta R=\sum_{f+1}^m\frac{\partial R}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_1^f\frac{\partial R}{\partial \beta_i}\delta\beta_i+\sum_{f+1}^m\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i$$

$$\delta L=\sum_{f+1}^m\frac{\partial L}{\partial q_i}\delta q_i+\sum_1^f\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i+\sum_{f+1}^m\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta\dot{q}_i$$

* 所謂 Legendre 變換（似應稱爲 Euler 變換），可參閱本册乙部，第三章，第一節關於 Hamilton 的正則方程式。

$$\delta\left(\sum_1^f \beta_i \dot{q}_i\right)=\sum_1^f \beta_i \delta \dot{q}_i+\sum_1^f \dot{q}_i \delta \beta_i$$

將（29）式取變分，並引用（26）式，則可得

$$\frac{\partial R}{\partial q_j}=\frac{\partial L}{\partial q_j},\quad j=f+1,\cdots,m$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j},\quad j=f+1,\cdots,m \tag{Ⅲ-30}$$

$$\dot{q}_i=-\frac{\partial R}{\partial \beta_i},\quad i=1,\cdots,f$$

由上方程式的首二組，則可見原來之 Lagrange 方程式可代以下式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial R}{\partial q_j}=0,\quad j=f+1,\cdots,m \tag{Ⅲ-31}$$

及（26）中之 f 個方程式

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=\beta_i,\quad i=1,\cdots,f\ , \tag{Ⅲ-26}$$

或下列 f 個方程式

$$\dot{q}_i=-\frac{\partial R}{\partial \beta_i},\quad i=1,\cdots,f\ , \tag{Ⅲ-32}$$

則（31）及（26），或（31）及（32），方程式之次數，乃係 $2(m-f)+f=2m-f$。此改變過的 Lagrangian 函數 R，稱爲 Routh 函數。

茲略探究函數 R 的形式。如由（26）的 f 個方程式，解得 $\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_f$，以（28）式中之 $2m-f$ 個變數表示之*。這些 $\dot{q}_i, i=1,\cdots f$，係 β_i 及 $\dot{q}_{f+1},\cdots,\dot{q}_m$ 之線性函數。當以此 $\dot{q}_i$ 代入（29）式時，即可見 R 包含 $\dot{q}_{f+1},\cdots,\dot{q}_m$ 之一次項，以及 β_i 及 $\dot{q}_{f+1},\cdots,\dot{q}_m$ 之二次項。這些 $\dot{q}_{f+1},\cdots,\dot{q}_m$ 的一次項，產生了額外的「廻

轉力」。而 R 中的二次項，則類似在位能中，引入了一些額外的項。我們將在下文中討論這些項的意義。

第 4 節中的能量積分 (23)，亦可用來減低 Lagrange 方程式的次數，茲引入

$$q_r'=\frac{dq_r}{dq_1}=\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1},\quad r=2,\cdots,m \tag{Ⅲ-33}$$

並將 Lagrangian 函數中的

$$\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_m, \tag{Ⅲ-34}$$

代以

$$\dot{q}_1,\dot{q}_1q_2',\cdots,\dot{q}_1\,q_m' \tag{Ⅲ-35}$$

使

$$L(\dot{q}_1\cdots\dot{q}_m,q_1\cdots q_m)\equiv \boldsymbol{L}(\dot{q}_1,q_2'\cdots q_m',q_1\cdots q_m) \tag{Ⅲ-36}$$

由此即得

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial q_r'},\qquad \frac{\partial L}{\partial q_s}=\frac{\partial \boldsymbol{L}}{\partial q_s},\quad \begin{matrix} r=2,\cdots m\\ s=1,\cdots m\end{matrix} \tag{Ⅲ-37}$$

---

* 使　$2T=\sum_{k,l}^{m}a_{kl}\dot{q}_k\dot{q}_l$

因此

$$\beta_i=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_i}=\sum_{l=1}^{m}a_{il}\dot{q}_l,\quad i=1,\cdots,f$$

上式可寫成

$$\sum_{l=1}^{f}a_{il}\dot{q}_l=\beta_i-\sum_{j=f+1}^{m}a_{ij}\dot{q}_j,\quad i=1,\cdots,f$$

此式可解得 $\dot{q}_l$, $l=1,\cdots f$, 如下：

$$\dot{q}_l=\sum_{i=1}^{f}c_{li}(\beta_i-\sum_{f+1}^{m}a_{ij}\dot{q}_j),\quad l=1,\cdots f$$

c_{li} 係行列式 $|a_{kl}|$ 中 a_{il} 之餘因子 (minor) 除以行列式 $|a_{kl}|$ 之值。$|a_{kl}|\neq 0$, 此因 T 係一個確定正值之二次式 (positive definite quadratic form)。

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}-\frac{1}{\dot{q}_1^2}\sum_2^m \dot{q}_r\frac{\partial L}{\partial q_r'} \tag{Ⅲ-38}$$

由上式可得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}+\sum_2^m \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \tag{Ⅲ-39}$$

現將下列積分

$$\sum_1^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}\dot{q}_s-L=H \tag{3-23}$$

中的 $\dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_m$ 代以 $\dot{q}_1,\dot{q}_1q'_2,\cdots\dot{q}_1\dot{q}_m'$，則將上式解之可得

$$\dot{q}_1=\dot{q}_1(q_2'\cdots q_m',q_1,\cdots q_m) \tag{Ⅲ-40}$$

此式代入 $\sum_1^m \frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}$ 式中，即得

$$\sum_1^m \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\frac{\dot{q}_r}{\dot{q}_1}(q_2',\cdots q_m',q_1\cdots q_m)$$

$$\equiv L'(q_2'\cdots q_m',q_1\cdots q_m) \tag{Ⅲ-41}$$

以此與（39）及（23）式比較，可得

$$L'=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \tag{Ⅲ-42}$$

$$\dot{q}_1\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}-L=H \tag{Ⅲ-43}$$

將此二式對 q_r' 及 q_r 微分，並比較各項，可得

$$\frac{\partial L'}{\partial q_r'}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial q_r'},\quad r=2,\cdots,m_1$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_s}=\frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial q_s},\quad s=1,\cdots,m \tag{Ⅲ-44}$$

此式加上（37）式，則得到

$$\frac{\partial L'}{\partial q_r'}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r},\quad r=2,\cdots,m$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_s} = \frac{1}{\dot{q}_1}\frac{\partial L}{\partial q_s}, \quad s=1, \cdots, m \qquad (\text{III}-45)$$

故原來之 Lagrange 方程式變爲

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial q_r'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_r}\dot{q}_1 = 0 \qquad (\text{III}-46)$$

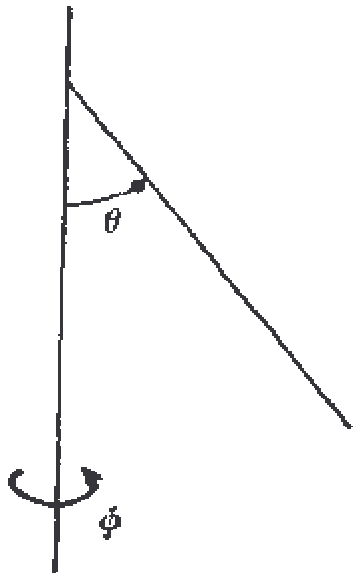
或

$$\frac{d}{dq_1}\left(\frac{\partial L'}{\partial q_r'}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q_r} = 0, \quad r=2, \cdots, m \qquad (\text{III}-47)$$

上式之次數爲 $2(m-1)$。(23) 式之首次積分係一次微分方程式，故此系統之次數，由 $2m$ 降爲 $2m-1$ 次。

習題

1.　一細桿，長 $2a$，質量 M，其一端接於一可自由旋轉之垂直軸。開始時，持桿於水平位置，並使垂直軸以角速度 w 旋轉。設 θ 係桿與垂直軸所夾之角。證明下運動方程式



$$\frac{4}{3}\sin^3\theta\,\ddot{\theta}-\frac{4}{3}w^2\cos\theta+\frac{g}{a}\sin^4\theta=0$$

如 ϕ 乃繞垂直軸轉動之角，證明 Routh 函數R爲

$$R=\frac{1}{2}\left[\frac{4}{3}Ma^2\dot{\theta}^2-\frac{\beta^2}{\frac{4}{3}Ma^2\sin^2\theta}\right]$$

$$-Mag(1-\cos\theta)$$

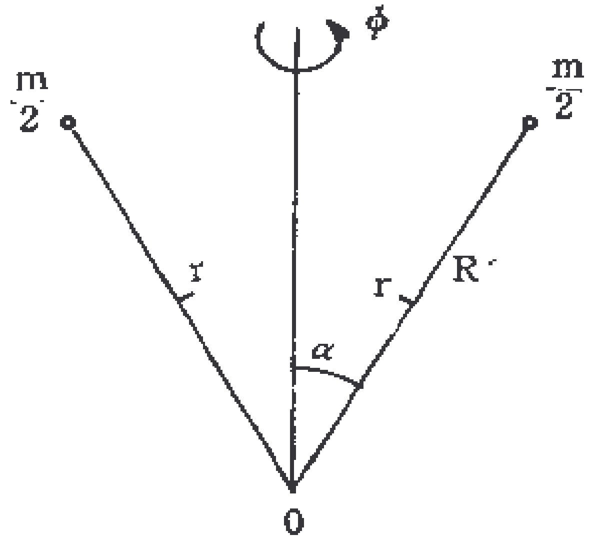
$$\beta=\frac{4}{3}Ma^2w$$

並證明

$$t=\int\frac{\sin\theta\,d\theta}{\sqrt{A\sin^4\theta+B\sin^2\theta\cos\theta+C}},\quad A,B,C=\text{常數}$$

及　$$\phi=\int\frac{w}{\sin^2\theta}\,dt$$

2. 一個 V 字形的槽，其夾角爲 2α，可繞垂直軸自由轉動。兩槽對垂直軸之慣性矩爲 I。茲有兩質點，質量各爲 $\frac{m}{2}$，各在一槽。開始時，兩質點皆靜止的在兩槽上端，距底點 0 爲 R，兩槽繞軸之角速度爲 w。證此系統之 Lagrangian 函數爲



$$L=\frac{1}{2}(I+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\phi}^2+\frac{1}{2}m\dot{r}^2-mgr\cos\alpha$$

其 Routh 函數爲

$$R=-\frac{1}{2}\ \frac{\beta^2}{I+mr^2\sin^2\alpha}+\frac{1}{2}m\,\dot{r}^2-mgr\cos\alpha$$

$$\beta=(I+mR^2\sin^2\alpha)w$$

3.　證明第 2 題的能量積分爲

$$\frac{1}{2}(I+mr^2\sin^2\alpha)\dot{\phi}^2+m\dot{r}^2+mgr\cos\alpha$$

$$=h$$

4.　如第 2 題中之慣性量 I 可略而不計，證明該運動方程式之解爲下積分

$$t=\int\frac{rdr}{\sqrt{Ar^3+Br^2+C}},\quad A,B,C=\text{常數}$$

$$\phi=wR^2\int\frac{dt}{r^2}$$

第四章

Lagrange 方程式:含循環座標之系統

在前章之第 3 節中，我們已知一系統如有循環座標，則可得到其首次積分，此首次積分，在特殊情況下，即相當於一些雖然簡單但很重要的守恒定理，在本章中，我們將按 Hertz 的研究，來討論一些有循環座標的特殊系統。

1 循環座標系統

一個系統，如其動能係循環座標的速度的齊次二次式，則此特殊之系統，稱爲循環系統。爲了清楚起見，我們將以 $\xi_1, \cdots, \xi_k$ 表示循環座標，則

$$L=T-V=\frac{1}{2}\sum_1^k a_{ij}(q_{k+1},\cdots,q_m)\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j$$

$$-V(q_{k+1},\cdots,q_m) \qquad (\text{Ⅳ}-1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \xi_i}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}=0,\quad i=1,\cdots k,\ \ j=k+1,\cdots m, \qquad (\text{Ⅳ}-2)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}=0,\ \text{或}\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}_i}=\beta_i=\text{常數},\ \ i=1,\cdots k, \qquad (\text{Ⅳ}-3)$$

茲用（3）式作一如（Ⅲ-29）式之 Legendre 變換，

及

$$R(q_{k+1},\cdots q_m,\beta_1\cdots\beta_k)=L(q_{k+1}\cdots q_m,\dot{\xi}_1\cdots\dot{\xi}_k)-\sum_{1}^{k}\beta_i\dot{\xi}_i \qquad (\text{IV}-4)$$

則由（Ⅲ-30）可得

$$\frac{\partial R}{\partial q_j}=\frac{\partial L}{\partial q_j},\quad j=k+1,\cdots m$$

沿 q_j 的增加方向所需施之外力 F_j，乃

$$F_j=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=-\frac{\partial R}{\partial q_j} \qquad (\text{IV}-5)$$

由（4），

$$R=T-V-2T=-(T+V)$$

如使

$$T(q_{k+1}\cdots q_m,\beta_1\cdots\beta_k)=T(g_{k+1}\cdots q_m,\dot{\xi}_1\cdots\dot{\xi}_k)$$

則

$$F_j=\frac{\partial}{\partial q_j}(T+V) \qquad (\text{IV}-6)$$

因此，卽使 $V=0$ 或 $\frac{\partial V}{\partial q_j}=0$，此系統仍宛如具有位能 T 一樣。

玆擧一例以說明之。設一質點在一水平面上作圓周運動，故

$$T=\frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2,\quad \beta=mr^2\dot{\phi},\quad T=\frac{\beta^2}{2mr^2},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \phi}=0\ , \qquad (\text{IV}-7)$$

則爲了保持旋動所須施之外力爲（由（6））

$$F_r=-\frac{\beta^2}{mr^3}+\frac{\partial V}{\partial r} \qquad (\text{IV}-8)$$

此式可說明如下：如無 V 時，或 $\frac{\partial V}{\partial r}=0$，則有一「顯似力」(apparent force)

$$F_r=-\frac{\beta^2}{mr^3}$$

此當然卽係向心力。如 $F_r=0$，則必須有一位能 V，以平衡此一「顯似位能」$\boldsymbol{T}$，此卽向心力 $-\frac{\partial V}{\partial r}=-\frac{\beta^2}{mr^3}$。

2 等循環 (isocyclic) 座標系統

在前節所講的循環系統中，如所有的循環速度均為常數，$\dot{\xi}=$ 常數，則此種運動卽稱為等循環運動。增加 q_j 所須施用之外力，由 (5) 式可得

$$F_j=-\frac{\partial L}{\partial q_j}=\frac{\partial}{\partial q_j}(V-T) \qquad (\text{IV}-9)$$

例如一質點在一平面上以等角速度，$\dot{\phi}=$ 常數，對中心運動。在此情形下，$T=\frac{1}{2}mr^2\dot{\phi}^2$，且由 (9)，

$$F_r=-mr\dot{\phi}^2+\frac{\partial V}{\partial r}$$

因此，卽使 $\frac{\partial V}{\partial r}=0$，仍有一向心力 $-mr\dot{\phi}^2$，來自顯似之位能 $-\boldsymbol{T}$。

在等循環運動我們可證明下一定理：改變循環動量 β_i (3) 的外力 Π_i 所作的功 δW_ξ，等於抵抗位置力 (Positional force) $Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}$ 所作功 δW_q 之兩倍，且 $\delta W_\xi=\delta W_q$ 加上系統所增加之能量。

今

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\frac{\partial V}{\partial q_j}=Q_j$$

對一循環系統，由（2）式，「位置力」乃

$$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}=-\frac{\partial T}{\partial q_j} \tag{IV-10}$$

外力 Π_i，

$$\Pi_i=\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial \xi_i}=\dot{\beta}_i \tag{IV-11}$$

因此

$$\delta W_\xi=\sum_{\kappa=1}^{k}\Pi_i\,\delta\xi_i \tag{IV-12}$$

$$\delta W_q=\sum_{k+1}^{m}Q_j\,\delta q_j=-\sum\frac{\partial T}{\partial q_j}\,\delta q_j$$

在等循環運動，$\delta\dot{\xi}=0$，因此

$$\delta T(q,\dot{\xi})=\sum_{k+1}^{m}\frac{\partial T}{\partial q_j}\,\delta q_j+\sum_{1}^{k}\frac{\partial T}{\partial \dot{\xi}_i}\,\delta\dot{\xi}_i$$

$$=\sum_{k+1}^{m}\frac{\partial T}{\partial q_j}\,\delta q_j \tag{IV-13}$$

由（12）及（13）知，

$$\delta W_q=-\delta T \tag{IV-14}$$

又

$$\delta T=\delta\left(\frac{1}{2}\sum\beta_i\,\dot{\xi}_i\right)=\frac{1}{2}\sum\dot{\xi}_i\,\delta\beta_i$$

又由（11）式，$\delta\beta_i=\Pi_i\,\delta t$，可得

$$\delta T=\frac{1}{2}\sum\Pi_i\,\dot{\xi}_i\,\delta t=\frac{1}{2}\sum\Pi_i\,\delta\xi_i \tag{IV-15}$$

由（12），（14）及（15）式，可得

$$\delta W_\xi = -\delta W_q + \delta T \qquad (\text{IV}-16)$$

此即證明了本定理。

再舉一例，玆再考慮（7）式。在此，循環座標 ξ 爲 ϕ，而位置座標 q 爲 r，且

$$Q_r = -\frac{\partial T}{\partial r} = -mr\dot{\phi}^2$$

$$\Pi = m\frac{d}{dt}(r\dot{\phi}^2)$$

$$\delta W_\phi = \Pi_\phi\,\delta\phi = m\frac{d}{dt}(r^2\dot{\phi})\delta\phi = 2m\dot{\phi}^2 r\delta r$$

$$-\delta W_r = mr\,\dot{\phi}^2\,\delta r$$

$$\delta T = mr\,\dot{\phi}^2\,\delta r$$

故滿足（16）式。

3　緩漸運動（adiabatic motion）

如在第一節所述之循環系統中，無增加循環座標 ξ_i 之外力（即（11）式之 $\Pi_i=0$），則（11）式可得

$$\beta_i = \text{常數} \qquad (\text{IV}-17)$$

在此情況下，系統並不經由循環座標而改變能量，這種運動謂之緩漸運動。循環座標速度 $\dot{\xi}_i$ 之改變，將引致永遠抵抗這改變的位置力 Q_j（（10）式中），換言之，即，可作一正值之功。

由（10）式，知

$$\delta Q_j(q,\dot{\xi}) = -\sum_{l=k+1}^{m} \frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial q_l}\delta q_l - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial \dot{\xi}_i}\delta \dot{\xi}_i$$

在 δQ_j 中，由 $d\dot{\xi}$ 引致之部分（由（3）式）為

$$\delta_{\xi} Q_j = -\sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \beta_i}{\partial q_j} d\dot{\xi}_i$$

由此些力所作之功為

$$\delta_{\xi} W_j = \sum \delta_{\xi} Q_j \delta q_j = -\sum_{j=k+1}^{m} \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \beta_i}{\partial q_j} \delta \dot{\xi}_i \delta q_j$$

今由（17）式知，

$$0 = \delta \beta i = \sum_{k+1}^{m} \frac{\partial \beta_i}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \beta_i}{\partial \dot{\xi}_l} \delta \dot{\xi}_l$$

故由（1）及（3）可得

$$\delta_{\xi} W_j = \sum_{i=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial \beta_i}{\partial \dot{\xi}_l} \delta \dot{\xi}_i \delta \dot{\xi}_l = \sum a_{il} \delta \dot{\xi}_i \delta \dot{\xi}_l \qquad (\text{IV}-18)$$

茲 $2T = \sum a_{ij} \dot{\xi}_i \dot{\xi}_j$ 必須為一確定正值二次式的要求，保證了（18）式中的 $\delta \dot{\xi}_i W_j$ 對任何 $\delta \dot{\xi}_i$，$\delta \dot{\xi}$ 均為正值。

令再以（7）式之系統為例子，我們得

$$\beta = mr^2\dot{\phi}, \quad \delta\beta = m(r^2\delta\dot{\phi} + 2r\dot{\phi}\,\delta r) = 0$$

$$\delta Q_r = \delta\left(-\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -m(\dot{\phi}^2\delta r + 2r\dot{\phi}\,\delta\dot{\phi})$$

$$\delta_{\dot{\phi}} Q_r = -2mr\dot{\phi}\,\delta\dot{\phi}$$

$$\delta_{\dot{\phi}} W_r = -2mr\dot{\phi}\,\delta\dot{\phi}\,\delta r = mr^2(\delta\dot{\phi})^2 > 0$$

如應用 Lagrange 方程式於電動力學，上述之定理，即係 Lenz 定律。此 Lenz 定律係謂，在一磁場中感應電流之方向，永遠抗拒導體運動的改變。（見下文第九章第 1 節）

第五章

Lagrange 方程式:轉動座標系統

在第一章，第 7 節中，我們已由淺易方法求得以轉動座標中的座標及速度來表示的一個質點的速度與加速度。在本章，我們將以 Lagrange 方程式，來求出 Coriolis 及運轉加速度，並且將考慮一些應用的問題。

1 Coriolis 及輸運加速度

設 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ 為一質點相對於一具有瞬時角速度 $\boldsymbol{w}$ 之座標系的位置向量。在（Ⅰ-32)中，已證得一質點相對於一固定座標的速度為

$$V' = \dot{\boldsymbol{r}} + [\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}] \qquad (\text{V}-1)$$

動能為

$$T = \frac{1}{2} m\{\dot{\boldsymbol{r}}^2 + 2(\dot{\boldsymbol{r}} \cdot [\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}]) + [\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}]^2\} \qquad (\text{V}-2)$$

或

$$T = \frac{1}{2} m\{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 + 2\dot{x}(w_y z - w_z y) +$$

$$+2\dot{y}(w_z x - w_x z) + 2\dot{z}(w_x y - w_y x)$$

$$+(w_y z - w_z y)^2 + (w_z x - w_x z)^2 + (w_x y - w_y x)^2\} \quad (\text{V}-3)$$

由 Lagrange 方程式，則加速度的 x 分量為

$$\frac{F_x}{m} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$= \ddot{x} + 2(w_y \dot{z} - w_z \dot{y}) + (\dot{w}_y z - \dot{w}_z y) - x(w_y^2 + w_z^2)$$

$$+ w_x(w_y y + w_z z)$$

或以向量表示，則可寫成

$$\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}} + 2[\boldsymbol{w} \times \dot{\boldsymbol{r}}] + [\dot{\boldsymbol{w}} \times \boldsymbol{r}] + [\boldsymbol{w} \times [\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}]] \quad (\text{V}-4)$$

此與第一章之結果相符，此處應注意的是 Coriolis 加速度 $\boldsymbol{a}_c = 2[\boldsymbol{w} \times \dot{\boldsymbol{r}}]$ 及輸運加速度 $\boldsymbol{a}_t = [\dot{\boldsymbol{w}} \times \boldsymbol{r}] + [\boldsymbol{w} \times [\boldsymbol{w} \times \dot{\boldsymbol{r}}]]$ 中之 $[\dot{\boldsymbol{w}} \times \boldsymbol{r}]$ 部份，係由動能中與速度 $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ 有線性關係的部分所引起的。

茲擧一例以說明之。考慮一質點系統的運動。對一以角速度 w（繞 z 一方向轉動）的轉動座標，質點的圓柱座標為 z_i, r_i, ϕ_i。其動能為

$$T = \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{z}_i^2 + \dot{r}_i^2 + r_i^2(\dot{\phi}_i + w)^2)$$

$$= \frac{1}{2}\sum m_i(\dot{z}_i^2 + \dot{r}_i^2 + r_i^2\dot{\phi}_i^2)$$

$$+ \sum m_i r_i^2 \dot{\phi}_i w + \frac{1}{2} I w^2 \quad (\text{V}-5)$$

I 係對 z 軸之轉動慣量。如將附加指數 i 省略，則 Lagrange 方程式即為

$$m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) - 2mr\dot{\phi}w - mrw^2 = R_r$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) + 2mr\dot{r}w + mr^2\dot{w} = \Theta_\phi \quad (\text{V}-6)$$

(5) 式中之 $\sum m_i r_i^2 \dot{\phi} w$ 項，引致 Coriolis 加速度及 (6) 中 a_t 的〔$\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$〕部分，即，$-2mr\dot{\phi}w$，$2mr\dot{r}w$，$mr^2\dot{w}$。(5) 式中之 $\frac{1}{2}w^2\sum m_i r_i^2$，則引致 (6) 式中之向心力項 $-mrw^2$。

如在上例中之 $\sum m_i r_i^2 \dot{\phi} w$ 項，係座標與時間之某函數 U 的導數，即

$$\sum m_i r_i^2 \dot{\phi}_i w = \frac{dU}{dt} \qquad (\text{V}-7)$$

則將無 Coriolis 及〔$\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}$〕加速度，因在此情況下，

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\right)\frac{dU}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_\alpha}\left(\sum_\beta \frac{\partial U}{\partial q_\beta}\dot{q}_\beta+\frac{\partial U}{\partial t}\right)-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\frac{dU}{dt}$$

$$=\frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial}{\partial q_\alpha}\frac{dU}{dt}=0 \qquad (\text{V}-8)$$

(6) 式變成

$$m(\ddot{r}-r\dot{\phi}^2)=R+mrw^2=R-\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{2}mr^2w^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi})=\Theta$$

在此情況下，我們可將一轉動座標視為靜止的，如在位能上另加一項 $\left(-\frac{1}{2}Iw^2\right)$ 之額外值。

將此結果與第四章之第 1 節比較。在此我們的觀點係由於轉動座標系產生的所謂「顯似力」，亦即離心力 $+mrw^2$。在第四章中，我們的觀點，則係為了使一質點能有某預定的運動所須施用的外力，此外力即係向心力 $-mrw^2$，此即 (6) 式所示者。

習題：(1) 一木桿被限制於一直角架之兩股(互相垂直之邊)上滑動。而此木架係以等角速度繞其垂直邊轉動。試求木桿的運

動方程式。

(2) 設一質點被限制於一水平圓上運動，此圓則以等角速度繞其圓周上一點水平轉動，試求此質點之運動方程式。

2　相對地球之運動

地球自轉的角速度爲

$$w=7.29\times10^{-5}\text{ 弧度/每秒} \qquad (\text{V}-9)$$

(1)在地球面，緯度 λ 之一靜止質點，可由(I–35a)　　　(V–6)
得其加速度 $[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]]$ 爲

$$[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]]=-w^2R\cos\lambda \qquad (\text{V}-10)$$

R 係地球之半徑，此量之垂直分量 $-w^2R\cos^2\lambda$，使重力加速度 g 減少，而水平分量 $w^2R\cos\lambda\sin\lambda$ 則使鉛垂線偏向赤道。此種對"g"所產生的效應，在赤道上最大。然即在赤道上亦僅有 3 達因/平方秒的微小值。

(2) 對於相對地球作運動之質點，我們可選一固定地球上之座標系如下：令其原點在地球表面，z 軸平行地球之轉軸，而 y 軸在子午線面上，則其運動方程式爲

$$\ddot{x}-2w\dot{y}-w^2x=X \qquad (\text{V}-11)$$

$$\ddot{y}+2w\dot{x}-w^2y=Y$$

$$\ddot{z}=Z$$

在幾十公里之高處，w^2x，w^2y 之値與重力比較，可忽略不計。

在地球重力下自由運動之質點，我們可擇取其座標軸如下：

使其 ξ, η 軸，指向南方及東方之水平線，而令其 ζ 軸垂直向上。如 λ 爲緯度，則運動方程式爲

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}&=2w\sin\lambda\,\dot{\eta}\\ \ddot{\eta}&=-2w(\sin\lambda\,\dot{\xi}+\cos\lambda\,\dot{\zeta})\\ \ddot{\zeta}&=-g+2w\cos\lambda\,\dot{\eta}\end{aligned}\tag{V-12}$$

如運動係在水平面的（卽 $\dot{\zeta}=\ddot{\zeta}=0$），則上列方程式卽變爲

$$\ddot{\xi}=2w\sin\lambda\,\dot{\eta},\quad \ddot{\eta}=-2w\sin\lambda\,\dot{\xi}\tag{V-13}$$

（13）之右式，係 Coriolis 加速度分量的負值。此係與速度成比例且垂直於速度之方向。由（13）式，可得下結果：一在北半球作水平運動的質點，永遠偏行向右方，在南半球者，則永遠偏行向左方。因此由南北極吹向赤道的風，在北半球就來自東北方向，而在南半球則來自東南方向。這種 Coriolis 加速度卽係貿易風流動方向的原因。

在地球重力下自由下落的質點，我們可將（12）式中之 ξ, ζ 之方程式積分，然後將所得結果代入 η 式中，使得

$$\begin{aligned}\dot{\xi}&=2w\sin\lambda\ \eta\\ \dot{\zeta}&=-gt+2w\cos\lambda\ \eta\\ \ddot{\eta}&=-2w(2w\eta-gt\cos\lambda)\cong 2wg\cos\lambda\ t\end{aligned}$$

（因 w^2 很小，可忽略不計），最後式可積分而得

$$\eta=\frac{1}{3}\ w\cos\lambda\, gt^3$$

以此代入 ξ 之方程式中並忽略 w^2 項，卽得

$$\zeta\cong-\frac{1}{2}\ gt^2$$

故
$$\eta \cong \frac{2}{3} w \cos\lambda \sqrt{\frac{2(\zeta_0-\zeta)^3}{g}} \qquad (\text{V}-14)$$

上式證明了 Coriolis 加速度會引起自由落體偏向東方。此效應在赤道上最大。

習題：試計算一質點從高度 10,000 公尺，緯度 $\lambda=30°$ 處落下時之偏向。

(3) Foucault 擺

我們將用 (12) 式中的座標系 ξ,η,ζ 來考慮一球形擺。為了方便起見，我們可用座標 ξ,η,ζ 代替一個二維座標系統。而加設約束方程式（即擺長$=l$）如下:

$$\frac{1}{2}(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-l^2)=0 \qquad (\text{V}-15)$$

引用 Lagrange 乘數 μ，則運動方程式可寫成*

$$\begin{aligned}\ddot{\xi}&=2w\sin\lambda\ \dot{\eta}+\mu\xi\\ \ddot{\eta}&=-2w(\sin\lambda\ \dot{\xi}+\cos\lambda\ \dot{\zeta})+\mu\eta\\ \ddot{\zeta}&=-g+2w\cos\lambda\ \dot{\eta}+\mu\zeta\end{aligned} \qquad (\text{V}-16)$$

由此即得

$$\xi\ddot{\eta}-\eta\ddot{\xi}=-2w\sin\lambda\ (\xi\dot{\xi}+\eta\dot{\eta})-2w\cos\lambda\,\dot{\zeta}\,\xi$$

對小幅度之振盪（即 $l-\zeta=(\xi^2+\eta^2)/(l+\zeta)\ll 1$）則 ζ 之最後項可忽略去。由積分可得

$$\xi\dot{\eta}-\eta\dot{\xi}=-w\sin\lambda(\xi^2+\eta^2)+b \qquad (\text{V}-17)$$

常數 b 係代表擺對垂直 ζ 軸之初角動量

由 (16) 式可得能量積分為

---

*參閱第十章，第 1 節。關於含有未定乘數之 Lagrange 方程式。

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2=\text{常數}-2g\zeta=a-2g\zeta \qquad (\text{V}-18)$$

且由（15）可得

$$\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2=a-2gl+\frac{g}{l}(\xi^2+\eta^2) \qquad (\text{V}-19)$$

如變換至極座標 r, ϕ

$$\xi=r\cos\phi,\quad \eta=r\sin\phi \qquad (\text{V}-20)$$

則（17）及（19）式變爲

$$r^2\dot{\phi}=b-wr^2\sin\lambda \qquad (\text{V}-21)$$

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2=a-2gl+\frac{g}{l}r^2 \qquad (\text{V}-22)$$

茲定義

$$\Psi=\phi+w\sin\lambda\ t \qquad (\text{V}-23)$$

$$c=a-2gl+2bw\sin\lambda \qquad (\text{V}-24)$$

則（21）及（22）兩式變爲

$$r^2\dot{\Psi}=b \qquad (\text{V}-25)$$

$$\dot{r}^2+r^2\dot{\Psi}^2=\quad c-r^2w^2\sin^2\lambda+\frac{g}{l}r^2\quad\cong\quad c+\frac{g}{l}r^2$$

如開始時，擺之角動量等於零，則 $r^2\dot{\Psi}=b=0$ 且由（23）知

$$\phi=\text{常數}-w\sin\lambda\cdot t \qquad (\text{V}-26)$$

因此擺面以 $w\sin\lambda$ 之角速度，依東→南→西→北之方向轉動(即在北半球係順時鐘方向轉動)。

（4）Foucault 廻轉器及廻轉羅盤

此部份之理論，雖屬於本章，但我們將在第八章中，討論過陀螺的運動後再來考慮此類之廻轉器。

3　Larmor 定理

在古典電動力學之理論中，一帶電荷 e 之質點，在磁場$\boldsymbol{B}$及電場 $\boldsymbol{E}$ 中，以速度 $\dot{\boldsymbol{r}}$ 運動時，受到

$$\boldsymbol{F}=\frac{e}{c}\left[\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}\right]+e\boldsymbol{E} \tag{V-27}$$

之力，此力謂之 Lorentz 力。在一沿 z 方向之磁場 $\boldsymbol{B}$ 及有心電場 (Central electric field) $\boldsymbol{E}(r)$ 中，某質點的運動方程式為：

$$\begin{aligned}m\ddot{x}&=eE_x(r)+\frac{e}{c}B\dot{y}\\ m\ddot{y}&=eE_y(r)-\frac{e}{c}B\dot{x}\\ m\ddot{z}&=eE_z(r)\end{aligned} \tag{V-28}$$

上面之結果可以 Larmor 之定理表示之。此定理謂：一均勻磁場B對一在有心電場中運動的帶電質點所引起的效應，係使其軌道運動繞磁場方向產生旋進 (precession)。此旋進之角速度爲 $w=\dfrac{eB}{2mc}$。e, m 係質點之電荷及質量（靜電單位），而 c 則爲光速。

此定理可證明如下：用 (4) 式(來自轉動座標系之加速度)。設 B 之方向（由假設知，亦爲轉動座標之方向）爲 z 軸，因 w 係常數，故運動方程式爲

$$m(\ddot{\boldsymbol{r}}+2[\boldsymbol{w}\times\dot{\boldsymbol{r}}]+[\boldsymbol{w}\times[\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r}]])=e\boldsymbol{E}(r)$$

以 $w=\frac{eB}{2mc}$ 代入上式，並忽略 w^2 項，卽得

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}=c\boldsymbol{E}(r)-\frac{e}{c}\left[\boldsymbol{B}\times\dot{\boldsymbol{r}}\right] \qquad (\text{V}-29)$$

此與（28）式相同。上式證明了：在一磁場中運動的帶電質點，從一個以頻率 $w=\frac{eB}{2mc}$ 繞磁場轉動之座標系的觀點，其運動方程式與無磁場作用之質點的運動方程式相同。

此定理在討論原子光譜學中的 Zeeman 效應時，深具重要性。（見本書第二册，乙部，第六章）

第六章

Lagrange 方程式:微小振動

一系統的質點，在他們的平衡位置附近作微小振動的問題，在多原分子的振動光譜中，具有很重要及很廣泛的應用。這種微小振動的問題，可以簡單的用 Lagrange 方程式來處理，在本章中，我們將講一些分子振動問題的簡單例子。

1 微小振動的普遍理論

設一系統可用 n 個廣義座標 $Q_1, Q_2 \cdots Q_n$ 來描述，這些廣義座標在平衡組態之值為 $Q_1^0, \cdots, Q_n^0$。在不失普遍性下，我們可以把 $Q_1, Q_2 \cdots, Q_n$ 變換成下列座標:

$$q_i = Q_i - Q_i^0, \quad i = 1, \cdots, n \tag{VI-1}$$

茲祇考慮微小振動的問題，所謂微小振動，即

$$q_i \ll Q_i^0 \tag{VI-2}$$

系統的動能，可寫成

$$2T = \sum a_{ij}(Q_1 \cdots Q_n)\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{VI-3}$$

a_{ij} 係Q等及質點質量的函數。將 a_{ij} 在平衡組態附近展成級數，並忽略高於二次的微小量，則可得

$$2T=\sum a_{ij}{}^{0}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j \qquad (\text{VI}-4)$$

常數 $a_{ij}{}^{0}$ 只與 $Q_i{}^{0}$ 等及質量有關。

位能 $V(Q_1,\cdots,Q_n)$ 亦可對 $Q_1{}^{0}\cdots Q_n{}^{0}$ 展開，其第一次項 $\left(\dfrac{\partial V}{\partial Q_i}\right)\cdot q_i$ 因按假定，$Q_1{}^{0},\cdots Q_n{}^{0}$ 係平衡組態，故其值為零。再把高次微小值忽略，則相對平衡組態的位能即為

$$V=V(Q_1\cdots Q_n)-V(Q_1{}^{0}\cdots Q_n{}^{0})=\frac{1}{2}\sum b_{ij}\,q_i\,q_j \qquad (\text{VI}-5)$$

b_{ij} 均係常數。

把 Lagrange 方程式應用到 Lagrangian 函數 $L=T-V$(由（4）及（5)），並把附加指標 0 去掉後即得

$$\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}\,\ddot{q}_j+b_{ij}\,q_j)=0,\quad i=1,\cdots,n \qquad (\text{VI}-6)$$

上式為一 n 個齊次線性聯立微分方程式，其特解為

$$q_i=A_j\,e^{\sqrt{-\lambda}\,t} \qquad (\text{VI}-7)$$

將上式代入（6)，即可得一組聯立代數方程式

$$\sum_j(a_{ij}\,\lambda-b_{ij})\,A_j=0,\quad i=1,\cdots,n \qquad (\text{VI}-8)$$

（8）式有解（不恒等於零之解）之條件為 A_j 的係數所組成的行列式為零，即

$$D(\lambda)\equiv|a_{ij}\lambda-b_{ij}|=0 \qquad (\text{VI}-9)$$

行列式方程式（9）係 λ 的 n 次方程式，共有 n 個根，(可能全不等，也可能部分相等，此視系統的對稱性而定)；相應每一根 λ_i，則由（8）式，即得到一組解 $A_1{}^{(i)},\cdots A_n{}^{(i)}$。

（9）式的所有根，極易證明均係正號的實數。以 A_i 乘以

(8) 式，並作 i 之和，即得

$$\lambda\sum_{i,j}a_{ij}A_iA_j-\sum_{i,j}b_{ij}A_iA_j=0 \qquad (\text{VI}-10)$$

因由 (4) 及 (5) 所定義的動能及位能，均爲確定正値，故 (10) 中之兩項均大於零，亦即 λ 爲正實根也。茲令

$$\nu_k=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_k},\quad k=1,\cdots,n \qquad (\text{VI}-11)$$

(6) 之通解，可寫之如下:

$$q_i=\sum_k\left(A_i^{(k)}e^{-2\pi i\nu_kt}+\bar{A}_i^{(k)}e^{2\pi i\nu_kt}\right) \qquad (\text{VI}-12)$$

$\bar{A}$ 係 A 的共軛複數，(12) 式亦可寫成如下之形式:

$$q_l=\sum_k B_l^{(k)}\cos(2\pi\nu_kt+\epsilon_k),\quad l=1,\cdots,n \qquad (\text{VI}-13)$$

由 (8) 式可知，對應 λ_k 根的 $A_1^{(k)},\cdots,A_n^{(k)}$，係與行列式中 $a_{i1}\lambda-b_{i1},a_{i2}\lambda-b_{i2}\cdots a_{in}\lambda-b_{in}$ 等元素的餘因子成比例關係，i 可爲任何列。這種比例關係對 (13) 式中之 $B_l^{(k)}$ 亦成立，如引用座標

$$X_k=a_k\cos(2\pi\nu_kt+\epsilon_k),\quad k=1,\cdots,n, \qquad (\text{VI}-14)$$

則 (13) 式可寫成

$$q_l=\sum_k c_{kl}X_k \qquad (\text{VI}-15)$$

上式說明了每一座標 q，係由 n 個簡諧運動重疊而成。其係數 $c_{k1},c_{k2},c_{k3}\cdots c_{kn}$ 則與 $a_{i1}\lambda-b_{i1},\ a_{i2}\lambda-b_{i2},\cdots a_{in}\lambda-b_{in}$ 之餘因子成比例。

前面所得之結果，亦可由某代數定理，簡單得之，我們可以把兩個二次式 (4)，(5) 用一個（且僅有一個）非奇異 (nonsingular）變換，

$$q_l=\sum_k c_{kl}X_k \qquad (\text{VI}-16)$$

使之同時變換成所謂的「簡正」式（normal form）

$$T=\frac{1}{2}\sum_k \dot{X}_k^2,\quad V=\frac{1}{2}\sum_k \lambda_k \dot{X}_k^2 \qquad (\text{VI}-17)$$

λ_k 係（9）式之根。這樣的座標稱爲簡正座標。將 Lagrange 方程式應用到（17）式卽得

$$\ddot{X}_k+\lambda_k X_k=0,\quad k=1,\cdots,n \qquad (\text{VI}-18)$$

這是 n 個已分離之方程式。其解卽爲（14）（利用（11）式）。

因變換（16）係非奇異之變換，故其逆變亦存在，卽

$$X_k=\sum_l d_{kl}\,q_l,\quad k=1,\cdots n \qquad (\text{VI}-19)$$

係數 d_{kl} 可由 T 及 V 中之 a_{ll} 及 b_{ij} 係數決定之。（19）式說明了每一「簡正」振動 X_k（卽具（11）式 ν_k 頻率之振動），通常均包括所有 q 的運動。在某些質點系統中，有時可能具有某些幾何對稱性，因之某些 d_{kl} 等於零。在這種情形下，某些 q 將不出現於某簡正振動 X_k。下例中，我們將澄清此點。

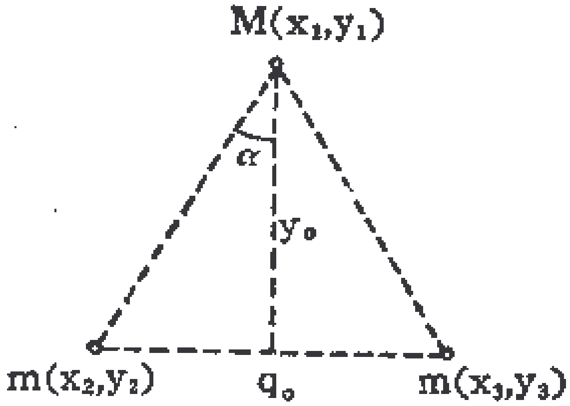
2 三角形 YX_2 系統之簡正振動

我們將把前節所討論的理論，應用到一個三質點系統所組成的等腰三角形平衡組態。在分子系統中，這種結構很常見，例如 H_2O，H_2S，O_2，SO_2，NO_2，CH_2 等均是。

三個質點共有 9 個自由度。如策考慮其相對運動，則我們可去掉整個系統平移運動（卽質心運動）的三個自由度，及系統在

空間轉動的另三個自由度。因此，我們只剩下三個內部的（振動的）運動自由度，故只需三個廣義座標來描述。

在這個系統，我們可立即除去其在他的平面的平移運動，及對其平面中任何兩個軸的轉動，而僅考慮這些質點的平面運動。在六個直角座標$M(x_1, y_1), m(x_2, y_2), m(x_3, y_3)$中，我們可加上三個方程式，使他們在平面裡的線動量等於零及繞垂直此平面的任何軸的角動量等於零，即



$$\frac{1}{2}m\dot{y}_2 q_0 = M\dot{x}_1 y_0 + \frac{1}{2}m\dot{y}_3 q_0$$

$$m(\dot{x}_2+\dot{x}_3)+M\dot{x}_1=0 \qquad \text{(VI-20)}$$

$$m(\dot{y}_2+\dot{y}_3)+M\dot{y}_1=0$$

y_0 及 q_0 係此三角形平衡位置的高及底邊。

廣義座標並無唯一性的選擇，我們將取如下定義之x, y, q當做一個例子，

$$x=\frac{1}{2}(x_2+x_3)-x_1$$

$$y=y_1-\frac{1}{2}(y_2+y_3)-y_0 \qquad \text{(VI-21)}$$

$$q=\sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2}-q_0$$

至於如何選擇廣義座標的討論，可參閱本節之末段。

利用（20）及（21）式，所有的六個直角座標，均可以 x, y, q 來表示，我們可以證明振動動能可寫成下列形式：

$$2T=\frac{1}{2}m\dot{q}^2+\mu\sigma\dot{x}^2+\mu\dot{y}^2 \qquad (\text{VI}-22)$$

$$\mu=\frac{2Mm}{M+2m},\quad \sigma=1(+\frac{M}{M+2m}\cot^2\alpha)$$

而位能則可用符合此系統對稱性的 x, y, q 的最普遍性二次函數來表示：即位能係座標 x 之偶函數，

$$2V=Aq^2+Bx^2+Cy^2+2Dqy \qquad (\text{VI}-23)$$

行列式方程式（9），在此情況下，具有如下之根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{1}{m}\left(2A+\frac{\mu}{m}c\right)$$

$$\lambda_1\lambda_2=\frac{2}{\mu}(AC-D^2) \qquad (\text{VI}-24)$$

$$\lambda_3=\frac{B}{\mu\sigma}$$

（15）式中之係數 C_{kl} 可證爲

$$c_{k1}=\gamma\begin{vmatrix}\mu\sigma\lambda_k-B & 0\\ 0 & \mu\lambda_k-C\end{vmatrix},\qquad k=1,2$$

$$c_{k3}=\gamma\begin{vmatrix}0 & \mu\sigma\lambda_k-B\\ -D & 0\end{vmatrix},\qquad k=1,2$$

$$c_{32}=\gamma\begin{vmatrix}\frac{m}{2}\lambda_3-A & -D\\ -D & \mu\lambda_3-C\end{vmatrix} \qquad (\text{VI}-25)$$

$$c_{31}=c_{12}=c_{22}=c_{33}=0$$

$$\gamma=\text{常數}$$

故（15）變成

$$\begin{aligned} q&=c_{11}X_1+c_{21}X_2 \\ y&=c_{13}X_1+c_{23}X_2 \\ x&=\qquad\quad c_{32}X_3 \end{aligned} \tag{VI-26}$$

（26）式之倒式爲

$$\begin{aligned} X_1&=d_{11}q+d_{13}y \\ X_2&=d_{21}q+d_{23}y \\ X_3&=\qquad\quad d_{32}x \end{aligned} \tag{VI-27}$$

簡正振動之約略性形式可由（26）或（27）式看出，可以下圖表示之；其正確之方向及相對之振幅，當然是視位能中的常數 A, B, C, D 及質量 M 及 m 而定的。

（VI-28）

上面的計算，如用矩陣代數，則可用比較簡潔的方式表示。茲定義新座標 ξ, η, ζ 如下：

$$\xi=\sqrt{\frac{m}{2}}\,q, \quad \eta=\sqrt{\mu}\,y, \quad \zeta=\sqrt{\mu\sigma}\,x, \tag{VI-29}$$

並定義單位矩陣 E 爲

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{VI-30}$$

則（22），（33）式中的動能及位能可寫爲

$$2T=(\xi\,\eta\,\zeta)E\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}$$

$$2V=(\xi\,\eta\,\zeta)\begin{pmatrix}\frac{2A}{m} & D\sqrt{\frac{2}{\mu m}} & 0\\ D\sqrt{\frac{2}{\mu m}} & \frac{C}{\mu} & 0\\ 0 & 0 & \frac{B}{\mu\sigma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix} \qquad (\text{VI}-31)$$

今有一么正矩陣 (unitary matrix) U 使得*

$$U\begin{pmatrix}\frac{2A}{m} & D\sqrt{\frac{2}{\mu m}}\\ D\sqrt{\frac{2}{\mu m}} & \frac{C}{\mu}\end{pmatrix}\bar{U}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix} \qquad (\text{VI}-32)$$

我們知任何 2×2 么正矩陣，應有如下形式

$$U=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad (\text{VI}-33)$$

如利用 (33) 式，(32) 式卽得

$$\sin 2\theta=\frac{2}{\lambda_1-\lambda_2}D\sqrt{\frac{2}{\mu m}} \qquad (\text{VI}-34)$$

玆以下式，將 ξ,η 變換爲新座標 X_1, X_2 如下，

$$(\xi,\eta)=(X_1,X_2)U,\qquad \bar{U}\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \qquad (\text{VI}-35)$$

則 (31) 變成

$$2T=(\dot{X}_1,\dot{X}_2)U\bar{U}\begin{pmatrix}\dot{X}_1\\ \dot{X}_2\end{pmatrix}+\dot{\zeta}^2=\dot{X}_1{}^2+\dot{X}_2{}^2+\dot{\zeta}^2$$

* 么正矩陣 U 可定義爲 $U\tilde{U}^*=E$，$\tilde{U}^*$ 係將 U 中的行，列元素對調，並將所有元素取爲其軛複數者。E 則係單位矩陣。

$$2V=(X_1, X_2)U\begin{pmatrix} \dfrac{2A}{m} & D\sqrt{\dfrac{2}{\mu m}} \\ D\sqrt{\dfrac{2}{\mu m}} & \dfrac{C}{\mu} \end{pmatrix}\tilde{U}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}+\lambda_3\zeta^2$$

$$=\lambda_1 X_1^2+\lambda_2 X_2^2+\lambda_3 X_3^2 \qquad (\text{Ⅵ}-36)$$

$$\lambda_3=\frac{B}{\mu\sigma}$$

利用（29），則由（35）即得

$$X_1=\quad \xi\cos\theta+\eta\sin\theta=\quad\sqrt{\frac{m}{2}}\cos\theta\cdot q+\sqrt{\mu}\sin\theta\cdot y$$

$$X_2=-\xi\sin\theta+\eta\cos\theta=-\sqrt{\frac{m}{2}}\sin\theta\cdot q+\sqrt{\mu}\cos\theta\cdot y$$

$$X_3=\zeta \qquad\qquad =\sqrt{\frac{\mu}{\sigma}}\,x \qquad (\text{Ⅵ}-37)$$

θ 係如（34）所定義者。如由（37）式則可較直接的得到（27）式之係數。

在（21）之下，曾提及廣義座標並無唯一性的選擇。但把微小振動理論，應用到分子時，廣義座標的選擇，則多多少少可由物理或經驗的考慮來處理，(如代表位能（23）的最有用的近似式等)。但正確的關係如（24），顯然與（23）式之 V 的形式有關，我們要強調的是，簡正振動的約略性討論，只與系統的對稱性有關。因此，如 YX_2 的位能 V 及質量都有對稱的軸，則永遠有兩個簡正振動是對該軸有對稱性，有一個對該軸有逆對稱性，如（Ⅵ-28）之圖所示。

3　簡正振動問題之矩陣解法

在前節中，我們以 n 個廣義座標來描述 N 質點的相對位置。n 係內部自由度的數目，等於 $3N$ 減去平移及轉動的自由度。通常，消除後者自由度的初步方法是很複雜的（以（20）及（21）求（22）），特別是當廣義座標的形式，須由位能決定時。本節中我們將證明，這種初步方法可由矩陣的幫助，獲得較簡單的作法。

這種矩陣解法，多係由 E. B. Wilson Jr. 所發展出來，後經很多作者運用的。我們將避免以最普遍的形式及太多的數學來討論這個方法，我們將對第 2 節的 YX_2 問題作一具體的計算，來說明這方法的主要步驟。

茲為了某些物理及經驗上的理由，假定位能具有如下之形式，即

$$2V=k(\delta r_1)^2+k(\delta r_2)^2+k_\alpha(r\delta\alpha)^2 \qquad \text{(VI-38)}$$

δr_i 係 r_i 從平衡值之變化。如圖所示，引用直角座標，並令其原點位於此三質點之平衡位置，則動能可寫為

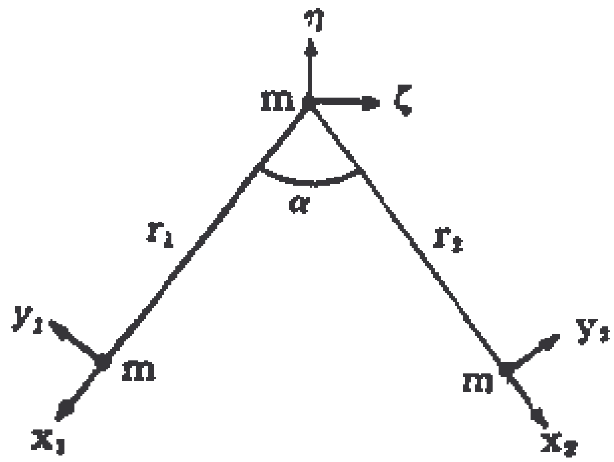
$$2T=M(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2)+m(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2) \qquad \text{(VI-39)}$$

茲以列矩陣形式表示（38）及（39）中之兩組座標

$$X=(\xi\ \ \eta\ \ x_1\ \ y_1\ \ x_2\ \ y_2),\quad R=(\delta r_1\ \delta r_2\ r\delta\alpha) \qquad \text{(VI-40)}$$

其位調式（transpose）$\tilde{X}, \tilde{R}$ 為行矩陣。如引用矩陣

$$M=\begin{pmatrix} M & & & & & 0 \\ & M & & & & \\ & & m & & & \\ & & & m & & \\ & & & & m & \\ 0 & & & & & m \end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix} k & & 0 \\ & k & \\ 0 & & k_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(VI-41)}$$



(非對角線元素均爲零)，用（40)，(41）則動能及位能可寫爲

$$2T=\dot{X}M\tilde{\dot{X}},\qquad 2V=RK\tilde{R}\tag{Ⅵ-42}$$

直角座標與「內部」座標間的關係（如考慮至第一階之小量）則爲

$$\begin{aligned}\delta r_1&=\quad s\xi+c\eta+x_1\\ \delta r_2&=-s\xi+c\eta+x_2\\ r\delta\alpha&=-2s\eta+y_1+y_2\end{aligned}\tag{Ⅵ-43}$$

其中 $s=\sin\dfrac{\alpha}{2}$，$c=\cos\dfrac{\alpha}{2}$，茲引用矩陣

$$B=\begin{pmatrix} s & c & 1 & 0 & 0 & 0\\ -s & c & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -2s & 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\tag{Ⅵ-44}$$

及其位調式 $\tilde{B}$。如用 B 及 $\tilde{B}$，則（43）可寫成

$$\tilde{R}=B\tilde{X},\quad R=X\tilde{B}\tag{Ⅵ-45}$$

(42）式則爲

$$2T=\dot{X}\,M\,\tilde{\dot{X}},\quad 2V=X\,\tilde{B}\,k\,B\,\tilde{X}\tag{Ⅵ-46}$$

行列式方程（9）則變爲

$$|XM\tilde{X}\lambda - X\tilde{B}kB\tilde{X}| = 0$$

或

$$|M\lambda - \tilde{B}\,k\,B| = 0 \qquad (\text{VI}-47)$$

M, B 係（41）及（44）所定義之矩陣，而 λ 則爲一數值。

今以 N（定義如下）從右、左乘矩陣方程式（47），

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{M}} & & & & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{M}} & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{m}} & & & \\ & & & \frac{1}{\sqrt{m}} & & \\ & & & & \frac{1}{\sqrt{m}} & \\ 0 & & & & & \frac{1}{\sqrt{m}} \end{pmatrix} \qquad (\text{VI}-48)$$

並定義 L 及 $\tilde{L}$ 如下：

$$L \equiv \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{k_a} \end{pmatrix} BN$$

$$= \begin{pmatrix} s\sqrt{\frac{k}{M}} & c\sqrt{\frac{k}{M}} & \sqrt{\frac{k_a}{m}} & 0 & 0 & 0 \\ -s\sqrt{\frac{k}{M}} & c\sqrt{\frac{k}{M}} & 0 & 0 & \sqrt{\frac{k_a}{m}} & 0 \\ 0 & -2s\sqrt{\frac{k}{M}} & 0 & \sqrt{\frac{k_a}{m}} & 0 & \sqrt{\frac{k_a}{m}} \end{pmatrix} \qquad (\text{VI}-49)$$

$$\tilde{L} \equiv N\tilde{B} \begin{pmatrix} \sqrt{k} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{k} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{k_a} \end{pmatrix}$$

則（47）式可變爲

$$|\tilde{L}L-\lambda E|=0 \tag{Ⅵ-50}$$

E 係 6×6 之單位矩陣。

茲按矩陣代數中之一定理，（50）中之 λ，係 $\tilde{L}L$ 之潛根 (latent roots)，這些潛根乃 $L\tilde{L}$ 之根及零（注意：$\tilde{L}L$ 係 6×6 矩陣，而 $L\tilde{L}$ 按（49）式乃一 3×3 矩陣也）。故（50）式具有三個零值的根，亦即零值的頻率。這些零值頻率，相應於此三質點在其平面上之二個平移自由度，及繞垂直其平面之軸的一個轉動自由度。

$$|L\tilde{L}-\lambda E|=0,\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{Ⅵ-51}$$

之三個根，可直接求出，或由變換（51），利用么正變換 S，

$$S=\begin{pmatrix}a&a&0\\-a&a&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \tilde{S}S=S\tilde{S}=E,\quad a=\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{Ⅵ-52}$$

則（51）變爲

$$\begin{vmatrix}k\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{M}c^2\right)-\lambda & 0 & -\frac{2}{M}\sqrt{k\,k_a}\;cs\\ 0 & k\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{M}s^2\right)-\lambda & 0\\ -\frac{2}{M}\sqrt{2k\,k_a}\;cs & 0 & 2k_a\left(\frac{1}{m}+\frac{2}{M}s^2\right)-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{Ⅵ-53}$$

由此式可得

$$\lambda_1+\lambda_2=k\left(\frac{1}{\mu}+\frac{\cos\alpha}{M}\right)+2k_a\left(\frac{1}{\mu}-\frac{\cos\alpha}{M}\right)$$

$$\lambda_1\lambda_2=2\ \frac{M+2m}{Mm^2}\,kk_a \tag{Ⅵ-54}$$

$$\lambda_3=k\left(\frac{1}{\mu}-\frac{\cos\alpha}{M}\right)$$

$$\mu=\frac{mM}{M+m}$$

上列方程式與(24)式相當，其不同處係因位能之擇取不同((23)及(38))。

上兩種作法及前節所述之作法中，其行列式方程均可分解成一個二次及一個一次方程式。這種可分解成因式的可能性並非偶然的，而是系統所具有的對稱性的結果。事實上，我們亦可在開始時即將不同對稱性的振動來分別考慮之。例如，我們可定義

$$\xi=0,\quad x_1=x_2,\quad y_1=y_2,\quad \delta r_1=\delta r_2 \tag{Ⅵ-55}$$

來描述對稱性的振動 λ_1 及 λ_2（對 YX_2 之軸而言）。(41)及(44)式中之矩陣 M,K,B 乃成

$$M=\begin{pmatrix}M&0&0\\0&2m&0\\0&0&2m\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}2K&0\\0&K_a\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}c&1&0\\-2s&0&1\end{pmatrix} \tag{Ⅵ-56}$$

方程式(50)(在此情況下為一 3×3 矩陣)，有一零根，此根相應該系統沿着對稱軸的平移運動，另由 $|L\tilde{L}-\lambda E|=0$ 可得二個根。此與(53)式中去掉中間行及中間列後所得者相同。

至於逆對稱振動 λ_3，我們可作如下的定義開始，

$$\eta=0,\quad x_1=-x_2,\quad y_1=-y_2,\quad \delta r_1=-\delta r_2,\quad r\delta\alpha=0 \tag{Ⅵ-57}$$

在此情形下，M仍與（56）者相同，而

$$B=(s,1,0),\quad K=(2k),\quad N=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{M}} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{M}} & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2m}}\end{pmatrix}\qquad (\text{VI}-58)$$

方程式（50）(爲一 3×3 矩陣）有二個零根，相應於系統在其平面並垂直於其對稱軸的平移，及系統繞着垂直其平面的軸的轉動。另一根可由 $|L\tilde{L}-\lambda E|=0$ 得出，此根即（54）式所得之 λ_3。

習題

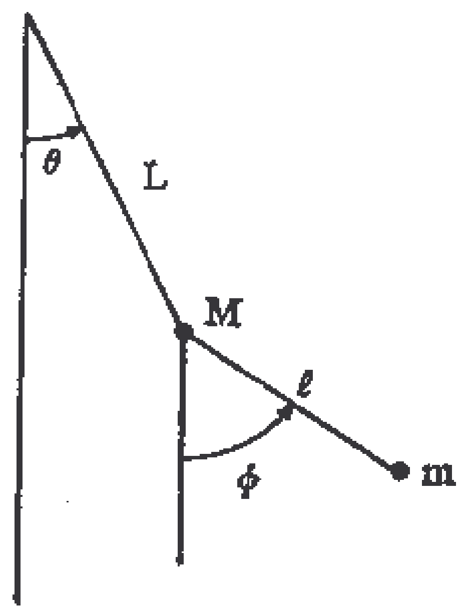
1.　茲有一個 m-M-M-m 線性的四原分子（如 C_2H_2）。設 δx_1, δx_0, δx_2 爲 m-M, M-M, M-m 的小位移差，$\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$ 爲 m-M-M 夾角，及 M-M-m 夾角的小變值，位能 V 爲

$$2V=k_1(\delta x_1)^2+k_0(\delta x_0)^2+k_1(\delta x_2)^2+2k_2\delta x_0(\delta x_1+\delta x_2)$$
$$+k_\alpha\{(\delta\theta_1)^2+(\delta\theta_2)^2\}+2k_\beta\delta\theta_1\delta\theta_2$$

求此系統之簡正振動及其頻率。

註：用本章末節（Ⅵ-55)—(Ⅵ-58）的捷便法。

2.　設有一雙擺。其質量爲 m, M, 其長度爲 L, l, 如圖。設振幅 θ, ϕ 皆甚小，即



$$\sin\theta\simeq\theta=\frac{X}{L}$$

$$\sin\phi\simeq\phi=\frac{x}{l}$$

又設

$$\frac{m}{M}=\mu\ll 1$$

$$L=l$$

使　　$w_0=\sqrt{\dfrac{g}{l}}$

試求每擺對另一擺的影響。

證明該雙擺的簡正振動之頻率爲

$$w_{\pm}\cong w_0\left(1\pm\frac{1}{2}\sqrt{\mu}\right).$$

設開始條件爲 $t=0$ 時，$x=\dot{x}=X=0$，$\dot{X}=v$ 證明

$$\dot{X}=\frac{1}{2}\ v(\cos w_-t+\cos w_+t)$$

$$\dot{x}=\frac{1}{2\sqrt{\mu}}\ v(\cos w_-t-\cos w_+t)$$

3. 一質點在一力場運行，力場之位能爲

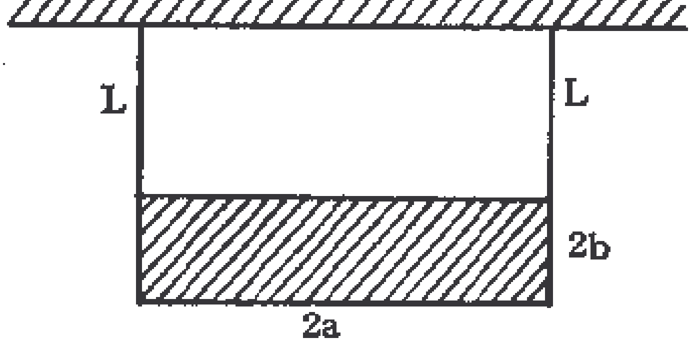
$$V(x)=-\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}$$

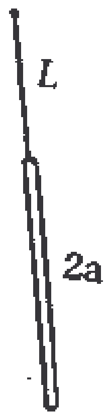
繪 $V(x)$ 之圖。(1) 求該質點在 V 最低值處作小幅振動之頻率。(2) 求其振動幅大時的頻率。(3) 問在何情形下，質點的運動，由週期性的振動，變爲非週期性的運動。

4. 一均勻的長方形片，其邊長爲 $2a$，寬 $2b$，以二等長 L 之繩，懸其長邊的二角如圖。證明該片有四個簡正振動 (normal modes)，並證明其頻度乃如下列長度的單擺的頻度。

(1) L，(2) $\frac{1}{3}L$

(3) 及 (4) $\frac{1}{2}L+\frac{2}{3}b\pm\sqrt{L^2+\frac{4}{3}bL+\frac{16}{9}b^2}$





5.　一均勻的桿，其長爲 $2a$，懸於一長度爲 L 的短繩。證明其較慢一擺動的頻率，與該桿直接懸於一端的擺動頻率之比率約略爲

$$1+\frac{9}{32}\frac{L}{a}$$

其較快一擺動的頻率，則約略係

$$\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

第七章

Lagrange 方程式：剛體動力學

第一章，第 8 節已經證明：一剛體在外力作用下的運動，可視爲係由兩種運動合成，一爲質心運動——即所有質點的質量集中在質心上，又外力亦皆集中的作用於此質心上。另一則爲轉動運動——即所有質點繞着靜止的質心轉動。因此在硏討剛體的運動時，我們僅需考慮繞着某一固定點的轉動運動。

1　運動學的參數

一剛體，如有某一點固定，則僅有三個自由度，這一事實可以很容易地了解如下：描述一物體系統之方位，可以一直角座標固定於此物體，此座標軸有九個方向餘弦。但此九個方向餘弦中，有六個正交的關係。我們可用其他參數代替方向餘弦來描述剛體的方位。下面是幾種參數的例子。

(1) Euler 參數

設剛體繞着通過座標系中心的一直線，轉動 w 角，此直線之方向餘弦爲 λ，μ，ν，設由於此轉動，$p(x, y, z)$ 點被轉到 $Q(x', y', z')$ 點，則我們可以證明

$$x'=x-2\sin^2\frac{w}{2}[x(1-\lambda^2)-y\lambda\mu-z\lambda\nu]$$

$$+2\sin\frac{w}{2}\cos\frac{w}{2}\ (\mu z-\nu y)$$

$$y'=y-2\sin^2\frac{w}{2}[y(1-\mu^2)-z\mu\nu-x\mu\lambda]$$

$$+2\sin\frac{w}{2}\cos\frac{w}{2}\ (\nu x-\lambda z) \tag{Ⅶ-1}$$

$$z'=z-2\sin^2\frac{w}{2}[z(1-\nu^2)-x\nu\lambda-y\nu\mu]$$

$$+2\sin\frac{w}{2}\cos\frac{w}{2}\ (\lambda y-\mu x)$$

茲定義下列參數如下

$$\xi=\lambda\sin\frac{w}{2},\quad \eta=\mu\sin\frac{w}{2},\quad \zeta=\nu\sin\frac{w}{2},\quad \chi=\cos\frac{w}{2}, \tag{Ⅶ-2}$$

此參數滿足下式

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\chi^2=1 \tag{Ⅶ-3}$$

如用這些參數表示，則（1）式變成

$$x'=(\xi^2-\eta^2-\zeta^2+\chi^2)x+2(\xi\eta-\zeta\chi)y+2(\xi\zeta+\eta\chi)z$$

$$y'=2(\xi\eta+\zeta\chi)x+(-\xi^2+\eta^2-\zeta^2+\chi^2)y$$

$$+2(\eta\zeta-\xi\chi)z \tag{Ⅶ-4}$$

$$z'=2(\xi\zeta-\eta\chi)x+2(\eta\zeta+\xi\chi)y+(-\xi^2-\eta^2+\zeta^2+\chi^2)z。$$

（4）式中，x, y, z 的係數，具有如下之意義；設 $X'Y'Z'$ 係一個定於空間中的座標系，而 X, Y, Z 則爲固定於物體中的座標系。此二座標系當 X, Y, Z 尚未繞（λ, μ, ν）線轉動 w 角時，相互疊合在一起。這轉動使 $P(x, y, z)$ 轉至 Q 點，Q 在 X', Y', Z' 之

座標爲 x', y', z'。Q 相對於 X, Y, Z 系之座標，與 P 相對於 X', Y', Z' 座標系的關係相同。因此稍加思考即可證明：(4) 式包括了兩座標線 X', Y', Z' 及 X, Y, Z 間的方向餘弦，即

	X	Y	Z	
X'	$\xi^2-\eta^2-\zeta^2+\chi^2$	$2(\xi\eta-\zeta\chi)$	$2(\xi\zeta+\eta\chi)$	
Y'	$2(\xi\eta+\zeta\chi)$	$-\xi^2+\eta^2-\zeta^2+\chi^2$	$2(\eta\zeta-\xi\chi)$	(VII-5)
Z'	$2(\xi\zeta-\eta\chi)$	$2(\eta\zeta+\xi\chi)$	$-\xi^2-\eta^2+\zeta^2+\chi^2$	

故一座標系（因之，一個固定其間之剛體）相對於一固定座標系的方位，即可以 (2) 式中的 4 個參數及條件 (3) 來完全描述。

(2) Cayley-Klein 參數

Cayley-Klein 參數，可以 (2) 式所定義的參數表示之，即

$$\alpha=i\zeta+\chi,\quad \beta=\xi+i\eta,\quad \gamma=-\xi+i\eta,\quad \delta=-i\zeta+\chi \qquad \text{(VII-6)}$$

或

$$\xi=\frac{\beta-\gamma}{2},\quad \eta=\frac{\beta+\gamma}{2i},\quad \zeta=\frac{\alpha-\delta}{2i},\quad \chi=\frac{\alpha+\delta}{2} \qquad \text{(VII-7)}$$

$i=\sqrt{-1}$。以 Cayley-Klein 參數表示，則 (5) 式中的方向餘弦爲

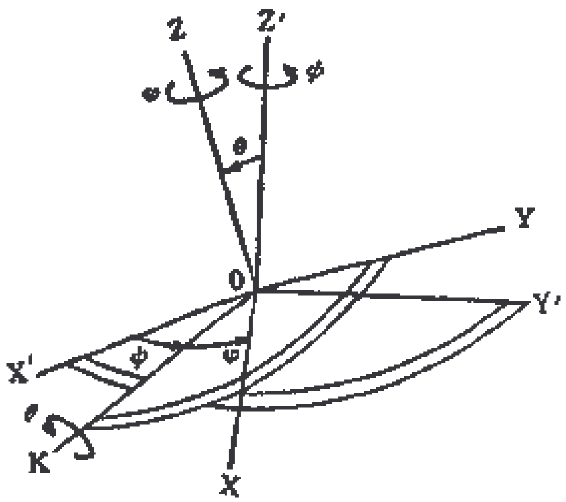
	X	Y	Z	
X'	$\frac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$	$\frac{i}{2}(\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2)$	$-i(\alpha\beta+\gamma\delta)$	
Y'	$\frac{i}{2}(-\alpha^2-\beta^2+\gamma^2+\delta^2)$	$\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2-\gamma^2+\delta^2)$	$-\alpha\beta+\gamma\delta$	(VII-8)
Z'	$i(\alpha\gamma+\beta\delta)$	$-\alpha\gamma+\beta\delta$	$\alpha\delta+\beta\gamma$	

由（6）及（3）即得

$$\alpha\delta-\beta\gamma=1 \qquad (Ⅶ\text{-}9)$$

（3）Euler 角

此些角可用下列轉動定義之：設二座標系 X, Y, Z 及 X', Y', Z' 原來相互重疊。今使 X, Y, Z 系繞 OZ 轉動 ϕ 角，故 OX 轉至 OK 處。次繞 OK 轉 θ 角，故原來沿 OZ' 之 Z 軸，今轉至 OZ。最後繞 OZ 轉 φ 角，故在 OK 之 OX 轉至 OX 之位置。



此兩組座標軸間的方向餘弦，可證明爲

	X	Y	Z
X'	$\cos\varphi\cos\phi-\cos\theta\sin\varphi\sin\phi$	$-\sin\varphi\cos\phi-\cos\theta\cos\varphi\sin\phi$	$\sin\theta\sin\phi$
Y'	$\cos\varphi\sin\phi+\cos\theta\sin\varphi\cos\phi$	$-\sin\varphi\sin\phi+\cos\theta\cos\varphi\cos\phi$	$-\sin\theta\cos\phi$
Z'	$\sin\theta\sin\varphi$	$\sin\theta\cos\varphi$	$\cos\theta$

(Ⅶ-10)

茲比較（5）及（10），及（8）與（10），可得下列 Euler 參數 ξ, η, ζ, χ，Cayley-Klein 參數，以及 Euler 角的關係如下

$$\xi=\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi-\varphi}{2},\quad \eta=\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi-\varphi}{2} \qquad (Ⅶ\text{-}11)$$

$$\zeta=\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi+\varphi}{2},\quad \chi=\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi+\varphi}{2}$$

及

$$\alpha=\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\psi+\varphi}{2}},\qquad \beta=\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\psi-\varphi}{2}}$$

$$\gamma=-\sin\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\psi-\varphi}{2}},\quad \delta=\cos\frac{\theta}{2}e^{-i\frac{\psi+\varphi}{2}} \tag{Ⅶ-12}$$

Cayley-Klein 參數，在 Dirac 的電子之相對性量子理論裏被用到。而 Euler 角，則在剛體轉動的討論中，最是常用。

(4) Euler 的運動關係式

由 Euler 角 θ,ψ,φ 的定義，可知其時間導數 $\dot{\theta},\dot{\psi},\dot{\varphi}$ 即分別爲繞 OK, OZ', 及 OZ 軸的角速度。茲沿着 $0X, 0Y, 0Z$ 取這些角速度的分量，即得

$$\begin{aligned} w_x&=\dot{\theta}\cos\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi \\ w_y&=-\dot{\theta}\sin\varphi+\dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi \\ w_z&=\dot{\psi}\cos\theta+\dot{\varphi} \end{aligned} \tag{Ⅶ-13}$$

上各式的倒式即爲

$$\begin{aligned} \dot{\theta}&=w_x\cos\varphi-w_y\sin\varphi \\ \dot{\psi}&=w_x\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}+w_y\frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \\ \dot{\varphi}&=-w_x\sin\varphi\cot\theta-w_y\cos\varphi\cot\theta+w_z \end{aligned} \tag{Ⅶ-14}$$

(13) 或 (14) 式即謂之 Euler 的運動關係式。

由 (13) 式可知分角速度 w_x, w_y, w_z 並非任何座標之導數。渠等係「準座標」(quasi-coordinate) 的速度 (詳見下面第十一章，及 Whittaker, analytical Dynamics)，此等準座標，亦可由推廣 Lagrange 方法解之。

2 Euler 的剛體動力學方程式

分角速度 w_x, w_y, w_z 雖非任何變數的時間導數（如 Euler 角的時間導數），然以這些量來表示剛體的動力學方程式，則極爲有用，蓋這些方程式，有很簡單及對稱的形式。這些方程式，可由 Lagrange 方程式推廣到「準座標」得之，或直接的得來。現先用後一方法來求這些方程式。

第一章，第 7 節中，我們已證明一向量對一固定座標系的時間變化率，與同此向量對一具有同原點而以角速度 w 轉動的座標，其間的關係可用下式表示，即

$$\dot{r}' = \dot{r} + [\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{r}] \tag{VI-15}$$

上式對任何向量 $\boldsymbol{r}$ 均成立。茲以 $\boldsymbol{r}$ 代表角動量向量 $\mathfrak{M}$，且設 $\mathbb{T}$ 係外力對轉動軸方向的力矩。則運動方程式可寫之如下

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + [\boldsymbol{w} \times \mathfrak{M}] = \mathbb{T} \tag{VI-16}$$

設力偶矩向量 $\mathbb{T}$ 的分量爲 L, M, N。注意：上式之左方係角動量對一固定座標系的變化率。

用（I-43）的 $\mathfrak{M}_x, \mathfrak{M}_y, \mathfrak{M}_z$ 式，則（16）式變成

$$\begin{aligned} &A\dot{w}_x - F\dot{w}_y - E\dot{w}_z - w_x(Ew_y - Fw_z) \\ &\qquad - D(w_y^2 - w_z^2) - (C-B)w_y w_z = L \\ &-F\dot{w}_x + B\dot{w}_y - D\dot{w}_z - w_y(Fw_z - Dw_x) - E(w_z^2 - w_x^2) \\ &\qquad - (A-C)w_z w_x = M \end{aligned} \tag{VI-17}$$

$$-E\dot{w}_x - D\dot{w}_y + C\dot{w}_z - w_z(Dw_x - Ew_y)$$
$$-F(w_x^2 - w_y^2) - (B-A)w_x w_y = N$$

A, B, C, D, E, F 係對轉軸之慣矩（轉動慣量）及慣矩積。

如取在固定點的物體的主軸爲轉動座標軸，換言之，使

$$D = E = F = 0$$

則（17）式簡化爲

$$A\frac{dw_x}{dt} + (C-B)w_y w_z = L$$
$$B\frac{dw_y}{dt} + (A-C)w_z w_x = M \qquad (\text{VII}-18)$$
$$C\frac{dw_z}{dt} + (B-A)w_x w_y = N$$

此卽 Euler 的剛體動力運動方程式。

3 無外力作用之剛體(繞固定點)轉動：對稱陀螺

如一剛體有一點被固定，在無外力或外力矩（對於固定點）爲零（例如，剛體被支於質心作轉動）時，其總角動量 $\mathfrak{M}$ 之數值及方向，均須保持不變。此 $\mathfrak{M}$ 的方向，卽稱爲不變線。對此運動，我們可立卽證明下述定理：

定理： 一剛體只能繞其主軸作等角速度的自由轉動。

證明： 玆令此等角速度 $\boldsymbol{w}$ 之方向，爲固定於物體的座標系的 z 軸。如是則（17）式中，

$$w_x = w_y = 0, \quad w_z = w, \quad L = M = N = 0$$

故（17）式簡化為

$$Dw_z^2=0,\quad -Ew_z^2=0$$

此二式僅當 $D=E=0$ 時始能滿足。因此 z 軸必為經過該點的物體主軸之一。

此重要定理之另一證法如下。茲選通過該固定點之三主軸為座標軸，則 Euler 方程式即為(18)式。按假定，座標軸以一等角速度 w 繞一已知方向轉動。故 w_x, w_y, w_z 均係常數，$\dot{w}_x=\dot{w}_y=\dot{w}_z=0$。如 $A\neq B\neq C$，則方程式（18）即變為

$$w_xw_y=w_yw_z=w_zw_x=0$$

這些方程式僅當此三分量 w_x, w_y, w_z 中至少有二個為零時才成立。因此等角速度 w 之方向，必為主軸之一的方向。

(1) 剛體自由轉動的離心力矩

茲再進一步研究（16）式。在無外力作用下之轉動，$\mathfrak{T}=0$，則（16）式變為

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt}=[\mathfrak{M}\times \boldsymbol{w}] \tag{Ⅷ-19}$$

在不失廣義性下，可取常數 w 之方向為 z 軸，因此 $w_x=w_y=0$，$w_z=w$。離心力 $m_i\rho_iw^2$ （$\rho_i^2=x_i^2+y_i^2$）之分量為

$$X_i=w^2m_ix_i,\quad Y_i=w^2m_iy_i,\quad Z_i=0 \tag{Ⅷ-20}$$

這些分量有一合力偶矩 $\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{S}$ 的分量為

$$\begin{aligned}S_x&=\sum(y_iZ_i-z_iY_i)=-\sum m_iy_iz_iw^2=-Dw^2\\S_y&=\sum(z_iX_i-x_iZ_i)=\ \sum m_iz_ix_iw^2=\ Ew^2\\S_z&=\sum(x_iY_i-y_iX_i)=0\end{aligned} \tag{Ⅷ-21}$$

今由（Ⅰ-43）式，可知角動量 $\mathfrak{M}$ 之瞬時值爲

$$\mathfrak{M}_x=-Ew_z,\quad \mathfrak{M}_y=-Dw_z,\quad \mathfrak{M}_z=Cw_z \qquad (Ⅶ\text{-}22)$$

由（21）及（22）式，則分別可得

$$(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{w})=0$$

$$(\boldsymbol{S}\cdot\mathfrak{M})=0 \qquad (Ⅶ\text{-}23)$$

故 $\boldsymbol{S}$ 與 $\boldsymbol{w}$ 及 $\mathfrak{M}$ 皆垂直。事實上

$$\boldsymbol{S}=[\mathfrak{M}\times\boldsymbol{w}] \qquad (Ⅶ\text{-}24)$$

將此與（19）式比較，可見要改變(19)式中之 $\mathfrak{M}$ 的 $[\mathfrak{M}\times\boldsymbol{w}]$ 項，係由離心力的力矩 $\boldsymbol{S}$ 所產生。力矩 $\boldsymbol{S}$ 當（21）式之 $D=E=0$ 時則等於零，此即表示 z 軸（沿 $\boldsymbol{w}$ 之方向）係主軸之一。在此情形下，由（22）或（24）可知 $\mathfrak{M}$ 與 w 具有相同的恒方向。

如 $\boldsymbol{w}$ 之方向不僅爲一主軸，且 w 亦通過質心，則合離心力亦等於零，蓋由（20）式，可得

$$X=w^2\sum m_ix_i=0,\quad Y=w^2\sum m_iy_i=0,\quad Z=0 \qquad (Ⅶ\text{-}25)$$

（2） 能量及角動量積分

一剛體如在無外力下轉動，則(17)式中之 $L=M=N=0$。如以 w_x, w_y, w_z 分別乘上三個方程式，並作此三方程式之和，即得

$$\frac{1}{2}(Aw_x^2+Bw_y^2+Cw_z^2-2Dw_yw_z-2Ew_zw_x$$
$$-2Fw_xw_y)=\text{常數} \qquad (Ⅶ\text{-}26)$$

此即能量積分。此式即敘述動能的守恒（詳見Ⅰ-49）。

如將（17）式之首方程式依序乘以 Aw_x, $-Fw_y$, $-Ew_z$, 次方程式陸續乘以 $-F_x$, Bw_y, $-Dw_z$, 最後一方程式則依次乘上 $-Ew_x$, $-Dw_y$ 及 Cw_z, 然後作這九個方程式之和，即得

$$\mathfrak{M}^2=(Aw_x-Fw_y-Ew_z)^2+(-Fw_x+Bw_y-Dw_z)^2$$
$$+(-Ew_x-Dw_y+Cw_z)^2=\text{常數} \qquad (\text{Ⅶ}-27)$$

此卽角動量之積分。(見 Ⅰ-43 式)

如坐標軸乃選沿着物體在該固定點之主軸的方向，(26) 及 (27)式將可簡化為

$$T=\frac{1}{2}(Aw_x^2+Bw_y^2+Cw_z^2)=\text{常數}$$

及　　(Ⅶ-28)

$$\mathfrak{M}^2=A^2w_x^2+B^2w_y^2+C^2w_z^2=\text{常數}$$

(3) *以 Euler 角表示的運動方程式*

一個剛體的運動方程式，可由 Lagrange 方程式得之，亦可簡單的直接得來如下。

剛體在無外力情形下的總角動量 $\mathfrak{M}^2$ 係一常數，故我們可取 $\mathfrak{M}$ 的方向為空間固定之 Z' 軸，(第一節之 (3) 式)。由(10)之最後式，卽得

$$Aw_x=\mathfrak{M}\sin\theta\sin\varphi$$
$$Bw_y=\mathfrak{M}\sin\theta\cos\varphi \qquad (\text{Ⅶ}-29)$$
$$Cw_z=\mathfrak{M}\cos\theta$$

Aw_x, Bw_y, Cw_z 係角動量沿着通過固定點之剛體主軸 OX, OY, OZ 之分量。由 (29) 及運動關係式 (13)，卽得下列方程式

$$\dot\theta=\frac{B-A}{AB}\mathfrak{M}\sin\theta\sin\varphi\cos\varphi$$

$$\dot\phi=\mathfrak{M}\left(\frac{\sin^2\varphi}{A}+\frac{\cos^2\varphi}{B}\right) \qquad (\text{Ⅶ}-30)$$

$$\dot{\varphi}=\mathfrak{M}\left(\frac{1}{C}-\frac{\sin^2\varphi}{A}-\frac{\cos^2\varphi}{B}\right)\cos\theta$$

我們可以下法得一個僅包含 θ 變數的方程式。由 (28) 式之兩個積分，求 w_x, w_y，將此結果代入 (18) 式之第三方程式，並令 $N=0$，再引用 (29) 式之關係 $Cw_z=\mathfrak{M}\cos\theta$，即可得

$$\frac{d\cos\theta}{dt}=\mathfrak{M}\left[-\frac{2TB-\mathfrak{M}^2}{A\,\mathfrak{M}^2}+\frac{B-C}{AC}\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left[\frac{2TB-\mathfrak{M}^2}{B}-\frac{A-C}{BC}\cos^2\theta\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{VII}-31)$$

此方程式之解，需引用橢圓函數。

聯立方程式 (30)，按照原則可解之如下：由 (31) 式解出 θ 爲 t 之函數。用此結果，則 (30) 式中之 $\dot{\varphi}$ 可積分之。最後，以 $\varphi(t)$ 之解，代入 (30) 之第二式，而將 $\dot{\phi}$ 積分。但實際上，(31) 式的解是很困難的，只有在一些特殊的情形下，才可有簡單的方法。

(4) 無力場下之對稱陀螺 (Euler 陀螺)

在實際應用上有趣的特殊情形之一，乃在無力場的對稱陀螺的自旋情形。所謂對稱陀螺，乃是有二相等之主轉動慣量之剛體，如

$$B=A\neq C \qquad (\text{VII}-32)$$

在此情形下，由 (31) 式，或更直接的由 (30) 式，得 $\theta=$ 常數，或由 (28) 式，均可得

$$\cos\theta=\frac{Cw_z}{\mathfrak{M}}=\left[\frac{C(2TB-\mathfrak{M}^2)}{(A-C)\mathfrak{M}^2}\right]^{\frac{1}{2}}=\text{常數} \qquad (\text{VII}-33)$$

且由 (30) 式知

$$A\dot{\phi}=\mathfrak{M},\quad \phi=\frac{\mathfrak{M}}{A}t+\text{常數} \tag{Ⅶ-34}$$

$$\dot{\varphi}=\mathfrak{M}\left(\frac{A-C}{AC}\right)\cos\theta=\text{常數}=\lambda \tag{Ⅶ-35}$$

因此，在無力作用下，一個對稱陀螺的運動（例如，被支於質心轉動之對稱陀螺），係由二種運動組成，一爲繞對稱軸（卽轉動慣量爲 C 之軸）之均勻自旋（角速度爲 λ），另一則爲對稱軸繞着合角動量 $\mathfrak{M}$ 的均勻旋進（precession）。此均勻旋進之角動量爲 $\mathfrak{M}/A$。$\mathfrak{M}$ 之方向與對稱軸之夾角 θ，係一常數。此 θ 角可由（33）式得之。

（5）特殊情形

方程式（30）之解可簡化爲初等函數的特殊情形，係當(28)式中，有如下之關係時，

$$\mathfrak{M}^2=2BT$$

在此情況下，(31）可積分得

$$\cos\theta=\left[\frac{C(A-B)}{B(A-C)}\right]^{\frac{1}{2}}\operatorname{sech}\left\{\frac{\mathfrak{M}}{B}\left[\frac{(A-B)(B-C)}{AC}\right]^{\frac{1}{2}}t\right\} \tag{Ⅶ-36}$$

由（28）及（29）兩式，卽可得

$$\frac{A-B}{AB}\sin^2\theta\cos^2\varphi=-\frac{A-C}{AC}\cos^2\theta+\frac{2TA-\mathfrak{M}^2}{A\mathfrak{M}^2}$$

再用（31）式，則得

$$\sin\theta\cos\varphi=\tanh\left\{\frac{\mathfrak{M}}{B}\left[\frac{(A-B)(B-C)}{AC}\right]^{\frac{1}{2}}t\right\} \tag{Ⅶ-37}$$

由（30）最後得出

$$\sin\left(\psi-\frac{\mathfrak{M}}{B}t\right)=-\left[\frac{C(A-B)}{B(A-C)}\right]^{\frac{1}{2}}\cos\varphi \tag{Ⅶ-38}$$

4　重力場中的對稱陀螺 (Lagrange 陀螺)

1) 剛體轉動的另一可解的問題，係對稱螺陀，其支點在重心下 l 距離處（沿對稱軸）其位能爲

$$V=Mlg\cos\theta \tag{Ⅶ-39}$$

Mg 爲物體之重量，而 θ 爲 Euler 角之一。第 (18) 式乃

$$\begin{aligned} A\dot{w}_x&=(A-C)w_y w_z+Mgl\sin\theta\cos\varphi \\ A\dot{w}_y&=(C-A)w_z w_x-Mgl\sin\theta\sin\varphi \\ C\dot{w}_z&=0 \end{aligned} \tag{Ⅶ-40}$$

最後式可積分，得

$$Cw_z=\mathfrak{M}_z=\text{常數} \tag{Ⅶ-41}$$

此即繞對稱軸的角動量積分。今分別以 w_x, w_y, w_z 乘 (40) 中之三個方程式，用 (14) 中之第一關係式，並予積分，即得下列之能量積分

$$\frac{1}{2}\left[A(w_x^2+w_y^2)+Cw_z^2\right]=E-Mgl\cos\theta \tag{Ⅶ-42}$$

因重力 Mg 所產生的外力矩，係繞一與空間 OZ' 軸及對稱軸 OZ（第 1 節 (3)）二者垂直之軸的，故我們對空間 OZ' 的角動量，可得另一積分

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_{z'}=Aw_x\sin\theta\sin\varphi+Aw_y\sin\theta\cos\varphi \\ +Cw_z\cos\theta=\text{常數} \end{aligned} \tag{Ⅶ-43}$$

用 (13) 式，則 (41) 至 (43) 中之三個首次積分可寫爲

$$\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2=\frac{1}{A}\left(2E-\frac{\mathfrak{M}_z{}^2}{C}-2Mgl\cos\theta\right)$$

$$\dot{\phi}\cos\theta+\dot{\varphi}=\frac{\mathfrak{M}_z}{C} \qquad (\text{VII}-44)$$

$$\sin^2\theta\,\dot{\phi}=\frac{1}{A}\,(\mathfrak{M}_{z'}-\mathfrak{M}_z\cos\theta)$$

此卽爲運動方程式。

爲了說明 Lagrange 方程式的用處，玆以另一法導出上得的結果。由 (13) 式，動能可寫成

$$T=\frac{1}{2}\left[A(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2)+C(\dot{\varphi}+\cos\theta\dot{\phi})^2\right] \qquad (\text{VII}-45)$$

φ 及 ϕ 均爲循環座標。θ,ϕ,φ 之 Lagrange 方程式爲

$$A\ddot{\theta}-\{A\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta-C(\dot{\varphi}+\dot{\phi}\cos\theta)\dot{\phi}\sin\theta\}=Mgl\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\{A\sin^2\theta\dot{\phi}+C(\dot{\varphi}+\cos\theta\dot{\phi})\cos\theta\}=O \qquad (\text{VII}-46)$$

$$\frac{d}{dt}\{C(\dot{\varphi}+\cos\theta\dot{\phi})\}=0$$

由後二式可得

$$A\sin^2\theta\dot{\phi}+C(\dot{\varphi}+\dot{\phi}\cos\theta)\cos\theta=\mathfrak{M}_{z'}=\text{常數} \qquad (\text{VII}-47)$$

$$C(\dot{\varphi}+\dot{\phi}\cos\theta)=\mathfrak{M}_z=\text{常數} \qquad (\text{VII}-48)$$

此二式與 (44) 式相同。θ 之方程式，可將 (47)，(48) 式代入其中變換之，或以 Routh 函數 R (見第三章，第 4 節) 變換之，卽

$$R=T-V-\mathfrak{M}_{z'}\dot{\phi}-\mathfrak{M}_z\dot{\varphi}$$

$$=\frac{A}{2}\dot{\theta}^2-\frac{1}{2A\sin^2\theta}(\mathfrak{M}_{z'}-\mathfrak{M}_z\cos\theta)^2$$

$$-\frac{1}{2C}\mathfrak{M}_z{}^2-Mgl\cos\theta \tag{Ⅶ-49}$$

由此，則 Lagrange 方程式爲

$$A\ddot{\theta}-\frac{1}{A\sin^3\theta}(\mathfrak{M}_{z'}-\mathfrak{M}_z\cos\theta)^2\cos\theta$$

$$+\frac{1}{A\sin\theta}(\mathfrak{M}_{z'}-\mathfrak{M}_z\cos\theta)\mathfrak{M}_z=Mgl\sin\theta$$

將上式積分，卽可再得到（44）式之首一方程式。

2）按理（44）式應可積分。但欲知該運動的重要性質，則不需眞正的橢圓函數解（44）方程式，而可用約略的方法。玆使

$$z=\cos\theta,\quad \alpha=\frac{2E}{A}-\frac{\mathfrak{M}_z{}^2}{AC},\quad \beta=\frac{\mathfrak{M}_{z'}}{A}, \tag{Ⅶ-50}$$

$$a=\frac{2Mgl}{A},\quad b=\frac{\mathfrak{M}_z}{A}$$

則（44）式變成

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=(1-z^2)(\alpha-az)-(\beta-bz)^2\equiv f(z)$$

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{\beta-bz}{1-z^2} \tag{Ⅶ-51}$$

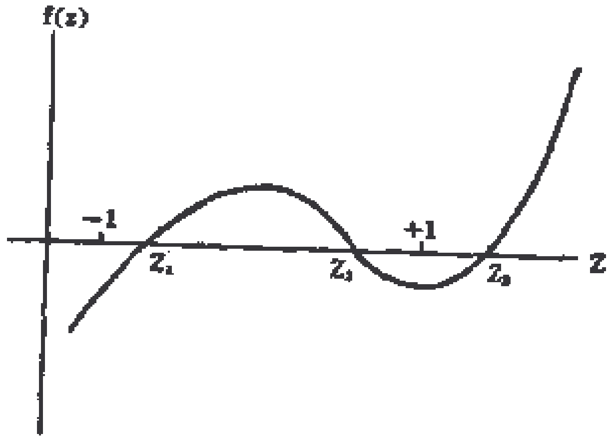
$$\frac{d\varphi}{dt}=w_z-\frac{(\beta-bz)z}{1-z^2}$$

如 θ,ψ,θ 在時間 $t=t_0$ 時，其値爲 θ_0,ψ_0,θ_0，則「運動常數」α, β 可得爲

$$\beta=\sin^2\theta_0\,\dot{\psi}_0+b\cos\theta_0 \tag{Ⅶ-52}$$

$$\alpha=\dot{\theta}_0{}^2+\sin^2\theta_0\dot{\psi}_0{}^2+a\cos\theta_0$$

$f(z)$ 係 z 之三次式，故 $f(z)=0$ 具有三根。設 $z_1<z_2<z_3$, $f(z)$ 之形狀，可由如下考慮，約略得之（如圖）：



$$f(-\infty)=-\infty,$$
$$f(-1)=-(\beta+b)^2,$$
$$f(1)=-(\beta-b)^2,$$

$f(\infty)=\infty$, 因 z 須爲實數, 故我們只需考慮使 $f(z)>0$ 之 z 的範圍, 即

$$z_1 \leq z \leq z_2 \tag{Ⅶ-53}$$

因此陀螺之軸的運動, 係界於二緯線 θ_1, θ_2 之間,

$$z_1=\cos\theta_1,\quad z_2=\cos\theta_2$$

如詳細研究 (51) 式之 z, 我們可證明 z 係 t 的橢圓函數。故陀螺之軸的起落運動, 係時間的週期函數。$\dot{\phi}$ 及 $\dot{\psi}$ 亦同。

3) 旋進 (precession)

其次考慮 ϕ 角。在 z_1, z_2 二根重叠之特殊情形下, 陀螺之對稱軸運動, 將畫出一個半頂角(semi-vertex angle)爲 $\theta=\theta_1$ 之錐面,(或說: 陀螺的頂點 (apex), 將繞著 OZ' 軸作一圓周運動)。此項運動, 謂之純旋進。

這純旋進的條件乃, $f(z)$ 具有重根, 即

$$f(z)=0,\quad \frac{df(z)}{dz}=0$$

由 (51) 式知, 上二式即爲

$$a(1-z^2)^2-2(\beta-bz)(b-\beta z)=0 \tag{Ⅶ-54}$$

對一已知 $z=\cos\theta$ 及已知自旋角動量 $\mathfrak{M}_z=bA$, 則上式係 β 之二次方程式, 故有二個根。反之, 如一已知 z 及 β, 則 (54) 乃

b 之二次方程式，故有 b 之二個根。在一純旋進之情形，由(51)式卽可得

$$\dot{\phi}=\frac{\beta-bz}{1-z^2}=\text{常數} \tag{Ⅶ-55}$$

對應 β 之兩個根（卽 z, b 均固定），或對應 b 之兩個根（卽 z 及 β 固定），我們可以找到 $\dot{\phi}$ 之兩個值。此 $\dot{\phi}$ 之兩個值，可由（46）之首一式中，令 $\theta=$常數，求得。如用（50）之符號表示，可得

$$-\dot{\phi}^2\cos\theta+b\dot{\phi}=\frac{1}{2}a$$

如自旋速度極大，卽 $\frac{a}{b^2}\ll 1$，此二根爲

$$\dot{\phi}\cong\begin{cases}\dfrac{b}{z}\left(1-\dfrac{az}{2b^2}\right)\\[2mm] \dfrac{a}{2b}\end{cases} \tag{Ⅶ-56}$$

通常看到的是慢速度旋進 $\dot{\phi}=\frac{a}{2b}=\frac{Mgl}{\mathfrak{M}_z}$ 的情形。

運動之一特殊情形，係當（51）中之 $a=0$ 之情形，（卽當陀螺的支點係在陀螺的重心之情形）。則純旋進之條件（54），可由下面任一式滿足之，

$$\beta-bz=0,\ \text{卽}\ \mathfrak{M}_{z'}=\mathfrak{M}\cos\theta \tag{Ⅶ-57}$$

或

$$b-\beta z=0,\ \text{卽}\ \mathfrak{M}_z=\mathfrak{M}_{z'}\cos\theta \tag{Ⅶ-58}$$

在（57）式的情形下，則對稱軸卽爲合角動量 $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_z$ 之軸，而陀螺繞對稱軸（不變線）自旋，蓋由（55），得知

$$\dot{\phi}=0.$$

在（58）式的情形下，則空間軸 OZ' 即爲合角動量 $\mathfrak{M}_{z'}$ 之方向。陀螺之運動，即由自旋及以角速度 $\dot{\phi}$ 繞 OZ' 之均匀旋進合成。此 $\dot{\phi}$ 可由（44）之最後式及（58）式得之

$$\dot{\phi}=\frac{\mathfrak{M}_{z'}}{A}=\frac{\mathfrak{M}_z}{Az} \tag{Ⅵ-59}$$

4）章動（Nutation）

一般情形下，純旋進之條件（54），當然不一定可以滿足。由（51）式 $\dot{\phi}$ 乃

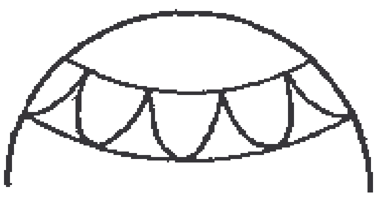
$$\dot{\phi}=\frac{\beta-bz}{1-z^2} \tag{Ⅵ-60}$$

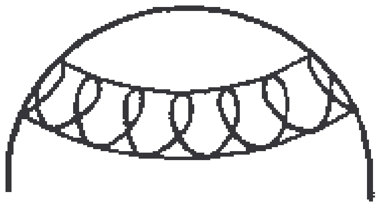
當 $z=z(t)$ 在（53）式之二根間變化時，$\dot{\phi}$ 並非常數。相應於 $\dot{\phi}$ 在 z 等於 z_2（上限根）時之値，有三種可能分辨之運動情形:

$$\begin{aligned}&\text{第一情形:}\quad \dot{\phi}(z_2)>0\\&\text{第二情形:}\quad \dot{\phi}(z_2)=0\\&\text{第三情形:}\quad \dot{\phi}(z_2)<0\end{aligned} \tag{Ⅵ-61}$$

第一情形下，由（60）式可見 $\dot{\phi}$ 在運動中永遠保持爲正値，蓋當 $z<z_2$ 時 $\dot{\phi}(z)>0$ 也。在第二情形下，在上首之緯度圓 $z=z_2$ 上有含切點（cusps），且除了在此含切點外，$\dot{\phi}>0$。第三種情形則比較複雜。1895 年 Hadamard 曾對此下過一番功夫，這三種情


情況一


情況二


情況三

況可示之如上圖*。

上圖所示運動的性質，在某些特殊情況下可用初等函數（即非橢圓函數）來表示。

設 $f(z)=0$ 之三根，仍如前所定義之次序，即

$$z_1<z_2<z_3$$

在眞正的運動範圍內，$z_1<z<z_2$，如（53），則可得

$$z_3-z_1>z_3-z>z_3-z_2 \qquad (\text{Ⅶ}-62)$$

（51）式之首一方程式之解，可以橢圓積分來表示，即

$$t=\int\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}=\int\frac{dz}{\sqrt{a(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}} \qquad (\text{Ⅶ}-63)$$

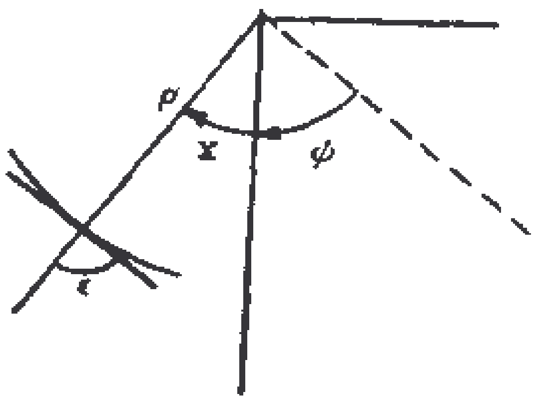
由（62）即得

$$\frac{1}{\sqrt{a(z_3-z_2)}}\int\frac{dz}{\sqrt{(z_2-z)(z-z_1)}}>t$$

---

* 下面的考慮，可幫助對上圖的了解。

情形一、由（60）知，如 $\dot{\phi}(z_2)>0$，則對所有之 $z<z_2$，$\dot{\phi}(z)>0$，此即謂並無「反曲點」可使 $\dot{\phi}=0$。情形三、茲將在球面的軌跡，投影在赤道面，且引用極座標 ρ，χ，及曲線切線與位置向量 ρ 間的夾角 ϵ。



$$\rho=\sin\theta=\sqrt{1-z^2},\quad \chi=\frac{\pi}{2}-\phi,\quad \tan\epsilon=\rho\frac{d\chi}{d\rho}$$

則 $$\rho\frac{d\chi}{d\rho}=-\frac{\dot{\phi}}{\frac{1}{\rho}\dot{\rho}}=\left(\frac{\beta-bz}{1-z^2}\right)\bigg/\left(\frac{z}{1-z^2}\frac{dz}{dt}\right)$$

$$\tan\epsilon=\frac{\beta-bz}{z\sqrt{f(z)}}=\infty$$ 在 z_1 及 z_2 點，

即，曲線與二圓 $z=z_1$，$z=z_2$ 相切，（除了當 $z=z_2$ 時，$\beta-bz=0$）。

情形二、如 $\beta-bz_2=0$，則，在 $z=z_2$ 時，

$$\tan\epsilon=-\frac{b(z-z_2)}{z\sqrt{a(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)}}=-\frac{b\sqrt{z-z_2}}{z\sqrt{a(z-z_1)(z-z_3)}}=0$$

即曲線與 $z=z_2$ 圓垂直。

$$> \frac{1}{\sqrt{a(z_3-z_1)}} \int \frac{dz}{\sqrt{(z_2-z)(z-z_1)}} \qquad (\text{Ⅶ-64})$$

如以下式定義 x

$$z_2-z=c(1-x), \quad z-z_1=c(1+x)$$

或

$$x=\frac{z}{c}-\frac{z_1+z_2}{2c}, \qquad 2c=z_2-z_1 \qquad (\text{Ⅶ-65})$$

則（64）式可寫成如下之較簡單形式

$$\frac{1}{\sqrt{a(z_3-z_2)}} \cos^{-1}x > t+\text{常數} > \frac{1}{\sqrt{a(z_3-z_1)}} \cos^{-1}x$$

此是一個普遍式。　　　　　　　　　　　　　　　　（Ⅶ-66）

茲考慮 z_3 很大之情形，即

$$z_3-z_1 \gg z_2-z_1 \qquad (\text{Ⅶ-67})$$

並定義

$$2z_0=z_1+z_2$$

則（66）即得

$$t+\text{常數}=\frac{1}{\sqrt{a(z_3-z_0)}} \cos^{-1}x$$

或，由（65）式可得

$$z=z_0+\zeta, \quad \zeta=c\cos[\sqrt{a(z_3-z_0)}\,t] \qquad (\text{Ⅶ-68})$$

上式之積分常數的擇取，乃係使當 $t=0$ 時，$z=z_0+c=z_2$，由（68）式，可見陀螺之頂點（apex），按時間 t 之餘弦函數而上下起落。由（60）知，

$$\dot{\phi}=\frac{\beta-bz}{1-z^2} \simeq \frac{\beta-b(z_0+\zeta)}{1-(z_0+\zeta)^2} \simeq \frac{\beta-bz_0}{1-z_0^2}-\left\{\frac{b}{1-z_0^2}-\frac{2z_0(\beta-bz_0)}{(1-z_0^2)^2}\right\}\zeta$$

將上式積分之，卽得

$$\phi=\frac{\beta-bz_0}{1-z_0^2}t-\frac{c}{\sqrt{a(z_3-z_0)}}\left\{\frac{b}{1-z_0^2}-\frac{2z_0(\beta-bz_0)}{(1-z_0^2)^2}\right\}$$

$$\times\sin(\sqrt{a(z_3-z_0)}t) \tag{Ⅶ-69}$$

(68) 及 (69) 式表示陀螺之頂點，對一隨時間作均勻旋進的點，作一橢圓簡諧運動。這種運動，稱爲章動 (Nutation)。

我們將證明條件 (67)，可藉快速自旋運動實現之。在 (51) 式中，由 $f(z)$ 分解出 $(z-z_2)$ 因子，卽

$$f(z)=(z-z_2)\left[-a(1-z^2)\right.$$

$$\left.+\frac{2b\beta(1+z_2z)-(b^2+\beta^2)(z+z_2)}{1-z_2^2}\right]$$

因括號中之式子，卽係 $a(z-z_1)(z-z_3)$，故可得

$$z_1+z_3=\frac{b^2}{a}+\frac{(\beta-bz_2)^2}{a(1-z_2^2)} \tag{Ⅶ-70}$$

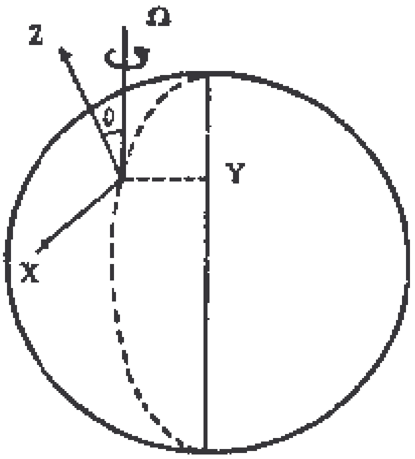
因此，對已定之 z_1 及 z_2，如令 b 大，卽可使 z_3 增大，b 大卽代表一快速之自旋也。

5 Foucault 迴轉器

玆考慮在某一轉動系統（如地球）中，一個對稱陀螺運動的兩個特殊情形。(設陀螺被支於其質心而轉動)。

(1) 陀螺之軸被限制於子午面內運動

設地球轉動之角速度爲 Ω[(V-9) 式中之 w]，又設 w_0($w_0 \gg \Omega$) 爲陀螺繞其對稱軸 OZ 之自旋角速度，此 OZ 軸之運動，



則被限制於子午面內。設 θ 爲 Z 軸與地球軸間之夾角，則角動量之分量爲

$$\mathfrak{M}_x=-A\Omega\sin\theta$$

$$\mathfrak{M}_y=A\dot{\theta}, \qquad (\text{VII}-71)$$

$$\mathfrak{M}_z=C(w_0+\Omega\cos\theta)\simeq Cw_0$$

Euler 方程式（16）爲

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt}+[\boldsymbol{w}\times\mathfrak{M}]=\sum[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}]$$

$$w_x=-\Omega\sin\theta,\quad w_y=\dot{\theta},\quad w_z=w_0+\Omega\cos\theta\simeq w_0$$

故（17）即得

$$-A\Omega\cos\theta\,\dot{\theta}+(C-A)w_0\,\dot{\theta}=L$$

$$A\ddot{\theta}-(A-C)w_0\,\Omega\sin\theta=0 \qquad (\text{VII}-72)$$

$$C\dot{w}_0=0$$

L 係我們爲了使對稱軸在子午面內轉動所須施於陀螺之力偶矩。因 $\Omega\ll w_0$，故與 w_0 比較之下，可將 Ω 忽略不計。因此 (72) 變爲

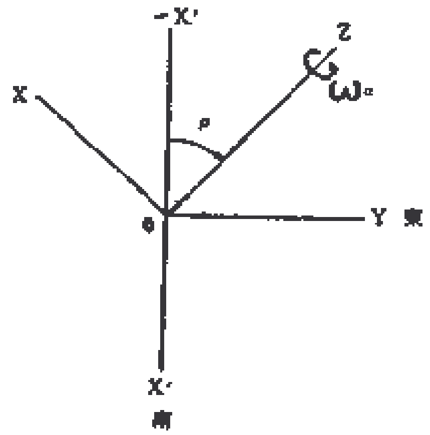
$$(C-A)w_0\,\dot{\theta}=L$$

$$\ddot{\theta}+\frac{C-A}{A}\,\Omega w_0\sin\theta=0 \qquad (\text{VII}-73)$$

$$w_0=\text{常數}$$

$\ddot{\theta}$ 之方程式爲一對平行於地球軸之軸擺動的平面單擺之方程式。其微小振盪（$\sin\theta\simeq\theta$）之週期爲 $2\pi\sqrt{\dfrac{A}{(C-A)\Omega w_0}}$。除非 w_0 很大，否則此週期甚長。我們可由測定此單擺的平衡軸，來決定某一地的緯度。

方程式 $(C-A)w_0\dot{\theta}=L$ 表示要使運動限制在子午面內，我



們需一力偶矩在此平面內之軸(x 軸)，此卽除了由支點所施之力外，尚需一與運動平面垂直之力。這種「廻轉力」(gyroscopic force)，在下章中將詳細討論之。

(2) **廻轉羅盤**

設在地球表面緯度 λ 處，一個對稱陀螺以角速度 w_0 自旋。今限制其對稱軸 (z—axis) 在一水平面內運動。再令 X', Y', Z' 分別爲沿南方、東方及天頂(zenith)方向的軸。如 φ 代表對稱軸與 $-X'$ 軸 (卽北方) 間的夾角，而令 Y 軸指向天頂，故 Y 軸與 Z' 軸重合。 (Z' 軸與 Y 軸均垂直紙面)

則如上述，角動量 $\mathfrak{M}$ 之分量及角速度卽爲

$$\mathfrak{M}_x = A\Omega\cos\lambda\sin\varphi \tag{Ⅶ-74}$$

$$\mathfrak{M}_y = A(\Omega\sin\lambda-\dot{\varphi})$$

$$\mathfrak{M}_z = C(w_0+\Omega\cos\lambda\cos\varphi)$$

$$w_x = \Omega\cos\lambda\sin\varphi$$

$$w_y = \Omega\sin\lambda-\dot{\varphi} \tag{Ⅶ-75}$$

$$w_z = w_0+\Omega\cos\lambda\cos\varphi$$

因 $w_0 \gg \Omega$，故 Euler 方程式乃

$$A\Omega\cos\lambda\cos\varphi\dot{\varphi}+(C-A)w_0(\Omega\sin\lambda-\dot{\varphi})=L$$

$$-A\ddot{\varphi}-(C-A)w_0\Omega\cos\lambda\sin\varphi=0 \tag{Ⅶ-76}$$

$$C\dot{w}_0-C\Omega\cos\lambda\sin\varphi\dot{\varphi}=0$$

L係爲了使限制陀螺之軸於水平面內所需施加之力偶矩。

(76) 之第二式乃平面單擺之方程式。

$$\ddot{\varphi}+\frac{C-A}{A}\,\Omega\,w_0\cos\lambda\sin\varphi=0 \tag{Ⅵ-77}$$

此單擺之平衡方向，係指向南北方向，此即廻轉羅盤所應用之原理。

6　Kowalevski 陀螺

前第 3 節 Euler 陀螺及第 4 節 Lagrange 陀螺外，尙有一情形，陀螺運動方程式可有解析函數的解，即所謂 Kowalevski 陀螺。

此陀螺有一固定點（設其座標爲 0,0,0)。在此點之慣性矩橢圓球是有對稱性的，$A=B=2C$。陀螺的質量中心不在對稱軸而係在與軸垂直的平面上（即中心之座標爲 $x_0=a, y_0=z_0=0$)。

按第（Ⅵ-45）式，此陀螺之 Lagrangian 函數爲

$$L=C\left\{\dot{\theta}^2+\dot{\psi}^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)^2\right\}$$

$$+Mga\sin\theta\cos\varphi \tag{Ⅵ-78}$$

第一個首次積分爲

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\psi}}=\text{常數}$$

或

$$2\dot{\psi}\sin^2\theta+(\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta)\cos\theta=k \tag{Ⅵ-79}$$

另一首次積分爲能之守恒定律

$$\dot\theta^2+\dot\psi^2\sin^2\theta+\frac{1}{2}(\dot\varphi+\dot\psi\cos\theta)^2$$

$$-\frac{1}{C}Mga\sin\theta\cos\varphi=h \qquad (\text{Ⅶ}-80)$$

此問題有 θ,ψ,φ 三變數，故求運動方程式之解，需有三個首次積分。另一積分可得之如下：由 Lagrange 方程式，可得

$$2\ddot\theta=(\dot\psi\cos\theta-\dot\varphi)\dot\psi\sin\theta+\frac{1}{C}Mga\cos\theta\cos\varphi \quad (\text{Ⅶ}-81)$$

$$2\frac{d}{dt}(\dot\psi\sin\theta)=-(\dot\psi\cos\theta-\dot\varphi)\dot\theta+\frac{1}{C}Mga\cos\theta\sin\varphi \quad (\text{Ⅶ}-82)$$

以 i 乘 (81) 式，作 (82) 之和，卽得

$$\frac{d}{dt}\ln\left\{(\dot\psi\sin\theta+i\dot\theta)^2+\frac{1}{C}Mga\sin\theta e^{-i\varphi}\right\}$$

$$=i(\dot\psi\cos\vartheta-\dot\varphi) \qquad (\text{Ⅶ}-83)$$

以 $-i$ 代 i，則得

$$\frac{d}{dt}\ln\left\{(\dot\psi\sin\theta-i\dot\theta)^2+\frac{1}{C}Mga\sin\theta e^{i\varphi}\right\}$$

$$=-i(\dot\psi\cos\theta-\dot\varphi) \qquad (\text{Ⅶ}-84)$$

由此二式，卽得

$$(\dot\theta^2+\dot\psi\sin^2\dot\theta)^2+\left(\frac{Mga}{C}\right)^2\sin^2\theta+\frac{Mga}{C}\sin\theta$$

$$\times\left\{e^{i\varphi}(\dot\psi\sin\theta+i\dot\theta)^2+e^{-i\varphi}(\dot\psi\sin\theta-i\dot\theta)^2\right\}$$

$$=\text{常數} \qquad (\text{Ⅶ}-85)$$

(79), (80), (85) 乃 ϑ,ψ,φ 的三個微分方程式。因 ψ 不出現於此三方程式，故可將 $\dot\psi$ 消去而得兩個爲 $\dot\theta,\dot\varphi$ 的方程式。這些方

程式的積分，是用所謂超橢圓函數（hyperelliptic function），其變數 t 係複數。（用複變數，便可利用複變函數的已知理論及結果。）在物理學中用複數的時間 t，想此是首次。

Kowalevski 係俄國女數學家。其原著見 Acta Math. Ⅶ, 1888 年，第 177 頁。V. V. Golubov 於 1953 年著「有固定點的剛體運動方程式之積分」講義（有英文譯本）。

附錄一：有一固定點之剛體運動方程式之解

前第 3 節之 Euler 陀螺，最初係 L. Euler 氏於 1750, 1758 年所研究的。其後 Poinsot 氏於 1834 年由幾何觀點討論此問題。(可參看 A. G. Webster 書)。1849 年 Jacobi 氏以橢圓函數解其運動方程式。

第 4 節之 Lagrange 陀螺，係 Lagrange 1788 年所研究，後有 Poisson 氏 (1815) 之工作。

一個不對稱的陀螺 (慣性矩 A, B, C 皆各不相等) 的運動方程式，是無法以已知的解析函數作解的。故陀螺理論的極有趣且重要的問題是：(1) 在何情形下，一個陀螺的運動方程式的解，可以時間 t 變數(包括複變數)的單值，分析函數 (meromorphic) 表之，(2) 在何情形下，一個陀螺的運動方程式，有四個積分，他們是角速度 w_x, w_y, w_z 的代數函數的。(所以需有四個積分之故，見下文。)

上述兩問題之答案，極爲有趣，即滿足上述條件的，祇有 Euler 陀螺，Lagrange 陀螺和 Kowalevski 陀螺而已。(此外圓球陀螺 $A=B=C$ 是簡單的特例。)

這問題的理論如下：設剛體之質量中心的座標爲 x_0, y_0, z_0 (座標系 X, Y, Z 乃固定於剛體的)。x_0, y_0, z_0 皆常數。使剛體之角速度爲 w_x, w_y, w_z。使地心引力的方向爲 Z 軸 (見第一章

（Ⅰ-26）式)。由（Ⅶ-18）式，得 Euler 方程式

$$
\begin{aligned}
&A\frac{dw_x}{dt}+(C-B)w_y w_z=(y_0\gamma-z_0\beta)Mg\\
&B\frac{dw_y}{dt}+(A-C)w_z w_x=(z_0\alpha-x_0\gamma)Mg,\\
&C\frac{dw_z}{dt}+(B-A)w_x w_y=(x_0\beta-y_0\alpha)Mg
\end{aligned}
\qquad (Ⅶ-86)
$$

又由第一章（Ⅰ-33b）式，可得下列 Poisson 方程式

$$
\begin{aligned}
&\frac{d\alpha_3}{dt}=w_z\beta_3-w_y\gamma_3\\
&\frac{d\beta_3}{dt}=w_x\gamma_3-w_z\alpha_3\\
&\frac{d\gamma_3}{dt}=w_y\alpha_3-w_x\beta_3
\end{aligned}
\qquad (Ⅶ-87)
$$

α_3, β_3, γ_3 乃 Z 軸對 XYZ 系之方向餘弦，見（Ⅰ-26）式。上六個方程式間，有

$$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1$$

之關係，故需另有一方程式。此可由（Ⅶ-51）中得之。如用（Ⅰ-33a）式之關係，可得下式

$$\frac{d\psi}{dt}=\frac{1}{\gamma_3}\left[w_z-\frac{\dot{\alpha}_3\beta_3-\dot{\beta}_3\alpha_3}{\alpha_3^2+\beta_3^2}\right] \qquad (Ⅶ-88)$$

（由（Ⅰ-26）及（Ⅶ-10），可得

$$\alpha_3=\sin\theta\sin\varphi,\quad \beta_3=\sin\theta\cos\varphi,\quad \gamma_3=\cos\theta)$$

剛體之轉動，乃求（86),（87),（88）式之解。

以 w_x, w_y, w_z 分別乘（86）三式，求三式之和並積分之，即得

$$\frac{1}{2}(Aw_x^2+Bw_y^2+Cw_z^2)-Mg(x_0\alpha_3+y_0\beta_3+z_0\gamma_3)=C_1 \text{ 常數} \tag{Ⅶ-89}$$

此乃第一個首次積分，即能量守恒定律也。

以 $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ 分別乘（86）三式，以 Aw_x, Bw_y, Cw_z 分別乘（87）三式，求六式之和並積分之，即得

$$Aw_x\alpha_3+Bw_y\beta_3+Cw_z\gamma_3=C_2 \text{ 常數} \tag{Ⅶ-90}$$

此乃第二個首次積分，即繞固定 $\bar{Z}$ 軸之角運動量分量守恒定律也。

第三個首次積分即

$$\alpha_3^2+\beta_3^2+\gamma_3^2=1 \tag{Ⅶ-91}$$

第四個首次積分，可獲得如下。玆以 Kowalevskya 陀螺爲例：

$$A=B=2C,\ y_0=z_0=0,\ x_0=a$$

由（86），即得

$$2\frac{dw_x}{dt}-w_yw_z=0$$

$$2\frac{dw_y}{dt}+w_zw_x=-\frac{Mga}{C}\gamma_3\equiv-c\gamma_3$$

$$\frac{dw_z}{dt}=\frac{Mga}{C}\beta_3\equiv c\beta_3$$

由此，可得（下文將 $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ 之指數 3 省去）

$$2\frac{d}{dt}(w_x+iw_y)=-iw_z(w_x+iw_y)-ic\gamma \tag{Ⅶ-92}$$

由（87）式，可得

$$\frac{d}{dt}(\alpha+i\beta)=-iw_z(\alpha+i\beta)+i\gamma(w_x+iw_y) \tag{Ⅶ-93}$$

以 (w_x+iw_y) 乘 (92) 式，以 c 乘 (93) 式，作二式之和，即得

$$\frac{d}{dt}\{(w_x+iw_y)^2+c(\alpha+i\beta)\}$$
$$=-iw_z\{(w_x+iw_y)^2+c(\alpha+i\beta)\}$$

故

$$\frac{d}{dt}\ln\{(w_x+iw_y)^2+c(\alpha+i\beta)\}=-iw_z \qquad (\text{VII}-94)$$

以同法，亦可得

$$\frac{d}{dt}\ln\{(w_x-iw_y)^2+c(\alpha-i\beta)\}=iw_z \qquad (\text{VII}-95)$$

故得

$$\{(w_x+w_y)^2+c(\alpha+i\beta)\}\{(w_x-iw_y)^2$$
$$+c(\alpha-i\beta)\}=\text{常數 } k^2$$

或

$$(w_x{}^2-w_y{}^2+c\alpha)^2+(2w_xw_y+c\beta)^2=k^2 \qquad (\text{VII}-96)$$

此乃第四個首次積分。上所得之 (89), (90), (91), (96) 式，係四個線性獨立的首次積分。

由 (86) 及 (87) 式，陀螺之問題，似需求六個首次積分（首次積分，皆係一次導數。由六個首次積分，以積分即可得原來運動方程式之全解）。惟下文即將指出祇需五個首次積分即足。(86), (87) 式可寫成下對稱式

$$\frac{dw_x}{P}=\frac{dw_y}{Q}=\frac{dw_z}{R}=\frac{d\alpha_3}{\Gamma_x}=\frac{d\beta_3}{\Gamma_y}=\frac{d\gamma_3}{\Gamma_z}=dt \qquad (\text{VII}-97)$$

此處之 $P, Q, R, \Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$ 皆不含 t。故上六個方程式變爲下列

五個方程式

$$\frac{dw_x}{P}=\frac{dw_y}{Q}=\frac{dw_z}{R}=\frac{d\alpha_3}{\Gamma_x}=\frac{d\beta_3}{\Gamma_y}=\frac{d\gamma_3}{\Gamma_z} \qquad (\text{VII}-98)$$

將此積分，可得

$$w_y,\ w_z,\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3 \text{ 為 } w_x \text{ 之函數,} \qquad (\text{VII}-99)$$

及

$$\frac{dw_x}{P}=dt,\ \text{或}\quad t=\int\frac{dw_x}{P(w_x)}\equiv F(w_x)$$

或
$$w_x=w_x(t) \qquad (\text{VII}-100)$$

換言之，吾人祇需有五個首次積分（不含 t 的）如

$$f_k(w_x,w_y,w_z,\alpha_3,\beta_3,\gamma_3)=C_k,\quad k=1,2,\cdots 5, \quad (\text{VII}-101)$$

則（86),（87）之解即可獲得。

前文已獲（89),(90),(91),(95)四個首次積分。由(86),(87)式,的性質可見（97）式中之 $P, Q, R, \Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z$，有下列

$$\frac{\partial P}{\partial w_x}=\frac{\partial Q}{\partial w_y}=\frac{\partial R}{\partial w_z}=\frac{\partial \Gamma_x}{\partial \alpha}=\frac{\partial \Gamma_y}{\partial \beta}=\frac{\partial \Gamma_z}{\partial \gamma}=0 \quad (\text{VII}-102)$$

由此可得下方程式

$$\frac{\partial P}{\partial w_x}+\frac{\partial Q}{\partial w_y}+\frac{\partial R}{\partial w_z}+\frac{\partial \Gamma_x}{\partial \alpha}+\frac{\partial \Gamma_y}{\partial \beta}+\frac{\partial \Gamma_z}{\partial \gamma}=0 \quad (\text{VII}-103)$$

在下附錄中，我們將證明一「最後乘因數」定理，按此定理，如已知有四個首次積分，則可用（103）式,得第五個首次積分。在前（89),(90),（91),（96）各式已有四個首次積分。故可獲此陀螺運動方程式之解。

附錄二　最後乘因數 (Last multiplier)

此觀念乃 Jacobi 氏 1844 年所引入者。

定理： 設有一系列方程式（n 個）

$$\frac{dx_1}{X_1}=\frac{dx_2}{X_2}=\cdots\cdots=\frac{dx_n}{X_n}=\frac{dx}{X} \tag{VII-104}$$

其 $X_1, X_2\cdots$ 皆 $x_1, x_2, \cdots, x$ 的函數。又設已知其 $(n-1)$ 個積分

$$f_j(x_1, x_2, \cdots x_n, x)=c_j,\ \text{常數},\ j=1, 2, \cdots(n-1)$$

則其第 n 個積分，可由下方程式之積分得之：

$$\frac{M}{J}(Xdx_n-X_n dx)=\text{常數}$$

M 乃下偏微分方程之任何解

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(MX_1)+\frac{\partial}{\partial x_2}(MX_2)+\cdots+\frac{\partial}{\partial x_n}(MX_n)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(MX)=0 \tag{VII-105}$$

J 乃　$J=\dfrac{\partial(f_1, f_2, \cdots f_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \cdots x_{n-1})}$

M 稱爲最後乘因數。

爲簡單計，兹例證此定理如下：設方程式爲

$$\frac{dx}{X}=\frac{dy}{Y}=\frac{dz}{Z} \tag{VII-106}$$

設

$$f(x, y, z)=c_1,\quad g(x, y, z)=c_2 \tag{VII-107}$$

爲兩個首次積分。故

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx+\frac{\partial g}{\partial y}dy+\frac{\partial g}{\partial z}dz=0 \qquad (\text{VII}-108)$$

故得

$$\frac{dx}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z}\\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z}\end{vmatrix}}=\frac{dy}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial z} & \frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial g}{\partial z} & \frac{\partial g}{\partial x}\end{vmatrix}}=\frac{dz}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix}} \qquad (\text{VII}-109)$$

故 X, Y, Z 與 (109) 式之三個行列成正比。玆 Jacobi 引入最後乘因數 M 如下

$$MX=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z}-\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}$$

$$MY=\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial z} \qquad (\text{VII}-110)$$

$$MZ=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y}-\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}$$

由此即得下式為一全導數

$$\frac{\partial}{\partial x}(MX)+\frac{\partial}{\partial y}(MY)+\frac{\partial}{\partial z}(MZ)=0 \qquad (\text{VII}-111)$$

定理: 如已知第 (106) 式之方程式系之一個首次積分，又已知 M，則另一個首次積分可由一全微分方程式積分得之。

設 (106) 之一個首次積分已知為

$$\phi(x,y,z)=c \text{ 常數}, \quad d\phi=dc=0 \qquad (\text{VII}-112)$$

玆以 x, y, ϕ 表 z。使另一個首次積分為

$$F(x,y,z)=\bar{F}(x,y,\phi)$$

故

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{F}}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial x},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{F}}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial \bar{F}}{\partial \phi}\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

以此代入（110）式，得

$$MX=\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}\frac{\partial \phi}{\partial z},\quad MY=-\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}\frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad (\text{VII}-113)$$

$$d\bar{F}=\frac{\partial \bar{F}}{\partial x}dx+\frac{\partial \bar{F}}{\partial y}dy+\frac{\partial \bar{F}}{\partial \phi}d\phi$$

$$=\frac{M}{\dfrac{\partial \phi}{\partial z}}(-Ydx+Xdy),\ \text{一全導數} \qquad (\text{VII}-114)$$

$M/\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$ 乃所謂積分因子 (integrating factor)。此間之 $\frac{\partial \phi}{\partial z}$ 中 z，務由（112）式以 x, y 表之)。故由一已知之首次積分 ϕ 及最後乘因數 M，另一個首次積分可積分 (114) 之全微分方程式得之。

習題

1. 設一簡單擺之圓頻率爲 $w\left(w=\frac{2\pi}{T}=\sqrt{\frac{g}{l}}\right)$，其方程式爲

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-w^2\sin\theta$$

其開始條件爲當 $\theta=\alpha$ 時，$\frac{d\theta}{dt}=0$，試求

$$wt=\int_0^{\frac{\theta}{2}}\frac{d\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

此積分謂爲橢圓積分的第一種。如作下列變換

$$\sin\frac{\theta}{2}=k\sin x,\quad k=\sin\frac{\alpha}{2}$$

試證此單擺之週期 T 爲

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-k^2x^2}}$$

$$\simeq 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2}+\frac{9}{64}\sin^4\frac{\alpha}{2}\cdots\right)$$

如 α 爲 1.5°，則 T 與 $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ 之差若干？

2. 試證下列定理:

一個不對稱(慣性矩 $A>B>C$)的剛體繞其主軸之轉動，祇有繞其最大及最小慣性矩軸的係穩定的，其繞中間 B 軸則係不穩定的。

此定理的證明，將留作讀者的習題。其主要步驟如下: 在

Euler 方程式 (18)，開始時使 w_1(w_x, w_y, w_z 之一) 等於常數 w_0，而 w_2, w_3 等於零。繼引入微擾，$\dot{w}_1$ 將仍爲零（在第一階的接近算），而由 w_2, w_3 之方程式，可計算其第一階的接近值（不再等於零）。假設 $w_2=ae^{\lambda t}, w_3=be^{\lambda t}$ 之解，求 λ 的二次（代數）方程式之解，即可證明設定理。

3. 一直角圓錐體高爲 a，其圓底面的半徑爲 $\frac{1}{2}a$，其質量(幾何)中心係一固定點。開始時，使錐繞一與其對稱軸作夾角 α 的軸而轉動。證明錐的尖頂的軌跡，係一半徑爲 $\frac{3}{4}a\sin\alpha$ 之圓圈。

4. 一個均勻的薄圓碟，其中心係一固定點，不受外力的作用。在開始時，使碟對一直徑線（與固定的 X' 軸符合的）之角速度爲 w，對碟之對稱軸 OZ 之角速度爲 Ω（此對稱軸該時與固定的 Z' 軸相符合)。證明在 t 時，

$$\theta=2\sin^{-1}\left(\frac{w}{\xi}\sin\frac{\xi t}{2}\right)$$

$$\eta=\cot^{-1}\left(\frac{2\Omega}{\xi}\tan\frac{\xi t}{2}\right)$$

$$\xi=\sqrt{w^2+4\Omega^2}$$

此處的 θ 乃係對稱軸 OZ 與 OZ' 之夾角，η 乃 $Z'OX'$ 平面與 $Z'OZ$ 平面之角（此 η 乃本章第 1 節圖中的 $\eta=\frac{\pi}{2}-\psi$)。

5. 一圓形碟在光滑水平面上以角速度 w 繞其對稱軸自轉。證明當運動達穩定狀態時，碟的旋進 (precession) 的兩個速度 $\dot{\phi}$，滿足下式

$$\frac{1}{2}k^2\sin\theta\cos\theta\dot{\psi}^2-k^2w\sin\theta\dot{\psi}-Mga\cos\theta=0$$

M 爲碟的質量， a 爲其半徑，Mk^2 爲對其對稱軸之慣性矩，θ 爲此軸與垂直線之夾角。

第八章

Lagrange 方程式:廻轉力

在前一章，我們討論陀螺或廻轉器的運動時，曾指出一些由物體轉動所產生的奇異的特徵。如在（Ⅶ-56）式中，曾得

$$\phi = \frac{a}{2b} = \frac{Mgl}{\mathfrak{M}_i},$$

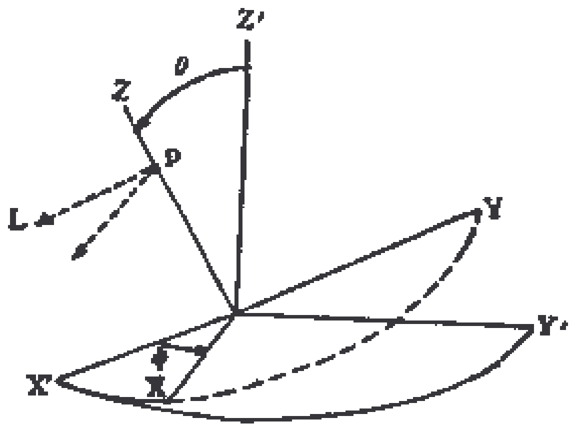
今因重力 Mg 對 OK 線有一力矩，使 θ 角增加（見七章，第 1 節之圖)。此力矩與陀螺繞其對稱軸的自旋組合後，便產生繞固定軸 Z'（與 OK 垂直）的旋進（角速度爲 $\dot{\phi}$)。前章第 5 節中討論廻轉器，我們由（Ⅶ-72）知繞 OY 軸的速度會產生一對 OX 軸的力偶矩，在（Ⅶ-76）中，亦可得相同的結果。在本章中，我們將討論此種效應及其普遍的情形。

1 廻轉力 (gyroscopic force)

1）在我們正式導出廻轉力前，先對一被限制於一垂直平面上，以等角速度 $\dot{\theta}$ 運動的對稱陀螺，作一初淺的分析。在此假設下，我們有

$$\phi = \text{常數}, \quad \dot{\theta} = \text{常數} \tag{Ⅷ-1}$$

按假定 ϕ＝常數，故 $\dot{\phi}=0$，在不失廣義性下，我們將取固定



的 $OY'Z'$ 平面爲自旋軸運動之平面（即，OK 線位於 OX 軸上)。則由 Euler 運動關係式，即可得沿 $OXYZ$ 軸之分量爲

$$w_x = \dot{\theta} \cos \varphi$$
$$w_y = -\dot{\theta} \sin \varphi \qquad (\text{Ⅶ-2})$$
$$w_z = \dot{\varphi}$$

（詳見Ⅶ-13）而 Euler 動力方程式

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + [\boldsymbol{w} \times \mathfrak{M}] = \text{T} \qquad (\text{Ⅶ-3})$$

因 $\dot{\theta}$＝常數，故變爲

$$-c\dot{\theta}\,\dot{\varphi} \sin \varphi = L$$
$$-c\dot{\theta}\,\dot{\varphi} \cos \varphi = M \qquad (\text{Ⅶ-4})$$
$$c\ddot{\varphi} = 0,\ 或\ \dot{\varphi} = 常數$$

L, M 係使陀螺按照（1）運動所須施加之力偶矩。

力偶矩 L 可以下法供給之：在支點上方單位距離處之 P 點上（對稱軸上之點）沿 $-OY$ 軸施一等於 L 之力。支點則沿 OY 提供一相等之力。同理，力偶矩 M 可由在 P 沿 OX 施一等於 M 之力，而支點則沿 $-OX$ 軸提供一相等之力。

如將 L, M 等力，在 P 點沿 OX, OY, OZ 軸分解之，即可得

$$沿\ OX'\text{:}\quad L \sin \varphi + M \cos \varphi = -C\dot{\theta}\,\dot{\varphi} = -\mathfrak{M}_z \dot{\theta}$$
$$沿\ OY'\text{:}\quad -L \cos \theta \cos \varphi + M \cos \theta \sin \varphi = 0 \qquad (\text{Ⅶ-5})$$
$$沿\ OZ'\text{:}\quad -L \sin \theta \cos \varphi + M \sin \theta \sin \varphi = 0$$

故作用於 P 點，以保持（1）之運動之合力爲 $-M_z\dot{\theta}$（沿 OX' 軸），此力與運動平面相互垂直（上面選擇 $\phi=0$）。

第七章第 3 節中，曾證明〔$\mathfrak{M}\times\boldsymbol{w}$〕係由轉動所產生的離心力的力矩 $\boldsymbol{S}$。因此 Euler 方程式（3）乃是說有效力矩，等於外力與離心力的力矩之和，即

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt}=\boldsymbol{S}+\mathfrak{T}\text{（見（Ⅷ-24）式）}\qquad\text{（Ⅷ-6）}$$

最後，我們由 Lagrange 方程式直接導出上述之結果。陀螺之動能爲

$$T=\frac{1}{2}\left[A(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2)+C(\dot{\varphi}+\cos\theta\dot{\psi})^2\right]\qquad\text{（Ⅷ-7）}$$

保持運動（1）所需之外力 $Q_\theta, O_\psi, Q_\varphi$ 爲

$$Q_\theta=\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}-\frac{\partial T}{\partial\theta}=0,$$

$$Q_\psi=\frac{d}{dt}(C\dot{\varphi}\cos\theta)=-\mathfrak{M}_z\sin\theta\,\dot{\theta}\qquad\text{（Ⅷ-8）}$$

$$Q_\varphi=C\ddot{\varphi}$$

但這些式與（4）及（5）式皆相同。這個導法指出一重要之點，即 Q_ψ 力係由 Lagrangian 函數中與速度成線性關係的部分而來的。

2）爲了表示廻轉力的性質，茲考慮一簡單情形，即第七章的 Lagrange 陀螺，當其幾乎在垂直之位置（即 θ 角很小）時。如很小，我們可將其頂點的運動，投影在水平 OXY 面上。其座標爲：

$$r=\sin\theta,\quad x'=r\sin\phi,\quad y'=-r\cos\phi\qquad\text{（Ⅷ-9）}$$

因此，如把撇號去掉，即得

$$\dot{r}=\cos\theta\,\dot{\theta}\simeq\dot{\theta},\quad \dot{\phi}=\frac{x\dot{y}-y\dot{x}}{x^2+y^2},\quad \cos\theta\cong1-\frac{x^2+y^2}{2} \tag{Ⅷ-10}$$

Lagrangian 函數爲

$$L=\frac{1}{2}[A(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2)+C(\dot{\varphi}+\cos\theta\dot{\phi})^2]-Mgl\cos\theta \tag{Ⅷ-11}$$

因 φ 係一循環座標，我們可用 Routh 函數

$$R=L-\mathfrak{M}_z\dot{\varphi}=\frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2)+\mathfrak{M}_z\cos\theta\dot{\phi}$$

$$-\frac{\mathfrak{M}_z^2}{2C}-Mgl\cos\theta \tag{Ⅷ-12}$$

($\mathfrak{M}_z=C(\dot{\varphi}+\cos\theta\,\dot{\phi})$ 係一常數)。如引用 (10) 及 $\dot{r}^2+r^2\dot{\phi}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2$，則 (12) 式變成

$$R=\frac{A}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2)+\phi_x\dot{x}+\phi_y\dot{y}-Mgl\left(1-\frac{x^2+y^2}{2}\right)$$

$$-\frac{\mathfrak{M}_z^2}{2C} \tag{Ⅷ-13}$$

此處

$$\phi_x=y\mathfrak{M}_z\left(-\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{1}{2}\right),\quad \phi_y=x\mathfrak{M}_z\left(\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{1}{2}\right) \tag{Ⅷ-14}$$

及

$$\frac{\partial\phi_x}{\partial y}-\frac{\partial\phi_y}{\partial x}=\mathfrak{M}_z \tag{Ⅷ-15}$$

如將 Lagrange 方程式應用到 $R(x,y,\dot{x},\dot{y})$，則可得

$$A\ddot{x}+\mathfrak{M}_z\dot{y}-Mglx=0 \tag{Ⅷ-16}$$

$$A\ddot{y}-\mathfrak{M}_z\dot{x}-Mgly=0$$

運動之性質，可由下得出。

如 (16) 式中之 $l=0$ (即陀螺支於其重心，即第七章3, 4 兩

節的 Euler 陀螺)，則 (16) 變爲

$$\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}=0 \tag{Ⅷ-17}$$

$$\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}=\frac{\mathfrak{M}_z}{A}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} \tag{Ⅷ-18}$$

(17) 式明示速度之方向，係與加速度之方向垂直；(18) 式則明示加速度之值與速度之值成比例。此乃「廻轉力」之特性。(17), (18) 之解爲

$$x=a\cos\left(\frac{\mathfrak{M}_z}{A}t\right),\quad y=a\sin\left(\frac{\mathfrak{M}_z}{A}t\right) \tag{Ⅷ-19}$$

故運動爲一均勻之旋進。

如 $l\neq 0$ (Lagrange 陀螺)，則可定義

$$\xi=\sqrt{A}\,x,\quad \eta=\sqrt{A}\,y,\quad b=\frac{\mathfrak{M}_z}{A},\quad c=\frac{Mgl}{A} \tag{Ⅷ-20}$$

故 (16) 式可簡化成

$$\ddot{\xi}+b\dot{\eta}-c\xi=0,\quad \ddot{\eta}-b\dot{\xi}-c\eta=0 \tag{Ⅷ-21}$$

上式之解，可假設如下之形式

$$\xi=a_1e^{i\sqrt{\lambda}\,t},\quad \eta=a_2e^{i\sqrt{\lambda}\,t} \tag{Ⅷ-22}$$

則由 (21) 卽得

$$-(c+\lambda)a_1+ib\sqrt{\lambda}\,a_2=0$$

$$-ib\sqrt{\lambda}\,a_1-(c+\lambda)a_2=0 \tag{Ⅷ-23}$$

其行列式方程

$$\lambda^2-(b^2-2c)\lambda+c^2=0 \tag{Ⅷ-24}$$

有 λ_1, λ_2 二根，其關係如下

$$\lambda_1+\lambda_2=b^2-2c,\quad \lambda_1\lambda_2=c^2 \tag{Ⅷ-25}$$

如 λ 爲正實數，則解 (22) 將爲時間的振盪函數。(24) 式之兩根爲實數之條件爲

$$b^2-4c>0 \tag{Ⅶ-26}$$

因此在幾乎垂直運動之 Lagrange 陀螺，我們可令 b 很大，(即快速自旋)，俾其對垂直軸作穩定之振盪。

一個倒立的陀螺 (重心在支點之下)，c 爲負數 ((20) 式中 $l<0$)。故 (26) 之條件，永遠可以滿足。

2　廣義「廻轉力」

在上節之作法，特別是 Routh 函數的形式 (13) 式，指示我們可推廣「廻轉力」的定義，以包括 Lagrangian 函數中與速度成線性關係的部份所產生的力，即

$$L_1=\sum_{i=1}^{k}\phi_i(q_1,\cdots\cdots q_n,t)\dot{q}_i \tag{Ⅶ-27}$$

設 $Q_i^{(1)}$ 爲廣義力 Q_i 中相應 L_1 的部份，即

$$Q_i^{(1)}=\frac{d}{dt}\frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L_1}{\partial q_i} \tag{Ⅶ-28}$$

$$=\frac{d\phi_i}{dt}-\sum_j^k\frac{\partial\phi_j}{\partial q_i}\dot{q}_j$$

$$=\sum_j G_{ij}\dot{q}_j+\frac{\partial\phi_i}{\partial t} \tag{Ⅶ-29}$$

$$G_{ij}=\frac{\partial\phi_i}{\partial q_j}-\frac{\partial\phi_j}{\partial q_i}=-G_{ji} \tag{Ⅶ-30}$$

則我們見 (14),(15) 式中之 ϕ_x,ϕ_y,即係此種形式。上面之 $Q_i^{(1)}$

謂之「廻轉力」(見 Kelvin 及 Tait, Natural philosophy 345節)。此係依與廻轉器之類比而來的*。

按上述之“廻轉力”之定義，則下面均係特殊之情形:

1）由循環座標引起的廻轉力

第三章第5節（Ⅲ-29）中曾證明過，如一系統含有$q_1 \cdots q_k$等之循環座標時，則 Routh 函數

$$R=L-\sum_{i=1}^{k}\dot{q}_i\,\beta_i \tag{Ⅷ-32}$$

即包括有與循環速度成線性關係的項。這種情形的例子在前節中已詳細討論過。

2）由座標系轉動所引起的廻轉力

此已由第五章中討論過。由（V-3）及（V-4）式，可得

$$\begin{aligned}\frac{2T}{m}=&\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2+2\dot{x}(w_y z-w_z y)+2\dot{y}(w_z x-w_x z)\\&+2\dot{z}(w_x y-w_y x)+(w_y z-w_z y)^2\\&+(w_z x-w_x z)^2+(w_x y-w_y x)^2\end{aligned} \tag{Ⅷ-33}$$

$$\begin{aligned}\frac{X}{m}=&\ddot{x}+2(w_y\dot{z}-w_z\dot{y})+z\dot{w}_y-y\dot{w}_z-x(w_y^2+w_z^2)\\&+w_x(w_y y+w_z z)\end{aligned} \tag{Ⅷ-34}$$

T 中之 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ 之係數及 X,Y,Z 中的 $\dot{x},\dot{y},\dot{z}$ 的係數(事實上，即 Coriolis 項）皆滿足上（30）式關係。

3）由變化的約束條件所產生的廻轉力

---

* $Q_i^{(1)}$ 雖與速度成線性關係，然如 $\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$，則仍係守恒力，因 $Q^{(1)}$ 所做之功率，由於（30）式，知其爲零之故也，即

$$\sum Q_i^{(1)}\dot{q}_i=\sum_{i,j}G_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j=0 \tag{Ⅷ-31}$$

第三章第 2 節已提到當時間 t 在由直角座標至廣義座標之變換方程式中明顯地出現時，

$$x_i=x_i(q_1,\cdots,q_m,t),\quad y_i=y_i(q_1,\cdots,q_m,t)$$

$$z_i=z_i(q_1,\cdots,q_m,t) \tag{8-35}$$

則 T 之式中將有速度 $\dot{q}_k$ 之一次項，如

$$2T=\sum_i^m\sum_x^z m_i\left\{\sum_{j,k}^m\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k+2\frac{\partial x_i}{\partial t}\sum_j\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\right)^2\right\} \tag{8-36}$$

與 $\dot{q}$ 等成線性關係之項，可產生如下之力

$$Q_k^{(1)}=\sum_i\sum_x\left\{\left[\frac{\partial}{\partial q_l}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\ \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)-\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\ \frac{\partial x_i}{\partial q_l}\right)\right]\dot{q}_l\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x_i}{\partial t}\ \frac{\partial x_i}{\partial q_k}\right)\right\} \tag{8-37}$$

4）對穩定（steady）運動之微小振動

我們已知在一有心力場中的質點，圓周的運動，永遠是一種可能的運動。這種運動乃一穩定之運動。穩定運動的較普遍的定義乃係：如一系統有循環座標，且如此系統中之非循環座標 $q_j=$ 常數，循環速度 ξ_i 亦爲常數，則此運動，即爲一穩定運動。如一質點在有心力場 $V(r)$ 中做圓周的運動，則 $\dot{\varphi}=$ 常數，及 $r=$ 常數。另一種穩定運動的例子，是自旋陀螺的純旋進運動。在此情況下，$\dot{\phi}=$ 常數，且 $\theta=$ 常數。（見第三章 3, 4 節）

當一穩定運動被微微擾動時，在某些條件下，該系統即可對穩定運動做微小的振動。如第七章 4, 4）節的章動，即是這種運動的例子。堅定（stable）的穩定運動，即係當一穩定運動所受到的微擾趨近於零時，可回復至其原來之穩定運動者。

在本節中，我們將討論堅定的穩定運動的微小振盪。

茲以 $\xi_1,\cdots,\xi_k$ 表示循環座標，非循環座標則以 $q_{k+1}\cdots q_m$ 表示之。我們將用如下之簡寫法，

$$i,j=1,\cdots k,\quad r,s=k+1,\cdots,m \tag{Ⅷ-38}$$

且如一項中某指數 j 重複出現，即代表作該指數之和。則

$$2T=\sum a_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s+2\sum a_{rj}\dot{q}_r\dot{\xi}_j+\sum a_{ij}\dot{\xi}_i\dot{\xi}_j \tag{Ⅷ-39}$$

因 ξ_i 係循環座標，故如 $\dfrac{\partial V}{\partial\xi}=0$，則可得

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\xi}_j}=\sum a_{rj}\dot{q}_r+\sum a_{ij}\dot{\xi}_i=\beta_j \tag{Ⅷ-40}$$

上式可解出

$$\dot{\xi}_i=\sum c_{ij}(\beta_j-\sum a_{rj}\dot{q}_r), \tag{Ⅷ-41}$$

c_{ij} 係行列式 $D=\|c_{ij}\|$ 中 a_{ij} 的餘因子除以行列式 D。以 (41) 代入 (39) 即可得

$$2T=\sum_{r,s}(a_{rs}-\sum c_{ij}a_{ri}a_{sj})\dot{q}_r\dot{q}_s+\sum c_{ij}\beta_i\beta_j \tag{Ⅷ-42}$$

則 Routh 函數為

$$\begin{aligned}R&=T-V-\sum\dot{\xi}_i\beta_i\\&=\frac{1}{2}\sum_{r,s}(a_{rs}-\sum c_{ij}a_{ri}a_{sj})\dot{q}_r\dot{q}_s\\&\quad+\sum_{i,j,r}c_{ij}\beta_i a_{rj}\dot{q}_r-\frac{1}{2}\sum c_{ij}\beta_i\beta_j-V\end{aligned} \tag{Ⅷ-43}$$

在不失普遍性下，茲假設在穩定狀態時 q_r 之值為零，故在振盪中 q 等係很小之量。我們將 R 中之係數對穩定運動展開，且忽略比二次項更高之小量，即可得，

$$R=\frac{1}{2}\sum(a_{rs}-\sum c_{ij}a_{ri}a_{sj})_0\dot{q}_r\dot{q}_s+\sum(c_{ij}\beta_i a_{rj})_0\dot{q}_r$$

$$+\sum\Phi_r\dot{q}_r-\frac{1}{2}\sum(c_{ij}\beta_i\beta_j)_0-\frac{1}{2}\sum\left[\frac{\partial(c_{ij}\beta_i\beta_j)}{\partial q_r}\right]_0 q_r$$

$$-\frac{1}{4}\sum\left[\frac{\partial^2(c_{ij}\beta_i\beta_j)}{\partial q_r\partial q_s}\right]_0 q_r q_s-V \tag{Ⅷ-44}$$

$$\Phi_r=\sum_s\left[\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\sum c_{ij}\beta_i a_{rj}\right)\right]_0 q_s \tag{Ⅷ-45}$$

各 $(c_{ij}\beta_i a_{rj})\dot{q}_r$ 項對 Lagrange 運動方程式並無用處，故在考慮該系統的運動時，這些項卽可略去。因運動方程式須爲 $q_r=0$ 所滿足，故R 應無與 q 成線性關係然與 $\dot{q}$ 無關之項，故 R 之形式必如下所示

$$R=\frac{1}{2}\sum\alpha_{rs}\dot{q}_r\dot{q}_s+\frac{1}{2}\sum\beta_{rs}q_r q_s+\sum\Phi_r\dot{q}_r, \tag{Ⅷ-46}$$

此處

$$\alpha_{rs}=\alpha_{sr},\quad \beta_{rs}=\beta_{sr}$$

運動方程式卽爲

$$\sum[\alpha_{rs}\ddot{q}_s+G_{rs}\dot{q}_s-\beta_{rs}q_s]=0 \tag{Ⅷ-47}$$

$$G_{rs}=\frac{\partial\Phi_r}{\partial q_s}-\frac{\partial\Phi_s}{\partial q_r}=-G_{sr} \tag{Ⅷ-48}$$

此與（30）式相似。

由上可見，對穩定運動的振盪，顯示有（29）式所定義的廻轉力。

例如一在有心力場 $V(r)$ 中，以半徑 a 作圓周運動之質點。茲使 $r=a+\rho$，$\rho\ll a$（振盪運動）。因 φ 爲循環座標，故有

$$R=\frac{m}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2)-V(r)-mr^2\dot{\varphi}\dot{\varphi}=\frac{m}{2}\dot{r}^2-V-\frac{\beta^2}{2mr^2}$$

對穩定運動，則可得

$$\frac{\partial R}{\partial r}=0,\quad 或\quad \beta=ma^3\frac{\partial V}{\partial r}$$

如將 R 在 $r=a$ 展開，即得

$$R=\frac{m}{2}\dot{q}^2-\frac{1}{2}\rho^2\left[\left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right)_0+\frac{3}{a}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_0\right]+常數。$$

為使振盪堅定，則「位能」必須為確切正值，即

$$V_0''+\frac{3}{a}V_0'>0$$

在此情形下，對圓周運動之振盪週期為 $2\pi\Big/\sqrt{V_0''+\frac{3}{a}V_0'}$

5）在約束下之微小振盪

設原系統之動能及位能為

$$2T=\sum\dot{q}_i^2,\quad 2V=\sum\lambda_i q_i^2 \qquad (\text{VIII}-49)$$

假設有一約束條件為

$$f(q_1,\cdots,q_n)=0 \qquad (\text{VIII}-50)$$

且 f 與時間無關。則 q 等必須滿足

$$\sum\frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i=0,\quad 或\quad \sum A_i\dot{q}_i=0 \qquad (\text{VIII}-51)$$

在（51）及（49）兩式中，消去 q_n，即得

$$2T=\sum_i^{n-1}\dot{q}_i^2+\frac{1}{A_n^2}\left(\sum_i^{n-1}A_i\dot{q}_i\right)^2 \qquad (\text{VIII}-52)$$

$$2V=\sum_i^{n-1}\lambda_i q_i^2+\frac{\lambda_n}{A_n^2}\left(\sum_i^{n-1}A_i q_i\right)^2$$

由 Lagrange 方程式可得

$$\ddot{q}_i+\lambda_i q_i+\mu A_i=0,\quad i=1,\cdots,n-1 \qquad (\text{VIII}-53)$$

$$\mu=\frac{1}{A_n^2}\sum_i^{n-1}A_i\ddot{q}_i+\frac{\lambda_n}{A_n^2}\sum_i^{n-1}A_i q_i=-\frac{1}{A_n}(\ddot{q}_n+\lambda_n q_n) \qquad (\text{VIII}-54)$$

除了（53）之形式外，當然亦可將此受約束系統的運動方程式寫成下式

$$\ddot{q}_i+\lambda_i q_i+\mu A_i=0,\quad i=1,\cdots,n \tag{Ⅷ-55}$$

μ 爲一未定之乘數。

今設其解的形式爲

$$q_i=\alpha_i\cos\sqrt{\lambda}\,t,\quad i=1,\cdots,n;$$
$$\mu=\nu\cos\sqrt{\lambda}\ t,\quad \sqrt{\lambda}=2\pi\nu \tag{Ⅷ-56}$$

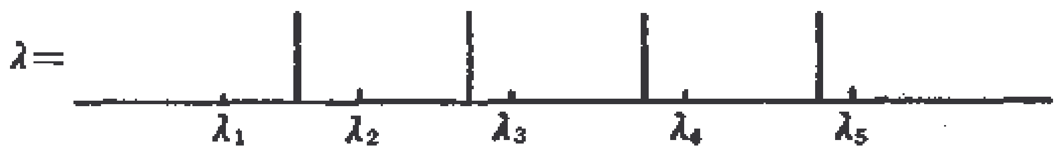
則（55）即得

$$\alpha_i(\lambda_i-\lambda)+\nu A_i=0,\quad i=1,\cdots,n \tag{Ⅷ-57}$$

將上式代入（51），即得

$$\sum A_i\alpha_i=0,\ 或\ \sum_i^n\frac{A_i^2}{\lambda_i-\lambda}=0 \tag{Ⅷ-58}$$

（58）式有 λ 之 $n-1$ 個根，此些根係界於未受約束系統的根 $\lambda_1\cdots\lambda_n$ 之間，如



如約束之條件與時間相依，則（51）式須代以下式，

$$\sum A_i\dot{q}_i+B=0$$

而（52）式則須代以下式

$$2T=\sum_i^{n-1}\dot{q}_i^2+\frac{1}{A^2}\Big(\sum_i^{n-1}A_i\dot{q}_i\Big)^2+\frac{2B}{A_n^2}\sum_i^{n-1}A_i\,\dot{q}_i+\frac{B^2}{A_n^2} \tag{Ⅷ-60}$$

雖則振動係對一平衡組態的振動，但與 $\dot{q}$ 成線性關係之項，仍引致廻轉力的。

第九章

Lagrange 方程式：電流

Lagrange 方程式所包涵的動力學上的普遍方法，是很重要的，因它避免了一個系統中觀測不到的部分一即隱態運動，而只討論已知的力。Maxwell 把這種動力學方法，形式性的應用到電的系統。他將某些可觀測到的量，視作動力學變數；且假設它們是遵守動力學方程式的，而那些不知道的部分，就是介質，或以太。電場及磁場存於以太中，且在以太中傳播。這樣的動力學的普遍方法的成功，顯示該方法的普遍性，雖則我們不能認爲電的系統確即與力學系統相同。

如上指出，將動力學方法應用到電學系統，僅是一種形式上的方法。因此，我們無法就認定電流所產生的電場及磁場能量，究係動能或位能。欲決定此點，可考慮二個帶電流 I_1 及 I_2 之電路。其吸引力爲 $I_1I_2\dfrac{\partial L_{12}}{\partial r}$，$L_{12}$ 係互感係數，而 r 則係一參數，定義二電流之距離者。今設加上一外力$F=-I_1I_2\dfrac{\partial L_{12}}{\partial r}$，使二者保持固定。如 T, V 爲系統之動能及位能，則 Lagrange 方程式即爲

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}-\frac{\partial(T-V)}{\partial r}=F \qquad (\text{IX}-1)$$

在平衡狀態下，$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{r}}=0$，及 $F=-I_1I_2\frac{\partial L_{12}}{\partial r}$。故

$$\frac{\partial (T-V)}{\partial r}=I_1I_2\frac{\partial L_{12}}{\partial r} \tag{K-2}$$

今此系統之能量爲

$$W=\frac{1}{2}\left(L_{11}I_1^2+2L_{12}I_1I_2+L_{22}I_2^2\right) \tag{K-3}$$

L_{11}, L_{22} 係自感係數。由此即得

$$I_1I_2\frac{\partial L_{12}}{\partial r}=\frac{\partial W}{\partial r}=\frac{\partial (T+V)}{\partial r} \tag{K-4}$$

由 (2) 及 (4) 式之比較，可知 $V=0$，故電流系統之能量，可認爲全係「動能」性的。

1　作用於電路上之機械力

設 q_j 係一廣義座標，且使 $-\Theta_j$ 代表保持平衡所須施之外力(相應於 q_i 的)。一個系統，如其電流爲常數，則電流 I_j＝循環速度＝常數，而 q_j 爲經由 L_{mn} 等在能量中出現的非循環座標。按第四章第 2 節，此系統即爲一「等循環」之系統。

Lagrange 方程式爲

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=-\Theta_j$$

平衡時，$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=0$，且使 q_j 增加之力爲 $\Theta_j=\frac{\partial T}{\partial q_j}$。故此系統宛如具有位能 $-T$，此與第四章第 2 節相符。

系統所增之動能爲 $\sum\frac{\partial T}{\partial q_j}dq_j$。經相同的位移，該系統之電

力所作的功爲 $\sum\Theta_j dq_j=\sum\frac{\partial T}{\partial q_j}dq_j$。因此電池供給了兩倍於該系統所增的能量。此乃電學理論中一熟知之定理（參閱 Jeans, The Bathematical Theory of Electricity and Magnetism)。此亦說明了第四章第 2 節關於等循環運動之定理。(參看本書第三册電磁學，第一章 3(4) 節)。

2 電流之感應

設一電流的系統保持固定位置，而使電流變化。設 I_s 係座標 Q_s 之循環速度，因 $I_s=\frac{dQ_s}{dt}=\dot{Q}_s$，$I_s$，$Q_s$ 分別爲電流及電荷。該系統之能量爲

$$T=\frac{1}{2}\sum N_s I_s,\quad N_s=\sum L_{rs}I_r \tag{Ⅸ-5}$$

或

$$T=\frac{1}{2}\sum L_{rs}I_r I_s$$

相應於座標 Q_r 之廣義動量爲

$$p_r=\frac{\partial T}{\partial I_r}=N_r=\sum_s L_{rs}I_s \tag{Ⅸ-6}$$

此謂之動電動量 (electrokinetic momentum)。

如 E_r 係電路 r 上電池之電動勢，則廣義力爲

$$\Theta_r=E_r-R_rI_r \tag{Ⅸ-7}$$

R_r 係電路 r 之電阻。上式係由下列能量方程式得出者

$$\Theta_r\delta Q_r=E_r\delta Q_r-R_rI_r\delta Q_r$$

$$=E_r\,\delta Q_r - R_r I_r^2\,\delta t$$

Lagrange 方程式為

$$\frac{d}{dt}\left(\sum L_{rs} I_s\right)=E_r-R_r I_r \qquad (Ⅸ\text{-}8)$$

或

$$E_r-\frac{dN_r}{dt}=R_r I_r$$

今考慮一非耗散（non-dissipative）情形 $R_r=0$，且更設 $E_r=0$，故由上式，$N_r=$常數，然電流 I_r 可以變化。此情形卽相當於第四章所討論過的緩漸運動，蓋 $P_r=N_r=$常數，但 $I_r\neq$ 常數。

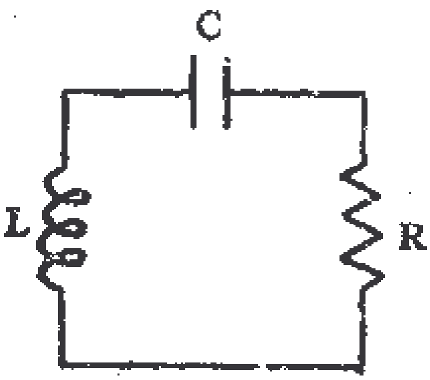
按（Ⅳ18）式，則由於循環速度 I_r 變化所產生之力，其所作之功為

$$\delta W=\sum_{r,s}\frac{\partial P_r}{\partial I_s}\,\delta I_s\,\delta I_r$$

$$=\sum_{r,s} L_{rs}\,\delta I_s\,\delta I_r>0 \qquad (Ⅸ\text{-}9)$$

δW 永係正號的，因 $T=\frac{1}{2}\sum L_{rs} I_r I_s$ 為一確切正值之二項式也。此卽 Lenz 定律，且說明了第四章第 3 節中緩漸運動之定理。

3　電容器之放電



在此，由電流產生之能量可認作「動能」的

$$T=\frac{1}{2}LI^2=\frac{1}{2}L\dot{Q}^2$$

但電容器之能量，則視為「位能」的，卽

$$V=\frac{1}{2}\ \frac{Q^2}{C}$$

在放電時，如無外加 *e.m.f.* 則 $E=0$，由 Lagrange 方程式可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}}-\frac{\partial(T-V)}{\partial Q}=-RI$$

或　　(Ⅸ-10)

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

4　網路理論：具有約束條件之 Lagrange 方程式

一個包括 k 接點之網路，則有 k 個如下形式之方程式

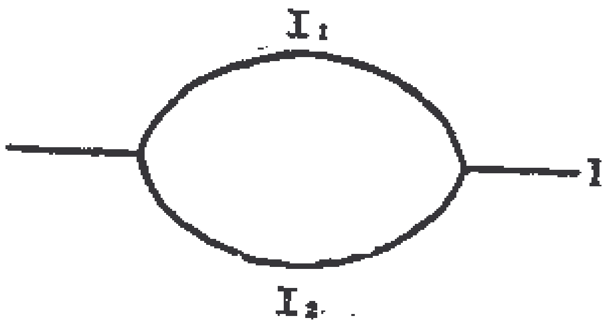
$$\sum_r I_r^{(l)}=0,\quad l=1,\cdots,k \tag{Ⅸ-11}$$

此即 Kirchhoff 定律，因 $I=\frac{dQ}{dt}$，故上式可寫成

$$\sum a_r^{(l)}\delta Q_r=0,\quad l=1,\cdots,k, \tag{Ⅸ-12}$$

$a_r^{(l)}=0,\ \pm1$。則 Lagrange 方程式為

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_r}-\frac{\partial T}{\partial Q_r}=E_r-R_rI_r+\sum_l \lambda_l a_r^{(l)} \tag{Ⅸ-13}$$



λ 係 Lagrange 的未定乘數。

茲舉一例，取如圖所示之電路，則

$$T=\frac{1}{2}\left(L_{11}I_1^2+2L_{12}I_1I_2+L_{22}I_2^2\right)$$

$$I=I_1+I_2,\quad \delta Q_1+\delta Q_2=0$$

由 Lagrange 方程式可得

$$\frac{d}{dt}(L_{11}I_1+L_{12}I_2)=-R_1I_1+\lambda$$

$$\frac{d}{dt}(L_{12}I_1+L_{22}I_2)=-R_2I_2+\lambda$$

消去 λ，卽得

$$(L_{11}+L_{22}-2L_{12})\frac{dI_1}{dt}+(L_{12}-L_{22})\frac{dI}{dt}$$

$$=R_2I-(R_1+R_2)I_1$$

如已知 I，此式可定 I_1，因之亦可定 I_2。

如 $I=I_0e^{iwt}$，$(i=\sqrt{-1})$，則

$$I_1=\frac{R_2-(L_{12}-L_{22})iw}{(L_{11}+L_{22}-2L_{12})iw+R_1+R_2}$$

$$I_2=\frac{R_1-(L_{12}-L_{11})iw}{(L_{11}+L_{22}-2L_{12})iw+R_1+R_2}$$

如 $w=0$（卽一穩定電流 I），卽得

$$\frac{I_1}{I_2}=\frac{R_2}{R_1}$$

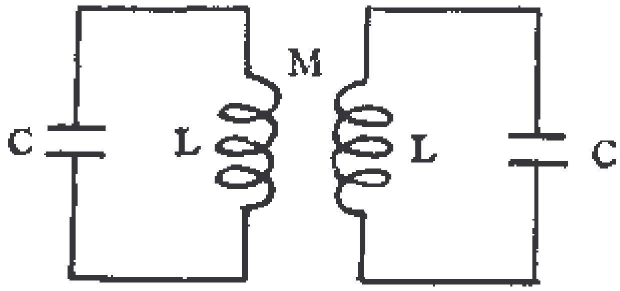
如 $w\to\infty$（卽一高頻率之電流），則可得

$$\frac{I_1}{L_{22}-L_{12}}=\frac{I_2}{L_{11}-L_{12}}=\frac{I}{L_{11}+L_{22}-2L_{12}}$$

如 $L_{12}\ll L_{11}$ 及 L_{22}，則上式卽簡變成 $\frac{I_1}{I_2}=\frac{L_{22}}{L_{11}}$。

習題

1. 設有二電路，其電容，電感爲 C, L，其電阻甚小可略不計。二者間之互感係數爲M。



試獲該系統之 Lagrange 方程式，並求其振盪正則狀態及其頻率。

2. 茲將兩個相同的 d'Arsonval 電流計 (galvanometer)（其電阻均甚少，可略不計）的線圈接連起來。其一之線圈，先由其平衡位置旋轉至某一角，繼乃釋放之。

試用 Lagrange 方法，求此系統（兩電流計的線圈）的運動，及其正則振盪的頻率。

此問題之行列方程式（或，secular 方程式），有一零值之根。其意義爲何？

如電路中加入一電容C，則影響如何？

第十章

Lagrange 方程式：非完全系統 (non-holonomic Systems)

前數章講到 Lagrange 方程式及其應用時，我們曾假定一系統可由一些廣義座標來描述，此類座標之數目，等於該系統自由度的數目。就在這個假定下，用（譬如說）d' Alembert 原理，所有的變分 δq_i 乃係任意的，如是導出 Lagrange 方程式。在很多物理問題中，所討論的系統，往往有某些約束不作虛功，而這些約束條件是一些不能積分的運動關係或幾何性的關係，如

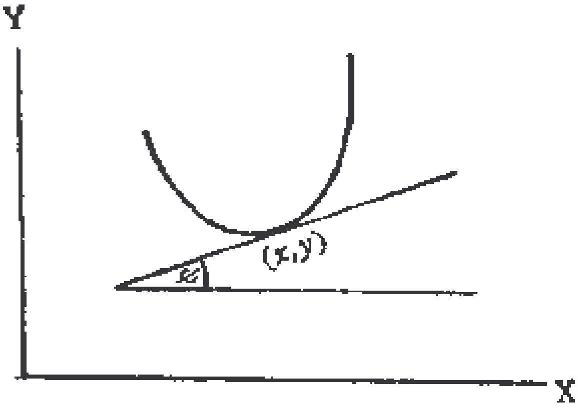
$$\sum_{i}^{n} a_{i\alpha} \dot{q}_i + a_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, \mu, \qquad (X-1)$$

$a_{i\alpha}$ 及 a_α 通常乃 q 及 t 之函數。在此種情形下，自由度的數目爲 $n-\mu$，雖則廣義座標的數目仍爲 n。這樣的系統稱爲非完全系統 (non-holonomic systems)（Hertz 所命名者）。

非完全系統的一個例子，有如一個垂直圓盤在水平面上作（無滑動）滾動的運動。欲描述此圓盤之位置，我們需要三個參數，如：接觸點的兩個座標及盤面的方位角（azimuth）。此三參數，係由下列不能積分之關係連繫一起者，

$$dy = dx \tan\phi, \quad 或 \quad \dot{y} = \dot{x} \tan\phi$$

或　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　(X-2)



另一個例子，爲一球在一粗糙桌上滾動的情形。在此情形，我們可有兩個不能積分之關係式，連繫五個座標。

對一非完全系統，則第三章中 Lagrange 方程式的導法，須予修改，俾可考慮關係式 (1)。此可由下列二法中，任一法求之。

1　非完全系統之 Lagrange 方程式

1) 處理非完全系統的作法之一，乃係用 Lagrange 未定乘數法，來考慮關係式 (1)。

第三章第 2 節中以廣義座標表示的 d'Alembert 原理爲

$$\sum_i^n\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i'\right]\delta q_i=0 \qquad (X-3)$$

此處虛位移 δq 等，已不再可任意變化，而須滿足 $dt=0$ 的方程式 (1)，即

$$\sum_i u_{i\alpha}\,\delta q_i=0,\quad \alpha=1,\cdots,\mu \qquad (X-4)$$

以 λ_α 乘 (1) 式，並作 α 從 1 到 μ 之和，將結果加入 (3) 式，即得

$$\sum_i^n\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q'-\sum_\alpha^\mu \lambda_\alpha a_{i\alpha}\right]\delta q_i=0 \qquad (\text{X}-5)$$

因只有 $n-\mu$ 個 δq 可任意的，我們可選 μ 個 λ_α，使得 μ 個 δq 之係數為零，則其餘 $n-\mu$ 個 δq 即為任意的，其係數須各等於零。因此可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i'+\sum_\alpha^\mu \lambda_\alpha a_{i\alpha}, \quad i=1,\cdots,n \qquad (\text{X}-6)$$

此乃 $n-\mu$ 個 q 及 μ 個 λ 之 n 個方程式。

2) 由上述結果 (6)，可得下述之觀點。茲將一非完全系統認為係受有某些額外力 $Q_1^*\cdots Q_n^*$ 的作用，此等力之效應，與約束條件 (1) 相等。這些力雖係未知的，但其可使滿足 (4) 之虛位移 δq 所作之虛功等於零，即

$$\sum Q_i^*\delta q_i=0 \qquad (\text{X}-7)$$

今以 λ_α 乘 (4) 式，作 α 之和，並將結果加入 (7)，即得

$$\sum_i^n [Q_i^*-\sum_\alpha^\mu \lambda_\alpha a_{i\alpha}]\delta q_i=0 \qquad (\text{X}-8)$$

我們可選擇 λ_α，使 μ 個 δq 之係數為零，其餘之 $(n-\mu)$ 個 δq 是任意的，故其係數須各等於零。因此

$$Q_i^*=\sum_\alpha^\mu \lambda_\alpha a_{i\alpha} \qquad (\text{X}-9)$$

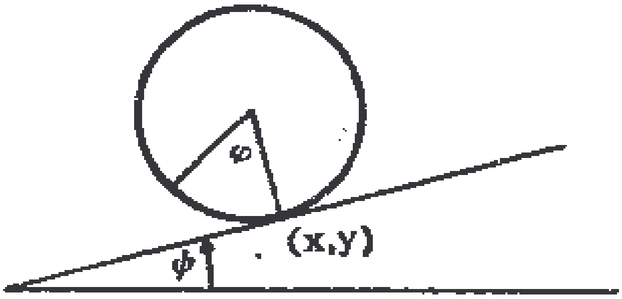
設作用於原系統之力為 Q_1', …, Q_n'。因不能積分之關係式 (1) 現已為 Q_1^*, …, Q_n^* 等力的引進來所取代，故該系統可認為一完全系統，而對於完全系統之 Lagrange 方程式為

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i'+Q_i^* \tag{X-10}$$

將（9）代入（10），即可得前此之（6）式。

2　例題：粗糙面上圓盤之滾動

玆舉一例，以說明非完全系統的 Lagrange 方程式的方法。



以本章首段的問題爲例。設 x, y 爲接觸點在一水平面內固定系統的座標。且令 θ, φ, ϕ 爲圓盤之座標，即，θ 代表水平面與盤心至接觸點之半徑向量間的夾角，而 φ, ϕ 則如圖所示。改變 θ，並不影響 x, y，但

$$\delta x+a\delta\varphi\sin\phi=0$$

$$\delta y-a\delta\varphi\cos\phi=0$$

或

$$\dot{x}=-a\dot{\varphi}\sin\phi$$

$$\dot{y}=a\dot{\varphi}\cos\phi \tag{X-11}$$

設 ξ, η, ζ 爲圓盤中心之座標，

$$\xi=x+a\cos\theta\cos\phi,\quad \eta=y+a\cos\theta\sin\phi,\quad \zeta=a\sin\theta \tag{X-12}$$

a 爲圓盤之半徑，則圓盤之動能爲

$$T=\frac{M}{2}(\dot{\xi}^2+\dot{\eta}^2+\dot{\zeta}^2)+\frac{A}{2}(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)$$

$$+\frac{C}{2}(\dot{\varphi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2 \tag{X-13}$$

M 係質量，A, C 則爲圓盤之轉動慣量，由 (12) 式知

$$\dot{\xi}=\dot{x}-a(\sin\theta\cos\phi\ \dot{\theta}+\cos\theta\sin\phi\ \dot{\phi})$$

$$\dot{\eta}=\dot{y}-a(\sin\theta\sin\phi\ \dot{\theta}-\cos\theta\cos\phi\ \dot{\phi})$$

$$\dot{\zeta}=a\cos\theta\,\dot{\theta}$$

因此

$$\begin{aligned}2T=&M[\dot{x}^2+\dot{y}^2+a^2(\dot{\theta}^2+\cos^2\theta\dot{\phi}^2)-2a\sin\theta\dot{\theta}(\dot{x}\cos\phi+\dot{y}\sin\phi)\\&+2a\cos\theta\dot{\phi}(-\dot{x}\sin\phi+\dot{y}\cos\phi)]+A(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\phi}^2)\\&+C(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2\end{aligned}\tag{X-14}$$

由於 (11) 式，Lagrange 方程式 (6) 乃

$$M\frac{d}{dt}\{\dot{x}+a(-\sin\theta\cos\phi\ \dot{\theta}-\cos\theta\sin\phi\ \dot{\phi})\}+\lambda_1=0\tag{X-15a}$$

$$M\frac{d}{dt}\{\dot{y}+a(-\sin\theta\sin\phi\ \dot{\theta}+\cos\theta\cos\phi\ \dot{\phi})\}+\lambda_2=0\tag{X-15b}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\{(Ma^2+A)\dot{\theta}-Ma\sin\theta(\dot{x}\cos\phi+\dot{y}\sin\phi)\}\\&\quad+(Ma^2-A)\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta+C\sin\theta\ \dot{\phi}(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)\\&\quad+Ma\cos\theta\,\dot{\theta}(\dot{x}\cos\phi+\dot{y}\sin\phi)\\&\quad+Ma\sin\theta\ \dot{\phi}(-\dot{x}\sin\phi+\dot{y}\cos\phi)\\&\quad=-Mga\cos\theta\end{aligned}\tag{X-15c}$$

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\{(Ma^2\cos^2\theta+A\sin^2\theta)\dot{\phi}+C\cos\theta(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)\\&\qquad+Ma\cos\theta(-\dot{x}\sin\phi+\dot{y}\cos\phi)\}\\&\quad+Ma\sin\theta\,\dot{\theta}(-\dot{x}\sin\phi+\dot{y}\cos\phi)\end{aligned}$$

$$-Ma\cos\theta\,\dot{\phi}(-\dot{x}\cos\phi-\dot{y}\sin\phi)=0 \qquad (\text{X-15d})$$

$$C\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\dot{\phi}\cos\theta)+\lambda_1 a\sin\phi-\lambda_2 a\cos\phi=0 \qquad (\text{X-15e})$$

由 (15a, b, c) 消去 λ_1 及 λ_2 且引用約束方程式 (11)，即得

$$Ma^2\{\sin\phi\frac{d}{dt}(\sin\phi\,\dot{\varphi}+\sin\theta\cos\phi\,\dot{\theta}+\cos\theta\sin\phi\,\dot{\phi})+$$

$$+\cos\phi\frac{d}{dt}(\cos\phi\,\dot{\varphi}-\sin\theta\sin\phi\,\dot{\theta}+\cos\theta\cos\phi\,\dot{\phi})\}$$

$$+C\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\cos\theta\,\dot{\phi})=0,$$

或

$$(Ma^2+C)\frac{d}{dt}(\dot{\varphi}+\cos\theta\dot{\phi})-Ma^2\sin\theta\,\dot{\theta}\,\dot{\phi}=0 \qquad (\text{X-16})$$

以 (11) 簡化 (15d)，即得

$$\frac{d}{dt}\{(Ma^2+C)\cos\theta(\dot{\varphi}+\cos\theta\dot{\phi})+A\sin^2\theta\,\dot{\phi}\}$$

$$+Ma^2\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}=0 \qquad (\text{X-17})$$

將獨立變數 t 變成 θ，則 (16) 及 (17) 變成

$$(Ma^2+C)\frac{d}{d\theta}(\dot{\varphi}+\cos\theta\dot{\phi})-Ma^2\sin\theta\,\dot{\phi}=0 \qquad (\text{X-16a})$$

$$\frac{d}{d\theta}\{(Ma^2+C)\cos\theta(\dot{\varphi}+\cos\theta\dot{\phi})+A\sin^2\theta\dot{\phi}\}$$

$$+Ma^2\sin\theta\dot{\varphi}=0 \qquad (\text{X-17a})$$

此乃定 $\dot{\phi}$ 及 $\dot{\varphi}$ 為 θ 函數所需之兩個聯立方程式。

因 $\dot{\varphi}+\cos\theta\dot{\phi}=w_z$ 為繞圓盤軸之角動量，如以 $\cos\theta$ 乘 (16) 式且與 (17a) 相減，即得

$$-C\sin\theta w_z+A\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta\,\dot{\phi})=0 \qquad (10\text{-}18)$$

引用（16a）之 $\dot{\phi}$，即得

$$\frac{d^2 w_z}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{d w_z}{d\theta}-\frac{MCa^2}{A(Ma^2+C)}w_z=0 \qquad (\text{X}-19)$$

如令 $\xi=\cos^2\theta$，則上式變爲

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2w_z}{d\xi^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\xi\right)\frac{dw_z}{d\xi}-\frac{MCa^2}{A(Ma^2+C)}w_z=0 \quad (\text{X}-19\text{a})$$

令 $\gamma=\frac{1}{2}$，$\alpha+\beta=\frac{1}{2}$，$\alpha\beta=MCa^2/A(Ma^2+C)$，則上式變爲

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2w_z}{d\xi^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)\xi]\frac{dw_z}{d\xi}-\alpha\beta w_z=0 \quad (\text{X}-19\text{b})$$

此乃 Gauss 微分方程式，其解卽爲「超級幾何級數」(hypergeometric series)。

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\xi)=1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}\xi+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}\xi^2$$

$$+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}\xi^3+\cdots \quad (\text{X}-20)$$

其普遍解則爲

$$w_z=c_1F(\alpha,\beta,\gamma,\xi)+c_2\xi^{1-\gamma}F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1;2-\gamma;\xi)$$

或

$$w_z=c_1F\left(\alpha,\beta;\frac{1}{2};\cos^2\theta\right)+c_2\cos\theta F\left(\alpha+\frac{1}{2},\right.$$

$$\left.\beta+\frac{1}{2};\frac{3}{2};\cos^2\theta\right) \qquad (\text{X}-21)$$

如獲得 w_z 爲 θ 之函數後，我們可用（18）式求出 $\dot{\phi}$ 爲 θ 之函數。由（11）及（12）式可得能量方程式：

$$Aw_x^2+(A+Ma^2)w_y^2+(C+Ma^2)w_z^2$$

$$=2(E-Mga\sin\theta) \qquad (\text{XI}-22)$$

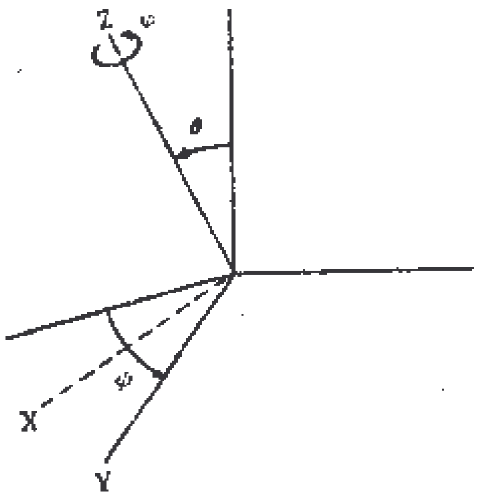
$$w_x=-\dot{\psi}\sin\theta,\quad w_y=\dot{\theta},\quad w_z=\dot{\varphi}+\dot{\psi}\cos\theta \qquad (\text{X}-23)$$

由（22）式可得 θ 爲 t 之函數。此問題至此已得其解矣。

3 粗糙面上圓盤之滾動：Appell 方法

解前述問題之另一方法，爲 Appell 的方法。此方法並不用非完全系統之 Lagrange 方程式。我們將看看此法是怎麼的。

設座標系（不固定於物體中），其 z 軸，指向自旋軸，其 Y 軸沿著結(Nodes)線(在水平面)，而 X 軸則向下（在包括 z 軸之垂直面)。這些軸以角速度 w_x°, w_y°, w_z° 轉動，此 w_x°, w_y°, w_z° 可由 Euler 的運動關係式 ($\varphi=-\frac{\pi}{2}$ 之情形)(Ⅷ-13)得出，



$$w_x^\circ=-\dot{\psi}\sin\theta$$
$$w_y^\circ=\dot{\theta} \qquad (\text{X}-24)$$
$$w_z^\circ=\dot{\psi}\cos\theta$$

而圓盤則有

$$w_x=w_x^\circ,\quad w_y=w_y^\circ,\quad w_z=w_z^\circ+\dot{\varphi} \qquad (\text{X}-25)$$

重心的運動，其重量之分量爲

$$X=Mg\sin\theta,\quad Y=0,\quad Z=-Mg\cos\theta \qquad (\text{X}-26)$$

設 v_x, v_y, v_z 爲重心沿瞬時軸的速度分量。如反作用力爲 R，即可得

$$M\left(\frac{dv_x}{dt}+w_y^\circ v_z-w_z^\circ v_y\right)=R_x+Mg\sin\theta$$

$$M\left(\frac{dv_y}{dt}+w_z^0 v_x-w_x^0 v_z\right)=R_y \tag{10-27}$$

$$M\left(\frac{dv_z}{dt}+w_x^0 v_y-w_y^0 v_x\right)=R_z-Mg\cos\theta$$

轉動部分，其方程式爲

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt}+[w^0\times\mathfrak{M}]=\text{力矩}$$

因 $w_x=w_y^0$，$w_y=w_y^0$，即得

$$A\frac{dw_x}{dt}+(Cw_z-Aw_z^0)w_y=-zR_y \qquad 1^0$$

$$A\frac{dw_y}{dt}-(Cw_z-Aw_z^0)w_x=zR_x-xR_z \qquad 2^0$$

$$C\frac{dw_z}{dt}=xR_y \qquad 3^0 \quad (X\text{-}28)$$

x,y,z 係接觸點之座標。由座標系之選擇，得 $y=0$。

無滑動之條件係：接觸點相對桌子之速度爲零，即

$$v_x+w_yz=0,\quad v_y+w_zx-w_xz=0,\quad v_z-w_yx=0 \quad (X\text{-}29)$$

(24)—(29) 中之 18 個方程式，剛足够決定下列的 18 個量

v_x,v_y,v_z，w_x,w_y,w_z，w_x^0,w_y^0,w_z^0，X,Y,Z，R_x,R_y,R_z，θ,ψ,φ. 所有之方程式均爲一次式。

由 (27) 及 (28) 式，可消去反作用力 R。兹取 (29) 式之時間微分。如圓盤甚厚，使其重心係距底部（此底部在 XY 面且在桌面滾動）高爲 c 處，則由 (27) 式即可得

$$M\left[-c\frac{dw_y}{dt}+aw_y^2+w_z^0(aw_z-cw_x)\right]$$

$$=R_x+Mg\sin\theta \qquad 1^0$$

$$M\left[c\frac{dw_x}{dt}-a\frac{dw_z}{dt}-cw_z{}^0w_y-aw_xw_y\right]=R_y\quad 2^0\quad (\text{X}-30)$$

$$M\left[a\frac{dw_y}{dt}+w_x(cw_x-aw_z)+cw_y^2\right]=R_z-Mg\cos\theta\quad 3^0$$

R_z 可由（28）式中之 1^0 及 3^0，及由（28）之 3^0 及（30）之 2^0 消去，故得

$$Aa\frac{dw_x}{dt}+Cc\frac{dw_z}{dt}+a(Cw_z-Aw_z{}^0)w_y=0$$

$$Ma\left[c\frac{dw_x}{dt}-a\frac{dw_z}{dt}-(cw_z{}^0+aw_x)w_y\right]-C\frac{dw_z}{dt}=0$$

由（24）式，

$$w_y=w_y{}^0=\dot{\theta},\quad w_z{}^0=-w_x{}^0\cot\theta=-w_x\cot\theta$$

$$Aa\frac{dw_x}{d\theta}+Cc\frac{dw_z}{d\theta}+Caw_z+Aaw_x\cot\theta=0$$

$$Mac\frac{dw_x}{d\theta}-(Ma^2+C)\frac{dw_z}{d\theta}-Ma^2w_x$$

$$+Macw_x\cot\theta=0\qquad (\text{X}-31)$$

此卽 w_x, w_z 得以 θ 表示之兩個方程式。

能量方程式乃

$$M(v_x{}^2+v_y{}^2+v_z{}^2)+A(w_x{}^2+w_y{}^2)$$

$$+Cw_z{}^2=2[E-Mg(a\sin\theta-c\cos\theta)]\qquad (\text{X}-32)$$

此可定 w_y 爲 θ 之函數。

由（31）式中之兩個方程式消去 $\dfrac{dw_x}{d\theta}$，卽得

$$MAa^2w_x=-\{AC+M(Aa^2+Cc^2)\}\frac{dw_z}{d\theta}-MCacw_z$$

微分之，可消去 w_x，卽可得到 w_z 之微分方程式如下

$$\frac{d^2w_z}{d\theta^2}+\cot\theta\frac{dw_z}{d\theta}+\frac{MCa}{AC+M(Aa^2+Cc^2)}(c\cot\theta-a)w_z$$
$$=0 \tag{X-33}$$

如圓盤甚薄，即 $c=0$，此方式程即簡化為 (19)。

4 第1節之方法2）對完全系統之推廣

第 1 節之 (6) 式所採用之觀點，提供了我們一種推廣的方法，即可使約束力及其虛功不明顯的出現。

茲假設一個系統的有效力 Q_i，可分成 $Q_i'+Q_i^*$，Q_i^* 非我們所欲者，如有可能，我們將把它消去。Lagrange 方程式為

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i'+Q_i^* \tag{X-34}$$

由此可得

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q_i'\right)\pi_i=\sum_i Q_i^*\pi_i \tag{X-35}$$

π_i 是可完全任意的。茲擇取 π 等，使得

$$\sum Q_i^*\pi_i=0 \tag{X-36}$$

（當然，有無數的方法，可以擇取如是之 π 等），則

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}-Q'_i\right)\pi_i=0 \tag{X-37}$$

此處之 π_i，須滿足 (36) 式。

上述之結果，可應用於完全系統，使某類的問題可以簡化。

第十一章

Lagrange 方程式：準座標；相對論力學；電磁場

1 準 (Quasi) 座標

在 Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial T}{\partial q_k}=Q_k,\quad k=1,\cdots,m \tag{XI-1}$$

中 $\dot{q}_k$ 乃座標 q_k 之時間導數。然有時候，定義一組準座標，甚爲有用。所謂準座標，即係此準座標之微分乃 dq_k 等之線性組合，如

$$d\pi_r=\sum_k^m \alpha_{kr}\,dq_k,\quad r=1,\cdots,m \tag{XI-2}$$

α_{kr} 係 q 之函數，但 $d\pi_r$ 並非座標 $\pi_1,\cdots,\pi_m$ 之微分。設 $w_1,\cdots,w_m$ 係 $\dot{q}$ 等之獨立線性組合如下

$$w_r=\sum_k \alpha_{kr}\,\dot{q}_k \tag{XI-3}$$

在此務須注意者，乃我們並不假定 w_r 係 $\pi_1,\cdots\pi_m$，等座標之時間導數，換言之即

$$\frac{\partial \alpha_{kr}}{\partial q_m}\neq\frac{\partial \alpha_{mr}}{\partial q_k} \tag{XI-4}$$

設行列式 $\|\alpha_{kr}\| \neq 0$，故由 (3) 及 (2) 可得

$$\dot{q}_k = \sum \beta_{kr} w_r \qquad (\text{XI}-5)$$

$$dq_k = \sum \beta_{kr} d\pi_r \qquad (\text{XI}-5\text{a})$$

以 β_{kr} 乘 (1) 式，並作此 m 個方程式之和，卽得

$$\sum_k \beta_{kr}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right] = \sum_k \beta_{kr} Q_k$$

因 $\sum Q_k dq_k = \sum_{k,r} Q_k \beta_{kr} d\pi_r$ 係功之元素，故可寫成

$$\sum_r \Big(\sum_k Q_k \beta_{kr}\Big) d\pi_r \equiv \sum_r \Pi_r d\pi_r$$

因此

$$\sum_k \beta_{kr}\left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k}\right] = \Pi_r \qquad (\text{XI}-6)$$

設 $\mathbf{T}$ 乃是動能 T，當 $\dot{q}$ 等被 w 等代替（利用 (5) ）時之形式，卽

$$\mathbf{T}(q_1, \cdots, q_m,\ w_1, \cdots, w_m) = T(q_1, \cdots, q_m,\ \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_m)$$

故由 (3) 知

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} = \sum_s \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w_s} \alpha_{ks}$$

因此 (6) 式變成

$$\sum_k \beta_{kr}\left[\sum_s \alpha_{ks}\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w_s} + \sum_s \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w_s}\frac{d\alpha_{ks}}{dt} - \frac{\partial T}{\partial q_r}\right] = \Pi_r$$

如引用下列性質（由 (3) 及 (5) 式）

$$\sum_k \beta_{kr}\alpha_{ks} = \delta_{rs}$$

及

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_k} + \sum_s \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w_s}\frac{\partial w_s}{\partial q_k} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial q_k} + \sum_s \sum_m \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial w_s}\frac{\partial \alpha_{ms}}{\partial q_k}\dot{q}_m$$

則可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w_r}+\sum_k\sum_s\sum_m \beta_{kr}\frac{\partial T}{\partial w_s}\dot{q}_m\left(\frac{\partial \alpha_{ks}}{\partial q_m}-\frac{\partial \alpha_{ms}}{\partial q_k}\right)$$

$$-\sum_k \beta_{kr}\frac{\partial T}{\partial q_k}=\Pi_r \qquad (\text{XI}-7)$$

由 (5a),

$$\sum_k \beta_{kr}\frac{\partial T}{\partial q_k}=\sum_k \frac{\partial T}{\partial q_k}\frac{\partial q_k}{\partial \pi_r}=\frac{\partial T}{\partial \pi_r} \qquad (\text{XI}-8)$$

茲定義

$$\sum_k\sum_m \beta_{kr}\beta_{mj}\left(\frac{\partial \alpha_{ks}}{\partial q_m}-\frac{\partial \alpha_{ms}}{\partial q_k}\right)\equiv \gamma_{rsj}$$

γ_{rsj} 係 q 之函數，以 (5),(8),(9) 代入 (7)，卽得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w_r}+\sum_s\sum_j \gamma_{rsj}w_j\frac{\partial T}{\partial w_s}-\frac{\partial T}{\partial \pi_r}=\Pi_r \qquad (\text{XI}-10)$$

此卽以準座標 $\pi_1,\cdots,\pi_n$ 表示之 Lagrange 方程式。如 π_s 爲「眞」座標，卽 $d\pi_s$ 爲某一座標之微分，則 (4) 之不等號應爲等號，$\gamma_{rsj}=0$，而 (10) 式簡化成通常之 Lagrange 方程式。

爲說明準座標的應用，我們將用 (10) 式來導出 Euler 動力方程式 (VII-18)。一個有一固定點之剛體，其動能爲

$$T=\frac{1}{2}(Aw_x^2+Bw_y^2+Cw_z^2) \qquad (\text{XI}-11)$$

A,B,C 爲主轉動慣量。w_x, w_y, w_z 係沿主軸之分角速度。欲將 (10) 應用於 (11)，我們可利用眞座標 θ,ϕ,φ(Euler 座標)，及準速度 w 間的關係 (VII-13, 14) 以求 γ_{ksk}。因 $\frac{\partial T}{\partial \pi_i}=0$, 由(10)式，可得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w_x}-w_z\frac{\partial T}{\partial w_y}+w_y\frac{\partial T}{\partial w_z}=\Pi_x$$

另二方程式,則可由上式循環置換 x, y, z 獲得。引用（11）式,則這些方程式即可得

$$A\frac{dw_x}{dt}+(C-B)w_y w_z=\Pi_x$$

$$B\frac{dw_y}{dt}+(A-C)w_z w_x=\Pi_y \qquad (\text{XI}-12)$$

$$C\frac{dw_z}{dt}+(B-A)w_x w_y=\Pi_z$$

此即方程式（Ⅶ-18）也

2　相對論力學

在牛頓力學，一運動方程式中的物體的質量係一常數。在相對論力學，我們要求在 Lorentz 變換下，所有物理定律，均不改其形式(Lorentz 變換係互相以均速相對運動之座標系間的變換)，故得出動量分量之定義如下

$$p_x=\frac{m_0\dot{x}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},\ \text{餘類推} \qquad (\text{XI}-13)$$

(見本書第四册，甲部，狹義相對論)。

Lagrange 方程式,如用 Lagrangian 函數之通常形式 $L=T-V$,則不能獲得符合相對論條件之正確方程式。玆定義一個質點之相對論 Lagrangian 函數爲

$$L=F-V,\quad F=m_0c^2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}\right) \qquad (\text{XI}-14)$$

F 之定義，與下式的動能不同

$$T=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right) \qquad (\text{XI}-15)$$

由 (14),(15) 及 $V=V(q_1,\cdots,q_n)$ 之假設，可得

$$\sum\frac{\partial L}{\partial\dot q_k}\dot q_k=\sum\frac{\partial F}{\partial\dot q_k}\dot q_k=T+F \qquad (\text{XI}-16)$$

相對論的 Hamiltonian 函數，仍如（Ⅲ-23）之定義，爲

$$\text{H}=\sum\frac{\partial L}{\partial\dot q_k}\dot q_k-L$$

由 (14) 及 (16) 知

$$H=T+V=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}-1\right)+V \qquad (\text{XI}-17)$$

3 電磁場

當 Q_k 可由場勢導出時，即 $Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k}$，則 Lagrange 方程式 (1) 可寫成

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot q_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (\text{XI}-18)$$

有時 Q_k 之一部分，可能與速度有關而仍有下式的形式

$$Q_k=-\frac{\partial V}{\partial q_k}+\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot q_k} \qquad (\text{XI}-19)$$

在此情形下，(18) 式仍可成立。以 Lagrange 方程處理電動力學，即爲此一情形的一例。

玆有一帶電荷 e 之質點，在電場 E，磁場 B 中運動。其運動

方程式爲

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{p}=e\boldsymbol{E}+\frac{e}{c}[\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}] \qquad (\text{XI}-20)$$

$\boldsymbol{p}$ 係動量，$\dot{\boldsymbol{r}}$ 爲速度向量，$\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ 可由純量場勢 ϕ 及向量場勢 $\boldsymbol{A}$ 導出如下

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{c\partial t},\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \qquad (\text{XI}-21)$$

引用 (21)，則其 x 一分量爲

$$\begin{aligned}
eE_x+e[\dot{\boldsymbol{r}}\times\boldsymbol{B}]_x&=-e\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial t}+\frac{e}{c}\left\{\dot{y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\dot{z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\right\}\\
&=-e\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right)\\
&\quad-\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial A_x}{\partial t}\right)\\
&=-e\frac{\phi}{x}+\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\dot{y}+\frac{\partial A_z}{\partial x}\dot{z}\right)-\frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt}
\end{aligned} \qquad (\text{XI}-22)$$

故可知，此 Lorentz 力可按 (19) 式由下列場勢導出

$$V=-\frac{e}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})+e\,\phi \qquad (\text{XI}-23)$$

卽

$$\begin{aligned}
X&=-\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial\dot{x}}\\
&=-e\frac{\partial\phi}{\partial x}-\frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial x}(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}})-\frac{e}{c}\frac{dA_x}{dt}
\end{aligned}$$

此與 (22) 式相符。因此，對一電磁場中之帶電質點，形式上我們可應用 Lagrange 方程式 (18)，只要我們定義 Lagrangian 函

數爲

$$L=T-V=T-e\phi+\frac{e}{c}\,(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}) \tag{XI-24}$$

在相對論情形下，我們可以（14）中之F替代T，即

$$L=m_0c^2\,(1-\sqrt{1-\beta^2})-e\phi+\frac{e}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}),\quad \beta=\frac{v}{c} \tag{XI-25}$$

而 Hamiltonian 函數則爲

$$H=\sum_x^z\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}\,\dot{x}-L \tag{XI-26}$$

今如稱P爲總動量，即

$$P_x\equiv\frac{\partial L}{\partial\dot{x}}=\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{e}{c}\,A_x=\mathrm{p}_x+\frac{e}{c}\,A_x$$

則

$$H=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}-1\right)+e\phi\;=\;T+e\phi$$

$$=c\sqrt{\mathrm{p}_x^2+\mathrm{p}_y^2+\mathrm{p}_z^2+m_0^2c^2}-m_0c^2+e\phi \tag{XI-27}$$

$$=c\sqrt{\sum_x\left(P_x-\frac{e}{c}A_x\right)^2+m_0^2c^2}-m_0c^2+e\phi \tag{XI-28}$$

此節所述之理論，其應用處，可參閱本書第二册量子論，第八章3節。

第十二章

Gauss-Hertz 及 Appell 原理

在前數章中，我們已用 Lagrange 方程式，處理過很多類的動力學問題。在本册（乙）部討論變分原理及 Hamilton-Jacobi 理論前，我們將先簡略的討論 Gauss, Hertz 及 Appell 等的原理。這些原理亦可作爲導出運動方程式的出發點。

1 最小曲度原理(Gauss 及 Hertz 原理)

A. 設有一個質點系統，有下列的約束條件

$$\sum_r a_{rk}\,dx_r + a_k\,dt = 0, \quad k=1,\cdots,n \qquad (\text{XII}-1)$$

x_r 乃直角座標（爲簡便計，x_r 包括 y_r, z_r），a_{rk} 係座標之函數，a_k 係常數。今對 (1) 式作 t 之微分，即得

$$\sum_r a_{rk}\ddot{x}_r + \sum_{r,s} \frac{\partial a_{rk}}{\partial x_s}\,\dot{x}_r\,\dot{x}_s = 0 \qquad (\text{XII}-2)$$

今考慮該系統在位形 (configuration) 空間中之眞實軌跡。在 $x_1,\cdots,x_n$ 之每點，有一確定之速度 $(\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n)$ 及一確定之加速度 $(\ddot{x}_1^0,\cdots,\ddot{x}_n^0)$。其次考慮在時間 t 時具相同座標及速度 $(\dot{x}_1,\cdots,\dot{x}_n)$，但不同加速度 $(\ddot{x}_1,\cdots,\ddot{x}_n)$ 之另一在運動上可能

的軌跡。則由（2），即得

$$\sum_r a_{rk}(\ddot{x}_r-\ddot{x}_r{}^0)=0, \quad k=1,\cdots,n \tag{XII-3}$$

按照（1），該系統之虛位移（$\delta x_1,\cdots,\delta x_n$）滿足下列方程式

$$\sum_r a_{rk}\,\delta x_r=0, \quad k=1,\cdots,n \tag{XII-4}$$

以（3）及（4）式相比較，則知一個和 $\ddot{x}_r-\ddot{x}_r{}^0$ 成比例的位移

$$\delta x_r \propto \ddot{x}_r-\ddot{x}_r{}^0 \tag{XII-5}$$

與約束條件相符，故亦為一可能之位移。今 $m_r\ddot{x}_r{}^0$ 係有效力。如 X_r 爲外力，則由約束所生的力乃 $m_r\ddot{x}_r{}^0-X_r$。如約束力不作功，則按 D'Alembert 原理（Ⅱ-26）即得

$$\sum(m_r\ddot{x}_r{}^0-X_r)\delta x_r=0$$

或由（5），

$$\sum_r(m_r\ddot{x}_r{}^0-X_r)(\ddot{x}_r-\ddot{x}_r{}^0)=0 \tag{XII-6}$$

此亦可寫爲

$$\sum_r m_r\left(\ddot{x}_r-\frac{X_r}{m_r}\right)^2=\sum m_r\left(\ddot{x}_r{}^0-\frac{X_r}{m_r}\right)^2+\sum m_r(\ddot{x}_r-\ddot{x}_r{}^0)^2$$

（上式中的 x, X 皆包括 y, Y, z, Z）。由此即得

$$\sum m_r\left(\ddot{x}_r-\frac{X_r}{m_r}\right)^2>\sum m_r\left(\ddot{x}_r{}^0-\frac{X_r}{m_r}\right)^2 \tag{XII-7}$$

此式明示下述之量値

$$Z=\sum_x\sum_r m_r\left(\ddot{x}_r-\frac{X_r}{m_r}\right)^2 \tag{XII-8}$$

在該系統的眞實路徑係一最小値。(8)式中之 Z 稱爲曲度（curvature 或「約束」（參閱此節末段）。（7）式可如下說法：一個系統之質點的運動，與每一時刻具相同位置及速度但不同的加速度（滿足

約束條件的）之其他運動相比較時，具有最小之曲度。

B. 我們可以上述之原理，做爲動力學之基本原理。此可由其係與 d'Alembert 原理（Ⅱ-26）或 Lagrange 方程式等效證明之。

茲考慮一普遍性之非完全系統（見前第十章），其約束條件爲

$$\varphi_k(x_r, \dot{x}_r, t)=0, \quad k=1, \cdots, n$$

因此

$$\frac{d\varphi_k}{dt}=\dot{\varphi}_k=\sum_r \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_r}\dot{x}_r+\sum_r \frac{\partial\varphi_k}{\partial\dot{x}_r}\ddot{x}_r+\frac{\partial\varphi_k}{\partial t}=0$$

$$k=1, \cdots, n \tag{XIII-9}$$

使（8）式之 Z 有最小值並滿足附帶條件（9）的條件爲

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\ddot{x}_r}(Z+2\sum\lambda_k\dot{\varphi}_k)=m_r\left(\ddot{x}_r-\frac{X_r}{m_r}\right)+\sum\lambda_k\frac{\partial\varphi_k}{\partial\dot{x}_r}$$

$$=0, \quad k=1, \cdots, n \tag{XIII-10}$$

λ_k 係 Lagrange 未定之乘數。如約束條件的形式係

$$\varphi_k=\sum_r a_{rk}\dot{x}_r+a_k=0 \tag{XIII-11}$$

則（10）式變成

$$m_r\ddot{x}_r-X_r+\sum\lambda_k a_{rk}=0 \tag{XIII-12}$$

在上二者的任一情形下，（10）或（12）均爲 Lagrange 方程式之第一形式（Ⅱ-29）。

C. 其次，我們將證明由此最小曲度原理決定之軌道，具有唯一性。設 $\ddot{\xi}_i=\ddot{x}_i$ 係最小 Z 之加速度，故

$$Z(\ddot{\xi}_r+\delta\ddot{x}_r)>Z(\ddot{\xi}_r) \tag{XIII-13}$$

$\delta\ddot{x}_r$ 須滿足（3），即 $\sum a_{rk}\delta\ddot{x}_r=0$。如 $\ddot{x}_r=\ddot{\eta}_r$ 係對於相同速度及位置的 Z 的另一最小值，則按（3）式，即得

$$\sum a_{rk}(\ddot{\xi}_r-\ddot{\eta}_r)=0 \qquad (\text{XII}-14)$$

現在，展開（13）式之左邊，即得

$$Z(\ddot{\xi}_r+\delta\ddot{x}_r)=Z(\ddot{\xi}_r)+2\sum_r(m_r\ddot{\xi}_r-X_r)\delta\ddot{x}_r$$

$$+\sum_r m_r(\delta\ddot{x}_r)^2 \qquad (\text{XII}-15)$$

在最小值時，則爲

$$\sum_r (m_{rr}\ddot{\xi}-X_r)\delta\ddot{x}_r=0$$

在（15）式引入

$$\delta\ddot{x}_r=\ddot{\eta}_r-\ddot{\xi}_r$$

即得

$$Z(\ddot{\eta}_r)=Z(\ddot{\xi}_r)+\sum m_r(\delta\ddot{x}_r)^2$$

$$Z(\ddot{\eta}_r)>Z(\ddot{\xi}_r) \qquad (\text{XII}-16)$$

但我們可以互換 $\ddot{\eta}_r$ 及 $\ddot{\xi}_r$，以完全相同的論據而證得

$$Z(\ddot{\xi}_r)>Z(\ddot{\eta}_r) \qquad (\text{XII}-17)$$

故我們必須有 $Z(\ddot{\xi}_r)=Z(\ddot{\eta}_r)$ 之關係。因此 Z 僅能有一最小值。

D. 對一無任何外力作用之自由質點，Z 的簡單幾何意義，可得之如下。沿路徑之切線的分加速度爲 $\ddot{s}$，而沿法線者則爲$\frac{\dot{s}^2}{\rho}$，ρ 係曲率半徑，

$$\frac{1}{\rho^2}=\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial s^2}\right)^2$$

故

$$Z=m\left(\ddot{s}^2+\frac{\dot{s}^4}{\rho^2}\right) \qquad (\text{XII}-18)$$

今對一自由質點，則

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{s}^2\right)=0,\quad \dot{s}=\text{常數}=v,\quad \ddot{s}=0$$

因此（XII-18）即得

$$Z=m\left(\frac{v^2}{\rho}\right)^2$$

Z之最小值，顯然爲零，此即相當於零曲率，或 $\rho=\infty$，亦即直線也。

2 Appell 的運動方程式

我們將由 d'Alembert 原理導出運動方程式之另一形式。設 $q_1,\cdots,q_n$ 爲廣義座標，且設*

$$dx_i=\sum\alpha_{ik}\,dq_k+\alpha_i\,dt \tag{XII-19}$$

則虛位移即爲

$$\delta x_i=\sum\alpha_{ik}\,\delta q_k \tag{XII-19a}$$

微分（19）式，即得

$$\ddot{x}_i=\sum_k\left(\alpha_{ik}\ddot{q}_k+\frac{d\alpha_{ik}}{dt}\dot{q}_k\right)+\frac{d\alpha_i}{dt} \tag{XII-20}$$

故

$$\frac{\partial\ddot{x}_i}{\partial\ddot{q}_k}=\alpha_{ik}$$

且

---

* 如這些方程式爲不能積分成下式

$$x_i=x_i(q_1,\cdots,q_n,t)$$

則此系統即爲非完全系統。如（19）式可積分成上式，則爲完全系統。

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_{i,k} m_i \ddot{x}_i \alpha_{ik} \delta q_k = \sum_{i,k} m_i \ddot{x}_i \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \ddot{q}_k} \delta q_k \quad (\text{XII}-21)$$

d'Alembert 原理

$$\sum_i \sum_x m_i \ddot{x}_i \delta x_i = \sum_i \sum_x X_i \delta x_i$$

即可寫成

$$\sum_k \left(\sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \ddot{q}_k} \right) \delta q_k = \sum_k Q_k \delta q_k \quad (\text{XII}-22)$$

玆先設 q 等係獨立無關的，故 δq 等係任意的。在此情形下，δq 之係數須等於零

$$\sum_i m_i \ddot{x}_i \frac{\partial \ddot{x}_i}{\partial \ddot{q}_k} = Q_k \quad (\text{XII}-23)$$

玆引入 Appell 函數或「加速的能量」(energy of acceleration)S,

$$S \equiv \frac{1}{2} \sum_i m_i (\ddot{x}_i)^2 \quad (\text{XII}-24)$$

則 (23) 成

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} = Q_k, \quad k = 1, \cdots, n \quad (\text{XII}-25)$$

此謂之 Appell 之運動方程式。

如有不能積分之關係

$$\sum_k a_{kr} \delta q_k = 0, \quad r = 1, \cdots, \mu, \quad \mu < n \quad (\text{XII}-26)$$

使 (22) 式中之 δq 不能當做任意值，則我們可引進未定乘數 λ_r，而得到下列方程式

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_k} = Q_k + \sum_r^n \lambda_r a_{kr} \quad (\text{XII}-27)$$

在上述導法中，我們可以第十一章第 1 節之 $d\pi$ (即 dq 之

線性組合）代替（19）式之 dq （$d\pi_r$ 本身非是導數！）。

玆舉一例，以說明 Appell 方程式之應用。我們試導出有一定點之剛體的 Euler 動力方程式（Ⅺ-12）。取角速度分量 w 等做爲某些準座標的準速度。則物體轉動所引起之加速度，由（Ⅴ-4）式，可得爲

$$\boldsymbol{a}=[\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r}]+[\boldsymbol{w}\times(\boldsymbol{w}\times\boldsymbol{r})] \qquad (\text{Ⅻ}-28)$$

或

$$\ddot{x}_i=[\dot{\boldsymbol{w}}\times\boldsymbol{r}_i]_x+w_x(w_y y_i+w_z z_i)-x_i(w_y{}^2+w_z{}^2)$$

則（24）之函數 S 爲

$$S=\frac{1}{2}\sum_i\sum_x m_i\ddot{x}_i{}^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_i\sum_x m_i\{z_i{}^2\dot{w}_y{}^2+y_i{}^2\dot{w}_z{}^2+2z_i{}^2w_zw_x\dot{w}_y-2y_i{}^2w_xw_y\dot{w}_z\}$$

$$+\text{不包括}\dot{w}\text{ 等之項}$$

如固定之點即係剛體的質心，則

$$\sum_i m_ix_iy_i=\sum_i m_iy_iz_i=\sum_i m_iz_ix_i=0$$

而

$$S=\frac{1}{2}[A\dot{w}_x{}^2+B\dot{w}_y{}^2+C\dot{w}_z{}^2-2(B-C)w_yw_z\dot{w}_x$$

$$-2(C-A)w_zw_x\dot{w}_y-2(A-B)w_xw_y\dot{w}_z]$$

$$+\text{不含 }\dot{w}\text{ 之項。} \qquad (\text{Ⅻ}-29)$$

（25）式變成

$$\frac{\partial S}{\partial\dot{w}_x}=A\dot{w}_x-(B-C)w_yw_z=\Pi_x$$

$$B\dot{w}_y-(C-A)w_zw_x=\Pi_y$$

$$C\dot{w}_z-(A-B)w_x w_y=\Pi_z$$

此卽 Euler 方程式（XI-12）。

3　最小曲度原理與 Appell 方程式之關係

因最小曲度原理（7）與 Appell 方程式（25）均由 d'Alembert 原理導出，故兩者應為等效的。為了解這點，我們可由（20）及下式

$$Q_k=\sum_i X_i\alpha_{ik},$$

卽得
$$\sum_k Q_k\ddot{q}_k=\sum_i X_i\ddot{x}_i+\phi(x,\dot{x}) \qquad (\text{XII-30})$$

ϕ 是與 $\ddot{x}$ 無關的。今定義

$$Z^*=2S-2\sum Q_k\ddot{q}_k \qquad (\text{XII-31})$$

則 Appell 方程式（25）可寫成下式

$$\frac{\partial Z^*}{\partial\ddot{q}_k}=0 \qquad (\text{XII-32})$$

卽，Z^* 對加速度變分時，具有穩定之性質，現因

$$Z^*=2S-2\sum_k Q_k\ddot{q}_k=\sum_i m_i\ddot{x}_i^2-2\sum X_i\ddot{x}_i-2\phi$$
$$=\sum m_i\left(\ddot{x}_i-\frac{X_i}{m_i}\right)^2+\phi$$
$$=Z+\phi \qquad (\text{XII-33})$$

Z 係（8）式所定義之曲度，而 ϕ 與 $\ddot{x}_i$ 無關。因此由(32)卽可得

$$\frac{\partial Z}{\partial\ddot{q}_k}=0$$

此卽 Gauss 及 Hertz 之最小曲度原理也。

導言

質點與物體的運動，組成了早期物理學家的一些研究主題，經過多少年及多少人的努力，終於形成了物理學中最主要的一部門-力學。

本部將以「變分原理」及「Hamilton-Jacobi」理論做主幹，來推展出古典力學的基本原理。這些力學上的原理與理論不但組成了古典物理中最完美的一些部分，且更提供了物理學中其他學科的一些理論基礎，尤其是舊量子論。比如說，根據「緩漸不變性」原理討論量子化條件等，均是顯明的例子。爲了使得本書能更完整起見，我們將由變分法的介紹開始。

第一章

變分法

變分法的起源，係由一些具有下列性質的問題所引起：設 $f(x, y(x), y'(x)\cdots)$ 爲 x，$y(x)$，$y'=\dfrac{dy}{dx}$，…之函數，我們的問題是要決定一函數 $y(x)$，使得下列積分

$$\int_a^b f(x, y, y'\cdots)dx \tag{I-1}$$

對 $y(x)$ 的變化可以保持穩定。比如說，求一被局限在一垂直平面上且僅受重力作用的質點，從某一固定點 P_1，至另一固定點 P_2 運動時，所需最短時間的曲線等問題，均屬此類，上述問題通稱爲 Bernoulli 的「最速落徑」問題。該欲求的曲線，可證明爲「倒圓滾線」。

有時問題的性質，是決定 $y(x)$ 以使得積分（1）保持穩定，但同時有一些輔助條件，比如說當 $y(x)$ 變化時，令另一個積分保持常數，

$$\int_a^b g(x, y, y'\cdots)dx = \text{常數} \tag{I-2}$$

這類問題稱爲「等周長問題」。最簡單的例，如求一已知長度之線段，欲使之包圍最大面積時，則該線段應形成圓形之曲線等。再如求一無伸縮性的重繩，如兩端被固定時（如網球場的網），

則其位能最小的形狀應爲「懸鏈線」等等的問題，均屬此類。解決上述各類或甚至更爲複雜的問題的數學方法，即爲「變分法」。

1　定義

在三維空間，任何曲線均可用參數表示之，如下列之形式:

$$x=F(t),\quad y=G(t),\quad z=H(t) \tag{I-3}$$

今有另一曲線，此曲線與 (3) 式所代表者有小量的不同如下:

$$x=F(t)+\epsilon\xi(t),\quad y=G(t)+\epsilon\eta(t),\quad z=H(t)+\epsilon\zeta(t) \tag{I-4}$$

此處 $\xi(t),\eta(t),\zeta(t)$ 均係 t 的已知的任意函數，而 ϵ 乃無限小之任意變化參數。我們將以撇 $'$ 表示對 t 的微分如下:

$$x'=\frac{dx}{dt},\quad x''=\frac{d^2x}{dt^2},\ \cdots,\ x^{(k)}=\frac{d^kx}{dt^k} \tag{I-5}$$

今考慮函數 $\phi(t,x,x',x''\cdots y,y',\cdots z,z'\cdots)$ 經過 (4) 式的變換，變成 $\phi(t,\ x+\epsilon\xi,\ x'+\epsilon\xi',\cdots,y+\epsilon\eta,\ y'+\epsilon\eta',z+\epsilon\zeta,z'+\epsilon\zeta'\cdots)$ 將此式對 ϵ 展開，即可得

$$\phi(t,x,x',\cdots z,z'\cdots)+\epsilon\phi_1+\frac{\epsilon^2}{2!}\phi_2+\cdots+\frac{\epsilon^k}{k!}\phi_k+\cdots \tag{I-6}$$

此處 $\phi_1=\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial\epsilon}\right)_{\epsilon=0}=\xi\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0+\eta\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0+\zeta\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0+\xi'\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial x'}\right)_0+\eta'\left(\dfrac{\partial\phi}{\partial y'}\right)_0$

$$+\cdots \tag{I-7}$$

$$\phi_2=\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial\epsilon^2}\right)_{\epsilon=0}=\xi^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_0+\eta^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_0+\zeta^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)_0$$

$$+2\xi\eta\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}\right)_0+\cdots \tag{I-8}$$

(6) 式中的 $\epsilon\phi_1, \epsilon^2\phi_2, \cdots\epsilon^k\phi_k$ 等稱爲 ϕ 的第一階，第二階，……第 k 階的變分，可用下列各式表示：

$$\epsilon\phi_1\equiv\delta\phi,\quad \epsilon^2\phi_2\equiv\delta^2\phi,\quad \cdots\epsilon^k\phi_k\equiv\delta^k\phi \tag{I-9}$$

因
$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\ \frac{\partial^k\phi}{\partial\epsilon^k}=\frac{\partial^k}{\partial\epsilon^k}\ \frac{\partial^n\phi}{\partial t^n}$$

由 (7), (8), (9) 諸式可得：

$$\frac{d^n}{dt^n}\ \delta^k\phi=\frac{d^n}{dt^n}\ \epsilon^k\phi_k=\epsilon^k\ \frac{\partial^k}{\partial\epsilon^k}\ \frac{d^n\phi}{dt^n}=\delta^k\frac{d^n\phi}{dt^n} \tag{I-10}$$

故 $\frac{d}{dt}$ 與 δ 兩種算符對任何函數 ϕ，均有可互易之關係，然此關係僅當 t 係獨立變數而不隨 δ 運算變化時才可成立。

對於 $\phi=\frac{dy}{dx}$ 中 x, y 兩者均隨 δ 運算變化時，則變分 $\delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$最好以稍微不同的符號 $\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)$來表示。

因 $$\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\Delta\left(\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\right)=\Delta\left(\frac{y'}{x'}\right)=\frac{\Delta y'}{x'}-\frac{y'\Delta x'}{x'^2}$$

然由 (10) 式知 $\Delta y'=\frac{d}{dt}\Delta y$, $\Delta x'=\frac{d}{dt}\Delta x$，此因 t 與變分無關之故，因此

$$\Delta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}\Delta y}{\frac{dx}{dt}}-\frac{\frac{dy}{dt}\ \frac{d}{dt}\Delta x}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}=\frac{d}{dx}\ \Delta y-\frac{dy}{dx}\ \frac{d}{dx}\ \Delta x \tag{I-11}$$

由上述可顯見 Δ 與 $\frac{d}{dx}$ 兩種算符，無可互易之關係。

今考慮一函數 ϕ，我們欲研究由於 $\delta x, \delta y, \delta x'\cdots$ 等變分將使

ϕ 的積分 I 產生何種之變化，設 I 爲

$$I=\int_{t_1}^{t_2}\phi(t, x, y, \cdots x', y', \cdots)dt \tag{I-12}$$

由（7）及（10）式，我們有下列關係

$$\int_{t_1}^{t_2}\phi(t, x+\delta x, \cdots)dt=\int_{t_1}^{t_2}(\phi+\delta\phi+\frac{1}{2}\delta^2\phi\cdots)dt$$

$$=I+\delta I+\frac{1}{2}\delta^2 I+\cdots \tag{I-13}$$

此處 $\delta^k I$ 係表示

$$\delta^k I=\int_{t_1}^{t_2}\delta^k\phi dt \tag{I-14}$$

上式說明了積分與 δ 兩種算符，亦有可互易之關係，讀者需注意此關係僅在積分變數與變分無關時才成立。假如積分變數與變分有關時，則可用另一與變分無關的變數 t 介入如：

$$\Delta\int\phi dx=\Delta\int\phi x' dt = \int\Delta(\phi x')dt$$

$$=\int(x'\Delta\phi+\phi\Delta x')dt=\int(\Delta\phi dx+\phi d\Delta x) \tag{I-15}$$

再如積分（12）之上下限亦與變分有關時，則變爲

$$\delta I=\int_{t_1}^{t_2}\delta\phi dt+\phi(t_2)\delta t_2-\phi(t_1)\delta t_1 \tag{I-16}$$

2　Euler 方程式

變分法中的最簡單問題，可由下例看出，設一連續函數 $F(x, y, y')$，在 $x_0\leq x\leq x_1$ 之範圍內其第一階及第二階導數均存在，設函數 $y(x)$ 在 $x=x_0, x_1$ 之值爲 y_0 及 y_1，我們欲研究當下列

積分

$$I=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx \tag{I-17}$$

穩定時（亦即具有極大或極小値時），函數 $y(x)$ 應爲如何之間題，此問題之解法如下：使 I 對 $y(x)$ 函數作小變化時穩定，即 $\delta I=0$

$$\delta I=\int_{x_0}^{x_1}\delta F dx=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)dx=0 \tag{I-18}$$

上式之第二項如用部分積分法，則 δI 可得如下：

$$\begin{aligned}\delta I&=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y\right)dx\\&=\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx+\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]_{x_0}^{x_1}=0\end{aligned}$$

上式第二項等於 0，係因 $y(x)$ 在上下限 x_0, x_1 時，具有固定 y_0, y_1，使變分 δy 在此兩點 x_0, x_1 上消失之故。今在 $x_0<x<x_1$ 之範圍內，δy 之變化係完全隨意的，因此上式之第一項（積分項）等於零的必需條件乃爲

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0 \tag{I-19}$$

（19）式即 Euler 方程式。上述方法可立即推展到雙獨立變數函數，如 $F(x, y, u, u_x, u_y)$ 之情形（此處 $u_x=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$u_y=\dfrac{\partial u}{\partial y}$，而 u 係 x, y 之函數）。在此情形下，假設我們的問題係求函數 u，使得下列積分

$$I=\iint_G F(x, y, u, u_x, u_y)dxdy \tag{I-20}$$

穩定，此處 G 係代表該雙重積分之 x, y 領域。

由上述相同的方法，求出

$$\delta I=\iint_G\left(\frac{\partial F}{\partial u}\delta u+\frac{\partial F}{\partial u_x}\ \delta u_x+\frac{\partial F}{\partial u_y}\delta u_y\right)dxdy=0 \qquad (\text{I}-21)$$

所滿足之條件。讀者可將上式當做練習題，證明在此情況下，必需滿足之條件，亦即 Euler 方程式，應爲

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u_x}+\frac{\partial}{\partial y}\ \frac{\partial F}{\partial u_y}-\frac{\partial F}{\partial u}=0 \qquad (\text{I}-22)$$

附加輔助條件的變分問題可由下例得到瞭解。假設我們要尋求一函數 $y=y(x)$ 使積分 J 穩定，即

$$\delta \text{J}=\delta\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')dx=0$$

同時要求積分

$$K=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')dx=\text{常數}$$

對於此類附加限制條件的變分問題，同樣地可用上述方法求出結果，由 (18) 式知，

$$\delta J=\int\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y dx=0 \qquad (\text{I}-23)$$

$$\delta K=\int\left(\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial G}{\partial y'}\right)\delta y dx=0 \qquad (\text{I}-24)$$

上二積分中，任一積分中之 δy 均非任意的，而需同時滿足其他的一式。因此，從 (23) 或 (24) 二式中之一，我們不能得出 F 或 G 所滿足的關係式。處理此類問題，我們可用 Lagrange「未定乘數法」。

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial(F-\lambda G)}{\partial y'}-\frac{\partial(F-\lambda G)}{\partial y}=0 \qquad (\text{I}-25)$$

(25) 式係 $y(x)$ 所滿足之微分方程式，λ 則爲 Lagrange 未定

乘數，此未定乘數可由 $y(x)$ 所滿足的邊際條件來決定。類此的問題，可在量子力學中看到。在量子力學中的 Schrödinger 方程式，即爲變分方程式中的 Euler 方程式，而其附帶條件則是波函數 ψ 所滿足的歸一化條件。

第（17）式可推廣至有兩個或多個變數的問題，如

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, z, y', z') dx = 0, \quad y' = \frac{dy}{dx} \text{ 等} \tag{I-26}$$

此變分方程式之 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'} - \frac{\partial F}{\partial z} = 0 \tag{I-27}$$

3 變分問題的另一形式

設有函數

$$F = F(u, v, y, z, x) \tag{I-28}$$

x 爲自變數，y, z 爲 x 之函數，u, v 係 x, y, z 之任意函數

$$u = u(y, z, x), \quad v = v(y, z, x) \tag{I-29}$$

F 及其對 u, v 之第一，第二次導數，皆有連續性。茲求下列變分問題

$$\delta I = \delta \int_{x_1}^{x_2} \left\{ F + (y' - u)\frac{\partial F}{\partial u} + (z' - v)\frac{\partial F}{\partial v} \right\} dx = 0,$$

$$\delta y, \delta z, \delta u, \delta v \text{ 皆任意的，} \tag{I-30}$$

與（I-26）之變分問題相等的條件。

第（30）方程式的 Euler 方程式，按（22），乃

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(y'-u)+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial u}(z'-v)=0 \tag{I-31a}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}(y'-u)+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}(z'-v)=0 \tag{I-31b}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial y}(y'-u)+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial y}(z'-v)=0 \tag{I-32a}$$

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial z}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial z}(y'-u)+\frac{\partial^2 F}{\partial v\partial z}(z'-v)=0 \tag{I-32b}$$

茲可證明 (30) 和 (26) 兩問題相等的充足條件，係下二次式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\xi^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}\xi\eta+\frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\eta^2>0 \tag{I-33}$$

(亦即「肯定正值」positive-definite.) 這證明如下。第 (33) 條件的條件係

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}>0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial v\partial u} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{vmatrix}>0 \tag{I-34}$$

應用此二條件於 (31a), (31b)，即得

$$y'-u=0, \quad z'-v=0 \tag{I-35}$$

由此，則 (32a), (32b) 成為:

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\partial F}{\partial y}=0, \quad \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial z'}-\frac{\partial F}{\partial z}=0$$

而此即係 (26) 的 Euler 方程式 (27) 也。

第 (35) 二方程式

$$\frac{dy}{dx}=u(y,z,x), \quad \frac{dz}{dx}=v(y,z,x) \tag{I-35a}$$

定出下積分

$$\int_{x_1}^{x_2} F(u,v,y,z,x)dx \tag{I-36}$$

的極端線 (extremal)，即係使 (36) 式爲極端值 (extremum) 之意也。

上述的結果，亦可由另一觀點獲得。設將第 (26) 式的變分問題，代以下列的問題：

$$\delta\int_{x_1}^{x_2} F(u,v,y,z,x)dx=0 \ . \tag{I-37}$$

若 y, z, u, v 變分需符下列條件

$$u-y'=0, \quad v-z'=0 \tag{I-38}$$

設引用 Lagrange 乘數 λ, μ, 使 (37), (38) 合成下一問題

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}\{F(u,v,y,z,x)+\lambda(y'-u)+\mu(z'-v)\}dx$$
$$=0 \tag{I-39}$$

此處 $\delta y, \delta z, \delta u, \delta v$ 皆爲任意變分，λ, μ 爲未定函數。(39) 對 u, v 的 Euler 方程式爲

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial u}-\lambda+(y'-u)\frac{\partial\lambda}{\partial u}+(z'-v)\frac{\partial\mu}{\partial u}=0\\ &\frac{\partial F}{\partial v}-\mu+(y'-u)\frac{\partial\lambda}{\partial v}+(z'-v)\frac{\partial\mu}{\partial v}=0\end{aligned} \tag{I-40}$$

設使

$$\lambda=\frac{\partial F}{\partial u}, \quad \mu=\frac{\partial F}{\partial v} \tag{I-41}$$

則 (40) 式卽同 (31a, b) 式。

上述（26）式變分問題與（30）式變分問題相等的結果，可推展至 n 個變數 $q_1, q_2, \cdots q_n$ 及一個自變數 t 的情形。

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} F(q'_1, q'_2, \cdots, q'_n, q_1, \cdots, q_n, t)dt = 0 \tag{I-42}$$

$$q'_k = \frac{dq_k}{dt}$$

的 Euler 方程式係

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q'_k} - \frac{\partial F}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, 2, \cdots, n \ . \tag{I-43}$$

（42）式與下列問題

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}\Big\{F(u_1, \cdots, u_n, \ q_1, \cdots, q_n, t)$$

$$+\sum_k^n (q' - u_k)\frac{\partial F}{\partial u_k}\Big\}dt = 0 \tag{I-44}$$

（此間之 $F(u_1, \cdots, u_n, \ q_1, \cdots, q_n, t)$ 乃係由 $F(q'_1, \cdots, q'_n, \ q_1, \cdots, q_n, t)$ 將 q'_k 代以 u_k 而來的）相等的條件，乃係下列二次式爲肯定正値:

$$\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial u_j \partial u_k}\xi_j \xi_k > 0 \tag{I-45}$$

此結論的證明，與上文（31）—（35）式相同，亦即

$$u_k = \frac{dq_k}{dt}, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{I-46}$$

這些方程式定出下列積分

$$\int_{t_1}^{t_2} F(u_1, u_2, \cdots, u_n, \ q_1, \cdots, q_n, t)dt \tag{I-47}$$

的極端線。第（42）式應用於力學時，F 即所謂 Lagrangian 函數 $L(q'_1, \cdots, q'_n, \ q_1, \cdots, q_n, t)$，（43）式即是 Lagrange 方程式，

詳見下章。第 (44) 式應用於力學時, F 爲 Lagrangian 函數 L, 可導出 Hamilton 的正則方程式, 見下文第三章。在此情形下, 第 (45) 式條件, 由於動能永是正值的, 故自然得滿足的保證。

4 Hilbert 氏的「獨立積分」S

茲取第 (30) 式中的積分

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left\{F+(y'-u)\frac{\partial F}{\partial u}+(z'-v)\frac{\partial F}{\partial v}\right\}dx \qquad \text{(I-48)}$$

$$F=F(u, v, y, z, x)$$

$$y'=\frac{dy}{dx},\quad z'=\frac{dz}{dx},\quad u=u(y, z, x),\quad v=v(y, z, x)$$

現求 u, v 二函數, 使 S 由 $P_1(x_1, y(x_1), z(x_1))$ 至 $P_2(x_2, y(x_2), z(x_2))$ 積分之值, 與積分之徑無關。

茲定義 U, V, W 三函數如下

$$U\equiv\frac{\partial F}{\partial u},\quad V\equiv\frac{\partial F}{\partial v},\quad W\equiv F-u\frac{\partial F}{\partial u}-v\frac{\partial F}{\partial v} \qquad \text{(I-49)}$$

使 (48) 式成

$$S=\int_{P_1}^{P_2}(W\,dx+U\,dy+V\,dz) \qquad \text{(I-50)}$$

使此積分與徑無關的必需及充足條件, 乃係下式爲一全微分

$$W\,dx+U\,dy+V\,dz=dS,\ \text{一全微分} \qquad \text{(I-51)}$$

如將 W, U, V 看作一矢量函數 $\boldsymbol{A}$ 的分量, 則 (51) 謂

$$\text{Curl}\ \boldsymbol{A}=0 \qquad \text{(I-52)}$$

設

$$S(x,y,z)=S_1,\text{ 一常數} \tag{I-53}$$

爲一 S 恒値表面，由（51）及（53），可得

$$Wdx+Udy+Vdz=0 \tag{I-54}$$

此卽示 $\boldsymbol{A}(W,U,V)$ 矢量在 $S=S_1$ 表面每一點皆作正交（垂直）。由（49）及（51）式，可得

$$\frac{\partial F}{\partial u}=\frac{\partial S}{\partial y},\quad \frac{\partial F}{\partial v}=\frac{\partial S}{\partial z} \tag{I-55}$$

由此二方程式，可獲 u, v 之解

$$u=u\left(\frac{\partial S}{\partial y},\frac{\partial S}{\partial z},y,z,x\right),\quad v=v\left(\frac{\partial S}{\partial y},\frac{\partial S}{\partial z},y,z,x\right) \tag{I-56}$$

以此代入（49）之第三方程式，可得（由（51）式）

$$W\left(\frac{\partial S}{\partial y},\frac{\partial S}{\partial z},y,z,x\right)=\frac{\partial S}{\partial x} \tag{I-57}$$

此乃一 S 函數之偏微分方程式。W 之形式，來自 F，有如（49）式。由（57）之任一解 $S(y,z,x)$，可按（55）式得 $\frac{\partial F}{\partial u},\frac{\partial F}{\partial v}$ 爲 y,z,x 之函數。再由第（56）式，可得 u,v 爲 y,z,x 之函數。此 u,v 卽係使（48）式的 S 積分與徑無關者。

第（57）式，稱爲 Hamilton-Jacobi 方程式。該方程式將於下文第六章詳論之。

茲可證明下一定理：設 u,v 乃使（48）式之 S 積分與徑無關的兩個函數，則下二方程式

$$\frac{dy}{dx}=u(y,z,x),\quad \frac{dz}{dx}=v(y,z,x) \tag{I-58}$$

之解—卽其所定的曲線 C—符合第（26）變分問題的 Euler 方程式（27）。證明如下：

設 C' 爲一變徑

$$y+\delta y,\quad z+\delta z$$

δy, δz 在兩端 p_1, p_2 皆爲0。

由於變分 δy, S 之變分 $\delta_y S$, 按 (58), 乃

$$\delta_y S=\int_{p_1}^{p_2}\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}\right)\delta y+\frac{\partial F}{\partial u}\left(\delta y'-\frac{\partial u}{\partial y}\delta y\right)\right.$$
$$\left.-\frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\delta y\right\}dx$$

$$=\int_{p_1}^{p_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u}\right\}\delta y\,dx$$

同此, 由於變分 δ_z,

$$\delta_z S=\int_{p_1}^{p_2}\left\{\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial v}\right\}\delta z\,dx$$

按假定, S 與徑無關, 故 $\delta_y S=\delta_z S=0$。又 δy, δz 乃任意變分, 故卽得第 (27) 方程式。

5　最小值的必需及充足條件

第 (19) 或 (27) 式, 僅係第一階變分等於零的必需條件, 未對極大值, 極小值 (甚或穩定值) 的可能情形作何分別。茲試求最小值的條件

取第 (26) 式之變分問題

$$\delta\int_{x_1}^{x_2}F(y',z',y,z,x)dx=0,\quad y'=\frac{dy}{dx},\quad z'=\frac{dz}{dx}\quad(\text{I}-59)$$

設 Γ 線乃 (59) 之極端線, 並以 $\xi,\eta,\zeta,\eta',\zeta'$ 代在該線上之 $x,y,$

z, y', z' 值，卽

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} F(\eta', \zeta', \eta, \zeta, \xi) d\xi = \text{極端値} \tag{I-60}$$

設使 C 爲一變徑，其端點與 Γ 相同。如（60）爲最小值，則

$$\int_C F(y', z', y, z, x) dx - \int_\Gamma F(\eta', \zeta', \eta, \zeta, \xi) d\xi > 0 \tag{I-61}$$

據前第 4 節的結果，後一積分可代以

$$\int_c \left\{ F(u, v, y, z, x) + (y' - u)\frac{\partial F}{\partial u} + (z' - v)\frac{\partial F}{\partial v} \right\} dx \tag{I-62}$$

蓋此積分與徑 C 無關，而當 C 與 Γ 吻合時，則與 (61) 中後一積分相同也。玆定義所謂 E-函數（Weierstrass 氏的）

$$E(y', z', y, z, x; u, v) = F(y', z', y, z, x) - F(u, v, y, z, x) - (y' - u)\frac{\partial F}{\partial u} - (z' - v)\frac{\partial F}{\partial v} \tag{I-63}$$

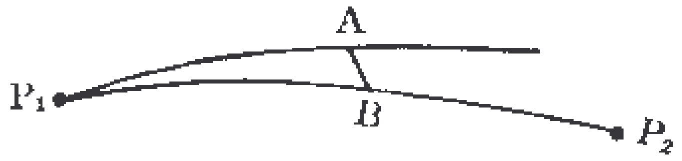
此間之 y, z, x 乃在 C 線上之座標，y', z' 乃 C 線之方向；u, v 定經 x, y, z 點的極端線的方向；$\frac{\partial F}{\partial u}, \frac{\partial F}{\partial v}$ 的自變數爲 u, v, y, z, x。第（61）式可寫爲

$$\int_c E(y', z', y, z, x; u, v) dx > 0 \tag{I-64}$$

每當 C 線的一部與一極端線吻合時，則 $y' = u, z' = v$，而使 $E = 0$。

經過（任一）點 $P_1[x_1, y(x_1), z(x_1)]$，有 ∞^2 極端線。其中之一，經過 $P_2[x_2, y(x_2), z(x_2)]$ 點。現於 P_1, P_2 點間，構一特殊之 C 徑 P_1ABP_2，如下圖。

A, B 係經 P_1 點的兩極端線的任兩點，AB 係一直線。故第 (64)



式簡化爲

$$\int_A^B E dx \quad > 0$$

設使A點趨近B點。上不等式要求

$$E(y', z', \eta, \zeta, \xi; \eta', \zeta') > 0 \tag{I-65}$$

$\eta, \zeta, \xi; \eta', \zeta'$ 乃指B點，y', z' 則示 AB 的方向。如要求 (65) 式對任意點B及任意 y', z' 皆成立，則 (64) 條件於極端線Γ之附近領域皆成立。故第 (65) 不等方程式，乃 Γ 爲一「强」最小值的必需及充足條件。(唯此最小值，可能是絕對的最小值，亦可能是所謂相對的最小值，卽謂此最小值之外，仍有其他最小值。)

如第 (65) 不等式，祇限於一小領域

$$\Delta y' = y' - \eta', \quad \Delta z' = z' - \zeta'$$

則將 (63) 式之 E 函數展開後，可寫成 (略去 y, z, x 自變數)

$$E(y', z', \eta', \zeta') = F(y', z') - F(\eta', \zeta') - \frac{\partial F}{\partial \eta'}\Delta y' - \frac{\partial F}{\partial \zeta'}\Delta z'$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial \eta'^2}(\Delta y')^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial \eta' \partial \zeta'}\Delta y' \Delta z' + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta'^2}(\Delta z')^2\right\}$$
$$+ \cdots > 0$$

此條件的必需及充足條件，乃*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta'^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial \eta'^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \zeta'^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta' \partial \zeta'}\right)^2 > 0 \tag{I-66}$$

見 (34)。(66) 乃所謂「弱」最小值的必需及充足條件 (Legendre 氏的)。

---

* (66) 乃一具有 n 個變數 $q_1, \cdots, q_n$, 一個自變數 t, 問題的一特例。如

$$F=F(q'_1, \cdots, q'_n,\ q_1, \cdots q_n, t)$$

則 (66) 式條件, 乃下行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial q'_1 \partial q'_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial q'_1 \partial q'_2} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial q'_1 \partial q'_3} \cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial q'_2 \partial q'_1} & \dfrac{\partial^2 F}{\partial q'^2_2} & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{vmatrix}$$

及所有的主子式 (Principal minor) 皆係正值。此條件來自

$$\sum_{i,j}^{n} \frac{\partial^2 F}{\partial q'_i \partial q'_j}\ \xi_i \xi_j > 0 \qquad (\text{I}-67)$$

的要求。在力學中, F 爲動能 (或 Lagrangian 函數), 則 (67) 條件乃動能爲肯定正值的自然結果。

習題

1. 試求一具柔順性且不能伸長之重繩，當兩端被固定於（$x=0$, $y=h$）及（$x=d, y=h$）時，由重力作用所產生之形狀，其方程式的形式如何？（設繩長$>d$）
2. 假設一質點沿一曲線由重力作用從高度 $y=h_2$ 一點滑至同垂直面上 $y=h_1$ 高度另一點。求下落時間最短所沿的曲線。此曲線稱爲重力的最速落徑(brachistochrone)。試求其方程式。
3. 試證上題之最速落徑亦即「等時降落」之軌跡(tautochrone)。(即沿同一曲線之任何點在無摩擦之狀況下滑至同一垂直面上一固定點所需之時間均相等)。
4. 已知二函數 $u(x), w(x)$，積分 I_1, I_2 定義爲:

$$I_1=\int_0^\infty\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dw}{dx}\right)^2+\alpha^2(u^2+w^2)+\frac{c}{x}e^{-bx}(u^2+w^2)\right.$$
$$\left.+\frac{b}{x^2}w^2\right]dx$$

$$I_2=\int_0^\infty[Pu^2+Qw^2+2Ruw]dx$$

此處 α, c, b 均爲常數而 P, Q, R 則爲 x 之函數。試證變分問題 $\delta\left(\frac{I_1}{I_2}\right)=0$ 所滿足的微分方程式爲

$$\frac{d^2u}{dx^2}-\left(\alpha^2+\frac{c}{x}e^{-bx}\right)u=-A[Qw+Pu]$$

$$\frac{d^2w}{dx^2}-\left(\alpha^2+\frac{c}{x}e^{-bx}+\frac{b}{x^2}\right)w=-A[Qu+Rw]$$

此處A係 $\frac{I_1}{I_2}$ 之最小值.

第二章

Hamilton 原理與最小作用量原理

1 Hamilton 原理

1834 年 Hamilton (William Rowland Hamilton, 愛爾蘭數學物理學家) 首先用變分法的形式演繹出力學中最重要的一般性原理。在 Hamilton 理論中所得的結果，由於與座標系統的選擇無關，因此這理論就成了處理其他較深奧的理論物理的最適當的一般方法，例如應用在量子理論等。下面我們將以簡明的方法敘述出 Hamilton 的理論。

所謂 Hamilton 原理，係謂一力學系統在外力 Q_k 作用下，其自然運動所必需符合的條件，乃是使下列積分等於零，即

$$\int_{t_0}^{t}(\delta T+\sum_k Q_k\delta q_k)dt=0 \qquad (\text{II}-1)$$

此處變分 δ，係指從自然運動路徑，至與其具有相同的始、終點位形及相同過渡時間的相鄰路徑間的變化。

如力 Q_k 可從一位能 V 導出，則上式可寫成

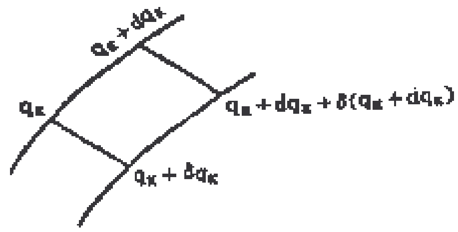
$$Q_k = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \qquad (\text{II}-2)$$

利用 (2)，則 (1) 式亦可寫成下列形式

$$\delta\int_{t_0}^{t}(T-V)dt=\delta\int_{t_0}^{t}Ldt=0 \qquad (\text{II}-3)$$

此處 $L=T-V$ 被稱爲 Lagrangian 函數（係廣義座標 q_n 及速度 $\dot{q}_k$ 的函數）。

實際上，Hamilton 原理可從 d'Alembert 原理導出。在導出此原理之前，我們先將關於變化路徑的原理的意義加以澄淸。設 $q_1\cdots q_n$ 代表一系統沿眞實路徑上的座標，而以 $q_1+\delta q_1,\cdots,q_n+\delta q_n$ 代表沿着相鄰或變化路徑上的座標。在任何時間 t，變化路徑上有一點 $q_1+\delta q_1,\cdots,q_n+\delta q_n$ 與眞實路徑上的 $q_1,\cdots q_n$ 點互相對應。我們可以想像上述之變化曲線，係在同時間 t 時，由眞實路徑上一點 $q_1,\cdots,q_n$ 作一位移 $\delta q_1,\cdots\delta q_n$ 所形成之新的相鄰路徑。在這種情況下的變分 $\delta t=0$，故 t 可當做係一自變數。



今考慮 d'Alembert 原理

$$\sum(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)=\sum m_i(\ddot{x}_i\delta x_i+\ddot{y}_i\delta y_i+\ddot{z}_i\delta z_i)$$

因 $m\ddot{x}\delta x=m\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x)-m\dot{x}\frac{d}{dt}\delta x=m\frac{d}{dt}(\dot{x}\delta x)-\frac{m}{2}\delta\dot{x}^2$

故 d'Alembert 原理可寫成下列形式

$$\sum(X_i\delta x_i+Y_i\delta y_i+Z_i\delta z_i)+\delta T$$
$$=\frac{d}{dt}\sum m_i(\dot{x}_i\delta x_i+\dot{y}_i\delta y_i+\dot{z}_i\delta z_i)$$

如將上式變換至廣義座標 $q_1\cdots q_n$，並且利用 $p_k=\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}$ 之關係，則變成

$$\sum Q_k\delta q_k+\delta T=\frac{d}{dt}\sum p_k\delta q_k \tag{Ⅱ-4}$$

此式係稱爲 Lagrange「中心方程式」。把（4）式積分則得

$$\int_{t_0}^{t_1}(\delta T+\sum Q_k\delta q_k)\,dt=\sum p_k\delta q_k\Big|_{t_0}^{t_1} \tag{Ⅱ-5}$$

假如 δq 在端點之値爲零時，（即當 $t=t_0, t_1$ 時，$\delta q=0$），則（5）式即變成爲（1）式。如 $\sum Q\delta q=-\delta V$，則變成爲（3）式。故我們可以結論：Hamilton 原理可從 d'Alembert 原理推演出來。同樣地，假如從 Hamilton 原理出發，我們就可推演出 d'Alembert 原理或 Lagrange 方程式。由（Ⅰ-18）及（Ⅰ-19）式，可以看出變分問題中的 Euler 方程式。

$$[L]_{q_k}\equiv\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \tag{Ⅱ-6}$$

實際上即爲 Lagrange 方程式。

2 最小作用量原理

在 Hamilton 原理中，變分量 δq 係完全隨意的，故沿著變化路徑 $q_k+\delta q_k$ 時，動能與位能的總和 $T+V$ 通常並非常數，故並不等於沿著眞實路徑之値。

但如我們對變分量 δq_k 再加上一個條件，卽沿著這兩條路徑的總能量 $T+V$ 均相同，卽

$$T+V=\text{常數}=h \tag{Ⅱ-7}$$

則 Hamilton 原理 (3) 卽可寫成下列特殊形式：

從　　$L=T-V=2T-h$ 則 (3) 式可寫成

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1} 2T dt=0 \tag{Ⅱ-8}$$

此式之意義（δ 換成 Δ 之意義見下面之解釋）爲積分 $\int_{t_0}^{t_1} 2T dt$ 沿著眞實路徑所得的値，與沿著變化路徑（此變化路徑具有與眞實路徑相同的始、終點位形並滿足相同的能量方程式）所得的値比較時，前者對後者言是穩定的。此處須注意的是沿著變化路徑與沿著眞實路徑所需的過渡時間並不相同。其理由如下：由於對變化路程（卽 δq_k 及 $\delta\dot{q}_k$）所限定之能量條件下，我們不再可能假設該系統可以在任意時刻下到達我們所取的變化路徑上的任一個位形 $q_k+\delta q_k$ 上。因此 t 不能再認爲是與變分無關之獨立變數。在此情形下，我們不能應用（Ⅰ-14）式，而只能用（Ⅰ-15）式，因此 (6) 式卽可寫成

$$\Delta\int 2T dt=2\int \Delta T dt+2\int T d\Delta t=0 \tag{Ⅱ-9}$$

$\int 2T dt$ 稱爲作用量積分，此積分亦可寫成下列形式

$$\int 2T dt=\sum\int m_i v_i \frac{ds_i}{dt} dt=\int\sum m_i v_i ds_i$$

$$=\int\sum p_i ds_i \tag{Ⅱ-10}$$

依照歷史順序來說，最小作用量原理的發現遠早於 Hamilton 原理，事實上，在 1744 年 Maupertuis 就已發表這原理，但伊係以形而上學的方法來探討此原理，且他對「作用量」的定義亦顯得含糊不清。同年，當 Euler 在研究質點系統的變分問題時亦曾涉及此原理，一直到 1760 年 Lagrange 才進一步的把這原理所附著的形而上學的窨臼打碎，清楚地對這原理做了一番陳述，並且把這原理應用到一般質點系統。1834 年，Hamilton 更作了一個重大的突破，實際上這也就是直到今天還把他的名字與這原理連在一起的原因。

最小作用量原理 (9) 亦可寫成稍微不同的形式。對於一動力系統，其動能 T 如爲速度的齊次二次函數時，

$$2T=\sum g_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad dt^2=\frac{1}{2T}\sum g_{ij}dq_idq_j$$

則(9)式可寫成

$$\Delta\int 2Tdt=\Delta\int\sqrt{2(h-V)}\sqrt{\sum g_{ij}dq_idq_j}=0 \qquad (\text{II}-11)$$

此處 $h=T+V$ 代表系統 (33) 之全部能量。今再引入一獨立參數 τ，且令 $\dfrac{dq}{d\tau}=q'$，則上式即可寫成

$$\delta\int Fd\tau\equiv\delta\int\sqrt{h-V}\,\sqrt{\sum g_{ij}q_i'q_j'}\,d\tau=0 \qquad (\text{II}-12)$$

在寫成（II-12）式之形式下，因時間 t 並不出現，故我們不需再顧慮到兩端點之變分。（II-12）式的 Euler 方程式爲

$$\frac{d}{d\tau}\frac{\partial F}{\partial q'_i}-\frac{\partial F}{\partial q_i}=0 \qquad (\text{II}-13)$$

此即對於該系統的路徑所滿足的 Lagrange 方程式（(12) 式係 Jacobi 導出之形式）。

(9) 式的一個特殊情形是當 $V=0$ 及 $h=$常數的情形。假如我們定義在 n-維空間 $q_1\cdots q_n$ 中的弧長元素爲

$$ds^2=\sum g_{ij}dq_i dq_j \tag{II-14}$$

則 (11) 式可寫成

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} ds=0 \tag{II-15}$$

此係 Hertz 在 1892 年所導出的最小作用量原理的另一形式。此方程式係 q 空間中一極端線的方程式。在「平坦空間」(flat space),（如在三維歐氏空間）此極端線即係直線。此處我們也許可以提及一點，在廣義相對論的最初演繹中，牛頓理論中的質點在重力場中的世界線（即4-維時空的軌跡），即係Riemannian 4-維空間中的極端線。此4-維空間中的度規 (metric) g_{ij}〔(14)式〕，則係由物質分佈的情形所決定的。

茲舉一例以說明上述各點：在重力場中，一具有已知起始能量的拋射體，從一已知位置 (x_1, y_1) 被發射時，可經兩條不同之軌道而到達另一已知位置 (x_2, y_2)。拋射體在到達所謂「動焦點」(kinetic focus) 以前到達 (x_2, y_2) 點之路徑，其作用積分爲極小值，而另外先到達動焦點才達到 (x_2, y_2) 點者之路徑，其作用積分之值則祇其鄰近之變徑爲最小值。上述所謂 (x_1, y_1) 的動焦點，其意義乃謂從 (x_1, y_1) 出發之兩條具有相同起始能量而無限靠近的軌道所成的交點。所有動焦點所組成的軌跡乃係一拋物線，此種動焦點理論係由 Thomson 及 Tait 所提出者。〔關於此

點，可參閱二人所著 Natural Philosophy（358 節），Webster 所著質點力學（35 節）或 Whittaker 所著解析力學（103 節）。〕參閱本册 263 頁第五題。

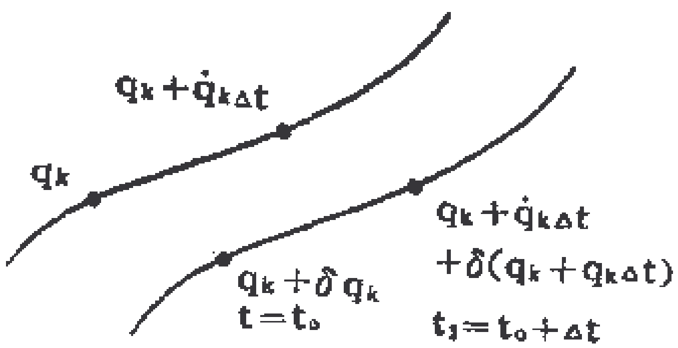
3 Helmholtz 變分原理

1887 年 Helmholtz 提出了關於變分原理的另一個比較廣義的陳述。

如(Ⅰ-11)式所提及者，我們將分辨兩種不同的變分算符，即 δ 表示 t 與變分無關之變分，及 Δ 表示 t 隨之而變的另一種變分。設我們考慮位形 $q_k+\dot{q}_k\Delta t+\delta(q_k+\dot{q}_k\Delta t)$，此位形係由 q_k 點經過時間間隔 Δt 到達 $q_k+\dot{q}_k\Delta t$ 點後再作與 t 無關之 δ 變分所得。經過上述這兩種過程，其結果應與直接從 q_k 作 Δ 變分者等效（除了第二階微小量的差別）。因此

$$q_k+\dot{q}_k\Delta t+\delta(q_k+\dot{q}_k\Delta t)=q_k+\Delta q_k,$$

$$\text{或}\quad \Delta q_k=\delta q_k+\dot{q}_k\Delta t \qquad (\text{Ⅱ}-16)$$



我們可視 δq 爲 Δq_k 在 (q_k, t) 空間對 $t=$常數 t_0 之平面所作之投影。對於任何函數 $\phi(q,t)$ 通常應有下式，

$$\Delta\phi=\sum \frac{\partial\phi}{\partial q_k}\ \delta q_k+\frac{\partial\phi}{\partial t}\Delta t=\delta\phi+\dot{\phi}\Delta t \qquad (\text{II}-17)$$

由（16),（17）二式可知.

$$\frac{d}{dt}\ \delta q_k=\frac{d}{dt}\ \Delta q_k-\ddot{q}_k\Delta t-\dot{q}_k\ \frac{d}{dt}\Delta t$$

$$\Delta\dot{q}_k=\delta\dot{q}_k+\ddot{q}_k\Delta t=\frac{d}{dt}\ \delta q_k+\ddot{q}_k\Delta t$$

故

$$\Delta\ \frac{d}{dt}q_k=\frac{d}{dt}\Delta q_k-\dot{q}_k\ \frac{d}{dt}\ \Delta t \qquad (\text{II}-18)$$

此式實際上係以前所獲之（I-11）式。

如應用（18）式，則

$$\Delta T=\Delta\sum\frac{1}{2}m_i\dot{x}_i^2=\sum m_i\dot{x}_i\Delta\dot{x}_i$$

$$=\sum m_i\dot{x}_i\ \frac{d}{dt}\ \Delta x_i-\sum m_i\dot{x}_i^2\frac{d}{dt}\ \Delta t \qquad (i=x,y,z)$$

上式亦可寫成

$$\Delta T+2T\ \frac{d}{dt}\ \Delta t=\sum m_i\dot{x}_i\ \frac{d}{dt}\ \Delta x_i$$

$$=\sum m_i\left[\frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\Delta x_i\right)-\ddot{x}_i\Delta x_i\right]$$

由（16）式可得

$$\sum m_i\ddot{x}_i\Delta x_i=\sum m_i\ddot{x}_i\delta x_i+\sum m_i\ddot{x}_i\dot{x}_i\Delta t$$

$$=\sum m_i\ddot{x}_i\delta x_i+\frac{dT}{dt}\ \Delta t$$

故

$$-\sum m_i\ddot{x}_i\delta x_i+\sum m_i\ \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_i\Delta x_i\right)$$

$$=\Delta T+2T\ \frac{d}{dt}\Delta t+\frac{dT}{dt}\ \Delta t \qquad (\text{II}-19)$$

今如以下式表示從直角座標到廣義座標的變換，

$$x_i=x_i(q_k,t)$$

或更一般化，寫成*

$$\dot{x}_i=\sum\alpha_{ik}\dot{q}_k+\alpha_i$$

$$\Delta x_i=\sum\alpha_{ik}\Delta q_k+\alpha_i\Delta t \qquad (\text{II}-20)$$

在此情形下

$$2T=\sum_{i,k,l} m_i\alpha_{ik}\alpha_{il}\dot{q}_k\dot{q}_l+2\sum_{i,k} m_i\alpha_{ik}\alpha_i\dot{q}_k+\sum m_i\alpha_i^2$$

$$=2T_2+2T_1+2T_0 \qquad (\text{II}-21)$$

此處 T_2, T_1, T_0 係$\dot{q}$等的二次，一次及 0 次齊次函數。從（20）式及（21）式可得

$$\sum m_i\dot{x}_i\Delta x_i=2T_0\Delta t+\sum\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}(\Delta q_k-\dot{q}_k\Delta t)$$

$$=2T_0\Delta t+\sum\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k \qquad (\text{II}-22)$$

如將此式應用於（19）式中，則有

$$-\sum m_i\ddot{x}_i\delta x_i+\frac{d}{dt}\left(2T\Delta t+\sum\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right)$$

$$=\Delta T+2T\frac{d}{dt}\Delta t+\frac{dT}{dt}\Delta t$$

如兩邊各加上 $\sum X_i\delta x_i=\delta w$ 並且積分，則得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum(X_i-m_i\ddot{x}_i)\delta x_i dt+\left[2T\Delta t+\sum\frac{dT}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\right]_{t_0}^{t_1}$$

* 當符合（20）式時，則該系統稱爲 rheonomic 系統。

如 $\alpha_i=0$，則爲 skeronomic，如 $\alpha_{ik}=\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$，則稱爲完整系統（holonomic）。

$$=\int_{t_0}^{t_1}\left[\Delta T-\frac{dT}{dt}\ \Delta t+\delta w\ \right]dt+\int_{t_0}^{t_1}\left[2T\frac{d\Delta t}{dt}\right.$$

$$\left.+2\frac{dT}{dt}\Delta t\ \right]dt \qquad (\text{II}-23)$$

直到現在，我們尚未引入任何物理原理，今運用 d'Alembert 原理，則上左式之積分應等於 0，右式之積分則可用（17）式，故（23）式成

$$\int_{t_1}^{t_1}(\delta T+\delta w)dt=\left[\sum\ \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\ \delta q_k\right]_{t_1}^{t_1} \qquad (\text{II}-24)$$

此即力學變分原理的一般式，此式實際上已於（5）式得過。下面我們考慮一些特殊情形：

1）Hamilton 原理

如在（24）式中我們比較具有相同起、終點位形的路徑，則在 $t=t_0$ 及 $t=t_1$ 時 $\delta q_k=0$，故（24）式即變成爲 Hamilton 原理。

2）最小作用量原理：

如加上在任何變化路徑上能量 $T+V$ 均與實際路徑相同之條件，則

$$T+V=h=\text{常數}$$

故 $\Delta T+\Delta V=0$　或 $\Delta T-\Delta W=0$

$\delta T+\delta V=0$　或 $\delta T-\delta W=0$

故從（23）式，則有

$$2\int_{t_0}^{t_1}\left(\Delta T+T\ \frac{d\Delta t}{dt}\right)dt=\left[2T\Delta t+\sum\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}(\Delta q_k-\dot{q}_k\Delta t)\right]_{t_0}^{t_1}$$

或

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}2T\,dt=\left[2T\Delta t+\sum\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}(\Delta q_k-\dot{q}_k\Delta t)\right]_{t_0}^{t_1}\qquad(\text{II}-25)$$

此卽最小作用量原理之一般式。此式對一些特殊動力系統具有較簡單之形式。如對於 skeronomic 系統（(20) 及 (21) 式）

$$T=T_2$$

及
$$2T=\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\dot{q}_k\qquad(\text{II}-26)$$

則
$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}2T\,dt=\sum\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_k}\Delta q_k\Big]_{t_0}^{t_1}\qquad(\text{II}-27)$$

如變化路徑與眞實路徑具有相同之始、終點位形時（卽在 t_0 及 t_1 時 $\Delta q_k=0$），則 (27) 式將變成最小作用量原理通常的形式 (8), (9)，卽

$$\Delta\int_{t_0}^{t_1}2T\,dt=0$$

習題

1. 試證變分原理

$$\delta\int\left[L(\theta_1,\cdots,\theta_n,\ q_1,\cdots,q_n)+\sum\frac{\partial L}{\partial\theta_r}(\dot{q}_r-\theta_r)\right]dt=0$$

(此處 θ 及 q 係互相獨立) 可導出 Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0$$

2. 如將具有一能量積分之動力系統簡縮爲一具有較少自由度之系統，試證原系統之最小作用量原理應與簡縮系統之 Hamilton 原理相同。(提示: 參閱 Whittaker: 248 頁，264—6 頁)

3. 考慮一沿 x 方向，長度 L，線密度 ρ，被扯至張力爲 s 之繩子，玆使該繩沿 y 方向作横向振動，其動能與位能爲

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2dx,\quad V=\frac{s}{2}\int_0^L\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2dx$$

試利用 Hamilton 原理，導出波動方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{s}{\rho}\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

4. 試用分離變數法解出上題之波動方程式，卽: 使

$$y(x,t)=X(x)\phi(t)$$

設 $X(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$

$$\phi(t)=C\cos(\lambda at)$$

此處 $a^2=s/\rho$，並假設邊際條件爲

$$y(0,t)=y(L,t)=0$$

$$y(x,0)=f(x)\ \text{(已知函數)}$$

第三章

Hamilton 正則方程式

1 正則方程式與 Lagrange 方程式的演繹關係；Legendre 變換

首先我們將證明下列定理，此列定理通常稱爲 Legendre 變換。

定理一 設 $F(x_1,\cdots,x_n)$ 爲連續函數，其第一階及第二階導數均存在，且

$$\mathscr{H}_x F \equiv \frac{\partial\left(\dfrac{\partial F}{\partial x_1}\cdots\dfrac{\partial F}{\partial x_n}\right)}{\partial(x_1\cdots x_n)} \neq 0 \tag{Ⅲ-1}$$

今如從變數 $x_1\cdots x_n$ 到變數 $y_1\cdots y_n$ 間的變換的定義爲

$$y_r = \frac{\partial F}{\partial x_r}, \qquad r=1,\cdots,n \tag{Ⅲ-2}$$

且定義函數 $G(y_1\cdots y_n)$ 如下：

$$G(y_1\cdots y_n)+F(x_1\cdots x_n)=\sum x_r y_r \tag{Ⅲ-3}$$

則
$$x_r = \frac{\partial G}{\partial y_r}, \qquad r=1,\cdots,n \tag{Ⅲ-4}$$

及
$$\mathscr{H}_y G = \frac{\partial\left(\dfrac{\partial G}{\partial y_1}\cdots\dfrac{\partial G}{\partial y_n}\right)}{\partial(y_1\cdots y_n)} \neq 0 \tag{Ⅲ-5}$$

（證明）：由（3）式，則

$$\frac{\partial G}{\partial y_r}=x_r+\sum y_s\frac{\partial x_s}{\partial y_r}-\sum\frac{\partial F}{\partial x_s}\ \frac{\partial x_s}{\partial y_r}=x_r \qquad (\text{Ⅲ}-6)$$

今因先從 x 到 y 作一變換，再從 y 到 x 作反變換，所得之結果應爲一恒等變換，故

$$\frac{\partial(x_1\cdots x_n)}{\partial(y_1\cdots y_n)}\cdot\frac{\partial(y_1\cdots y_n)}{\partial(x_1\cdots x_n)}=1$$

或　　$\mathscr{H}_y G\cdot\mathscr{H}_x F=1$

由假設知 $\mathscr{H}_x F\neq 0$，故 $\mathscr{H}_y G=(\mathscr{H}_x F)^{-1}$

定理二 如 $F(x_1\cdots x_n,\xi)$，$G(y_1\cdots y_n,\xi)$ 兩函數，其關係爲

$$y_r=\frac{\partial F}{\partial x_r},\qquad x_r=\frac{\partial G}{\partial y_r} \qquad (\text{Ⅲ}-7)$$

且　$$F(x_1,\cdots,x_n,\xi)+G(y_1,\cdots,y_n,\xi)=\sum x_r y_r \qquad (\text{Ⅲ}-8)$$

係爲 $(n+1)$ 個變數 $x_1,\cdots,x_n,\xi$ 間的恒等式（identity）。

則　$$\frac{\partial F}{\partial\xi}+\frac{\partial G}{\partial\xi}=0 \qquad (\text{Ⅲ}-9)$$

（證明）：設 $x_1,\cdots,x_n$ 爲自變數，則由（8）可知

$$\frac{\partial F}{\partial\xi}+\sum\frac{\partial G}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial\xi}+\frac{\partial G}{\partial\xi}=\sum x_r\ \frac{\partial y_r}{\partial\xi}$$ 則

由（7）式卽可得所需之（9）式

如 F,G 包含數個參數 ξ,η,ζ，則對每一個參數，皆有一（9）式。有了上述二定理，我們將進一步的研究正則方程式與Lagrange方程式間的演繹關係。假如我們先從 Lagrange 方程式出發

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot q_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \qquad (\text{Ⅲ}-10)$$

玆先將 Lagrange 函數 $L(q_1,\cdots,q_n,\ \dot q_1,\cdots\dot q_n,t)$ 中的變數 $\dot q_1,\cdots$

q_n, $\dot{q}_1\cdots\dot{q}_n, t$ 用變換式

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r} \tag{Ⅲ-11}$$

變換成 $q_1,\cdots,q_n$, $p_1,\cdots p_n, t$, 且以下式定義一函數 $H(q_1,\cdots q_n, p_1\cdots p_n, t)$

$$H(q_1,\cdots,q_n,\ p_1,\cdots,p_n,t)+L(q_1,\cdots,q_n,\ \dot{q}_1,\cdots,\dot{q}_n,t)=\sum p_i\dot{q}_i \tag{Ⅲ-12}$$

則由上述二定理〔(4) 及 (9) 式〕可知

$$\dot{q}_r=\frac{\partial H}{\partial p_r},\qquad \frac{\partial L}{\partial q_r}+\frac{\partial H}{\partial q_r}=0 \tag{Ⅲ-13}$$

更由 Lagrange 方程式 (10) 可得

$$\dot{q}_r=\frac{\partial H}{\partial p_r},\qquad \dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial q_r},\ \ r=1,\cdots,n \tag{Ⅲ-14}$$

此系列 $2n$ 個一次微分方程式，通稱爲 Hamilton 方程式或正則方程式。

$$\mathscr{H}_{\dot{q}}L=\frac{\partial\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1},\cdots,\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_n}\right)}{\partial(q_1,\cdots,q_r)}$$ 之滿足不等於零的條件，

可由動能 T 係 $\dot{q}_k$ 之確定正號二次函數證明之。

相反地，從正則方程式 (14) 出發，我們亦可得到 Lagrange 方程式 (10)。因此，如假設 $\mathscr{H}_pH\neq0$，則 $\dot{q}_r=-\dfrac{\partial H}{\partial p_r}$ 定義了一「非奇異變換」。由上述二定理即可得

$$p_r=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r},\qquad \frac{\partial L}{\partial q_r}+\frac{\partial H}{\partial q_r}=0$$

將此二式代入 (14) 式之第二式中，即得 Lagrange 方程式。

由上可知，Lagrange 方程式與 Hamilton 方程式實際上可以

互演，故爲完全等效。一動力系統旣可由 Lagrange 函數決定，同樣地亦可由 Hamilton 函數來決定。

如一動力系統的動能 T 爲 $\dot{q}$ 的齊次二次函數時，則 (12) 式所定義的 Hamilton 函數，其物理意義可更簡單的看出來，此因

$$H=\sum\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k-L=T+V \tag{Ⅲ-15}$$

故在此情況下，Hamilton 函數乃爲該系統的總能量。

2　正則方程式與 Hamilton 原理之演繹關係

在 Hamilton 原理中，如引入 (12) 式所定義的 Hamilton 函數，則該原理可寫成

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}(\sum p\dot{q}-H)\,dt=0 \tag{Ⅲ-16}$$

如將上式之變分運算完成，則有下列形式

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum\left\{p_r\delta\dot{q}_r+\dot{q}_r\delta p_r-\frac{\partial H}{\partial p_r}\delta p-\frac{\partial H}{\partial q_r}\delta q_r\right\}dt=0$$

再利用部分積分，則得

$$\int_{t_0}^{t_1}\sum\left\{\left(\dot{q}_r-\frac{\partial H}{\partial p_r}\right)\delta p_r-\left(\dot{p}_r+\frac{\partial H}{\partial q_r}\right)\delta q_r\right\}dt$$
$$+\sum p_r\delta q_r\Big|_{t_0}^{t_1}=0 \tag{Ⅲ-17}$$

因 δq_r 在兩端點等於 0，故上式之第二項爲零。如再利用 (11) 及 (12) 式之變換，則如 (13) 式，我們可得

$$\dot{q}_r = \frac{\partial H}{\partial p_r} \tag{Ⅲ-18}$$

此意卽謂所有 δp_r 之係數均等於 0。再者，因 δq_r 係任意變化之量，故欲滿足（17），每個 δq_r 之係數，應各自等於 0，卽

$$\dot{p}_r = -\frac{\partial H}{\partial q_r} \tag{Ⅲ-18′}$$

此卽（14）式。

在此處，須注意一點，應用 Hamilton 原理時，(17) 式中之 δq 係任意變化而，δp 則非隨意的。此乃因一旦我們選定了δq，則該動力系統在限定時間內卽必須已達到變化曲線上某一特定之位形，因此 $\dot{q}$ 之值卽已被決定。又 p 與 $\dot{q}$ 互有關係，故如 $\dot{q}$ 被決定，則 p 亦被決定，亦卽 δp 不再可任意選定矣。(17) 式中 δp_r 之係數之等於零者，蓋係由（12）及（13）之變換而來。關於此點，許多書都將（17）積分內 $\delta p, \delta q$ 看作任意的變分，故謂其係數皆等於零，乃獲得（18），(18′) 二方程式。這樣可得到正確的結果（18），(18′)。但嚴格言之，這樣看法是有問題的，其所以能得正確的結果「正則方程式」者，還是因爲 p_r 與 $\dot{q}_r$ 間有 Legendre 變換關係（11）及（12）之故。這可從下法見之。

由 Hamilton 原理（Ⅱ-3）

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L(q_k, \dot{q}_k, t)\, dt = 0 \tag{Ⅲ-19}$$

其 Euler 方程式卽 Lagrange 方程式

$$[L]_{q_j} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \tag{Ⅲ-20}$$

（19）式的變分原則，可從另一觀點表出之。茲將 L 函數中的 $\dot{q}_j$

代以 k_j。k_j 視爲 t 的函數 $k_j(t)$。按第一章第 3 節，（Ⅰ-42)—(Ⅰ-44)，第（19）變分方程式，與下列變分方程式相同，

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\{L(k_1, k_2, \cdots k_n,\ \ q_1, \cdots q_n, t)+\sum\frac{\partial L}{\partial k_j}(\dot{q}_j-k_j)\}\,dt=0 \qquad (\text{Ⅲ-21})$$

亦卽謂（21）方程式的 Euler 方程式，同是（19）的 Lagrange 方程式（20）也。此間我們想著重的，是 k_j 的變分 δk_j，是任意的。

現定義動量

$$p_i\equiv\frac{\partial L}{\partial k_i},\quad L \text{ 如（21）式} \qquad (\text{Ⅲ-22})$$

故

$$L+\sum_j\frac{\partial L}{\partial k_j}(\dot{q}_j-k_j)=L-\sum p_j k_j+\sum p_j\dot{q}_j \qquad (\text{Ⅲ-23})$$

並定義

$$H\equiv-L(k, q, t)+\sum_j p_j k_j \qquad (\text{Ⅲ-24})$$

按本章第 1 節（8）式，此乃一個 Legendre 變換，H 乃 $p_1, \cdots p_n,\ \ q_1, \cdots q_n, t$ 之函數，簡寫之爲

$$H(p, q, t)=-L(k, q, t)+\sum p_i k_i \qquad (\text{Ⅲ-25})$$

以（23),(25）式代入（21）式中，則變分方程式成爲下一個變分問題

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\{\sum p_j\dot{q}_j-H(p, q, t)\}\,dt=0 \qquad (\text{Ⅲ-26})$$

由於在（21）式中之 δk_j 乃任意的，而 p_j 係由（22）式定義的，故在變分方程式（26）中的 δp_j，亦係任意的。

第（26）式之 Euler 方程式，乃（20）式表示法，

$$[\sum p_j\dot{q}_j-H]_q=0 \tag{Ⅲ-27}$$

$$[\sum p_j\dot{q}_j-H]_p=0 \tag{Ⅲ-28}$$

亦卽

$$\dot{p}_j+\frac{\partial H}{\partial q_j}=0 \tag{Ⅲ-29}$$

$$-\dot{q}_j+\frac{\partial H}{\partial p_j}=0 \tag{Ⅲ-30}$$

此正是（18）及（18′）正則方程式也。

從表面形式言之，δq_j 及 δp_j 在（26）中皆是獨立任意的，似和（18′）式下一段的討論，有出入處。實則是無衝突的。在（19）式

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L(\dot{q},q,t)dt=0 \tag{Ⅲ-31}$$

中，$\delta\dot{q}_j$ 顯係非獨立任意的。此點已見前段。在（21）式中

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\{L(k,q,t)+\sum\frac{\partial L}{\partial k_j}(\dot{q}_j-k_j)\}\,dt=0 \tag{Ⅲ-32}$$

δk_j，δq_j 誠是獨立任意的，但上二變分方程式的相等，是有條件的，卽

$$\sum_{i,j}\frac{\partial^2 L}{\partial k_i\partial k_j}\xi_i\xi_j>0 \tag{Ⅲ-33}$$

見（Ⅰ-45）。第（32）式或宜寫爲

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L^*(k,q,t)dt=0 \tag{Ⅲ-34}$$

以示與（31）之別。至（26）式，則更加入了一個 Legendre 變換（25），故（26）或宜寫爲

$$\delta\int_{t_1}^{t_2} L(p,q,t)dt=0 \qquad (\text{III}-35)$$

其 $\delta q_j, \delta p_j$ 皆係獨立任意的。但嚴格言之，(30) 式是 Legendre 變換的必然結果（見第 1 節 (2), (6) 方程式)。(30) 式與 (22) 式，皆係 p_j 等與 $\dot{q}_j, q_j$ 等的關係，眞正的運動方程式，乃在第 (29) 式也。

3 正則方程式的積分

在某些情形下，正則方程式的積分，可簡易求得。

1) 能量積分

如 Hamiltonian 函數 H，非時間 t 的顯函數，卽

$$\frac{\partial H}{\partial t}=0 \qquad (\text{III}-36)$$

則正則方程式 (14) 之一個積分可求得如下:

$$\frac{dH}{dt}=\sum_i\left(\frac{\partial H}{\partial q_i}\ \dot{q}_i+\frac{\partial H}{\partial p_i}\ \dot{p}_i\right)+\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$=-\sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_r}\ \frac{\partial H}{\partial q_r}-\frac{\partial H}{\partial q_r}\ \frac{\partial H}{\partial p_r}\right)=0 \qquad (\text{III}-37)$$

故

$$H=k=\text{常數} \qquad (\text{III}-38)$$

在甚多之情況下，H 係代表一個系統的總能量，故 (38) 式卽表示能量守恒之關係。

2) 如 H 不包含某一座標 q_k，則由 (14) 式卽得

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \quad 或\ p_k = 常數 \qquad (\text{III}-39)$$

此式可關連到動力學中的一般變換理論，即尋求一由 q, p 至另一組正則變數 Q_i, P_i 之變換，使變換後之 Hamilton 函數僅爲 P 的函數（即所有的 Q_i 皆爲循環座標）。在下章我們將知在某情形下，正則方程式的形式，不因這種變換而改變，故如變換 p_i, q_i 至 P_i, Q_i 之變換，係屬於此種變換，則正則方程式可以積分如下：

$$P_k = 常數$$

$$\dot{Q}_k = \frac{\partial H(P)}{\partial P_k} = P\ 等之函數 = 常數$$

或 Q_k 爲時間 t 的線性函數。

由此變換方程式，即可得 q_k, p_k 與 P, Q 間的關係，亦即得出 p_k 及 q_k 爲時間 t 及常數的函數式，而此即係動力學問題的解答也。從上述可知，解決一個動力學問題，乃演變爲尋覓所需的變換的問題。下一章中我們將討論到這點。

習題

1. 如以 Euler 角表示，則在重力場中的對稱陀螺的動能與位能可寫成

$$T=\frac{1}{2}A(\dot{\theta}^2+\sin^2\theta\dot{\psi}^2)+\frac{1}{2}C(\dot{\phi}+\cos\theta\dot{\psi})^2$$

$$V=Mgl\cos\theta$$

試求出此陀螺所滿足的 Hamilton 運動方程式。

2. 試求一三維各向同性之簡諧振子（harmonic oscillator）的正則方程式，並求出此振子之能量。

3. 試列一表，表明熱力學中的各函數（如內能 u，焓 H，熵 S，自由能 F，Gibbs 位能G等）之關係，並證明其關係即係Legendre 變換。

4. 如在 Lagrange 函數中不含某些座標 $q_1, q_2, \cdots q_k$，即 $L=L(q_{k+1}, \cdots, q_n, \dot{q}_1, \cdots \dot{q}_k, \cdots \dot{q}_n, t)$ 且 $p_i\equiv\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=$ 常數 β_i，$(i=1, 2, \cdots k)$ 茲用 Legendre 變換使 L 變換成 Routh 函數 R。

$$\begin{aligned}R(q_{k+1}, \cdots, q_n,\ \beta_1, \cdots, \beta_k,\ \dot{q}_{k+1}, \cdots \dot{q}_n, t)\\ =L(q_{k+1}\cdots q_n,\ \dot{q}_1, \cdots \dot{q}_k,\ \dot{q}_{k+1}\cdots \dot{q}_n, t)-\sum_{i=1}^{k}\beta_i\dot{q}_i\end{aligned}$$

試證該系統之 Lagrange 方程式為

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial R}{\partial q_j}=0,\quad j=k+1, \cdots, n$$

及　$$\dot{q}_i=\frac{\partial R}{\partial \beta_i},\qquad i=1, \cdots k,$$

即該系統之微分階次由 $2n$ 減為 $2(n-k)+k=2n-k$。

第四章

正則變換

1　正則變換之定義

我們將從 q_k, p_k 至 Q_k, P_k 間的變換關係，來定義所謂的正則變換。設

$$\left.\begin{aligned} Q_i &= Q_i(q,p,t) \\ P_i &= P_i(q,p,t) \end{aligned}\right\} \text{或} \quad \left.\begin{aligned} q_i &= q_i(Q,P,t) \\ p_i &= p_i(Q,P,t) \end{aligned}\right\} \tag{IV-1}$$

$$\frac{\partial(Q_1\cdots Q_n,\ P_1,\cdots P_n,t)}{\partial(q_1,\cdots q_r,\ p_1,\cdots p_n,t)} \neq 0, \qquad \frac{\partial(q_1,\cdots q_n,p_1,\cdots p_n,t)}{\partial(Q_1,\cdots Q_n,P_1,\cdots P_n,t)} \neq 0$$

正則變換者，乃使正則方程式

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{IV-2}$$

在新座標時仍具有正則式

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_i}, \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial Q_i} \tag{IV-3}$$

此處 $\bar{H}(Q,P,t)$ 不需與 H 相同。

我們將尋求正則變換，亦即求出在何種情況下一個變換乃係「正則」的條件。從第三章第 2 節可知 (3) 式之充足條件爲

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\sum P\dot{Q}-\bar{H})dt=0 \qquad (\text{IV}-4)$$

(4) 式之充足條件則爲

$$(\sum p\dot{q}-H)dt=(P\dot{Q}-\bar{H})dt+dS \qquad (\text{IV}-5)$$

此處 dS 乃是一含 $(2n+1)$ 個變數 q_k, Q_k, t 等之函數的全微分式。(5) 式係充足條件，甚易知之，蓋如將 (5) 式積分且使 $\delta q_k, \delta Q_k$ 可隨意變化（但在端點位形等於 0），則

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\sum p\dot{q}-H)\,dt=\delta\int_{t_0}^{t_1}(\sum P\dot{Q}-\bar{H})\,dt+\delta S\Big|_{t_0}^{t_1}=0$$

因 $\delta S\ (q,Q)$ 在端條 t_0 及 t_1 等於 0，故上式可導出 (4) 式。當 $S=S(q,P,t)$ 或 $S=S(p,\ Q,\ t)$，甚至 $S=S(p,P,t)$ 等情形，我們仍可得出完全相同的結果。然 $S=S(q,p,t)$ 之情況則須除外，此乃因 δp_k 及 δq_k 不能同時作任意變分。同樣的理由，$S=S(Q,P,t)$ 之情況亦須剔除。在 (5) 式中的 S 函數通常稱爲變換 (1) 的「產生式」。如

1)　$S=S(q,Q,t)$

則 (5) 式變成

$$\sum pdq-Hdt=\sum PdQ-\bar{H}dt+\sum\frac{\partial S}{\partial q}dq$$
$$+\sum\frac{\partial S}{\partial Q}dQ+\frac{\partial S}{\partial t}dt$$

如此式可爲任意之 dq_k, dQ_k, dt 滿足，則必須有

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k},\qquad P_k=-\frac{\partial S}{\partial Q_k},\qquad \bar{H}=H+\frac{\partial S}{\partial t} \qquad (\text{IV}-6)$$

(6) 式的首 $2n$ 個方程式，即爲變換方程式 (1)。

2)　$S^*=S^*(q,P,t)$

如 q_k, Q_k, t 之間有一些數學解析關係如 $Q_k=Q_k(q,t)$，則上述結果即無法應用。在此情況下，我們可利用 Legendre 變換來選定 $S^*=S^*(q,P,t)$

$$S^*(q,P,t)=S(q,Q,t)+\sum P_kQ_k \tag{IV-7}$$

故 $\sum pdq-Hdt=\sum PdQ-\bar{H}dt-\sum PdQ-\sum QdP$

$$+\sum\left(\frac{\partial S^*}{\partial q}dq+\frac{\partial S^*}{\partial P}dP\right)+\frac{\partial S^*}{\partial t}dt$$

由此可得

$$p_k=\frac{\partial S^*}{\partial q_k},\qquad Q_k=\frac{\partial S^*}{\partial P_k},\qquad \bar{H}=H+\frac{\partial S^*}{\partial t} \tag{IV-8}$$

3)　$S^{**}=S^{**}(Q,p,t)$

設從 $S(q,Q,t)$ 變換至 $S^{**}(Q,p,t)$ 之變換形式爲

$$S(q,Q,t)=S^{**}(Q,p,t)+\sum pq \tag{IV-9}$$

則

$$\sum pdq-Hdt=\sum PdQ-\bar{H}dt+\sum pdq+\sum qdp$$

$$+\sum\left(\frac{\partial S^{**}}{\partial Q}dQ+\frac{\partial S^{**}}{\partial p}dp\right)+\frac{\partial S^{**}}{\partial t}dt$$

由此卽得

$$q_k=-\frac{\partial S^{**}}{\partial p_k},\quad P_k=-\frac{\partial S^{**}}{\partial Q_k},\quad \bar{H}=H+\frac{\partial S^{**}}{\partial t} \tag{IV-10}$$

4)　$S^{***}=S^{***}(P,p,t)$

如獨立座標係 p_k, P_k 則有下列兩種變換:

$$S^{***}(p,P,t)=S^*(q,P,t)-\sum pq \tag{IV-11}$$

或

$$S^{***}(p,P,t)=S(q,Q,t)+\sum PQ-\sum pq \qquad (\text{IV}-12)$$

由二者之一，均可得到

$$q_k=-\frac{\partial S^{***}}{\partial p_k},\ \ Q_k=\frac{\partial S^{***}}{\partial P_k},\ \ \bar{H}=H+\frac{\partial S^{***}}{\partial t} \qquad (\text{IV}-13)$$

條件（5）亦可用其他形式來表示。茲述之如下：如我們以 δ 表示當 $dt=0$ 情形時的變分。如是則（5）式變成

$$\sum p\delta q=\sum P\delta Q+\delta S \qquad (\text{IV}-14)$$

相當於 $S(q,Q,t), S^*(q,P,t), S^{**}(Q,p,t), S^{***}(p,P,t)$ 的四種形式，我們有與（6），(8)，（10）及（13）相同的變換方程式。在（14）式中可看出在此情形下的變換並沒有引入Hamilton函數的正確形式。(14）與（6）間的相等關係，在下面第 4 節中，當我們引進「積分不變量」的觀念後即可得到證明。此處要注意的是（5）乃使（q,p）至（P,Q）爲正則變換的充足條件而非必要條件。此蓋如下列條件

$$\left(\sum p\dot{q}-H\right)dt=\rho\left(\sum P\dot{Q}-\bar{H}\right)dt+dS \qquad (\text{IV}-5\text{A})$$

中 ρ 爲任何一常數，均可使正則方程式不變其形式。事實上，在下章中我們將可看出正則變換所組成的「群」可被擴展到包括時間的回逆運作（$t\to-t$），此時間的回逆運作即相當於 $\rho=-1$ 所代表的情形。在本章第 7 節中，我們亦可看出，(14)式實際上僅是一正則變換所組成的廣義群中的一個子群而已。在力學領域裏，通常我們多祇限於如（5）式的變換形式，或如（5A）式中 $\rho=1$ 的情況。

有很多書對於（5）的陳述，誤以爲（5）式乃是正則變換的

必要且充足的條件。讀者應加以注意。

2　一個動力系統的運動與連續展開的正則變換

Hamilton 把在 Hamilton 原理中沿實際路徑的積分式 $\int Ldt$ 稱為「主函數」(Principal function)。

$$S=\int_{t_0}^{t_1} Ldt \tag{Ⅳ-15}$$

主函數 S 的重要性，將可由下列數節中看出。

由於沿著一個系統的路徑(包含端點)的 δq_k 變分， S 的變化可寫成（參考(Ⅱ-24)式）

$$\begin{aligned}\delta S&=\delta\int_{t_0}^{t_1} Ldt=-\int_{t_0}^{t_1}[L]_{q_k}\delta q_k dt+\sum\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}\delta q_k\Big|_{t_0}^{t_1}\\&=\sum p_k\delta q_k|_{t_1}-\sum p_k\delta q_k|_{t_0}\end{aligned} \tag{Ⅳ-16}$$

此處 $[L]_{q_k}$ 表示

$$[L]_{q_k}\equiv\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_k}-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0 \tag{Ⅳ-17}$$

$[L]_{q_k}=0$ 乃因一個系統的實際運動，滿足 Lagrange 方程式之故。(16) 式可寫成下式（為了簡便起見，在字母的右上角以符號O表示 $t=t_0$，對於 $t=t_1$ 則不用任何符號）

$$\delta S=\sum p_k\delta q_k-\sum p_k{}^0\delta q_k{}^0 \tag{Ⅳ-18}$$

以此和 (14) 式

$$\delta S=\sum p_k\delta q_k-\sum P_k\delta Q_k \tag{Ⅳ-19}$$

比較，即見 (18) 式所定義的主函數 S，應為一從 $p_k{}^0$, $q_k{}^0$ 到

p_k, q_k 間的正則變換，其變換方程式則爲

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k},\quad p_k^0 = -\frac{\partial S}{\partial q_k^0} \qquad (\text{IV}-20)$$

上式中主函數 S 係視作 q, q^0, t 之函數，卽 $S = S(q, q^0, t)$（參考第六章第 1 節）。因此在運動中的某一時刻 t_0 的 p_k^0, q_k^0 與另一時刻 t 的p_k, q_k 間的關係，乃係一種正則變換的關係，因之一個 p, q 按運動方式隨時間 t 變化的系統，它的運動可看成爲一些正則變換的連續展開。*

---

*一個系統的運動，可用無限小正值變換的方法來證明其是正則變換的連續展開。試看下列變換：

$$Q_k = q_k + \dot{q}_k \Delta t,\quad P_k = p_k + \dot{p}_k \Delta t \qquad (\text{IV}-21)$$

使此式構成正則變換的條件爲

$$\sum P_k dQ_k - \sum p_k dq_k = \sum(\dot{p}_k dq_k + p_k d\dot{q}_k)\Delta t = dS \qquad (\text{IV}-22)$$

由此，可知 S 必需含有 Δt 的因子，卽 $S = U\Delta t$，或 $dS = dU\Delta t$，此處

$$\sum(\dot{p}_k dq_k + p_k d\dot{q}_k) = dU(q_k \dot{q}_k) \qquad (\text{IV}-23)$$

現作一 Legendre 變換

$$K(q_k p_k) + U(q_k \dot{q}_k) = \sum p_k \dot{q}_k \qquad (\text{IV}-24)$$

由第三章之討論，卽有

$$p_k = \frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k},\qquad \dot{q}_k = \frac{\partial K}{\partial p_k},\qquad \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial K}{\partial q_k} = 0$$

故

$$\dot{p}_k = \frac{\partial U}{\partial q_k} = -\frac{\partial K}{\partial q_k}$$

且使（21）式成爲一正則變換之條件爲

$$Q_k = q_k + \frac{\partial K}{\partial p_k}\Delta t,\qquad P_k = p_k - \frac{\partial K}{\partial q_k}\Delta t \qquad (\text{IV}-25)$$

然由（20）式及正則方程式，我們可得

$$Q_k = q_k + \frac{\partial H}{\partial p_k}dt,\qquad P_k = p_k - \frac{\partial H}{\partial q_k}dt \qquad (\text{IV}-26)$$

我們如比較（25），（26）二式，則見（26）式所代表的自然運動中，t 時間的 p_k, q_k 及 $t+\Delta t$ 時間的 p_k，q_k 間的關係，乃係一無限小的正則變換式。且此變換的產生式卽係一個系統的 Hamilton 函數。

由上述之結果，可得一重要的定理：卽在一個系統中經過正則變換所得的不變量，同時亦係該系統在運動時的不變量。

3　Poincaré 絶對積分不變量，Liouville 方程式

Poincaré 證明下列積分

$$J_1=\iint\sum dp_k\,dq_k$$

$$J_2=\iiiint\sum dp_j\,dp_k\,dq_j\,dq_k \qquad (\text{IV}-27)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$J_n=\int^{2n}\cdots\int dp_1\cdots dp_n\,dq_1\cdots dq_n$$

係下列正則方程式系統

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\qquad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k} \qquad (\text{IV}-28)$$

的不變量。(27) 式中的 J_1，其積分範圍係二維空間 p_k,q_k 的任意一個二維簇 (manifold)，餘類推。欲證明 J_1 係 (28) 式的積分不變量，我們可利用上節的定理，即一個系統中對正則變換 $p,q\rightarrow P,Q$ 之不變量，亦爲該系統在運動中的不變量。對於正則變換，我們可用函數 $S^*(q_k,P_k,t)$ 來表示，即

$$\sum p_k\,\delta q_k=-\sum Q_k\delta P_k+\delta S^*$$

及變換方程式

$$p_k=\frac{\partial S^*}{\partial q_k},\qquad Q_k=\frac{\partial S^*}{\partial P_k} \qquad (\text{IV}-8')$$

今再引入二參數 u,v，並假設 p_k,q_k 爲 u,v 之函數，則

$$J_1=\iint\sum dp_k dq_k=\iint\sum_k\begin{vmatrix}\dfrac{\partial p_k}{\partial u} & \dfrac{\partial q_k}{\partial u}\\ \dfrac{\partial p_k}{\partial v} & \dfrac{\partial q_k}{\partial v}\end{vmatrix}du\,dv$$

$$=\iint\sum_k\frac{\partial(p_k,q_k)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

由（8′）式，我們可得

$$\sum_k\frac{\partial(p_k,q_k)}{\partial(u,v)}=\sum_k\begin{vmatrix}\sum_i\left(\dfrac{\partial^2S^*}{\partial q_k\partial P_i}\dfrac{\partial P_i}{\partial u}+\dfrac{\partial^2S^*}{\partial q_k\partial q_i}\dfrac{\partial q_i}{\partial u}\right) & \dfrac{\partial q_k}{\partial u}\\ \sum\left(\dfrac{\partial^2S^*}{\partial q_k\partial P_i}\dfrac{\partial P_i}{\partial v}+\dfrac{\partial^2S^*}{\partial q_k\partial q_i}\dfrac{\partial q_i}{\partial v}\right) & \dfrac{\partial q_k}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_{k,i}\frac{\partial^2S^*}{\partial q_k\partial P_i}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial P_i}{\partial u} & \dfrac{\partial q_k}{\partial u}\\ \dfrac{\partial P_i}{\partial v} & \dfrac{\partial q_k}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_k\begin{vmatrix}\dfrac{\partial P_k}{\partial u} & \sum_i\dfrac{\partial^2S^*}{\partial P_k\partial q_i}\dfrac{\partial q_i}{\partial u}\\ \dfrac{\partial P_k}{\partial v} & \sum_i\dfrac{\partial^2S^*}{\partial P_k\partial q_i}\dfrac{\partial q_i}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$=\sum_k\begin{vmatrix}\dfrac{\partial P_k}{\partial u} & \sum_i\left(\dfrac{\partial^2S^*}{\partial P_k\partial q_i}\dfrac{\partial q_i}{\partial u}+\dfrac{\partial^2S^*}{\partial P_k\partial P_i}\dfrac{\partial P_i}{\partial u}\right)\\ \dfrac{\partial P_k}{\partial v} & \sum_i\left(\dfrac{\partial^2S^*}{\partial P_k\partial q_i}\dfrac{\partial q_i}{\partial v}+\dfrac{\partial^2S^*}{\partial P_k\partial P_i}\dfrac{\partial P_i}{\partial v}\right)\end{vmatrix}$$

$$=\sum_k\begin{vmatrix}\dfrac{\partial P_k}{\partial u} & \dfrac{\partial Q_k}{\partial u}\\ \dfrac{\partial P_k}{\partial v} & \dfrac{\partial Q_k}{\partial v}\end{vmatrix}=\sum_k\frac{\partial(P_k,Q_k)}{\partial(u,v)}\qquad(\text{IV}-29)$$

故

$$J_1=\iint\sum dp_k dq_k=\iint\sum dP_k dQ_k\qquad(\text{IV}-30)$$

(27) 式中的其他不變數量 $J_2\cdots J_n$，亦可以同樣之方法證明其不變性。利用 Jacobi 的最後乘因素方法求出 J_k 不變性的討論，可參考 Whittaker 著的解析力學 283 頁。

積分 J_k 之不變性，同時亦是使 p_k, q_k 的方程式爲正則方程式(28) 的充足條件。本章第 5 節將證明此點。

(28) 式中的 $J=\int\cdots\int dp_1\cdots dp_n dq_1\cdots dq_n$ 的不變性，在統計力學中特別重要，此可由下述看出。在 $2n$ 維相空間，每一點 $(p_1\cdots p_n, q_1\cdots q_n)$ 代表一個動力系統。某一 n 維體積 V 中的點，可視爲許多不同起始條件的相同動力系統所組成的系綜 (ensemble) 的代表點，系綜中每一系統，均按正則方程式運動，則該系綜中所有動力系統之點，在此 $2n$ 維的相空間中運動，其所組成的體積，爲一常數。換言之，該運動乃係在 $(2n+1)$ 維度 $p_1\cdots p_n$, $q_1\cdots q_n, t$ 之空間中，而相點 (Phase point) $p_1\cdots p_n, q_1\cdots q_n$ 則係限於一「等截面積」的管中運動。此卽統計力學中的 Liouville 定理，此定理通常可由一偏微分方程式來表示。茲述之如下：設一 $2n$ 維度相空間 $q_1\cdots q_n, p_1\cdots p_n$ 中的某一體積爲 V

$$V=\int\cdots\int dp_1\cdots dp_n dq_1\cdots dq_n$$

使 $D=D(q_1\cdots q_n, p_1\cdots p_n, t)$ 代表此空間中的點密度，則體積 V 中的所有點的數目爲

$$N=\int_V\cdots\int D\,dp_1\cdots dp_n dq_1\cdots dq_n$$

此空間中每一點，均各按正則方程式 (28) 在其軌道運行，

假設我們跟隨 N 個點運動，並以 $\frac{\mathscr{D}}{dt}$ 表示沿著該運動的導數，則由定義，

$$\frac{\mathscr{D}N}{dt}=0$$

但

$$\frac{\mathscr{D}N}{dt}=\int_V\cdots\int\left[\frac{\partial}{\partial t}+\sum_i\left(\dot{q}_i\frac{\partial}{\partial q_i}+\dot{p}_i\frac{\partial}{\partial p_i}\right)\right]Ddp_1\cdots$$

$$\cdots dp_n dq_1\cdots dq_n+D\frac{\mathscr{D}}{dt}V$$

按 Poincaré 的積分不變量 (27)，V 在運動中係一積分不變量。故上式末項等於 0，由此可得

$$\frac{\partial D}{\partial t}+\sum_i\left(\frac{\partial D}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial D}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)=0 \qquad (\text{IV}-31)$$

以 Poisson 括號表示（見下 IV-42 式），則上式可寫成

$$\frac{\partial D}{\partial t}+(D,H)=0 \qquad (\text{IV}-31\text{A})$$

(31) 式或 (31A) 通稱爲 Liouville 方程式。

4　相對積分不變量

(27) 式中積分不變量 $J_1\cdots J_n$ 稱爲絕對積分不變量，此因積分之範圍完全隨意且無任何假設參於其間之故。關於相對積分不變量，我們則可由下述定理的證明，得出一個概括的觀念。

（定理一）：對於微分方程式

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\qquad -\dot{p}_k=\frac{\partial H}{\partial q_k}\tag{Ⅳ-28}$$

則沿著 $2n$ 維 p, q 空間中任一封閉曲線 Γ 所作的線積分 $\oint p_k dq_k$，應爲一相對積分不變量。

（證明）：設 Γ_0 爲一 $(2n+1)$ 維 p, q, t 空間中平面 $t=t_0$ 上的一條封閉曲線，且使此封閉曲線以下列參數的方程式來表示

$$q_k^0=q_k^0(\lambda),\quad p_k^0=p_k^0(\lambda)\qquad(\lambda_0\leqslant\lambda\leqslant\lambda_1)$$

且

$$q_k^0(\lambda_0)=q_k^0(\lambda_1),\qquad p^0_k(\lambda_0)=p_k^0(\lambda_1)$$

今令 $\delta q_k^0, \delta p_k^0$ 爲 Γ_0 上之一點在同一時間 $t=t_0$ 平面上的變分，則由（28）式（此與 Lagrange 方程式相同）（利用（18）式），可得

$$\delta S=\sum p_k\delta q_k-\sum p_k^0\delta q_k^0$$

如以參數式表示，則爲

$$\frac{\partial S}{\partial\lambda}\delta\lambda=\sum p_k\frac{\partial q_k}{\partial\lambda}\delta\lambda-\sum p_k^0\frac{\partial q_k^0}{\partial\lambda}\delta\lambda$$

今如沿 Γ_0 積分（亦即從 λ_0 到 λ_1），則得

$$S(\lambda_1)-S(\lambda_0)=0=\sum\oint_{\Gamma}p_k\frac{\partial q_k}{\partial\lambda}\delta\lambda-\sum\oint_{\Gamma_0}p_k^0\frac{\partial q_k^0}{\partial\lambda}\delta\lambda$$

此處 Γ 係 $t=t$ 平面與通過 Γ_0 之軌跡管的交線。去掉上式的參數符號即得

$$\oint_{\Gamma}\sum p_k\delta q_k=\oint_{\Gamma_0}\sum p_k^0\delta q_k^0\tag{Ⅳ-32}$$

因 Γ 爲一封閉曲線，故上式即稱爲「相對積分不變量」。

絕對積分不變量與相對積分不變量是有關的。設一相對積分

不變量

$$\int_{\Gamma}\sum M_i\,(x_1\cdots x_n,t)\delta x_i \qquad (\text{IV}-33)$$

Γ 係 $t=t$ 平面與原位於 $x_1\cdots x_n$ 空間中某一特定封閉曲線上之點 $x_1,\cdots x_n$ 所描繪的軌跡管相交而成的封閉曲線，則由廣義的 Stokes 定理，上式積分可寫成

$$\iint_S\sum_{i,j}\left(\frac{\partial M_i}{\partial x_j}-\frac{\partial M_j}{\partial x_i}\right)\delta x_i\delta x_j \qquad (\text{IV}-34)$$

但 S 非一封閉曲面（S 係一膜片），故該積分係一絕對積分不變量。

我們亦可證明其反定理如下：

(定理二)：如 $\oint\sum p_k\delta q_k$ 係下列方程式

$$\dot q_k=F_k(q,p,t),\qquad \dot p_k=G_k(q,p,t) \qquad (\text{IV}-35)$$

的相對積分不變量（F_k, G_k 係 q, p, t 之函數），且 Γ 係 $(2n+1)$ 維 p, q, t 空間中某平面 $t=t$ 上之封閉曲線，則 (35) 式必有 (28) 式之形式。

(證明)：因 $\oint\sum p_k\delta q_k$ 係一不變量，故

$$\frac{d}{dt}\oint_{\Gamma}\sum p_k\delta q_k=\frac{d}{dt}\oint_{\Gamma}\sum p_k\frac{\partial q_k}{\partial\lambda}\,\delta\lambda=0$$

或

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\sum\left(\dot p_k\frac{\partial q_k}{\partial\lambda}+p_k\frac{\partial\dot q_k}{\partial\lambda}\right)\delta\lambda=\int_{\lambda_0}^{\lambda_1}\sum\left(\dot p_k\frac{\partial q_k}{\partial\lambda}-\dot q_k\frac{\partial p_k}{\partial\lambda}\right)\delta\lambda$$

$$+\sum p_k\dot q_k\Big|_{\lambda_0}^{\lambda_1}=0$$

因 Γ 係一封閉曲線，故上式第二項等於 0，故由 (35) 知上式可寫成

$$\oint\sum(G_k\delta q_k-F_k\delta p_k)=0$$

此線積分沿任一封閉曲線之值爲零之結果，證明了該積分係某一函數 $H(q,p,t)$ 之全微分，故

$$G_k=\frac{\partial H}{\partial q_k},\qquad F_k=-\frac{\partial H}{\partial p_k}$$

此即本定理所需之要求。(別種證明方法可參閱 Whittaker 書第273頁)

從上述二定理及第 2 節所述，可證明一從 p,q 到 P,Q 之變換要滿足「正則」的充足條件爲

$$\oint\sum P_k\delta Q_k=\oint\sum p_k\delta q_k \tag{Ⅳ-36}$$

或

$$\sum p_k\delta q_k=\sum P_k\delta Q_k+\delta S \tag{Ⅳ-37}$$

而此即第 1 節中的（14）式。

5　Lagrange 括號、Poisson 括號與 Poisson 定理

1)　Lagrange 括號之定義

$$[u,v]=\sum_k\left(\frac{\partial q_k}{\partial u}\frac{\partial p_k}{\partial v}-\frac{\partial q_k}{\partial v}\frac{\partial p_k}{\partial u}\right)=\sum_k\begin{vmatrix}\frac{\partial q_k}{\partial u} & \frac{\partial p_k}{\partial u}\\ \frac{\partial q_k}{\partial v} & \frac{\partial p_k}{\partial v}\end{vmatrix} \tag{Ⅳ-38}$$

此處 u,v 係與 p,q 空間中的二維族有關的參數。如令u,v 先後等於p,q，則由上式可得

$$[p_i, p_j]=0,\quad [q_i, q_j]=0,\quad [q_i, p_j]=\delta_{ij} \tag{Ⅳ-39}$$

在（29）式，我們已證明 $[u, v]$ 對於下列正則變換，不改其形式

$$\sum p\delta q = \sum P\delta Q + \delta S \tag{Ⅳ-40}$$

且按第2節，其亦必爲一個動力系統運動中的不變量。因此(39)式對於正則變換及一個系統運動，均係一不變量。

我們亦可證明（39）式的不變性，亦係使 p, q 至 P, Q 的變換屬於正則變換，及使運動方程式有正則形式的充足條件。由假設，我們知

$$[P_i, P_j]=0,\quad [Q_i, Q_j]=0,\quad [Q_i, P_j]=\delta_{ij} \tag{Ⅳ-41}$$

或

$$[P_i, P_j]=\sum_k\left(\frac{\partial q_k}{\partial P_i}\frac{\partial p_k}{\partial P_j}-\frac{\partial q_k}{\partial P_j}\frac{\partial p_k}{\partial P_i}\right)=0$$

$$[Q_i, Q_j]=\sum_k\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\frac{\partial p_k}{\partial Q_j}-\frac{\partial q_k}{\partial Q_j}\frac{\partial p_k}{\partial Q_i}\right)=0$$

$$[Q_i, P_j]=\sum_k\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\frac{\partial p_k}{\partial P_j}-\frac{\partial q_k}{\partial P_j}\frac{\partial p_k}{\partial Q_i}\right)=\delta_{ij}$$

這些式亦可寫成

$$\frac{\partial}{\partial P_j}\left(\sum_k p_k\frac{\partial q_k}{\partial P_i}\right)-\frac{\partial}{\partial P_i}\left(\sum_k p_k\frac{\partial q_k}{\partial P_j}\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_j}\left(\sum p_k\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}-P_i\right)-\frac{\partial}{\partial Q_i}\left(\sum p_k\frac{\partial q_k}{\partial Q_j}-P_j\right)=0$$

$$\frac{\partial}{\partial P_j}\left(\sum p_k\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}-P_i\right)-\frac{\partial}{\partial Q_i}\left(\sum p_k\frac{\partial q_k}{\partial P_j}\right)=0$$

這些式顯示應有一函數 $S(Q, P, t)$ 的存在，使

$$\sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - P_i = \frac{\partial S}{\partial Q_i}$$

$$\sum p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_i} = \frac{\partial S}{\partial P_i}$$

今

$$\begin{aligned}\delta S &= \sum_i \frac{\partial S}{\partial Q_i}\delta Q_i + \sum_i \frac{\partial S}{\partial P_i}\delta P_i \\ &= \sum_{i,k}\left(p_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - P_i\right)\delta Q_i + \sum_{i,k} p_k \frac{\partial q_k}{\partial P_i}\delta P_i\end{aligned}$$

及

$$\delta q_k = \sum_i \frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\delta Q_i + \sum_i \frac{\partial q_k}{\partial P_i}\delta P_i$$

故

$$\delta S = \sum p_k \delta q_k - \sum P_k \delta Q_k \qquad (\text{IV}-40)$$

卽（39）與（41）式亦係正則變換的充足條件。Lagrange 括號的性質，可由下列定理看出，此定理稱爲 Lagrange 定理。

（定理）：如 $q_k = q_k(a_i, b_i, t)$，$p_k = p_k(a_i, b_i, t)$ 係正則運動方程式之解，a_i，b_i 係 $2n$ 個積分常數（卽 $u_i(q, p, t) = a_i$，$v_i(q, p, t) = b_i$），則 Lagrange 括號 $[a_i, b_j]$ 與時間無關（卽係運動的常數）。

（證明）：此定理可由 $[u, v]$ 對於正則變換所具的不變性，及一動力系統之運動可視爲一串的連續正則變換的合成，立卽得出。

但由此定理，並不能導出新的積分。此乃因 $2n$ 個積分 $q_k = q_k(a_i, b_i, t)$，$p_k = p_k(a_i, b_i, t)$，必需在能構成 $[a_i, b_j]$ 之前，先已找出來。此點可與下述的 Poisson 定理相對照。

2)　Poisson 括號

令 u, v 爲 $q_1 \cdots q_n$, $p_1 \cdots p_n$ 之函數，則 Poisson 括號之定義爲

$$(u, v) = \sum_k \left(\frac{\partial u}{\partial q_k} \frac{\partial v}{\partial p_k} - \frac{\partial u}{\partial p_k} \frac{\partial v}{\partial q_k} \right) \qquad (\text{IV-42})$$

令 $u_1 \cdots u_{2n}$ 爲 $2n$ 個含 $q_1 \cdots q_n, p_1 \cdots p_n$ 之獨立函數（或相對地我們可視 q_k, p_k 爲 u_t 的函數），則由 (38), (42) 知

$$\sum_{t=1}^{2n} (u_t, u_r)[u_t, u_s] = \sum_t \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_t}{\partial q_i} \frac{\partial u_r}{\partial p_i} - \frac{\partial u_t}{\partial p_i} \frac{\partial u_r}{\partial q_i} \right)$$
$$\times \left(\frac{\partial q_j}{\partial u_t} \frac{\partial p_j}{\partial u_s} - \frac{\partial q_j}{\partial u_s} \frac{\partial p_j}{\partial u_t} \right)$$

但

$$\sum_t \frac{\partial u_t}{\partial q_i} \frac{\partial q_j}{\partial u_t} = \delta_{ij} \qquad \sum_t \frac{\partial u_t}{\partial p_i} \frac{\partial p_j}{\partial u_t} = \delta_{ij}$$

$$\sum_t \frac{\partial u_r}{\partial q_i} \frac{\partial p_i}{\partial u_t} = 0 \qquad \sum_t \frac{\partial u_t}{\partial p_i} \frac{\partial q_j}{\partial u_t} = 0$$

故

$$\sum_t (u_t, u_r)[u_t, u_s] = \sum_i \left(\frac{\partial u_r}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial u_s} + \frac{\partial u_r}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial u_s} \right)$$
$$= \delta_{rs} \qquad (\text{IV-43})$$

設作一由 p, q 到 P, Q 的正則變換。我們已知

$$\sum p\delta q = \sum P\delta Q + \delta S \qquad (\text{IV-40})$$

的必需及充足條件爲 (41) 式，即

$$[Q_i, Q_j] = 0,\ [P_i, P_j] = 0,\ [Q_i, P_j] = \delta_{ij} \qquad (\text{IV-41})$$

將此式代入 (43) 中，即可得

$$(Q_i, Q_j) = 0,\ (P_i, P_j) = 0,\ (Q_i, P_j) = \delta_{ij} \qquad (\text{IV-44})$$

此即 (40) 式之必要條件。

欲證明（44）式亦係（40）式之充足條件，將（44）代入（43）式，即可得（41）式。然此式在上一節之討論已知係（40）式的充足條件。

Poisson 括號 (u,v) 對於正則變換(37)式言，係一不變量，或由第2節之討論，亦係一動力系統的不變量。

故

$$
\begin{aligned}
(u,v)_{pq} &= \sum_k\left(\frac{\partial u}{\partial q_k}\frac{\partial v}{\partial p_k}-\frac{\partial u}{\partial p_k}\frac{\partial v}{\partial q_k}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial u}{\partial P_i}\frac{\partial v}{\partial P_j}-\frac{\partial u}{\partial P_j}\frac{\partial v}{\partial P_i}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial P_j}{\partial p_k}-\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial P_j}{\partial q_k}\right)\\
&\quad+\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial u}{\partial P_i}\frac{\partial v}{\partial Q_j}-\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial v}{\partial P_i}\right)\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k}-\frac{\partial P_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\left(\frac{\partial u}{\partial Q_i}\frac{\partial v}{\partial Q_j}-\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial v}{\partial Q_i}\right)\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}\frac{\partial Q_j}{\partial p_k}-\frac{\partial Q_i}{\partial p_k}\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial P_i}\frac{\partial v}{\partial P_j}-\frac{\partial u}{\partial P_j}\frac{\partial v}{\partial P_i}\right)(P_i,P_j)\\
&\quad+\sum_{i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial P_i}\frac{\partial v}{\partial Q_j}-\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial v}{\partial P_i}\right)(P_i,Q_j)\\
&\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial Q_i}\frac{\partial v}{\partial Q_j}-\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial v}{\partial Q_i}\right)(Q_i,Q_j)\\
&= \sum_{i,j}\left(\frac{\partial u}{\partial P_i}\frac{\partial v}{\partial Q_j}-\frac{\partial u}{\partial Q_j}\frac{\partial v}{\partial P_i}\right)(P_i,Q_j)=(u,v)_{P,Q}
\end{aligned}
\qquad (\text{IV}-45)
$$

由（42）之定義，我們可得出 Poisson 括號下列的性質：

$$(u,u)=0 \qquad (u,v)=-(v,u) \qquad (\text{IV}-46)$$

$$\frac{\partial u}{\partial q_i}=(u,p_i) \qquad \frac{\partial u}{\partial p_i}=(q_i,u) \qquad (\text{IV}-47)$$

$$(u,(v,w))+(v,(w,u))+(w,(u,v))=0 \qquad (\text{IV}-48)$$

最後一式稱爲 Jacobi 恒等式。

正則方程式

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\qquad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

如利用（47）式則可寫成另一形式

$$\dot{q}_k=(q_k, H),\qquad \dot{p}_k=(p_k, H) \tag{Ⅳ-49}$$

可以注意的是原式是不對稱的，而上式（49）是對稱的。量子力學即採用了（49）的形式，將量子 Poisson 括號代替了上述的古典 Poisson 括弧式。如是所成的方程式，稱爲 Heisenberg 運動方程式。

如 $F(q_1\cdots q_n, p_1\cdots p_n)=$常數 a 代表一正則方程式的積分，則

$$\frac{dF}{dt}=\sum\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial F}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)+\frac{\partial F}{\partial t}=0$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial t}=(H, F) \tag{Ⅳ-50}$$

因此，如 F 並非時間 t 的顯函數時，則由（50）式可知

$$(H, F)=0 \tag{Ⅳ-51}$$

從幾何觀點來看，(51) 式代表在一 $2n$ 維空間中的超曲面 (hypersurface), $F(Q, P)=$常數 a，其梯度 $\frac{\partial F}{\partial q_k}$, $\frac{\partial F}{\partial p_k}$ 係與相的曲線元素，dq_k, dp_k

$$dq_k=\dot{q}_k dt=\frac{\partial H}{\partial p_k}dt,\qquad dp_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}dt$$

互相正交，故 $dq_k\, dp_k$ 元素係位於 $F(q, p)=a$ 之表面內。

3) Poisson 定理:

如正則方程式有兩個首次積分如下式:

$$F(q_1\cdots q_n, p_1\cdots p_n, t) = a$$

$$G(q_1\cdots q_n, p_1\cdots p_n, t) = b \qquad (\text{IV-52})$$

則

$$(F, G) = c = \text{常數} \qquad (\text{IV-53})$$

係正則方程式第三個首次積分。

(證明): 由 (50), 知

$$\frac{\partial F}{\partial t} = (H, F), \quad \frac{\partial G}{\partial t} = (H, G) \qquad (\text{IV-54})$$

由恒等式 (48)

$$(H, (F, G)) + (F, (G, H)) + (G, (H, F)) = 0 \qquad (\text{IV-55})$$

將 (54) 式代入此式中, 卽得

$$(H, (F, G)) - \frac{\partial}{\partial t}(F, G) = 0 \qquad (\text{IV-56})$$

故 $(F, G) = c$ 滿足 (50) 式, 故係一個首次積分。

如 F, G 不含時間 t, 則 (56) 式可寫成

$$(H, (F, G)) = 0 \qquad (\text{IV-57})$$

玆舉一例, 設

$$F = p_3 q_2 - p_2 q_3 = a$$

$$G = p_1 q_3 - p_3 q_1 = b$$

係一動力系統 (如有心力場中的一質點) 的兩個首次積分, 則

$$(F, G) = \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial G}{\partial q_k}\right) = p_2 q_1 - p_1 q_2 = c$$

係另一個首次積分。如 $F=a$, $G=b$ 代表角動量的 x, y 分量的常數值，則 $(F, G)=c$ 卽表示角動量的 z 分量的常數值。Poisson 定理的一個特例，爲當 Hamilton 函數 H 不含時間 t 時，則可得如下之定理:

(定理): 如 H 不含時間 t，且 $F=a$ 係一積分，則 $\frac{\partial F}{\partial t}=b=$ 常數及 $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=c=$ 常數，餘類推，均各爲一積分。

(證明): 因 H 不含時間 t，故 $H=h=$ 常數本身卽爲一積分，由假設 $F=a$ 係一積分，故由 Poisson 定理，知 H 及 F 所構成之 Poisson 括號 $(H, F)=\mathrm{b}$ 亦係另一積分。然由 (50) 我們知 $(H, F)=\frac{\partial F}{\partial t}$。故 $\frac{\partial F}{\partial t}=b$ 亦係另一積分。同樣的理由可證明 $\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}=c$ 亦係一積分。餘類推。

如 $F=F(q_1\cdots q_n, p_1\cdots p_n)=a$ 不包含 t，則可得下一恒等式

$$(H, F)=0$$

爲了更瞭解此定理，茲以一三維簡諧振子(單位質量)爲例。一個三維簡諧振子的 Hamilton 函數，可寫成:

$$H=\frac{1}{2}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+\frac{u^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$$

如應用 Kepler 的面積定律於二座標面上的投影運動，則可得兩個首次積分如下:

$$p_y z-p_z y=c_1 \qquad p_z x-p_x z=c_2 \tag{Ⅳ-58}$$

茲由 Poisson 定理 (53)，可得另一積分

$$p_x y-p_y x=c_3 \tag{Ⅳ-59}$$

而由運動方程式可得一個首次積分

$$p_x^2+u^2x^2=a_1 \qquad (\text{IV}-60)$$

由（59）及（60）式所構成的 Poisson 括號，使其等於一常數，即得另一新的積分

$$p_xp_y+u^2xy=b_1 \qquad (\text{IV}-61)$$

（58）式至（61）式共包括了五個互相獨立的積分。*

第六個積分式，可由另法求得；從（50）式及正則方程式，可知下列三式係三個積分式

$$\begin{aligned} &ux\cos ut-p_x\sin ut=g_1\\ &uy\cos ut-p_y\sin ut=g_2 \qquad (\text{IV}-62)\\ &uz\cos ut-p_z\sin ut=g_3 \end{aligned}$$

由上述定理，則可得另外三個積分式

$$\begin{aligned} &ux\sin ut+p_x\cos ut=f_1\\ &uy\sin ut+p_y\cos ut=f_2 \qquad (\text{IV}-63)\\ &uz\sin ut+p_z\cos ut=f_3 \end{aligned}$$

（62）及（63）式亦可寫成如下形式：

$$\begin{aligned} &ux=g_1\cos ut+f_1\sin ut \qquad (\text{IV}-64)\\ &p_x=f_1\cos ut-g_1\sin ut \end{aligned}$$

及與此同形式的對 y, p_y, z, p_z 的另二對式子。事實上，（64）式

---

*由（61），（59）二式所構成的 Poisson 括號，令其等於一常數，則可得一積分

$$p_y^2+u^2y^2-(p_x^2+u^2x^2)=\text{常數}$$

或由（60），亦可得

$$p_y^2+u^2y^2=a_2$$

然此式並非獨立的，因 a_2 與（59），（60），（61）是滿足下列恒等式的

$$(p_x^2+u^2x^2)(p_y^2+u^2y^2)=(p_xp_y+u^2xy)^2+u^2(xp_y-yp_x)^2$$

亦正係由解運動方程式所得之式子。*

Poisson 定理的反定理，稱爲 Korkine 定理，Korkine 定理之意義如下：

(Korkine 定理)：如 $F(q, p, t)=a$，$G(q,p,t)=b$，$(F,G)=c$ 同時爲一組聯立方程式的三個積分，則該方程式等必有正則方程式的形式

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

(證明)：設運動方程式爲

$$\dot{q}_i=A_i(p,q,t),\quad \dot{p}_i=B_i(p,q,t) \tag{Ⅳ-65}$$

如 $(F,G)=c$ 爲一積分，則必有：

$$\frac{d}{dt}(F,G)=\sum_i\left[\frac{\partial}{\partial q_i}(F,G)\dot{q}_i+\frac{\partial}{\partial p_i}(F,G)\dot{p}_i\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}(F,G)=0 \tag{Ⅳ-66}$$

或由 (65) 可得

$$\sum_i\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial q_i}A_i+\frac{\partial(F,G)}{\partial p_i}B_i\right)+\frac{\partial(F,G)}{\partial t}=0 \tag{Ⅳ-67}$$

然

$$\frac{d}{dt}(F,G)=\sum_k\frac{\partial F}{\partial q_k}\frac{\partial}{\partial p_k}\left(\sum\frac{\partial G}{\partial q_i}A_i+\sum\frac{\partial G}{\partial p_i}B_i+\frac{\partial G}{\partial t}\right)$$

$$-\sum_k\frac{\partial F}{\partial p_k}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum\frac{\partial G}{\partial q_i}A_i+\sum\frac{\partial G}{\partial p_i}B_i+\frac{\partial G}{\partial t}\right)$$

---

* (62) 中的三個積分及 (58)，(59) 式中的三個積分，並不互相獨立，實際上他們符合下式關係：

$$c_1g_1+c_2g_2+c_3g_3=0$$

然 (62) 及 (63) 之六個積分則確係互相獨立的。

$$+\sum_k \frac{\partial}{\partial q_k}\left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}A_i+\sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i}B_i+\frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{\partial G}{\partial p_k}$$

$$-\sum_k \frac{\partial}{\partial p_k}\left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i}A_i+\sum_i \frac{\partial F}{\partial p_i}B_i+\frac{\partial F}{\partial t}\right)\frac{\partial G}{\partial q_k}$$

$$=0$$

從（67）式減去上式，則得

$$\sum_{i,j}\left\{\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial q_j}\left(\frac{\partial A_i}{\partial p_j}-\frac{\partial A_j}{\partial p_i}\right)-\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial G}{\partial p_j}\left(\frac{\partial B_j}{\partial p_i}+\frac{\partial A_i}{\partial q_j}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial F}{\partial p_j}\frac{\partial G}{\partial q_i}\left(\frac{\partial B_j}{\partial p_i}+\frac{\partial A_i}{\partial q_j}\right)+\frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial G}{\partial p_j}\left(\frac{\partial B_j}{\partial q_i}-\frac{\partial B_i}{\partial q_j}\right)\right\}=0 \quad (\text{IV}-68)$$

令

$$\alpha_{ij}\equiv\frac{\partial A_i}{\partial p_j}-\frac{\partial A_j}{\partial p_i},\quad \alpha_{i,n+j}\equiv-\frac{\partial B_j}{\partial p_i}-\frac{\partial B_i}{\partial q_j}$$

$$\alpha_{n+j,i}\equiv\frac{\partial B_j}{\partial p_i}-\frac{\partial A_i}{\partial q_j},\quad \alpha_{n+i,n+j}\equiv\frac{\partial B_j}{\partial q_i}-\frac{\partial B_i}{\partial q_j} \qquad (\text{IV}-69)$$

且令 $q_1\cdots q_n=x_1\cdots x_n$；$p_1\cdots p_n=x_{n-1}\cdots x_{2n}$，則（68）式可寫成

$$\sum_{i,j}^{2n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\alpha_{ij}\frac{\partial G}{\partial x_j}=0$$

或矩陣方程式之形式

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial F}{\partial q_n}\,\frac{\partial F}{\partial p_1}\cdots\frac{\partial F}{\partial p_n}\right)\begin{pmatrix}\alpha_{11}\cdots\alpha_{1n} & \cdots\alpha_{1,2n}\\ \alpha_{21}\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_{n1}\cdots\cdots\alpha_{nn} & \cdots\alpha_{n,2n}\\ \alpha_{n+1,1}\cdots\alpha_{n+1,n} & \cdots\alpha_{n+1,2n}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \alpha_{2n,1}\cdots\alpha_{2n,n} & \cdots\ \alpha_{2n,2n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial G}{\partial q_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial G}{\partial q_n}\\ \dfrac{\partial G}{\partial p_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial G}{\partial p_n}\end{pmatrix}=0$$

(Ⅳ-70)

令 (65) 式的積分曲線爲

$$q_i = q_i(a_1 \cdots a_{2n}, t),\quad p_i = p_i(a_1 \cdots a_{2n}, t) \qquad (\text{Ⅳ}-71)$$

此處 a 等係 q_k 及 p_k 的起始值，即當 $t=t_0$ 時

$$q_i = a_i,\quad i=1,\cdots n,\quad p_j = a_{n+j},\quad j=1\cdots n \qquad (\text{Ⅳ}-72)$$

如解 a 等爲 q, p, t 的函數，則 (71) 式即可寫成

$$a_k = a_k(q_1 \cdots q_n,\ p_1 \cdots p_n, t),\quad k=1,\cdots 2n \qquad (\text{Ⅳ}-73)$$

(71) 及 (73) 二式的 Jacobian 函數之乘積，應爲一單位矩陣，即

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial a_1}{\partial q_n} & \frac{\partial a_1}{\partial p_1} \cdots \frac{\partial a_1}{\partial p_n} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial a_{2n}}{\partial q_1} \cdots\cdots & \cdots\cdots \frac{\partial a_{2n}}{\partial p_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial q_1}{\partial a_n} & \frac{\partial q_1}{\partial a_{n+1}} \cdots \frac{\partial q_1}{\partial a_{2n}} \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial p_n}{\partial a_1} \cdots\cdots & \cdots\cdots \frac{\partial p_n}{\partial a_{2n}} \end{pmatrix} = 1$$

當 $t=t_0$ 時，由 (72) 式可得

$$\frac{\partial q_i}{\partial a_j} = \delta_{ij},\quad \frac{\partial q_i}{\partial a_{n+j}} = 0,\quad \frac{\partial p_i}{\partial a_{n+j}} = \delta_{ij},\quad \frac{\partial p_i}{\partial a_j} = 0,\quad i, j = 1 \cdots n$$

因此，當 $t=t_0$ 時，

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial q_n} & \frac{\partial a_1}{\partial p_1} \cdots & \frac{\partial a_1}{\partial p_n} \\ \cdots\cdots & & & \\ \cdots\cdots & & & \\ \frac{\partial a_{2n}}{\partial q_1} \cdots & \frac{\partial a_{2n}}{\partial q_n} & \frac{\partial a_{2n}}{\partial p_1} \cdots & \frac{\partial a_{2n}}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & \cdots \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

因 (73) 係 (65) 式的積分曲線，故如 (70) 式，我們亦可得

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} \cdots\cdots \frac{\partial a_1}{\partial p_n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial a_{2n}}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial a_{2n}}{\partial p_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \cdots \alpha_{1,2n} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \alpha_{2n,1} \cdots \alpha_{2n,2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial q_1} \cdots\cdots \frac{\partial a_{2n}}{\partial q_1} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \\ \frac{\partial a_1}{\partial p_n} \cdots\cdots \frac{\partial a_{2n}}{\partial p_n} \end{pmatrix} \equiv 0$$

在時間 $t=t_0$ 時，對所有 p, q 必有

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1,1}\cdots & \alpha_{1,2n} \\ \cdots\cdots & \\ \cdots\cdots & \\ \alpha_{2n,1}\cdots & \alpha_{2n,2n} \end{pmatrix} \equiv 0$$

因 t_0 爲任意值，故必有 $\alpha_{ij}=0$, $i, j=1, \cdots 2n$，此即謂必有一函數 $H(g, p, t)$ 存在，且滿足

$$A_i=\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad B_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{Ⅳ-74}$$

此式與（65）式組合後，即證明本定理。

6　正則變換之群性

我們很容易證明正則變換具有群的性質，即如二變換

$$q, p \longrightarrow Q, P \qquad Q, P \longrightarrow \Omega, \Pi \tag{Ⅳ-75}$$

係正則變換，則變換

$$q, p \longrightarrow \Omega, \Pi \tag{Ⅳ-76}$$

亦必爲正則變換。此可證明如下：由（44）式知

$$\begin{aligned} &(Q_i, Q_j)_{qp}=0, \quad (P_i, P_j)_{qp}=0, \quad (Q_i, P_j)_{qp}=\delta_{ij} \\ &(\Omega_i, \Omega_j)_{QP}=0, \quad (\Pi_i, \Pi_j)_{QP}=0, \quad (\Omega_i, \Pi_j)_{QP}=\delta_{ij} \end{aligned} \tag{Ⅳ-77}$$

係

$$\begin{aligned} \sum p\delta q &= \sum P\delta Q + \delta S \\ \sum P\delta Q &= \sum \pi\delta\Omega + \delta S' \end{aligned}$$

的必要及充足條件。又（42）式已證明 (u, v) 經任何正則變換時不變其形式，即

$$(u, v)_{qp}=(u, v)_{QP}, \quad (u, v)_{QP}=(u, v)_{\Omega\Pi}$$

則如以 Ω, Π 代 u, v 即可得

$$(\Omega_i, \Omega_j)_{qp} = (\Omega_i, \Omega_j)_{QP}, \quad (\Pi_i, \Pi_j)_{qp} = (\Pi_i, \Pi_j)_{QP}$$
$$(\Omega_i, \Pi_j)_{qp} = (\Omega_i, \Pi_j)_{QP}$$

上式由（77）式可得

$$(\Omega_i, \Omega_j)_{qp} = 0, \quad (\Pi_i, \Pi_j)_{qp} = 0, \quad (\Omega_i, \Pi_j)_{qp} = \delta_{ij} \qquad (\text{IV}-78)$$

然此式即係 $q, p \longrightarrow \Omega, \Pi$ 變換，滿足正則變換

$$\sum p\delta q = \sum \pi d\Omega + \delta S'' \qquad (\text{IV}-79)$$

的必要與充足條件。

（79）式所定義的正則變換，組成了一使正則方程式保持形式不變的較大連續群中的一個子群*（參閱本章第 1 節末段）。此較大的群，係由（5A）中的因子 ρ 包括不同的常數值組成（詳閱下章）。

7 正則變數 t 與 $-E$

正則變換（5）式之條件

$$\sum pdq - Hdt = \sum PdQ - \bar{H}dt + dS \qquad (\text{IV}-80)$$

中的 t 與 $-E$，如視爲另一對的正則變數，

$$t = q_0, \quad -E = p_0 \qquad (\text{IV}-81)$$

則（80）式可寫成一對稱的形式。玆引介新參數 τ，使

$$q'_k = \frac{dq_k}{d\tau}, \quad q'_0 = \frac{dt}{d\tau} \qquad (\text{IV}-82)$$

---

* 正則變換的其他群性，即結合律、單位元素存在性，及反變換的存在性均極易證明。

則 Hamilton 原理可寫成下式

$$\delta\int\sum_{k=0}^{n} p_k q_k' d\tau \ = \ 0 \tag{Ⅳ-83}$$

及其附帶條件

$$F(q_k, q_0, p_k, p_0) \equiv \ H + p_0 \ = H - E \ = \ 0 \tag{Ⅳ-84}$$

運動方程式卽可由下式得出:

$$\int\left[\sum_{0}^{n}(q'_k\delta p_k + p_k\delta q'_k) - \lambda\sum_{0}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\delta p_k + \frac{\partial F}{\partial q_k}\delta q_k\right)\right]d\tau = 0$$

卽

$$\frac{dq_k}{d\tau} = \lambda\frac{\partial F}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial\tau} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial q_k}, \quad k = 1, \cdots n \tag{Ⅳ-85}$$

及

$$\frac{dq_0}{d\tau} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial E}, \quad \frac{dp_0}{d\tau} = -\lambda\frac{\partial F}{\partial t} \tag{Ⅳ-86}$$

因

$$\frac{dq_0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} = -\lambda\frac{\partial(H-E)}{\partial E} = \lambda$$

故可將 (85) 及 (86) 式重寫成下列形式

$$\frac{dq_k}{dt} = \frac{dq_k}{d\tau}\ \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p_k} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$\frac{dp_k}{dt} = \frac{dp_k}{d\tau}\ \frac{d\tau}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q_k} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$\frac{dt}{d\tau} = \lambda$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\tau}\ \frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

上式的首 $2n$ 個方程即通常的正則方程式，而最後一式乃從正則方程式導出者。

習 題

1.　由正則方程式

$$\dot{q}_r=\frac{\partial H}{\partial p_r},\quad \dot{p}_r=-\frac{\partial H}{\partial q_r},\quad r=1,2,\cdots n$$

試證 $\int\sum_{r=1}^{n}(M_r\,\delta q_r+N_r\,\delta p_r)$ 爲一積分不變量

$\frac{d}{dt}\int\sum_{r}(M_r\delta q_r+N_r\delta p_r)=0$ 之條件爲

$$\frac{\partial M_r}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial M_r}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial M_r}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(M_k\frac{\partial}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial p_k}-N_k\frac{\partial}{\partial q_r}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)=0$$

$$\frac{\partial N_r}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial N_r}{\partial q_k}\frac{\partial H}{\partial p_k}-\frac{\partial N_r}{\partial p_k}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\left(M_k\frac{\partial}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial p_k}-N_k\frac{\partial}{\partial p_r}\frac{\partial H}{\partial q_k}\right)=0$$

2.　如聯立微分方程式

$$\dot{x}_r=X_r(x_1\cdots x_n,t)$$

有一積分式

$F(x_1,x_2\cdots,t)=$ 常數

試證 $\int\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_r}\,\delta x_r$

即爲一積分不變量。

3.　下式稱爲 Pfaff 式

$$\Theta_d \equiv \sum_i^n X_i(x_1\cdots, x_n)dx_i \tag{1}$$

令　$a_{jk}=\dfrac{\partial X_k}{\partial x_j}-\dfrac{\partial X_j}{\partial x_k},\qquad j,k=1,2\cdots n$　　(2)

則聯立方程式

$$\sum_{k=1}^n a_{jk}dx_k=0,\quad j=1,2,\cdots n \tag{3}$$

稱爲 (1) 式的第一級 Pfaff 系。

行列式 $\|a_{jk}\|$ 等於 0。

茲令 $\delta x_1\cdots\delta x_n, \Delta x_1\cdots\Delta x_n$ 爲二獨立變分集，則

$$\begin{aligned}\Theta_{\delta\Delta} &\equiv \delta\Theta_\Delta-\Delta\Theta_\delta\\ &=\sum\delta X_i\Delta x_i-\sum\Delta X_i\delta x_i+\sum X_i\delta\Delta x_i-\sum X_i\Delta\delta x_i\\ &=\sum(\delta X_i\Delta x_i-\Delta X_i\delta x_i)\\ &=\sum_{i,j}a_{ji}\Delta x_i\delta x_j\end{aligned} \tag{4}$$

且

$$\Delta(\delta\Theta_d-d\Theta_\delta)+\delta(d\Theta_\Delta-\Delta\Theta_d)+d(\Delta\Theta_\delta-\delta\Theta_\Delta)\equiv 0$$

或　$\Delta\Theta_{\delta d}+\delta\Theta_{d\Delta}+d\Theta_{\Delta\delta}\equiv 0$　　(5)

(a) 設 $p_1\cdots p_n,\ \ q_1\cdots q_n$;

$p_1+\delta p_1\cdots p_n+\delta p_n,\quad q_1+\delta q_1\cdots q_n+\delta q_n$;

$p_1+\Delta p_1\cdots p_n+\Delta p_n,\quad q_1+\Delta q_1\cdots q_n+\Delta q_n$ 爲方程式

$$\dot q_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \dot p_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k},\quad k=1,\cdots n \tag{6}$$

之三組解。試證：雙線性式

$$f=\sum_{k=1}^n(\delta p_k\Delta q_k-\Delta p_k\delta q_k) \tag{7}$$

係聯立系統 (6) 之不變值。

此定理亦稱爲「Poisson 定理」

（提示：令 $f=\Theta_{\delta\Delta}$ 並應用恒等式（5））

(b) 設 $2n+1$ 個變數 $q_1\cdots q_n$, $p_1\cdots p_n, t$ 的 Pfaff 式為

$$\sum_{k=1}^{n} p_k dq_k - \sum_{k=1}^{n} 0\cdot dp_k + Hdt = \sum p_k dq_k - Hdt \tag{8}$$

試證：(8) 式之第一級 Pfaff 系為

$$\dot{q}_k = \frac{\partial H}{\partial p_k},\quad \dot{p}_k = -\frac{\partial H}{\partial q_k},\quad dH - \frac{\partial H}{\partial t}dt = 0 \tag{9}$$

(c) 試證由 $q_k, p_k \longrightarrow Q_k, P_k$ 之變換為一正則變數的充足條件為

$$\sum(\delta p_k \Delta q_k - \Delta p_k \delta q_k) = \sum(\delta P_k \Delta Q_k - \Delta P_k \delta Q_k) \tag{10}$$

為甚麼此條件並非必要？

4. 已知 Hamilton 函數，$H=\frac{1}{2}(p^2+k^2q^2)$。試證下列變換

$$q=\sqrt{\frac{2Q}{k}}\cos P,\quad p=\sqrt{2Qk}\sin P$$

為正則變換，並試求本問題之解。（卽 q, p 成 t 之函數）

5. 試由直接的計算，證明 Lagrange 括號 $[u, v]$ 係一運動之常數，此處 u, v 係正則方程式之二個積分。

第五章

古典力學中的時間可逆性

1　時間的觀念，「時矢」

古典動力學的基本定律，不論以何種等效式來表示（如牛頓運動方程式，Lagrange 方程式，Hamilton 正則方程式或變分原理等），均有相同的特性，即當時間 t 改變符號時，該方程式並不變形式。但所謂時間逆轉的意義，不是淺顯的，因爲這牽涉到時間本身的意義和時間的方向的問題。這些乃是很久以來科學家與哲學家們一直在探討的主題。牛頓採用「絕對時間」的觀念，認爲「時間的流動，係均勻的且與任何事物均無關的」，這定義以「均勻流動」來定義時間，可以說是一種無謂的重複（兜圈子），而認爲「時間與任何事物無關」則可說是屬於一種形而上學的講法。直到 1905 年愛因斯坦在他的相對論中，嚴密的討論到時空的觀念爲止，這種極明顯的無法滿足人的定義，幾世紀以來並沒受到嚴重的挑戰，其原因乃是實際上並無比較好的定義可以代替它。

愛因斯坦引進了「運作的」觀念，並且用觀察者的測量來定

義時，空等間距。對每一觀察者，在不同空間位置上，用同步鐘所量得的一系列事件發生的時間，可形成一個時間數列 $t_1, t_2, t_3 \cdots (t_1<t_2<t_3\cdots)$。這種用觀察者觀察的時間的運作的定義，顯然地使每一觀察者各有他的時間。這便引入了「時間方向」的觀念，但這個「時間方向」，並非絕對的亦非普遍適用的。在這種時空觀念與相對論運作定義下所導出的一個結果，即爲Lorentz 變換。Lorentz 變換，證明了事件同時性的觀念及事件發生的時間間距和時序，並非絕對的。對於兩個互以等速相對運動下的觀察者來說，兩事項的先後次序，甚至可能不同的。在這種時間觀念下，時間的逆轉，實際上並無運作上的定義，一個人不能在現在對過去所發生的事，作任何測量與觀察。

然而，有些現象，即使在相對論及時間的運作定義下，其定律或方程式等，在時間變數 t 變號的情形下，仍不變其形式。例如動力學中的運動方程式，Maxwell 電磁場方程式及Schrödinger 方程式等，均有這些性質。這些方程式所具有的這種不變性，其意義乃是他們所描述的現象，對於時間變數 t 的正負說，並無任何特殊的偏愛。故這些方程式，既可用來「預測」將來，亦可用來「逆測」過去。因此，我們原則上可根據力學方程式，來找出過去所有的日，月蝕的時間和位置。在這種情況下，「時間可逆性」就宛如把一卷影片反轉次序來播映一樣。我們可用上述方程式來尋出過去發生的事件遺跡，但仍無法在現在來觀測去年或昨天所發生的事件。

在時間逆轉不變性下，我們可有「微觀的可逆性原理」。依

照這原理，在原子的層階，如將一個系統中所有質點的速度方向均逆轉，則在此微觀系統中，每一個過程的時間順序，均被逆轉。有人往往將「速度逆轉」與「時間逆轉」混而爲一。我們應注意一點，「速度的逆轉」並不就是表示「時間的逆轉」。當所有速度逆轉方向時，該系統僅是回溯他原來的步驟，但仍然在時間的正方向上進展。改變時間符號，是一種數學運算，而逆轉速度則是一種物理運作。茲以一個行星繞著太陽運轉爲例，說明此點。如將速度逆轉，則行星仍繞著同前的軌道，作反向的運行，但時間仍是正的。但如在運動方程式中把時間 t 變爲 $-t$ 時，該方程式仍描述同一的軌道，但却以相反的時間數列 $\cdots t_3 > t_2 > t_1 \cdots$ 進行。在這兩種情況下，軌道與運動的意義均相同，然在時間的計數上却截然不同。

有某些現象（如氣體擴散）「逆溯過去」是不可能的，這些都屬於「巨觀不可逆過程」。描述這些過程的方程式，都是對時間變數 t 不可逆的。最好的例子是熱力學第二定律。此定律謂一封閉系統的熵，永遠隨時間增加，即 $\frac{dS}{dt} \geq 0$。這個經驗性的熱力學定律，原係認爲是正確及絕對的，但 Boltzmann 及 Gibbs 的統計理論，給予這熵定律一個機率上的解釋。因此 $\frac{dS}{dt} \geq 0$ 不再被認爲有絕對的意義而只認爲有很高的機率。因此在物理上我們可以用整個宇宙的很高機率的熵增加率，來定義時間的方向。這種方法定義出來的方向與相對論用運作觀念定義的方向，恰好一致。但我們必須記得，熵的增加並非絕對的，而相對論中時間的方向亦非絕對的。

在討論到巨觀現象的不可逆性時，已曾有許多理論，如 Fourier 熱傳導定律，Boltzmann 傳輸理論，Fokkor-Planck 方程式及廣義 Master 方程式等。所有上述的這些方程式對時間變數 t 改變符號時，均具有非不變的特性。(參閱本書第五册)

這種對於時間符號的不對稱性，可用各種方式引入。其一爲利用某些機率上的一般性假設 (Smoluchowski 定律)，另外則用某些特殊假說 (如 Boltzmann 理論中的碰撞積分)。在這些狀況下，我們可以證明當 t 改變符號時，這些方程式變成毫無意義 (參閱：吳大猷著 Kinetic Theory of Gases and Plasmas)。但這些對 t 符號的無對稱性的理論，均係爲了描述觀察到的巨觀不可逆性而創立的，不是基本性的原理 (如力學電磁學等)。故在討論到關於「時的方向」的基本問題時，這些理論是無任何基本重要性的。

2　時間的逆轉視作正則變換

現在撇開時間及時矢等基本問題，僅考慮動力學方程式對時間變數 t 改變符號時所具的不變性。將 t 的變號，視作正則變換。

令 Θ 代表時間逆轉的算符，並以「*」之符號代表在這種變換下所得的新變數，則

$$\begin{aligned} &t^*=\Theta t=-t \\ &q_k^*=\Theta q_k=q_k, \qquad \dot{q}_k^*=\Theta \dot{q}_k=-\dot{q}_k \\ &p_k^*=\Theta p_k=-p_k, \quad \dot{p}_k^*=\Theta \dot{p}_k=\dot{p}_k \end{aligned} \tag{V-1}$$

假設 Lagrange 函數 $L(q,\dot{q})$ 係 $\dot{q}$ 的二次齊次函數。在此情形下則

$$\Theta L(q,\dot{q})=L(q,\dot{q})$$

$$\begin{aligned} H^*=\Theta H(p,q)&=\Theta(-L+\sum p_k\dot{q}_k)\\ &=-L+\sum p_k\dot{q}_k=H \end{aligned} \qquad (\text{V-2})$$

由（1）及（2）二式，可知下列正則方程式

$$\dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k},\quad \dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k} \qquad (\text{V-3})$$

對於時間之反逆，具有不變性，蓋在時間逆轉時，上二式變成

$$\dot{p}_k^*=-\frac{\partial H^*}{\partial q_k^*}=(H^*,p_k^*)_{p^*,q^*}$$

$$\dot{q}_k^*=\frac{\partial H^*}{\partial p_k^*}=(H^*,\dot{q}_k^*)_{p^*,q^*} \qquad (\text{V-4})$$

此種不變性乃是古典力學運動* 可逆性的數學表示式。

另一方面，時間反逆之變換，使 Poisson 括號亦變其符號，蓋

$$(q,p)_{p,q}=1$$

而　　$$(q,p)_{p^*,q^*}=-1 \qquad (\text{V-6})$$

不符合（Ⅳ-44）式了。驟觀之，這似是有矛盾的，因 Poisson 括號的不變性，證明係（Ⅳ-5)式的必要及充足條件，而這不變性，是通常用來定義正則變換的。但我們務須記得（Ⅳ-5）之條件，

---

* 在一電磁場中運動之帶電荷質點，其「非相對論」情況下的 Lagrange 函數可寫成

$$L=\frac{1}{2}m\sum_1^3\dot{q}_k^2-e\left(\phi-\frac{1}{C}\sum_1^3\dot{q}_kA_k\right)$$

ϕ為無向量位能，$\mathbf{A}$ (A_1,A_2,A_3) 爲向量位能。使 L 在時間逆轉下不變形式的條件（即$\Theta L=L$）爲

$$\Theta e\phi=e\phi,\quad \Theta eA_k=-eA_k \qquad (\text{V-5})$$

如向量位能係由一個電流系統產生，則上二條件之第二式即可滿足，蓋時間反逆時，電流亦反逆，故A之符號亦隨之改變也。

即

$$\sum pdq-Hdt = \sum PdQ-Kdt+ds \qquad (\text{V-7})$$

對於 (3) 的不變性言，僅是充足而非必要條件。(7)式所定義的正則變換，祇係不包括時間逆轉的變換所形成的一個子群。故上述的所謂矛盾，實際上並不存在。我們可以將 (7) 式推廣到包括時間的逆轉，亦卽對下列變換

$$p, q, t \to P^*, Q^*, t^*, \qquad t^* = -t \qquad (\text{V-8})$$

作下面的條件

$$\sum pdq-Hdt = -(\sum P^*dQ^*-Kdt^*)+dS \qquad (\text{V-9})$$

此式卽係 (Ⅳ-5A) 式中當 $\rho=-1$ 的情形。應用 Hamilton 的變分原理，卽可得下列的正則方程式

$$\frac{dP^*}{dt^*}=-\frac{\partial K}{\partial Q^*}, \quad \frac{dQ^*}{dt^*}=\frac{\partial K}{\partial p^*} \qquad (\text{V-10})$$

(9) 式現可寫成下列形式:

$$\sum pdq-Hdt=-\sum P^*dQ^*-Kdt+dS(q, Q^*) \qquad (\text{V-11})$$

由此，變換方程式乃成

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k}, \quad P^*_k=\frac{\partial S}{\partial Q^*_k}$$

$$K(P^*, Q^*)=H(p, q)+\frac{\partial S}{\partial t} \qquad (\text{V-12})$$

由上式，可見 P_k^* 與 (Ⅳ-6) 式中的 P_k，差了一個負號。由於 (9) 及 (11) 式中的這個負號，正則變換的四個相同條件 (Ⅳ-5), (Ⅳ-30), (Ⅳ-39), (Ⅳ-45)，乃變成下列形式:

$$\sum pdq-Hdt=-(\sum P^*dQ^*-Kdt^*)+dS$$

$$\iint\sum dp_k dq_k = -\iint\sum dP_k^* dQ_k^* \tag{V-13}$$

Lagrange 括號 $[u, v]_{p,q} = -[u, v]_{P^*,Q^*}$ (V-14)

Poisson 括號

$$(u, v)_{p,q} = -(u, v)_{P^*,Q^*} \tag{V-15}$$

由上式可見 (6) 與 (15) 式相符。

習題

1.　試問對於像第四章第 3 習題中，以雙線性形式 (bilinear form) 表明的包含時間逆轉的正則變換，其條件若何？

第六章

Hamilton-Jacobi 理論

1 Hamilton-Jacobi 理論

在（Ⅳ-15）式中主函數 S，係以下列積分來定義的

$$S=\int_{t_0}^{t} L dt \tag{Ⅵ-1}$$

此積分係沿著動力系統的運動路徑，故

$$\delta S=\sum p_k \delta q_k-\sum p_k^0 \delta q_k^0 \tag{Ⅵ-2}$$

p, q, p^0 q^0 係在時間 t 及 t_0 的值。

今假設一力學問題之解已獲得，且其運動方程式（Lagrange 方程式或正則方程式）之積分爲：

$$q_i=q_i(c_1\cdots c_{2n}, t), \quad p_i=p_i(c_1\cdots c_{2n}, t) \tag{Ⅵ-3}$$

c 等係 $2n$ 個積分常數。設 q_k, p_k 在 $t=t_0$ 時之値爲 q_k^0, p_k^0，即

$$q_i^0=p_i^0(c_1\cdots c_{2n}, t_0), \quad p_i^0=p_i^0(c_1\cdots c_{2n}, t_0) \tag{Ⅵ-4}$$

如由上 (3), (4) 的 $4n$ 個方程式中，消去 $2n$ 個常數 c，即可得到由 $4n+1$ 個量

$$q_1, \cdots q_n, \quad p_1, \quad \cdots p_n, \quad q_1^0, \cdots q_n^0, p_1^0, \cdots p_n^0, t \tag{Ⅵ-5}$$

所組成的 $2n$ 個方程式。

由這 $2n$ 個方程式，我們卽可將這 $4n+1$ 個量中的任意 $2n$ 個（如 $p_1, \cdots p_n$, $p^0_1 \cdots p^0_n$），用（5）式中的其他 $2n+1$ 個量來表示。因此（7）中的主函數 S，可用此（$2n+1$）個量來表示，如 $q_1, \cdots q_n$, $q^0_1, \cdots q^0_n, t$ 然。在這情況下，我們可得

$$\delta S = \sum \frac{\partial S}{\partial q_k} \delta q_k + \sum \frac{\partial S}{\partial q^0_k} \delta q^0_k \qquad (\text{VI}-6)$$

由（2）與（6）的對比，卽得

$$p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, \qquad p^0_k = -\frac{\partial S}{\partial q^0_k} \qquad (\text{VI}-7)$$

這 $2n$ 個方程式，可以視作 q_k, p_k 與 q^0_k, q_k 間一個正則變換的定義，故在時間 t 時的 q_k, p_k，卽可用在時間 t_0 時的 q^0_k, p^0_k 來表示，而此正是動力學問題的解答也。

上面的解說，可能會令讀者有如下的想法，卽：要得到（7）式，則必需先將運動方程式予以積分，以便得到 S。然如這樣，則（7）式將是多餘的了。如沒有 Hamilton-Jacobi 理論，情形確是如此。然在 Hamilton-Jacobi 理論中，欲求 S，並不需將運動方程式積分，而祇需解出一個偏微分方程式

$$H\left(q_k, p_k = \frac{\partial S}{\partial q_k}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad (\text{VI}-8)$$

此方程式稱爲 Hamilton-Jacobi 方程式。這方程式可由下面兩個定理得出。

（定理一）：主函數 $S(q, q^0, t)$ 滿足（8）方程式。

此定理係在1834年愛爾蘭數學物理學家 Hamilton 氏所提出。

（證明）：先定義一正則變換 S，使

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k},\quad p_k^0=-\frac{\partial S}{\partial q_k^0} \qquad (\text{VI}-7)$$

由（1）式可得

$$\frac{dS}{dt}=L=\sum p_k\dot{q}_k-H \qquad (\text{VI}-9)$$

同時直接可得

$$\frac{dS}{dt}=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum\frac{\partial S}{\partial q_k}\dot{q}_k=\frac{\partial S}{\partial t}+\sum p_k\dot{q}_k \qquad (\text{VI}-10)$$

則由上二式，即可得

$$H(q,p,t)+\frac{\partial S}{\partial t}=0$$

上式中之 H 函數，其 p_k 係以 $\frac{\partial S}{\partial q_k}$ 代替之。

上述定理的反定理，乃 1837 年時 Jacobi 所提出，玆述之如下：

〔定理二〕：如已知偏微分方程（8）的一個包含 $n+1$ 個任意常數的完全積分

$$S(q_1,\cdots q_n,\ \alpha_1,\cdots\alpha_n,t)+\alpha_{n+1} \qquad (\text{VI}-11)$$

則正則方程式的積分即爲

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k},\quad \beta_k=-\frac{\partial S}{\partial \alpha_k},\quad k=1,\cdots,n, \qquad (\text{VI}-12)$$

〔證明〕：設 S 代表從 q,p 到 α,β 的正則變換的產生式，並令（12）式爲變換方程式，此變換（11），（12）將 Ldt 變換成 $L'dt+dS$，即

$$(\sum p_k\dot{q}_k-H)dt=(\sum\beta_k\dot{\alpha}_k-\bar{H})dt+dS \qquad (\text{VI}-13)$$

此處

$$\bar{H}(\alpha,\beta,t)=H(q,p,t)+\frac{\partial S}{\partial t} \tag{Ⅵ-14}$$

由假設，如（11）式的 S 係（8）式的完全積分，故

$$\bar{H}(\alpha,\beta,t)=0 \tag{Ⅵ-15}$$

由此式，即可從正則方程式得到

$$\alpha_k=\text{常數},\ \beta_k=\text{常數} \tag{Ⅵ-16}$$

（12）係 $2n$ 個將 q_k, p_k 表示爲 α_k, β_k, t 的函數的方程式，故即係該動力系統的積分。

由（11）式，相當於無限多組的常數 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$，就有無限多的完全積分。（11）式的每一 S，均定義一個正則變換。在無限多個 S 中，有一個特別重要，即 $\alpha_1\cdots\alpha_n$ 常數，係在 $t=t_0$ 時 $q_1,\cdots q_n$ 的值。在此情形下，（12）式的 β_k，即係 $t=t_0$ 時 p_k 之值 p_k^0，而 $S(q_1,\cdots q_n,\ q_1^0,\cdots q_n^0,t)$ 即係（1）式的主函數。

從歷史順序上來看，Hamilton 係研究（1）式中的「變易的作用原理」，他的理論，限於系統路徑上的p, q. 他得的不是（8）式中的一個式子，而是有兩個方程式，一爲起始的 q_k^0, p_k^0，另一則爲 q_k, p_k 的。Jacobi 去掉了對主函數 $S(q,p,t)$ 的一些不必要的限制，將（8）式推展到一個較大的群，因此使函數 S 定義出一個從 q_k, p_k 到另一任意 Q_k, p_k 間的正則變換。

2　Hamilton 函數與時間無關的動力系統

如 H 非時間 t 的顯函數，則 Hamilton-Jacobi 方程式

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q}\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0 \tag{Ⅵ-17}$$

可用
$$S(q,\alpha,t)=S_0(q,\alpha)-ht \tag{Ⅵ-18}$$

解出。此處 $S_0(q,\alpha)$ 與時間無關，且滿足下列方程式

$$H\left(q,\frac{\partial S_0}{\partial q}\right)=h \tag{Ⅵ-19}$$

茲因

$$\frac{dH}{dt}=\sum_k\left(\frac{\partial H}{\partial q_k}\dot{q}_k+\frac{\partial H}{\partial p_k}\dot{p}_k\right)+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}=0$$

或

$$H=\text{常數}$$

因此 (18),(19) 式中之 h 即爲一個動力系統的總能量。式中的 S_0 則稱爲 Hamilton 的特性函數。

凡系統的 H 等於常數 $H=h$ 者，則其主函數 S 爲

$$S=\int_{t_0}^{t}Ldt=\int_{t_0}^{t}(2T-h)dt=\int_{t_0}^{t}2Tdt-h(t-t_0) \tag{Ⅵ-20}$$

將此式與 (18) 式比較，即得

$$S_0=\int_{t_0}^{t}2Tdt \tag{Ⅵ-21}$$

即特性函數 S_0 乃係沿著系統運動路徑的作用積分。方程式 (19) 說明當一系統的 $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ 時，我們即可用 Hamilton-Jacobi 方程式 (19) 來解。

茲舉一例。設一質點的 Hamilton-Jacobi 方程式（以下簡稱 H-J 方程式）爲

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S_0}{\partial z}\right)^2\right]+V=h$$

或

$$|grad S_0| = \sqrt{2m(h-V)}$$

$$\int_{\Gamma} \sqrt{2m(h-V)}\, ds = \int_{\Gamma} (grad\ S_0 \cdot dr) = S_0(r) - S_0(r_0)$$

此處 Γ 爲質點的路徑，然由（Ⅱ-10）式知

$$\int_{t_0}^{t} 2T dt = \int_{\Gamma} \sqrt{2m(h-V)}\, ds \qquad (Ⅵ-22)$$

因此（21）式卽可得證。

設　　$S_0(q_1, \cdots q_n,\ h, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$

爲（19）式之解，包含 n 個常數 $h, \alpha_2, \cdots \alpha_n$，並假設

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_2} \cdots \frac{\partial S_0}{\partial q_n}\right)}{\partial(\alpha_2 \cdots \alpha_n)} \neq 0 \qquad (Ⅵ-23)$$

由此可證函數行列式

$$J = \frac{\partial\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1} \cdots \frac{\partial S_0}{\partial q_n}\right)}{\partial(h, \alpha_2, \cdots \alpha_n)} \neq 0^* \qquad (Ⅵ-24)$$

現可用函數 S_0 來定義一個從 q, p 到 α, β 的變換

$$p_k = \frac{\partial S_0}{\partial q_k}, \quad \beta_1 = \frac{\partial S_0}{\partial h}, \quad \beta_i = \frac{\partial S_0}{\partial \alpha_i}, \qquad \begin{matrix} k = 1, \cdots n \\ i = 2, \cdots n \end{matrix} \qquad (Ⅵ-25)$$

（24）式中 $J \neq 0$，保證了由（25）式解出 q, p（爲 α, β 的函數）的可能性。

---

*按假設，S_0 係（19）之一解，故將 $S_0(q_1, \cdots q_n,\ h_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n)$ 代入（19）式，可得 $h, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 間的恒等式。
將（19）式對 $h, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 微分，則可得下列聯立方程式

$$\frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial^2 S_0}{\partial q_1 \partial h} + \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial^2 S_0}{\partial q_2 \partial h} + \cdots + \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial^2 S_0}{\partial q_n \partial h} = 1$$

3 具有循環座標的動力系統

(1) 除了一個座標以外，均為循環座標之系統

Hamilton-Jacobi 方程式爲

$$H\left(q_1, \frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S_0}{\partial q_k}\right)=h \tag{Ⅵ-28}$$

設

$$S_0=S_0(q_1, \cdots q_n, h, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \tag{Ⅵ-29}$$

係一完全積分，且其

$$J=\frac{\partial\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}, \cdots, \frac{\partial S_0}{\partial q_n}\right)}{\partial(h, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)} \neq 0 \tag{Ⅵ-30}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_1\partial\alpha_2}+\cdots\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_n\partial\alpha_2}=0 \tag{Ⅵ-26}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_1\partial\alpha_n}+\cdots\cdots+\frac{\partial H}{\partial p_n}\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_n\partial\alpha_n}=0$$

$\frac{\partial H}{\partial p_1}, \cdots, \frac{\partial H}{\partial p_n}$等的係數所組成的行列式，即爲（24）式中的$J$。玆假設$J=0$。則可選出一組常數$\lambda_1, \cdots \lambda_n$（不均爲0的），使

$$\lambda_1\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_k\partial h}+\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_k\partial\alpha_i}=0, \quad k=1, \cdots n \tag{Ⅵ-27}$$

（此即謂行列式J的各「行」有線性關連的關係）。因由假設，知（23）式之行列式並不等於0，故λ_1之值，可任意取擇。今將（26）式中的第i個方程式乘以λ_i，並將各方程式加在一起，即得

$$\left(\lambda_1\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_k\partial h}+\sum_{i=2}\lambda_i\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_k\partial\alpha_i}\right)\frac{\partial H}{\partial p_k}=\lambda_1$$

或由（27）式，

$$0\cdot\frac{\partial H}{\partial p_k}=\lambda_1$$

但此與λ_1可爲任意値之事實相矛盾。故上$J=0$之假設，引致矛盾。故$J\neq 0$。

(28) 式可用分離變數法求解。

$$S_0=\sum_{i=1}^{n} S_i(q_i, h, \alpha_2, \cdots \alpha_n) \qquad (\text{VI}-31)$$

由正則方程式即可得

$$-\dot{p}_i=\frac{\partial H}{\partial q_i}=0, \quad \text{或 } p_i=\text{常數}, \quad i=2, \cdots n$$

因

$$p_i=\frac{\partial S_0}{\partial q_i}=\frac{dS_i}{dq_i}$$

故

$$S_i=\text{常數}\cdot q_i, \qquad i=2, \cdots n$$

故得

$$S_0=S_1(q_1, h, \alpha_2, \cdots \alpha_n)+\sum_{i=2}^{n}\text{常數}\cdot q_i$$

在不失普遍性的考慮下，我們可將其寫成

$$S_0=S_1(q_1, h, \alpha_2, \cdots \alpha_n)+\sum_{i=2}^{n}\alpha_i q_i \qquad (\text{VI}-32)$$

如是，則 H-J 方程式 (28) 即變成一常微分方程式

$$H(q_1, \frac{dS_1}{dq_1}, \alpha_2, \cdots \alpha_n)=h \qquad (\text{VI}-33)$$

(30) 的條件，可以 $\frac{\partial H}{\partial p_1}\neq 0$ 之假設滿足之。此可由改寫 (33) 成下面形式來看出

$$p_1=p_1(q_1, h, \alpha_2, \cdots \alpha_n)$$

因此

$$\frac{\partial H}{\partial p_1}\frac{\partial p_1}{\partial h}=1$$

且

$$J=\frac{\partial^2 S_0}{\partial q_1\partial h}=\frac{\partial p_1}{\partial h}$$

如 $\frac{\partial H}{\partial p_1}\neq 0$，則 $J\neq 0$

從上述，則此問題的解，過程如下。設 S_0 爲一從 q,p 到 Q,P 的正則變換，並滿足下列條件的

$$P_1=h,\ \ P_i=\alpha_i,\ \ i=2\cdots n,\ \ \overline{H}=P_1=h \qquad (\text{VI}-34)$$

如是則正則方程式，可寫成

$$\dot{Q}_1=\frac{\partial\overline{H}}{\partial P_1}=1,\qquad \dot{Q}_i=0,\ \ i=2,\cdots n$$

$$\dot{P}_k=0,\qquad\qquad k=1,\cdots n \qquad (\text{VI}-35)$$

或寫成

$$Q_1=t+\beta_1,\ \ Q_i=\beta_i,\ \ i=2,\cdots n$$
$$P_1=h\qquad P_i=\alpha_i\quad i=2,\cdots n$$

在這情況下，變換方程式即如（Ⅳ-8）式爲

$$Q_1=\frac{\partial S_0}{\partial P_1},\ \ \text{或}\ \ t+\beta_1=\frac{\partial S_0}{\partial h}=\int_{q_1^0}^{q_1}\frac{\partial p_1}{\partial h}\,dq_1$$

$$Q_i=\frac{\partial S_0}{\partial P_i},\ \ \text{或}\ \ \beta_i=\frac{\partial S_0}{\partial\alpha_i}=\int\frac{\partial p_1}{\partial\alpha_i}\,dq_1+q_i$$

$$i=2,\cdots n \qquad (\text{VI}-36)$$

$$p_1=\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\ \ \text{或}\ \ p_1=\frac{\partial S_0}{\partial q_1}=p_1(q_1,h,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$$

$$p_i=\frac{\partial S_0}{\partial q_i},\ \ \text{或}\ \ p_i=\alpha_i$$

由第一式可得，q_1 爲 $h,\alpha_2,\cdots\alpha_n,\ \beta_1,t$ 的函數。此處 $p_1=p_1(q_1,h,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ 係由（33）式得來。其次之（$n-1$）方程式，乃 q 等爲 $h,\ q_1,\ \alpha_2\cdots\alpha_n$ 及 β_i 等的函數，再由第一式之結果，使得

q 等爲 $h, \alpha_2, \cdots \alpha_n$, $\beta_1, \cdots \beta_n, t$ 等的函數。第三個方程式係p_1 爲 $\alpha_2, \cdots \alpha_n$, β, t 等的函數，而最後 $n-1$ 個方程式，則爲$p_i = \alpha_i$.

今舉一例：一重力場中的對稱陀螺，其轉動慣量矩 $A=B\neq C$。如用 Euler 角，則位能可寫成 $V=D\cos\theta$。其 Hamilton 函數則爲

$$H=\frac{1}{2A}\left[p_\theta^2+\frac{1}{\sin^2\theta}(p_\psi-p_\varphi\cos\theta)^2\right]+\frac{1}{2C}p^2_\varphi+D\cos\theta$$

因 φ, ψ 係循環座標，故

$$p_\varphi=\alpha_2, \quad p_\psi=\alpha_3$$

$$p_\theta=\left[2Ah-\left(\frac{\alpha_3-\alpha_2\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2-\frac{\alpha_2^2A}{C}-2AD\cos\theta\right]^{1/2}$$

令 $\mu\equiv\cos\theta$，則上式之積分爲

$$t-t_0=A\int\frac{d\mu}{\sqrt{(1-\mu^2)(2Ah-\frac{A\alpha_2^2}{C}-2AD\mu)-(\alpha_3-\alpha_2\mu)^2}}$$

此係一橢圓積分，與用 Lagrange 方程式所得者相同。

再舉一例，一拋射體在一重力場中被垂直射出的情況（設 z 軸向上爲正）。則 Hamilton 函數可寫成

$$H=\frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2)+mgz=h$$

令

$$S_0=S_0(x, y, z, h, \alpha_2, \alpha_3)=S_x(x)+S_y(y)+S_z(z)$$

則 H-J 方程式可寫成

$$\sum_x^{y,z}\left(\frac{dS_x}{dx}\right)^2+2m^2gz-2mh=0$$

因 x, y 係循環座標，故得

$$\left(\frac{dS_x}{dx}\right)^2=2m\alpha_x^2,\qquad \left(\frac{dS_y}{dy}\right)^2=2m\alpha_y^2$$

$$\left(\frac{dS_z}{dz}\right)^2=2m(h-\alpha_x^2-\alpha_y^2)-2m^2gz\equiv f(z)$$

如開始時動量 $p_z>0$，故對於問題中物體向上運動的部分，我們可選擇

$$\frac{dS_x}{dx}=\pm\sqrt{2m}\,\alpha_x,\quad \frac{dS_y}{d_y}=\pm\sqrt{2m}\,\alpha_y$$

$$\frac{dS_z}{dz}=\sqrt{f(z)}$$

及

$$S_0=\int_{z_0}^{z}\sqrt{f(z)}\,dz\ \ \pm\sqrt{2m}\,(\alpha_x x+\alpha y_y)$$

由（36）式卽可得

$$t+\beta_z=\frac{\partial S_0}{\partial h}=m\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$$

$$\beta_x=-2m\alpha_x\int_{z_0}^{z}\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}\pm\sqrt{2m}\,x,\ \ x=x,y$$

此式卽得出通常之結果

$$x_1-x_0=\sqrt{\frac{2}{m}}\,\alpha_x(t_1-t_0),\quad y_1-y_0=\sqrt{\frac{2}{m}}\,\alpha_y(t_1-t_0)$$

$$z_1-z_0=v(t_1-t_0)-\frac{1}{2}g(t_1-t_0)^2$$

此處 v 係開始時速度的 z 分量。

（2） 具有 $n-\nu$ 個循環座標之系統

設 Hamilton 函數爲

$$H=H(q_1,\cdots q_\nu,\ p_1,\cdots p_n)\qquad (\text{Ⅵ}-37)$$

故

$$p_i=\alpha_i, \qquad i=\nu+1,\cdots n,$$

其 H-J 方程式爲

$$H(q_1,\cdots q_\nu,\ \frac{\partial S_0}{\partial q_1},\cdots\frac{\partial S_0}{\partial q_\nu},\ \alpha_{\nu+1},\cdots\alpha_n)=h \tag{Ⅵ-38}$$

假設解的形式爲

$$S_0=S_\nu(q_1,\cdots,q_\nu,\ h,\alpha_2,\cdots\alpha_n)+\sum_{\nu+1}^{n}\alpha_i q_i \tag{Ⅵ-39}$$

且滿足

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1}\cdots\frac{\partial S_0}{\partial q_n}\right)}{\partial(h,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)}\neq 0 \tag{Ⅵ-40}$$

如已求得一個特殊 S_0，則

$$t+\beta_1=\frac{\partial S_\nu}{\partial h} \qquad p_k=\frac{\partial S_\nu}{\partial q_k}, \quad k=1,\cdots,\nu$$

$$\beta_k=\frac{\partial S_\nu}{\partial \alpha_k},\ k=2,\cdots,\nu,\quad p_i=\alpha_i,\ i=\nu+1,\cdots,n \tag{Ⅵ-41}$$

$$\beta_i=\frac{\partial S_\nu}{\partial \alpha_i}+q_i, \qquad i=\nu+1,\cdots,n$$

(3) 所有座標均係循環座標之系統

在此情況下，由正則方程式可得

$$\dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}=0,\ \text{或}\ p_k=\alpha_k=\text{常數} \tag{Ⅵ-42}$$

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k}=p_k\ \text{的函數}=\text{常數}, \qquad \text{或}\ q_k=w_k t+\beta_k$$

則 H-J 方程式

$$H\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S_0}{\partial q_n}\right)=h \tag{Ⅵ-43}$$

亦可用

$$S_0=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k q_k$$

解出，因之這 n 個 α 間，有一個包含 h 的關係。此關係即（43）式。

4 Hamilton 力學的變換理論

從上節（42）式，如我們能覓得一個從 q,p 到 Q,P 的正則變換，且新的 Hamilton 函數僅爲 P_k 的函數，

$$\bar{H}(P_1,\cdots,P_n) \tag{Ⅵ-44}$$

則此動力學問題，即已解了。這樣的一個變換，其產生式 S_0 即爲 H-J 方程式之解

$$H\left(q_1,\cdots q_n,\ \frac{\partial S_0}{\partial q_1},\cdots\frac{\partial S_0}{\partial q_n}\right)=h \tag{Ⅵ-45}$$

今令 $S_0=S_0(q_1,\cdots q_n,h,\alpha_2,\cdots\alpha_n)$ 爲一滿足(24)式的完全積分，且以 S_0 定義一變換如：

$$p_k=\frac{\partial S_0}{\partial q_k},\quad \beta_k=\frac{\partial S_0}{\partial \alpha_k}\qquad(\alpha_1=h) \tag{Ⅵ-46}$$

此產生式 S_0 與 t 無關，且將依照

$$\bar{H}(\beta,\alpha)=H(q,p)=h \tag{Ⅵ-47}$$

之關係，把 $H(q,p)$ 變換成 $\bar{H}(\beta,\alpha)$。

茲定義一組新的 Q',P'，

$$P_1'=h=\alpha_1,\qquad P_i'=\alpha_i,\qquad i=2,\cdots,n$$

使

$$\bar{H}(\beta,\alpha)=\bar{H}(P',Q')=P_1 \qquad (\text{VI}-48)$$

由正則方程式，並得下列結果

$$P_1'=h, \qquad P_i'=\alpha_i$$

$$Q_1'=t+\beta_1, \qquad Q_i'=\beta_i, \qquad i=2,\cdots,n$$

變換方程式（46）卽變成

$$P_k=\frac{\partial S_0}{\partial q_k},$$

$$Q_1'-t=\frac{\partial S_0}{\partial P_1'}, \qquad Q_i'=\frac{\partial S_0}{\partial P_i'}, \qquad i=2,\cdots,n \quad (\text{VI}-49)$$

此處

$$S_0=S_0(q_1,\cdots q_n,\ P_1',\cdots,P_n')$$

（49）式的最後 n 個方程式，乃 q_k 爲 t 及 $P_1,\cdots,P_n$, $Q_1'\cdots Q_n'$ 的函數關係，而首 n 個方程式 $p_k=\frac{\partial S_0}{\partial q_k}$ 乃係 p_k 之 q_k 及 P_k' 函數（終係 P_k', Q_k' 及 t 的函數）。

在較寬的要求下，我們希望把 $H(q,p)$ 變換成一個含有新的各變數 P 的函數（但不需如（48）式中只是一個 P）。我們可從（48）開始，作一從上述 P_k', Q_k' 到 P_k, Q_k 的另一變換 S_0''，使

$$\bar{H}(P',Q')=P_1\rightarrow\bar{H}(P_1,\cdots P_n) \qquad (\text{VI}-50)$$

我們假設 $\bar{H}$ 可使某些 $\frac{\partial\bar{H}}{\partial P_k}\neq 0$。玆先作（$n-1$）個其他函數*

$$P_i=P_i(P_1',\cdots P_n'), \quad i=2,\cdots n \qquad (\text{VI}-51)$$

*爲了使動量變換爲動量，則變換函數 S'' 的必要及充足條件，乃 S'' 係 Q_k' 的線性函數，即

$$S_0''(Q',P)=\sum F_k(P_1\cdots P_n)Q_k'+G(P_1\cdots P_n)$$

如是則

$$P_k'=\frac{\partial S_0''}{\partial Q'_k}=F_k(P,\cdots P), \quad Q_k=\frac{\partial S_0''}{\partial P_k}=\sum Q_j'\frac{\partial F_j}{\partial P_k}+\frac{\partial G}{\partial P_k}$$

使（50-51）式的變換具有不等於零的 Jacobian

$$\frac{\partial(P_1\cdots P_n)}{\partial(P_1'\cdots P_n')}\neq 0 \tag{Ⅵ-52}$$

（當然，這種變換是有無限數的）。則（46）式的 S_0 及（50-51）式中的 S_0''，兩個變換，應與一個變換 S_0' 等效，因如第四章第 6 節中所證，正則變換具有群性之故。茲令

$$S_0'=S_0'(q_1,\cdots q_n,\ P_1,\cdots P_n) \tag{Ⅵ-53}$$

及

$$p_k=\frac{\partial S_0'}{\partial q_k},\quad Q_k=\frac{\partial S_0'}{\partial P_k} \tag{Ⅵ-54}$$

（54）的變換的 Jacobian 即係

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial S_0'}{\partial q_1},\cdots\frac{\partial S_0'}{\partial q_k}\right)}{\partial(P_1,\cdots,P_n)}=\frac{\partial\left(\frac{\partial S_0}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S_0}{\partial q_k}\right)}{\partial(P_1',\cdots,P_n')}\ \frac{\partial(P_1',\cdots,P_n')}{\partial(P_1,\cdots P_n)}$$

因（44）式由假設知其滿足（24）式，故右方之第一因子不等於零。而第二因子係我們特使之不等於零的（見（52））。故上式左方的 Jacobian 亦不等於零。上式以符式代表之，則可寫作 $S_0'=S_0S_0''$。

習題

1. 試證下列方程式（Ⅵ-12）

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k},\qquad \beta_k=-\frac{\partial S}{\partial \alpha_k},\qquad k=1,\cdots,n$$

〔此處 $S=S(q_1,\cdots q_n,\ \alpha_1,\cdots\alpha_n,\ t)+\alpha_{n+1}$ 係 H-J 方程式（Ⅵ-9）之完全積分〕包含正則方程式

$$\dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k},\qquad \dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k},\quad k=1,\cdots,n$$

所有的解。

2. 如一系統的 Hamiltonian 函數有如下之形式

$$H=\frac{\sum_k^n H_k(p_k,q_k)}{\sum_k^n A_k(p_k,q_k)}$$

試證 H-J 方程式

$$H\left(q,\cdots,q,\frac{\partial S}{\partial q_1},\cdots,\frac{\partial S}{\partial q_n}\right)=h$$

可用變數分離法解出，即上式可變成一聯立常微分方程式

$$H_k\left(q_k,\frac{dS_k}{dq_k}\right)-hA_k\left(q_k,\frac{dS_k}{dq_k}\right)=a_k$$

此處　　　$S=\sum_{k=1}^n S_k(q_k,a_k,h)$

及　　　$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$

（參閱 P. Appell: Trait'e de M'ecanique rationnelle, 第二册，（1953 年版）第 437-440 頁。）

3. 如一系統的動能與位能爲

$$T=\frac{1}{2}\left(\sum_k A_k(q_k)\right)\left(\sum_k B_k(q_k)\dot{q}_k^2\right)$$

$$V=\frac{\sum_k V_k(q_k)}{\sum_k A_k(q_k)}$$

試證其 *H-J* 方程式可簡變爲下列系

$$\left(\frac{dS_k}{dq_k}\right)^2=2B_k(hA_k-V_k+a_k),\ \ k=1,2,\cdots,n$$

及 $\sum_k a_k=0$

4. 一些質點在重力作用下，從一垂直線上的各點（高度 z），在同一垂直面內被水平拋射（x-方向）。每質點的初速 v_0 及高 z，均滿足相同的總能量 $\frac{1}{2}mv_0^2+mgz=h$。試尋這些拋物線並證明沿著此等拋物線的作用，爲（設質點具有單位質量）

$$S_0=\sqrt{\frac{2g}{3}}\left\{\left(\frac{h}{g}-z+x\right)^{3/2}-\left(\frac{h}{g}-z-x\right)^{3/2}\right\}$$

用 *H-J* 方程式，證明各拋物線的包絡線，係一與垂直線成 45° 角的直線。本問題在幾何上，與水從貯水器的垂直邊上的洞流出的情況相同。

試證作用 $S_0=$ 常數的曲線，與各拋物線作正交，且有會切點（cusps)。

5. 一些質點以相同之能量，從 $(x=0, z=0)$ 點向各方射出。試證所有拋物線的包絡線，本身亦爲一拋物線。〔此即（0，0）點的動焦點（*kinetic foci*）的軌跡〕。試用 *H-J* 方程式求出作用S_0＝常數，的曲線。（參閱本册第190頁）

第七章

角與作用量變數，緩漸不變性

在本章中我們將見到 Hamilton 力學的應用，此種應用，係在舊量子論中很爲重要的某些週期性或有條件週期性系統的問題。事實上，古典力學的理論，對 Bohr-Sommerfeld-Wilson 等人的「量子化條件」假設，提供了一個很重要的基礎，此種應用，大部份係在 1914-16 年間，由 Sommerfeld, Epstein 及 Schwarz-schild 等人所完成者。

1　單一週期系統、角與作用量變數

茲考慮一個一維系統，其 H-J 方程式

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right)=h$$

係代表一從 p, q 到 P, Q 的變換，且滿足

$$P=\text{常數},\quad Q=t+\delta$$

此組 P, Q 並非是唯一的一組，因假如我們以下列變換將 P, Q 變換成 P', Q'：

$$S'(P, Q')=f(P)Q'$$

此處 $f(P)$ 係 P 的任意函數，則我們可得：

$$-Q=\frac{\partial S'}{\partial P}=Q'\frac{df}{dP},\quad -P'=\frac{\partial S'}{\partial Q'}=f(P)=\text{常數}$$

$$\text{或}\ -Q'=\frac{1}{\left(\frac{df}{dP}\right)}Q=Q\times\text{常數}$$

此處可看出 Q' 仍是 t 的線性函數而 P' 則仍爲常數。

但對於一有週期性的系統，我們可得一組確定的 P, Q。下文我們將研究兩種不同的週期運動。

1）秤動

如 q, p 係 t 的週期函數，則因 Q 與 t 成線性關係，故 q, p 亦爲變數 Q 的週期函數，也就是說如有一量 $\bar{w}$ 使

$$q(Q+\bar{w})=q(Q) \tag{Ⅶ-1}$$

則該系統即稱爲一種「秤動」(libration)。

假設選擇 Q，並稱之爲 w，使其每經一週期即增加一單位，或由 (1)，

$$q(w+1)=q(w) \tag{Ⅶ-2}$$

$$q\left(\frac{Q}{\bar{w}}+1\right)=q\left(\frac{Q}{\bar{w}}\right)$$

則所選的 w 值即爲

$$w=\frac{Q}{\bar{w}} \tag{Ⅶ-3}$$

此變數 w 稱爲角變數。

2）轉動

如當 Q 增加 $\bar{w}$ 所需的時間間隔內，q 增加爲 2π，

$$q(Q+\tilde{w})=q(Q)+2\pi \qquad (\text{Ⅶ}-4)$$

則此一系統的運動稱爲轉動。

設選擇 Q（並以 w 表之），使在每經一週期時，Q 的值 w 增加一單位，即

$$q(w+1)=q(w)+2\pi \qquad (\text{Ⅶ}-5)$$

則此 w 稱爲角變數。從（2）及（5）可知 w 係一無因次之量，它的意義有點接近轉動中的「角度」。

使 $S(q,h)$ 爲 H-J 方程式之解，且以另一常數 J 的函數，代替此 h，

$$S(q,h)=S^*(q,J)$$

茲令 $S^*(q,J)$ 代表從 p,q 到 J,w 的一個正則變換；此處之 w 具有上述角變數的性質，

$$p=\frac{\partial S^*}{\partial q},\quad w=\frac{\partial S^*}{\partial J} \qquad (\text{Ⅶ}-6)$$

因 $h=h(J)$，故新的 Hamilton 函數，將僅是 J 的函數，即

$$H=H(J) \qquad (\text{Ⅶ}-7)$$

由（7），則可得

$$\dot{w}=\frac{\partial H}{\partial J},\quad \dot{J}=-\frac{\partial H}{\partial w}=0 \qquad (\text{Ⅶ}-8)$$

故

$$J=\text{常數},\qquad w=\gamma t+\delta \qquad (\text{Ⅶ}-9)$$

由上述，似是如欲用（6）來作變換，我們必需先解 H-J 方程式 $H(q,p)=h$。即使如此，（6）式仍不足以決定具有（2）及（5）等性質的 w。但在運動中 w 的增量爲

$$dw=\frac{\partial}{\partial q}w\,dq=\frac{\partial}{\partial q}\frac{\partial S^*}{\partial J}dq=\frac{\partial^2 S^*}{\partial J\partial q}dq \qquad (\text{Ⅶ}-10)$$

每經一週期，w 卽增加一單位，故

$$\oint dw = \frac{\partial}{\partial J}\oint \frac{\partial S^*}{\partial q}\,dq = 1 \qquad (\text{Ⅶ}-11)$$

如我們選擇 J，使每經一週期時，S^* 的增量爲 J，則上式之要求卽可滿足，卽

$$J = \oint \frac{\partial S^*}{\partial q}\,dq = \oint dS^* \qquad (\text{Ⅶ}-12)$$

然由（6）式，我們可將（12）式寫成

$$J = \oint p\,dq \qquad (\text{Ⅶ}-13)$$

但在（Ⅳ-36），我們已經證明過 $\oint p\,dq$ 係正則變換的「相對的積分不變量」。因此（12）所定義的 J 顯然與座標 q（及其共軛量 p 的選擇）無關。

從（13）可知變數 J 與作用量（參閱本册乙部（Ⅱ-10）式）具有相同之因次，因此 J 通常被稱爲作用量變數。

如不用（13）而選

$$J = \oint p\,dq + C \qquad (\text{Ⅶ}-14)$$

（C＝任意常數），（11）之要求，亦同樣的可滿足。爲了避免這種不確定性，我們可令 J 等於 S^* 的模量（modulus），卽

$$J = S^*(w+1) - S^*(w) \qquad (\text{Ⅶ}-15)$$

或

$$S(q, w+1) - S(q, w) = 0 \qquad (\text{Ⅶ}-16)$$

此處

$$S(q, w) = S^*(q, J) - wJ \qquad (\text{Ⅶ}-17)$$

如是則變換方程式（6）即變成（參閱Ⅳ-6）

$$p=\frac{\partial S}{\partial q}, \quad J=-\frac{\partial S}{\partial w} \tag{Ⅶ-18}$$

因此在單一週期的系統，w, J 的選擇是唯一的。

一個動力系統的頻率 ν 的定義係

$$q\left(t+\frac{1}{\nu}\right)=q(t)$$

或

$$q(\nu t+1)=q(\nu t)$$

以此與（2）或（5）比較，可得

$$w=\nu t$$

如與（4）及（8）比較，則可得

$$\nu=\frac{\partial H}{\partial J} \tag{Ⅶ-19}$$

茲以簡諧振子作一個簡單例子。此系統之 Hamilton 函數可寫成

$$H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}kq^2 \tag{Ⅶ-20}$$

設 E 爲總能量之值（＝常數），則

$$p=\sqrt{2mE\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)}, \qquad a^2=\frac{2E}{k}$$

如該振子的頻率爲 ν_0，則

$$m(2\pi\nu_0)^2=k \tag{Ⅶ-21}$$

（13）式的作用量變數 J 即爲

$$J=\oint\sqrt{2mE\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)}\,dq=\sqrt{2mE}\,\pi a=\frac{E}{\nu_0} \tag{Ⅶ-22}$$

(19) 式中所定義的頻率 ν，則與 ν_0 相等

$$\nu=\frac{\partial H}{\partial J}=\frac{\partial E}{\partial J}=\nu_0 \qquad (\text{Ⅷ}-23)$$

(6) 式中的角變 w，則可由 (10) 式得出

$$w=\frac{\partial S}{\partial J}=\frac{\partial}{\partial J}\int\frac{\partial S}{\partial q}dq=\frac{\partial}{\partial J}\int p dq$$

$$=\int\frac{\partial}{\partial J}\sqrt{2mE\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)}dq=\int\frac{\partial}{\partial J}\sqrt{2m\nu J-(2\pi\nu mq)^2}dq$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ q\ \sin^{-1}\sqrt{\frac{2\pi^2 m\nu}{J}}$$

故

$$q=\sqrt{\frac{J}{2\pi^2\nu m}}\sin 2\pi w=\sqrt{\frac{J}{2\pi^2\nu m}}\sin(\nu t+\delta) \qquad (\text{Ⅷ}-24)$$

$$p=\sqrt{2\pi\nu J\left(1-\frac{q^2}{a^2}\right)}=\sqrt{2m\nu J}\cos 2\pi(\nu t+\delta)$$

茲更以一電荷爲 e 的質點在電磁場中的運動爲例，申述作用量變數的應用。

設電磁場之純量勢爲 ϕ，矢量勢爲 A。按本册甲部之 (Ⅺ-24) 式，上述電荷 e 之 Lagrangian 函數爲

$$L=T-e\phi+\frac{e}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}) \qquad (\text{Ⅷ}-25)$$

因磁場對電荷不作功，故能之守恒關係爲

$$\mathrm{T}+e\phi=E=\text{常數}$$

由上章 (Ⅶ-20)，(Ⅶ-21) 式，即得主函數 S 及特性函數 S_0

$$S=\int\left[2T+\frac{e}{c}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})\right]dt-Et \qquad (\text{Ⅷ}-26)$$

$$\equiv S_0 - Et$$

茲以下式表 $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v})$

$$(A\cdot v)=\sum_{k=1}^{3} A_k \dot{q}_k \tag{Ⅶ-27}$$

並使

$$p_k \equiv \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \tag{Ⅶ-28}$$

則

$$S_0=\int \sum\left(p_k+\frac{e}{c}A_k\right)dq_k \tag{Ⅶ-29}$$

茲定義 q_k 之共軛動量 P_k

$$P_k=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}=p_k+\frac{e}{c}A_k, \tag{Ⅶ-30}$$

則

$$S_0=\int \sum P_k\, dq_K \tag{Ⅶ-31}$$

按（Ⅶ-15）式，作用量變數 J_k 乃 S_0 之週期之模量，即

$$J_k=\oint P_k\, dq_k$$
$$=\oint\left(p_k+\frac{e}{c}A_k\right)dq_k \tag{Ⅶ-32}$$

上述結果，可應用於 Zeeman 效應問題（參閱本書第一册量子論甲部第六章第2節）。

設磁場H乃一沿Z軸之均勻場。$\boldsymbol{A}$矢量勢可以下式表之

$$A_x=-\frac{1}{2}yH,\quad A_y=\frac{1}{2}xH,\quad A_z=o \tag{Ⅶ-33}$$

如電荷 e 之球形極座標爲 r，θ，ϕ，則

$$A_r = A_\theta = o, \qquad A_\phi = \frac{1}{2} Hr \sin \theta \tag{Ⅶ-33a}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} H(x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2} Hr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi} \tag{Ⅶ-34}$$

由（25）及（34），可得ϕ之共軛動量

$$P_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = p_\phi + \frac{e}{c} A_\phi = \mu r^2 \sin^2 \theta \left(\dot{\phi} - \frac{eH}{2\mu c}\right) \tag{Ⅶ-35}$$

（此式中，$-e$ 乃電子的電荷）。

如ϕ代表電子在一以角速度 $\omega = -\frac{eH}{2\mu c}$ 繞Z軸旋進之座標系中之角座標，卽

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} + \omega, \tag{Ⅶ-36}$$

由（35）式，可得

$$P_\phi = p_\phi \tag{Ⅶ-37}$$

作用量變數（32）乃成

$$J_\phi = \oint p_\phi \, d\phi \tag{Ⅶ-38}$$

此處注意的，乃 p_ϕ 係對以 ω 旋進的座標系之角動量。(參閱本册甲部第五章第3節 Larmor 定理)。

2 緩漸不變性原理 (Ehrenfest, 1916年)

作用量變數 J 爲一相對積分不變量，故在正則變換中不變。我們更可證明如動力系統統中的一些參數（如外力場）變化率很慢時，J 亦有不變性。這種「緩漸不變性原理」與 Bohr-Sommerfeld-Wilson 理論中的量子化條件，有很重要的關係。（參閱本書第二册量子論甲部第八章）

茲考慮一長 l 的單擺，在懸掛點將繩抽起，連續及極慢地將 l 縮短。在此縮短過程中，對重力及離心力所作的功爲

$$dW=-(mg\overline{\cos\phi}+ml\overline{\dot{\phi}^2})dl$$

此處 $\cos\phi$ 及 $\dot{\phi}^2$ 上的橫線係表示振動週期中所取的平均值*。如振幅很小時，則 $\cos\phi=1-\frac{1}{2}\phi^2$ 因此

$$dW=-mgdl+m\left(\frac{g}{2}\overline{\phi^2}-l\overline{\dot{\phi}^2}\right)dl$$

$$=-mgdl+dE$$

此處 $-mgdl$ 係把單擺從平衡位置舉起 dl 高所作的功。dE 則代表分給振動的能量。一個簡諧振動的平均動能等於平均位能，故

$$\frac{m}{2}l^2\overline{\dot{\phi}^2}=\frac{m}{2}gl\overline{\phi^2}=\frac{1}{2}E$$

故

$$dE=\frac{1}{l}\left(\frac{1}{2}E-E\right)dl=-\frac{E}{2l}dl$$

因

$$\nu=2\pi\sqrt{\frac{g}{l}},\text{ 及 }\frac{d\nu}{\nu}=-\frac{dl}{2l}$$

故

$$\frac{dE}{E}=\frac{d\nu}{\nu} \qquad (\text{Ⅶ}-39)$$

---

*在本世紀初，物理學家每數年舉行一次會議（Solvay Congress），1911年會中此單擺問題即係在那時被 Lorentz 提出來，愛因斯坦當場即得到了正確的答案〔(39) 式〕。此處的「緩漸不變性原理」係由 P. Ehrenfest 及 Burgers 二人推展出來的。

亦卽

$$\frac{E}{\nu}=\text{常數}$$

由（22）式，$\frac{E}{\nu}$ 卽是作用量變數 J。因此對於簡諧振動，J 係一個緩漸不變量，而小振幅的單擺，在數學上與一簡諧振動相同。

對於非簡諧振動，則 $\frac{E}{\nu}$ 就不再是緩漸不變量，然作用量變數 J 則仍是緩漸不變量。（此係 1917 年由 Burgers 證明）。爲了證明此點，外來作用對一個系統的影響，在 Hamilton 函數中，我們用一與時間有關的參數 $a(t)$ 來表示之，卽 $H=H\ (p,\ q,\ a\ (t))$，並假定當 $a(t)=$常數時，該系統的運動是週期性的。

今在一固定時間 t，作一正則變換，把 p, q 變換成 J, w。此意卽謂在一固定値 $a(t)$，以 $S(q, w, a)$ 作一正則變換

$$p=\frac{\partial S}{\partial q},\quad J=-\frac{\partial S}{\partial w},\quad \bar{H}=H+\frac{\partial S}{\partial t} \tag{Ⅶ-40}$$

（參閱（Ⅳ-6）式）。按（17）式，爲保證 J 的唯一性，S 務必爲 w 的週期函數，且其週期爲 1。因此正則方程式變成：

$$\dot{w}=\frac{\partial H}{\partial J}+\frac{\partial}{\partial J}\frac{\partial S}{\partial t},\quad \dot{J}=-\frac{\partial H}{\partial w}-\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial S}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial S}{\partial t} \tag{Ⅶ-41}$$

因 $\bar{H}$ 視爲 w, J 的函數，　係與 w 無關的。$S\ (q, w, a(t))$ 則因 $a(t)$ 之故而成 t 的函數，故

$$\dot{J}=-\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial S}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial t}=-\dot{a}\left(\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial S}{\partial a}\right)_{q,\,w}\right)_{J,\,a} \tag{Ⅶ-42}$$

此處附號 J, a 代表在微分中保持固定的變數。今外來微擾的變化，務須爲與週期運動無關的極緩漸的變化。故 a 可認爲係一常

數，因此

$$J\Big|_{t_1}^{t_2}=-\dot{a}\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial S}{\partial a}\,dt \qquad (\text{VII}-43)$$

因 S 係 w 的週期函數，且週期為 1，故 $\dfrac{\partial S}{\partial a}$ 亦然，故 $\dfrac{\partial S}{\partial a}$ 即可以 w 的富氏級數來表示，即

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{\tau}B_{\tau}(J,a)e^{2\pi i\tau w}$$

及

$$\frac{\partial}{\partial w}\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{\tau}{}'A_{\tau}(J,a)e^{2\pi i\tau w} \qquad (\text{VII}-44)$$

在和數符號 $\sum$ 上的撇號，乃指在此和數中無常數項之意。

欲求（43）式的積分，可假設

$$w=\nu t+\delta \qquad (\text{VII}-45)$$

此處之 ν，不若未受擾動的系統（$a=0$）之為一常數，而應隨（41）式依 t 而變化的。茲把 t_2-t_1 分成每隔等於 $T=\dfrac{1}{\nu_0}$ 之間隔（當然可能有一些餘數），且將 $A_{\tau}(J,a),\nu(t),\delta(t)$ 對每一間隔之起點展開，成一 $a(t)$ 之變化之級數，則當 $t<T$ 時，由（44）式即得

$$\sum_{\tau}{}'A^0_{\tau}e^{2\pi i\tau(\nu_0 t+\delta_0)}$$

$$+\dot{a}t\sum{}'\left\{\frac{dA_{\tau}}{da}+2\pi iA_{\tau}{}^0\tau\left[\left(\frac{\partial\nu}{\partial a}\right)_0 t+\left(\frac{dS}{da}\right)_0\right]\right\}e^{2\pi i\tau(\nu_0 t+\delta_0)}$$

$$+\cdots\cdots$$

以此代入（43）式，則在間隔 $t=0$ 到 $t=T$ 之積分，即可得到包括 $\dot{a}T$ 及 $\dot{a}T^2\cdots$之項。對所有間隔積分後，即可得到

$$J\Big|_{t_1}^{t_2}=J(t_2)-J(t_1)=\dot{a}[O(\dot{a}(t_2-t_1))\ \text{等項}$$
$$+O(\dot{a}(t_2-t_1)T)\ \text{等項}+\cdots\cdots]$$

如 T 保持有限值（即 $\nu_0 \neq 0$），又假如 $\lim\limits_{\dot{a}\to 0}\dot{a}(t_2-t_1)$爲有限值時，即可得

$$\lim_{\dot{a}\to 0}[J(t_2)-J(t_1)]=0 \tag{Ⅶ-46}$$

此意即謂 J 乃係一不變量（注意：此結果係由（44）式不包含 w（即無常數項）而來）。

3　可分離的多重週期系統

一個有 n 自由度的系統，欲定其角與作用量變數，則係遠較上節爲複雜的問題。但在一很特殊的系統，其 Hamilton 函數可寫成下式者：

$$H(q_1,\cdots q_n,\ p_1\cdots p_n)=\sum_k H_k(q_k,p_k) \tag{Ⅶ-47}$$

則其 H-J 方程式，可由變數分離法解之，

$$S^*(q_1,\cdots q_n)=\sum S_k^*(q_k) \tag{Ⅶ-48}$$

在此情形下，H-J 方程式，簡化爲 n 個常微分方程式

$$H_k\left(q_k,\frac{dS_k^*}{dq_k}\right)=E_k \tag{Ⅶ-49}$$

$$\sum_k E_k=E \tag{Ⅶ-50}$$

E 爲該系統的總能量。故該系統已簡化爲 n 個獨立系統。如第 1 節中的討論，其角與作用量變數爲

$$J_k=\oint p_k dq_k,\quad w_k=\frac{\partial S_k^*}{\partial J_k} \tag{Ⅶ-51}$$

另一情況，係H不能化成（47）之形式，但仍可假設H-J方程式可用分離變數法（48）來解。（見本章末第二題）故

$$p_k=\frac{\partial S^*}{\partial q_k}=\frac{dS_k^*}{dq_k} \tag{Ⅶ-52}$$

J_k 由下列定義得之

$$J_k=\oint p_k dq_k \tag{Ⅶ-53}$$

這 n 個方程式將積分常數 $h, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ 及常數 $J_1, \cdots J_n$ 等連在一起。h 乃成 J_k 的函數而 S^* 則係 $q_1, \cdots, q_n$ 及 $J_1, \cdots, J_n$ 的函數。角變數 w_k 之定義爲

$$w_k=\frac{\partial S^*}{\partial J_k}=\sum_j \frac{\partial S_j^*}{\partial J_k}(q_j, J_1, \cdots J_n) \tag{Ⅶ-54}$$

今於 q_k 的每一週期內（其他 q 保持不變），w_k 之變化爲

$$\begin{aligned}\Delta_i w_k&=\oint\frac{\partial w_k}{\partial q_i}dq_i=\oint\sum_j\frac{\partial^2 S_j^*}{\partial J_k\partial q_i}dq_i\\&=\frac{\partial}{\partial J_k}\oint\sum_j\frac{\partial S_j^*}{\partial q_i}dq_i=\frac{\partial}{\partial J_k}\oint\frac{\partial S_i^*}{\partial q_i}dq_i=\frac{\partial}{\partial J_k}J_i\\&=\begin{cases}1 & \text{如}\quad i=k\\ 0 & \quad\;\; i\neq k\end{cases}\end{aligned} \tag{Ⅶ-55}$$

因此之故，當 w_k 獨自增加 1 時，q_k 即完成一週期，其他的 q 可能亦與 w_k 有關，但他們在未完成一週期時即已回到起點。否則，如 q_i 亦完成一週期，則 w_i 亦增加 1 了。$q_1, \cdots, q_n$ 等均各别係 $w_1, w_2, \cdots\cdots w_n$ 的週期函數，其週期均爲 1，我們可把 q_k 寫成

$$q_k=\sum C^{(k)}_{\tau_1\cdots\tau_n}e^{2\pi i(\tau_1 w_1+\cdots\tau_n w_n)} \tag{Ⅶ-56}$$

此式亦可寫成

$$q_k=\sum C^{(k)}_{\tau}e^{2\pi i(\vec{\tau}\cdot\vec{w})} \tag{Ⅶ-57}$$

因

$$\dot{w}_k=\frac{\partial H}{\partial J_k}=\text{常數}=\nu_k,\quad \text{或}\quad w_k=\nu_k t+\delta_k \tag{Ⅶ-58}$$

故我們亦可將（57）寫成

$$q_k=\sum_\tau C^{(k)}_\tau e^{2\pi i((\vec{\tau}\cdot\vec{\nu})t+(\vec{\tau}\cdot\vec{\delta}))} \tag{Ⅶ-59}$$

由（58）式可知，在一般情況下，q_k 並非 t 的週期函數。只有在下列情況，卽當有一 ν 存在使得

$$\frac{\nu_1}{\tau_1'}=\frac{\nu_2}{\tau_2'}=\cdots=\frac{\nu_n}{\tau_n'}=\nu \tag{Ⅶ-60}$$

（$\tau_1',\cdots,\tau_n'$ 均爲整數）時，q_k 才可能是週期函數。這（$n-1$）個方程式定義了 $\nu_1,\cdots,\nu_n$ 間的有理化比率。因此這系統通稱爲有條件的週期性系統（此因其僅當滿足（60）式時，才是週期函數）。

就如在（15）式中一樣，（48）式中的 S^*，當 w_k 增加 1 時，它就增加 J_k。我們可用以下 Legendre 變換

$$\begin{aligned}&S(q_1,\cdots q_n,\ w_1,\cdots,w_n)\\&=S^*(q_1,\cdots q_n,\ J_1,\cdots,J_n)-\sum_k w_k J_k\end{aligned} \tag{Ⅶ-61}$$

將 $S^*(q,J)$ 變換爲 $S(q,w)$。此 $S(q,w)$ 卽爲具有基本週期 1 的w的多重週期性函數。在此情況下，變換方程式可寫成

$$p_k=\frac{\partial S}{\partial q_k},\quad J_k=-\frac{\partial S}{\partial w_k} \tag{Ⅶ-62}$$

在量子論中（參閱第二册量子論，（Ⅳ-7）式）Bohr 的量子化條件，被 Sommerfeld 及 Wilson 推廣至 n 維系統爲（本書第二册，量子論甲部（V-2））

$$\oint p_i dq_i = n_i h, \quad i=1, \cdots, n \qquad (\text{Ⅶ-63})$$

因此，$\oint p_i dq_i$ 是否具有確定的意義的問題，就發生了。因爲除非 H-J 方程式可用分離變數法解出，否則正則不變量應爲 $\int \sum_i p_i dq_i$ 而非 $\int p_i dq_i$。（參閱（Ⅳ-32）式）。故問題變爲 H-J 方程式是否永遠可以用變數分離法來解？答案當然是否定的，事實上就像在氦原子等簡單的物理系統中，量子論就會遇到很嚴重的困難，即量子化條件（63）無法寫出來。此是因 H-J 方程式無法分離之故。因此在量子論中，我們必需限於可分離的 H-J 方程式的系統。現在讓我們分別二種不同形式的系統：

1）　非簡併系統（nondegenerate systems）

非簡併系統，係謂一個系統所有的頻率 $\nu_1, \cdots \nu_n$ 間，無下列形式的關係之存在：

$$\tau_1\nu_1 + \tau_2\nu_2 + \cdots + \tau_n\nu_n = 0 \qquad (\text{Ⅶ-64})$$

此處 τ 等均爲整數。然如（64）不存在，則（60）亦不能存在，因此座標 q_k 對 t 而言，即非週期函數，且系統在 q 所組成的 n 維空間中的運動路徑，就不再是封閉曲線而變成爲隨時間變化的在一 n 維體積中進行的曲線。（例如一個二維振動子其頻率 ν_1, ν_2 間，沒有（60）式的關係的，它的運動路徑爲一局限在一長方形中的不封閉的 Lissajous 曲線）。組成該 n 維體積的（$n-1$）維

平面，有其本身的意義，與座標系統無關，其在 q_k 空間的座標軸方向，有絕對的意義的。在此情形下，僅有每一個別變數的標度可以被改變，也只有在這個座標（或這些座標組成的函數 Q_k）的 H-J 方程式，可以被分離。設

$$Q_k=f_k(q_k) \qquad (\text{VI}-65)$$

令變換函數 S^* 爲

$$S^*(q,P)=\sum f_k(q_k)P_k+g(q_1,\cdots,q_n) \qquad (\text{VI}-66)$$

此處 g 爲任意函數，使

$$p_k=\frac{\partial S^*}{\partial q_k}=P_k\frac{df_k}{dq_k}+\frac{\partial g}{\partial q_k}$$

$$Q_k=\frac{\partial S^*}{\partial P_k}=f_k(q_k) \qquad (\text{VI}-67)$$

如是，則作用量變數與座標的選擇無關，蓋

$$\oint p_k dq_k=\oint P_k\frac{df_k}{dq_k}dq_k+\oint\frac{\partial g}{\partial q_k}dq_k=\oint P_k dQ_k \qquad (\text{VI}-68)$$

2) 簡併系統 (degenerate systems)

一系統中如某些頻率 ν_k 相等，即稱爲簡併系統。對這種系統，則有多於一組的座標系，可使 H-J 方程式變成可分離。對每一組的座標，就有一組量子化條件 (63)，在這情況下，Hamilton 函數祇係與相同頻率的 J_k 之和有關，因此能量 H 與使 H 可分離的座標的選擇無關。

茲以氫原子（或一個電荷按 Coulomb 定律繞一中心力場的運動）爲例，申述 $H-J$ 方程式和簡併系統的情形。

設原子核之電荷爲 Ze，電子之電荷爲 $-e$，質量爲 μ，電子

之球形座標爲 r, θ, ϕ。該系統之總能量爲

$$E=T+V=\frac{\mu}{2}(\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2+r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}^2)-\frac{Ze^2}{r}$$

如引入動量

$$p_r=\mu\dot{r},\quad p_\theta=\mu r^2\dot{\theta},\quad p_\phi=\mu r^2\sin^2\theta\,\dot{\phi}$$

則 Hamiltonian 函數爲

$$H=\frac{1}{2\mu}\left[p_r^2+\frac{1}{r^2}p_\theta^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\phi^2\right]-\frac{Ze^2}{r} \tag{Ⅶ-64}$$

ϕ 係一循環座標，故繞 Z 軸之角動量 p_ϕ 乃一常數。$H-J$ 方程式（Ⅶ-19）乃

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \theta}\right)^2+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\phi^2\right]-\frac{Ze^2}{r}=E$$

（Ⅶ-65）

此式可以變數分離法解之。使

$$S_0(r,\theta)=S_r(r)+S_\theta(\theta) \tag{Ⅶ-66}$$

則（65）式成二微分方程式

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}=C^2$$

$$\left(\frac{dS_r}{dr}\right)^2+\frac{C^2}{r^2}=2\mu\left(E+\frac{Ze^2}{r}\right) \tag{Ⅶ-67}$$

常數 C^2 之意義，可見爲總角動量之平方如下。設 r,ϕ 爲在運動平面之極座標，故電子之動能爲

$$T=\dot{r}p_r+\dot{\theta}p_\theta+\dot{\phi}p_\phi$$
$$=\dot{r}p_r+\dot{\phi}p_\phi \tag{Ⅶ-68}$$

[illegible] J 方程式乃成

$$\frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{\partial S_0}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S_0}{\partial \phi}\right)^2\right]-\frac{Ze^2}{r}=E \qquad (\text{VII}-69)$$

ϕ 係一循環座標，故

$$p_\phi=\frac{\partial S_0}{\partial \phi}=\text{角運動量}=\text{常數} \qquad (\text{VII}-70)$$

由（69）與（69），可得

$$\left(\frac{dS_\theta}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{\sin^2\theta}\,p_\psi^2=C^2=\left(\frac{\partial S_0}{\partial \phi}\right)^2=p_\phi^2$$

由（68），卽得

$$p_\phi\,d\phi=p_\theta\,d\theta+p_\psi\,d\psi$$

故

$$J_\phi=J_\theta+J_\psi \qquad (\text{VII}-71)$$

及

$$C^2=p_\phi^2=\frac{1}{4\pi^2}\;J_\phi^2=\frac{1}{4\pi^2}(J_\theta+J_\psi)^2$$

由（69），卽得

$$J_r=\oint\left[2\mu E+\frac{2\mu Ze^2}{r}-\frac{(J_\theta+J_\psi)^2}{4\pi^2r^2}\right]^{1/2}dr \qquad (\text{VII}-72)$$

此處之積分，乃係由最小值 r_{min} 至最大值 r_{max} 再回至 r_{min}，r_{min} 及 r_{max} 乃平方根號式之兩個根也。由（72）式之積分，卽得

$$J_r=-(J_\theta+J_r)+\pi Ze^2\sqrt{\frac{2\mu}{-E}} \qquad (\text{VII}-73)$$

或

$$E=-\frac{2\pi^2\mu Z^2e^4}{(J_r+J_\theta+J_\phi)^2} \qquad (\text{VII}-74)$$

此系統之頻率皆相同

$$\nu_r=\frac{\partial E}{\partial J_r}=\nu_\theta=\frac{\partial E}{\partial J_\theta}=\nu_\phi=\frac{\partial E}{\partial J_\phi} \tag{Ⅶ-75}$$

故此系統乃簡併系統。如玆引入（63）式之量子化條件，

$$J_r=n_r h,\quad J_\theta=n_\theta h,\quad J_\phi=n_\phi h, \tag{Ⅶ-76}$$

並定義一整數 n

$$n=n_r+n_\theta+n_\phi, \tag{Ⅶ-77}$$

則（74）式成

$$E=-\frac{2\pi^2\mu Z^2 e^4}{h^2 n^2} \tag{Ⅶ-78}$$

此即 Bohr 公式也。

$H-J$ 方程式可用變數分離法解的另一例子，爲一個三維各向同性的簡諧振子。其 $H-J$ 方程式在直角座標中或球形極座標中，皆有可分離性，其三個頻率皆相同。此問題將留給讀者作爲習題。

就一般的 Hamilton-Jacobi 方程式的問題言，是否可用某些座標來分離 H-J 方程式，可以答解如下：按 Levi-Civita 在 1904 作的研究，如 Hamiltonian 函數爲 $H(q_1,\cdots,q_n,\ p_1,\cdots,p_n)$，則 H-J 方程式可用

$$S=\sum_k S_k(q_k,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$$

之形式分解成 n 個常微分方程式

$$H_k\left(\frac{dS_k}{dq_k},\ q_k\right)=A_k,\quad k=1,\cdots,n,\quad A_k \text{ 爲常數}$$

之條件爲下列 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 個偏微分方程式：

$$\begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial H}{\partial q_j} & \dfrac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dfrac{\partial H}{\partial q_k} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_k} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_k} \\ \dfrac{\partial H}{\partial p_k} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_k} & \dfrac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} j, k = 1, 2, \cdots, n \\ j \neq k \end{cases} \quad (\text{VII}-79)$$

第八章

力學與光學

從基本觀念言，力學和光學——尤其是物理光學所討論的波動光學——顯似彼此格格不入。但早在 1831 年，Hamilton 卽注意到光學的 Fermat 原則和力學的最小作用原則的相似點，而獲得質點運動軌跡與幾何光學的光線之關係。但此後約隔了一百年，至 1923-4 年，法人 Louis de Broglie 始有新的大進展。de Broglie 以相對論爲基礎的考慮，創議物質質點具有波的性質。1926 年奧人 Erwin Schrödinger 卽以此爲出發點，更由幾何光學與力學的相似關係，進而求波動與力學的關係，乃創立波動力學，奠定量子力學的基礎。凡此發展，均將於本書另一册詳述之。本章將略述古典力學與光學的關係。

1　波及線光學（或物理及幾何光學）

在介質中的電磁波的方程式爲

$$\left(\nabla^2-\epsilon\mu\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)U(r,t)=0 \qquad (\text{Ⅷ}-1)$$

電場或磁場 U 爲座標 x,y,z 及時間 t 之函數，ϵ 及 μ 爲座標x,

y, z之函數。(見本書第三册電磁學第Ⅳ章)。茲引用波速(相速)v, 波矢量(傳播矢量)k, 波長λ及波頻率ω

$$v^2=\frac{1}{\mu\epsilon},\quad k^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{\omega}{v}\right)^2, \tag{Ⅷ-2}$$

並使

$$U(r,t)=u(r)e^{-i\omega t} \tag{Ⅷ-3}$$

則由(1)式, 可得 $u(r)$ 之方程式

$$(\nabla^2+k^2)u(r)=0 \tag{Ⅷ-4}$$

設 $S(r)$ 爲波的相, 並使

$$u(r)=A(r)e^{ik_0S(r)} \tag{Ⅷ-5}$$

$$k_0=\frac{2\pi}{\lambda_0}=\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0} \tag{Ⅷ-6}$$

以(5)代入(4)式, 即得

$$-k_0^2\left\{(\nabla S)^2-\left(\frac{k}{k_0}\right)^2\right\}u(r)+2ik_0\left\{\frac{1}{2}\nabla^2S+(\nabla lnA)\cdot(\nabla S)\right\}u(r)$$
$$+\{(\nabla lnA)^2+\nabla^2lnA\}u(r)=0 \tag{Ⅷ-7}$$

$S(r)$ 亦稱 Eikonal (1895 年由 H. Bruns 引入)。如使波長 λ_0 趨近零, 亦即使 $k_0\to\infty$, 則(7)式的實數及虛數部份, 符合下二方程式

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2-n^2(r)=0 \tag{Ⅷ-8}$$

$$(\nabla lnA)\cdot(\nabla S)+\frac{1}{2}\nabla^2S=0 \tag{Ⅷ-9}$$

$$n(r)=\frac{k}{k_0}=\sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}=\text{折射率} \tag{Ⅷ-10}$$

(8)式稱爲 Eikonal 方程式。此方程式有 Hamilton-Jacobi 方

程式的形式（見乙部第六章）。

（8）式之解

$$S(x,y,z)=S_1=\text{常數} \tag{Ⅷ-11}$$

代表一個等相值的面，亦即所謂波面（Wave front）。面 $S=S_1$ 上任何一矢量 $d\boldsymbol{s}(dx,dy,dz)$，皆符合下方程式

$$\nabla S\cdot d\boldsymbol{s}=\frac{\partial S}{\partial x}dx+\frac{\partial S}{\partial y}dy+\frac{\partial S}{\partial z}dz=0 \tag{Ⅷ-12}$$

此方程式謂 S 之梯度 ∇S，與 $S=S_1$ 垂直；$S=S_1$ 爲波面，∇S 則光線（ray）也。

如介質係均勻的，即 $n(r)=$常數，則波的性質甚簡單。如波面爲平行的平面，則線乃與波面垂直的直線，即

$$S=n(\alpha,\beta,\gamma) \tag{Ⅷ-13}$$

α,β,γ 爲 $S=S_1$ 面的法線的方向餘弦。

如 $n=$常數，(8) 式的具有一奇異點（singular point）的最簡單的解，乃

$$\begin{aligned} &S=nr,\quad \nabla S=\frac{n}{r}\,\boldsymbol{r}\\ &A(r)=\frac{a}{r},\quad a=\text{常數}\end{aligned} \tag{Ⅷ-14}$$

第（5）式之 $u(r)$，乃一球狀波

$$u(r)=\frac{a}{r}\,e^{ikr} \tag{Ⅷ-15}$$

如 $n=n(r)$，即介質係不均勻的，則光線係曲的。

上述的理論，由(1)—(4)式之波動光學，當波長極短時，成爲(8)、(9)式之線(或幾何)光學。

2　幾何光學：反射及折射定律

玆可由變分法得光之反射及折射定律的數學形式。在第一章第 4 節中，已獲得使下積分

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\left\{F(u,v,y,z,x)+(y'-u)\frac{\partial F}{\partial u}\right.$$

$$\left.+(z'-v)\frac{\partial F}{\partial v}\right\}dx \qquad (\text{VII}-16)$$

與積分徑無關的 $u(y,z,x)$，$v(y,z,x)$ 二函數（見 I -55, 56, 57 式），並知下列二方程式（ I -58）

$$\frac{dy}{dx}=u(y,z,x),\quad \frac{dz}{dx}=v(y,z,x) \qquad (\text{VII}-17)$$

之解，乃下列積分

$$S=\int_{x_1}^{x_2}F(y',z',y,z,x)dx \qquad (\text{VII}-18)$$

的極端線 C（在 C 線上，(16) 式的積分 I，卽化成 (18) 式的 S）。

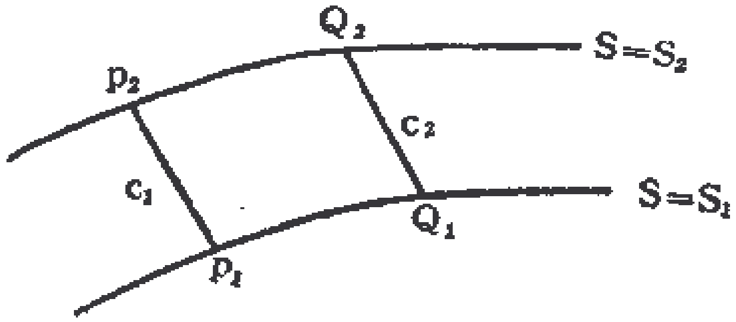
按上結果，得見：由

$$S(x,y,z)=S_1,\ \text{一常數} \qquad (\text{VII}-19)$$

面之任一點 P_1，沿 (17) 式的線 C_1 至

$$S(x,y,z)=S_2,\ \text{一常數} \qquad (\text{VII}-20)$$

的 P_2 點，第 (18) 式積分 S 之值，與 S 積分由 $S=S_1$ 的另一任何點 Q_1，沿經該點的線 C_2 至 $S=S_2$ 的一點 Q_2 之值相

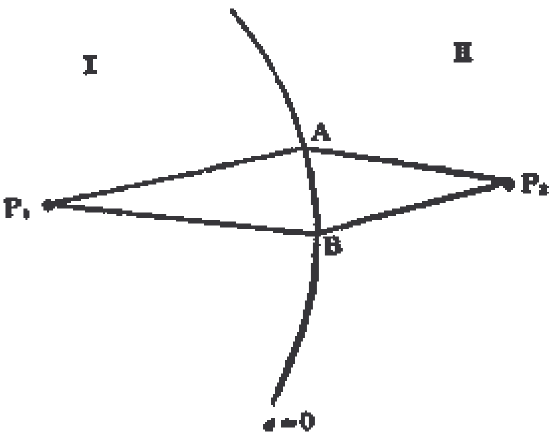


等，如圖，C_1 與 $S=S_1$ 及 $S=S_2$ 面垂直；C_2 與 $S=S_1$ 及 $S=S_2$ 面垂直。

上述情形，顯和幾何光學相似。$S=S_1, S_2\cdots$等面，可視爲波面（即等波相的面），極端線 $C_1, C_2\cdots$與波面成直角交的乃係光的線。按此，我們可求反射及折射的定律。

設在介質中，折射率 $n(r)$ 在一個面上有不連續性。茲使

$$\sigma(x, y, z)=0 \tag{Ⅷ-21}$$



代表（16）積分中$F(u, v, y, z, x)$函數的一個不連續面，並取該面的兩邊的 P_1, P_2 點，如圖。

在 $\sigma=0$ 的兩邊的每一邊，第（16）式積分的極端線的方程式皆係

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial y}=0\\&\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial z}=0\\&u-y'=0\\&v-z'=0\end{aligned} \tag{Ⅷ-22}$$

但由 P_1 穿過 $\sigma=0$ 面而到 P_2 的積分 S，如其值與徑無關，則應符下式

$$\int_{P_1}^{A}(I)+\int_{A}^{P_2}(II)=\int_{P_1}^{B}(I)+\int_{B}^{P_2}(II) \qquad (\text{Ⅷ}-23)$$

$\int_{P_1}^{A}(I)$ 代表第 (16) 式的 S，由 P_1 至 A 之值，餘類推（見上圖）。惟顯然的

$$\int_{P_1}^{A}(I)+\int_{A}^{B}(I)+\int_{B}^{P_1}(I)=0$$

$$\int_{A}^{P_2}(II)+\int_{P_2}^{B}(II)+\int_{B}^{A}(II)=0 \qquad (\text{Ⅷ}-24)$$

$$\int_{C}^{D}+\int_{D}^{C}=0$$

故由 (23) 式，即得

$$\int_{A}^{B}(I)=\int_{A}^{B}(II) \qquad (\text{Ⅷ}-25)$$

此式之意義，係

$$F(u,v,y,z,x)+\left(\frac{dy}{dx}-u\right)\frac{\partial F}{\partial u}+\left(\frac{dz}{dx}-v\right)\frac{\partial F}{\partial v} \qquad (\text{Ⅷ}-26)$$

在 $\sigma=0$ 面上之連續性之條件。如定義 U, V, W 函數如下

$$U\equiv\frac{\partial F}{\partial u},\quad V\equiv\frac{\partial F}{\partial v},\quad W\equiv F-u\frac{\partial F}{\partial u}-v\frac{\partial F}{\partial v} \qquad (\text{Ⅷ}-27)$$

則 (25), (26) 可寫爲

$$\left(U\frac{dy}{dx}+V\frac{dz}{dx}+W\right)_{I}=\left(U\frac{\partial y}{\partial x}+V\frac{\partial z}{\partial x}+W\right)_{II}, \qquad (\text{Ⅷ}-28)$$

此間之 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx}$ 乃係沿 $\sigma=0$ 面內任何的線之值。(28) 式亦可表如下式

$$(U_{II}-U_{I})dy+(V_{II}-V_{I})dz+(W_{II}-W_{I})dx=0 \quad (Ⅷ\text{-}29)$$

此乃示 $(W_{II}-W_{I}, U_{II}-U_{I}, V_{II}-V_{I})$ 矢量與 $\sigma=0$ 面垂直。又按第一章（Ⅰ-49, 51, 55, 57）各式，(28) 式 (29) 式可寫爲

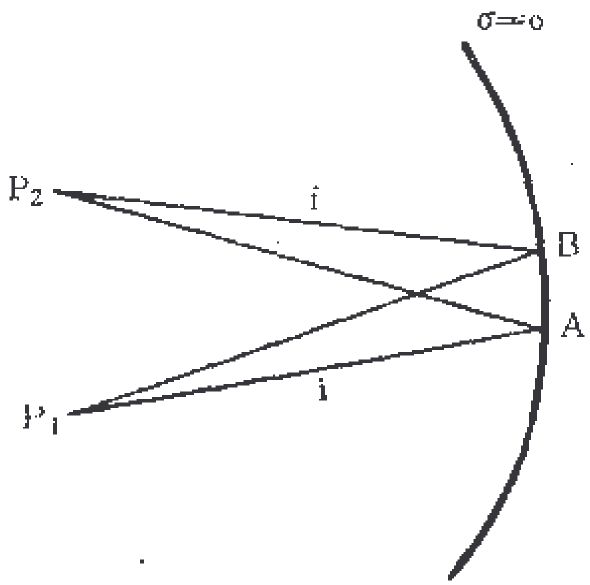
$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{I}dx+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{I}dy+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_{I}dz$$

$$=\left(\frac{\partial S}{x\partial}\right)_{II}dx+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{II}dy+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_{II}dz \quad (Ⅷ\text{-}30)$$

$ds(dx, dy, dz)$ 乃在 $\sigma=0$ 面的。

此方程式示 S 之梯度 ∇S 與 $\sigma=0$ 面內的矢量 ds 之內乘積 $\Delta S\cdot ds$，在 $\sigma=0$ 的兩邊所取之値相等。

上列 (28), (29), (30) 各式，可謂爲折射定律。



欲得反射定律，使上圖之 P_1, P_2 二點，同在 $\sigma=0$ 面的一邊，如左圖。使 (16) 式 S 積分與徑無關係，必有

$$\int_{P_1}^{A}+\int_{A}^{P_2}=\int_{P_1}^{B}+\int_{B}^{P_2} \quad (Ⅷ\text{-}31)$$

以同上段的分析，可將此式寫成下式

$$(U_i+U_f)dy+(V_i+V_f)dz+(W_i+W_f)dx=0$$

$$ds(dx, dy, dz)\text{乃在 } \sigma=0 \text{ 內} \quad (Ⅷ\text{-}32)$$

i, f 乃指投入及反射的徑。此式亦可寫成

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_{i}dx+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_{i}dy+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_{i}dz$$

$$=-\left\{\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_f dx+\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_f dy+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)_f dz\right\} \qquad (\text{VII}-33)$$

此可謂反射定律。

3　力學與光學：Hamilton, de Broglie 與 Schrödinger

在力學發展的早期，有 Maupertuis 之「最小作用原則」(見本册乙部第二章第2節)，按這原則，一個質點的運動，可以下變分原則表示之

$$\delta\int_{r_1}^{r_2} p\cdot dr=0 \qquad (\text{VII}-34)$$

(見乙部第 II-10式)。在非相對論情形下，動量 p 與位能 $V(r)$，總能量 E 之關係爲

$$p=\sqrt{2m(E-V(r))} \qquad (\text{VII}-35)$$

在幾何光學的早期，有 Fermat 原則 (1657 年)，亦稱「最短光徑原則」，或亦稱「最短時間原則」。前者乃指在一折射率爲 $n(r)$ 之介體中，光線由 r_1 點至 r_2 點所循的徑，係 $\int_{r_1}^{r_2} n(r)ds$ 積分之最小值之徑，亦即

$$\delta\int_{r_1}^{r_2} n(r)ds=0 \qquad (\text{VII}-36)$$

因　$n=\frac{c}{v}$，v 爲光在介體之速率，c 爲光在眞空之速率，故 (36) 亦可示爲

$$\delta\int_{r_1}^{r_2} c\,dt=0,\ \left(nds=\frac{c}{v}ds=cdt\right) \qquad (\text{VII}-37)$$

早在 1831 年，Hamilton 卽發現（34）式與（36）式的相似點，卽光線在折射率 $n(r)$ 介質中之徑，與質點在位能場爲 $V(r)$ 的軌跡，有相似的變分原則。

但此種重要的觀察，經約一百年，未更有發展。1923 年法國物理學家 Louis de Broglie 在其博士論文中，根據特殊相對論，提出一完全新穎的創議，謂所有物質質點皆附有一種波，其波長 λ 和質點之動量 p，有下列的關係

$$\lambda=\frac{h}{p},\quad h=\text{Planck 量子常數} \tag{Ⅷ-38}$$

又此波的頻率 ν，和質點之能量 E 的關係乃

$$\nu=\frac{E}{h} \tag{Ⅷ-39}$$

（38）及（39）二式，將古典物理中兩個基本無關的觀念——質點及波動——連合起來，從古典物理觀點，是不可理解的。此二式，形式上和愛恩斯坦的電磁波（波頻爲 ν，波長爲 λ）的量子化方程式

$$E=h\nu,\quad p=\frac{E}{c}=\frac{h}{\lambda} \tag{Ⅷ-40}$$

相同，而涵義廻異的。

de Broglie 的新建議，使 Schrödinger (Erwin Schrödinger，奧國物理學家，1926 年時任教瑞士，年 39 歲）重新注意 Hamilton 所發現的力學與光學的關係，於 1926 年一年中，完成「波動力學」的基礎，此部理論，旋與由 Heisenberg，Born 所建立的矩陣力學及 Dirac 所展開的量子力學，融合而成目前的「量子力學」。

Schrödinger 的出發點，係 de Broglie 的（38）式和 Hamilton 的（34）式和（36）的關係。按（34），(36)式，如*

$$p(r)=\sqrt{2m(E-V(r))}\propto n(r) \qquad (\text{Ⅷ}-41)$$

則質點的軌道，與光線的徑相同。按（38）式，則（41）爲

$$\lambda=\frac{h}{p}=\frac{h}{\sqrt{2m(E-V)}}\propto\frac{h}{n(r)} \qquad (\text{Ⅷ}-42)$$

本章第 1 節中，我們由波動方程式（1）及（4），經波長 $\lambda\to 0$ 的極限，而導出幾何光學的「線」。Schrödinger 乃倒轉上述的程序，先有了質點（動量 p，能量 E）和光線，又按（38）式的假定，索求這 de Broglie 波所遵守的波動定律。這問題 Schrödinger 很簡易的解答如下，

按第（2）式，及(38)，(42）式，卽得

$$k^2=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2=\left(\frac{2\pi p}{h}\right)^2$$

$$=\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V(r)) \qquad (\text{Ⅷ}-43)$$

以此代入第（4）式，波方程式卽

$$\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2\psi(r)+(E-V(r))\psi(r)=0 \qquad (\text{Ⅷ}-44)$$

---

* 在相對論力學，一質點其靜止質量爲 m_0，電荷爲 e，在矢量勢及位勢爲 $A(r)$，$\phi(r)$ 之電磁場中之 Lagrangian 函數係

$$L=m_0c^2(1-\sqrt{1-\beta^2})-e\phi+\frac{e}{c}A\cdot v$$

$$\beta=\frac{v}{c},\quad v=\dot{r}$$

其總動量 P 爲

$$P_x=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}=\frac{m_0 v_x}{\sqrt{1-\beta^2}}+\frac{e}{c}A_x,\qquad y,z\text{分量類此推論}$$

（見本册甲部第 Ⅵ 章第 3 節）。(38）式之 p，以此 P 代之。

又假設

$$\Psi(r,t)=\psi(r)e^{2\pi i\nu t} \qquad (\text{Ⅷ}-45)$$

並用 de Broglie 的假定 (39)，$E=h\nu$，則由 (44) 式卽得

$$-\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial\Psi}{\partial t}=\left\{-\frac{h^2}{8\pi^2 m}\nabla^2+V(r)\right\}\Psi(r,t) \qquad (\text{Ⅷ}-46)$$

(44), (46) 稱爲 Schrödinger 波動方程式。(46)式與古典方程式 (1) 不同。(46)式乃係時間 t 之第一次方程式。此乃由於 (39) 式的 $E=h\nu$ 關係而來的，古典物理沒有 $E=h\nu$ 的關係也。

上述 Schrödinger 創立波動力學的出發點，所得 (44) 及 (46) 波動方程式，雖是正確的，但我們務必注意上述的步驟，萬不可認爲是這些方程式的「導出」或「證明」。量子力學基本上是一部新的結構。他的基本方程式如 (46)，是這結構的基本假定之一。關於這些，將在本書的後一冊詳論之。

索　　引

參考文獻

下列各書係與本部分各章（括符內所註明者）互有關聯，可供參考及更深研究者：

A. G. Webster： Dynamics of Particles and of Rigid, Fluid and Elastic Bodies

（質點，剛體，流體與彈性物體動力學）

（第二、三、四、五、七、八、九、十章）

E. T. Whittaker： A Treatise on the Analyitcal Dynamics of Particles and Rigid Bodies

（質點與剛體解析力學）

（第七、八、十、十一、十二章）

J. H. Jeans： The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism

（電磁數學理論）

（第九章）