清华大学电子工程系

概率论与数理统计

2020 年春季学期

作业 9

王哲凡 2019011200 2020 年 4 月 22 日

9.1. *Solution.*

$$f_\Theta(\theta) = 1, \theta \in (0,1)$$

$$f_X(x|\theta) = \frac{1}{\theta}, x \in (0,\theta), \theta \in (0,1)$$

$$f(x,\theta) = f_X(x|\theta) f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\theta}, x \in (0,\theta), \theta \in (0,1)$$

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_x^1 \frac{\mathrm{d}\theta}{\theta} = -\ln x$$

因此：

$$f_\Theta(\theta|x) = \frac{f(x,\theta)}{f_X(x)} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\theta \ln x} & x \le \theta < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

9.2. *Solution.*

$$f_\Theta(\theta|x) = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(x+1)\Gamma(n-x+1)} \theta^x (1-\theta)^{n-x}, 0 < \theta < 1$$

使得 $f_\Theta(\theta|x)$ 最大，即使得：

$$g(\theta) = x \ln\theta + (n-x)\ln(1-\theta)$$

则：

$$g'(\theta) = \frac{x}{\theta} + \frac{n-x}{\theta - 1} = 0 \Rightarrow \theta^* = \frac{x}{n}$$

此时：

$$g''\left(\frac{x}{n}\right) < 0$$

因此确实 $\theta^* = \dfrac{x}{n}$ 确实为最大值.

当 $n = 20, x = 13$ 时，$\theta^* = \dfrac{13}{20}$，与极大似然思想符合.

9.3. (1). *Solution.*

$$f_M(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\dfrac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}}$$

$$f_X(x_1, \cdots, x_n|\mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$f(x_1, \cdots, x_n, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} e^{-\dfrac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\dfrac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\begin{aligned} & f_X(x_1, \cdots, x_n) \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \cdots, x_n, \mu)\, \mathrm{d}\mu \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^{n+1}\sigma_0\sigma^n} \exp\left(-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

要使得：

$$f_M(\mu|x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{f(x_1, \cdots, x_n, \mu)}{f_X(x_1, \cdots, x_n)}$$

最大，即使得 $f(x_1, \cdots, x_n, \mu)$ 最大，即：

$$g(\mu) = -\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

最大.

$$g'(\mu) = -\frac{\mu-\mu_0}{\sigma_0^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu-x_i}{\sigma^2} = 0$$

$$\Rightarrow \mu^* = \frac{\sigma^2\mu_0 + \sigma_0^2 \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sigma^2 + n\sigma_0^2}$$

而：

$$g''(\mu) = -\frac{1}{\sigma_0^2} - \frac{n}{\sigma^2} < 0$$

因此此时 μ^* 确实为最大值，因此 μ 的最大后验估计为：

$$\mu^* = \frac{\sigma^2\mu_0 + \sigma_0^2 \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sigma^2 + n\sigma_0^2}$$

(2). *Solution.*

$$\begin{aligned}
& E(M|x_1, \cdots, x_n) \\
=& \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \frac{f(x_1, \cdots, x_n, \mu)}{f_X(x_1, \cdots, x_n)} \,\mathrm{d}\mu \\
=& \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\mu\right)^{-1} \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \exp\left(-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\mu \\
=& \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-(A\mu^2 - B\mu + C)\big) \,\mathrm{d}\mu\right)^{-1} \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \mu \exp\big(-(A\mu^2 - B\mu + C)\big) \,\mathrm{d}\mu \\
=& \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\big(-(A\mu^2 - B\mu + C)\big) \,\mathrm{d}\mu\right)^{-1} \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B}{2A} \exp\big(-(A\mu^2 - B\mu + C)\big) \,\mathrm{d}\mu \\
=& \frac{B}{2A} \\
=& \frac{\dfrac{\mu_0}{\sigma_0^2} + \sum\limits_{i-1}^{n} \dfrac{x_i}{\sigma^2}}{\dfrac{1}{\sigma_0^2} + \dfrac{n}{\sigma^2}} \\
=& \frac{\sigma^2\mu_0 + \sigma_0^2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{\sigma^2 + n\sigma_0^2}
\end{aligned}$$

因此 μ 的后验均值估计为：

$$E(M|X_1, \cdots, X_n) = \frac{\sigma^2\mu_0 + \sigma_0^2 \sum\limits_{i=1}^{n} X_i}{\sigma^2 + n\sigma_0^2}$$

9.4. (1). 证明.

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \frac{2}{n^2}\sum_{1\le i<j\le n} X_i X_j$$

设总体为 $x_1, \cdots, x_N$：

$$\begin{aligned}
&E\left(\hat{\sigma}^2\right)\\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}}\left[\frac{n-1}{n^2}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \binom{N-1}{n-1} - \frac{2}{n^2}\sum_{1\le i<j\le N} x_i x_j \binom{N-2}{n-2}\right]\\
&= \frac{n-1}{n}(\sigma^2+\mu^2) - \frac{2(n-1)}{N(N-1)n}\sum_{1\le i<j\le N} x_i x_j\\
&= \frac{n-1}{n}(\sigma^2+\mu^2) - \frac{n-1}{N(N-1)n}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i\left(\sum_{j=1}^{N} x_j\right) - x_i^2\right)\\
&= \frac{n-1}{n}(\sigma^2+\mu^2) - \frac{n-1}{N(N-1)n}(N^2\mu^2 - N(\sigma^2+\mu^2))\\
&= \sigma^2 \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{N}{N-1}
\end{aligned}$$

□

(2). *Solution.* 根据：

$$Var\left(\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$$

可得：

$$E(\hat{\sigma}^2\frac{N-n}{N(n-1)}) = Var\left(\overline{X}\right)$$

因此：

$$\hat{\sigma}^2\frac{N-n}{N(n-1)}$$

为 $Var\left(\overline{X}\right)$ 的一个无偏估计.

9.5. (1). 证明. 设 $g(\lambda) = e^{-2\lambda}$ 的一个无偏估计为 $\hat{\theta}(n) = a_n, n = 0, 1, \cdots$.
则：

$$E(\hat{\theta}(X)) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = g(\lambda) = e^{-2\lambda}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_n}{n!}\lambda^n = e^{-\lambda}$$

左侧收敛，因此根据 Maclaurin 级数即得：

$$a_n = (e^{-\lambda})^{(n)}|_{\lambda=0} = (-1)^n$$

因此：

$$\hat{\theta}(X) = \begin{cases} 1 & X \text{ 为偶数} \\ -1 & X \text{ 为级数} \end{cases}$$

是 $g(\lambda)$ 的唯一无偏估计. □

(2). *Solution.* 不合理，因为 $g(\lambda) > 0$，而估计却存在 -1 的情况.
一个更合理的估计是 $\hat{\theta}(X) = e^{-2X}$ 或者 $\hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n) = e^{-2\overline{X}}$.

9.6. (1). 证明.

$$\begin{aligned} E(\max(X_1, \cdots, X_n)) &= \int_0^\theta n \cdot x \frac{1}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1} \mathrm{d}x \\ &= \theta \int_0^1 n t^n \mathrm{d}t \\ &= \frac{n}{n+1}\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\max(X_1, \cdots, X_n)) &= \int_0^\theta n \cdot x \frac{1}{\theta} \left(\frac{\theta - x}{\theta}\right)^{n-1} \mathrm{d}x \\ &= \theta \int_0^1 n(1-t) t^{n-1} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n+1}\theta \end{aligned}$$

因此：

$$E(\hat{\theta}_1) = E(\max(X_1, \cdots, X_n)) + E(\max(X_1, \cdots, X_n)) = \theta$$

即 $\hat{\theta}_1$ 是 θ 的无偏估计. □

(2). 证明. 由 (1) 立即可得，取 $c_n = n+1$，$\hat{\theta}_2$ 即为 θ 的无偏估计. □

(3). *Solution.*

$$
\begin{aligned}
Var(\hat{\theta}_1) &= E(\hat{\theta}_1^2) - \theta^2 \\
&= E(\max(X_1, \cdots, X_n)^2) + E(\min(X_1, \cdots, X_n)^2) \\
&\quad + 2E(\max(X_1, \cdots, X_n) \min(X_1, \cdots, X_n)) - \theta^2 \\
&= \frac{n}{n+2}\theta^2 + \frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2 + \frac{2}{n+2}\theta^2 - \theta^2 \\
&= \frac{2}{(n+1)(n+2)}\theta^2
\end{aligned}
$$

$$Var(\hat{\theta}_2) = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

$$Var(\hat{\theta}_3) = Var\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{4}{n}Var(X) = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$Var(\hat{\theta}_4) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

当 $n > 1$ 时：

$$Var(\hat{\theta}_2) > Var(\hat{\theta}_3) > Var(\hat{\theta}_1) > Var(\hat{\theta}_4)$$

9.7. (1). 证明.

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i) = \theta \sum_{i=1}^{n} c_i = \theta$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} c_i = 1$$

□

(2). 证明. 设总体方差为 σ^2：

$$
\begin{aligned}
Var\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) &= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 Var(X_i) \\
&= \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \\
&\geq n\left(\frac{c_1 + \cdots + c_n}{n}\right)^2 \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}
$$

等号当且仅当 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = \dfrac{1}{n}$ 时成立. $\square$

9.8. *Solution.*

$$E(X_i) = \mu, E(X_i^2) = \mu^2 + \sigma^2, E(X_i^3) = \mu^3 + 3\mu\sigma^2$$

$$E(X_i^4) = \mu^4 + 6\sigma^2\mu^2 + 3\sigma^4$$

设：

$$S_m = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

则：

$$m_2 = S_n, S^2 = S_{n-1}$$

由于：

$$E((S_m - \sigma^2)^2) = E^2(S_m - \sigma^2) + Var(S_m)$$

而：

$$E(S_m - \sigma^2) = \left(1 - \frac{n-1}{m}\right)\sigma^2$$

再考虑 $Var(S_m)$，下面要证明 $\dfrac{mS_m}{\sigma^2} \sim \chi(n-1)$.

先证明 n 个 iid 的标准正态随机变量 Z_i 经过正交变换后为 Y_i 则 Y_i 依然是相互独立的标准正态随机变量，并且：

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2$$

设 A 是 n 阶正交矩阵，$a_{i,j}$ 为其元素，则对于 $Y = AZ$：

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}Z_j, E(Y_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}E(Z_j) = 0$$

$$Var(Y_i) = \sum_{j=1}^{n} Var(a_{i,j}Z_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2 = 1$$

再根据独立正态随机变量线性组合仍然为正态随机变量，可得 $Y_i \sim N(0,1)$. 再证明 Y_i 相互独立，由于 Y_i 是正态随机变量，因此只须证明其相关系数为 0 即可.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(Y_i, Y_k) &= \mathrm{Cov}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Z_j, \sum_{l=1}^{n} a_{k,l} Z_l\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} a_{i,j} a_{k,l} \mathrm{Cov}(Z_j, Z_l) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} a_{k,j} \\
&= \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}
\end{aligned}
$$

因此 Y_i 相互独立.

最后：

$$
\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = Y^T Y = Z^T A^T A Z = Z^T Z = \sum_{i=1}^{n} Z_i^2
$$

利用这个结论，设 $Z_i = \dfrac{X_i - \mu}{\sigma}$，则 $Z_i \sim N(0,1)$ 且相互独立.

而 $\overline{Z} = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma}$.

设随机变量 $Y = AZ$，即 Y 是 Z 经过正交变换 A 后得到的随机向量，且满足 $Y_1 = \sqrt{n}\overline{Z}$，则：

$$
\begin{aligned}
\frac{mS_m}{\sigma^2} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \overline{X}^2)}{\sigma^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (Z_i - \overline{Z})^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} Z_i^2 - n\overline{Z}^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - Y_1^2 \\
&= \sum_{i=2}^{n} Y_i^2
\end{aligned}
$$

由于 Y_i 是 iid 的标准正态随机变量，因此 $\dfrac{mS_m}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$.

设 $Y' = \frac{mS_m}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$，则：

$$\begin{aligned}
Var(Y') &= \sum_{i=2}^{n} Var(Y_i^2) \\
&= \sum_{i=2}^{n} (E(Y_i^4) - E^2[Y_i^2]) \\
&= (n-1)(3-1) \\
&= 2n-2
\end{aligned}$$

因此：

$$Var(S_m) = \frac{2n-2}{m^2}\sigma^4$$

结合前面：

$$\begin{aligned}
E((S_m - \sigma^2)^2) &= E^2(S_m - \sigma^2) + Var(S_m) \\
&= \left(1 - \frac{2(n-1)}{m} + \frac{n^2-1}{m^2}\right)\sigma^4
\end{aligned}$$

因此代入 $m = n, n-1$：

$$E((m_2 - \sigma^2)^2) = \frac{2n-1}{n^2}\sigma^4, E((S^2 - \sigma^2)^2) = \frac{2}{n-1}\sigma^4$$

故可知：

$$E((m_2 - \sigma^2)^2) < E((S^2 - \sigma^2)^2)$$

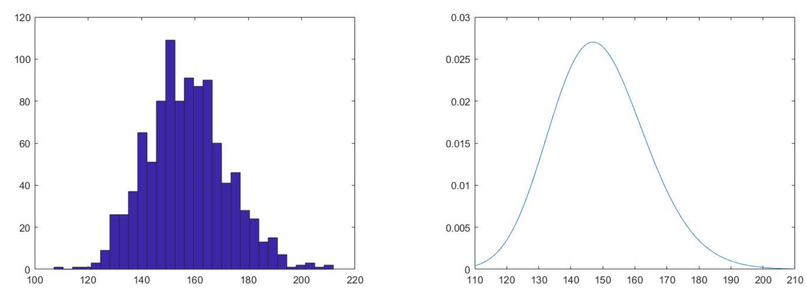
9.9. *Solution.* 图见下页.

$\hat{\theta}$ 的 pdf 为：

$$f(x) = \frac{10}{\sqrt{2\pi}x} e^{-50(\ln x - 5)^2}$$

图中数据 $V_{boot} \approx 224$.

而 $Var(\hat{\theta}) = e^{501/50} - e^{1001/100} \approx 224$，因此可以以此近似.



(a) 9. $\hat{\theta}_1^*, \cdots, \hat{\theta}_m^*$ 的直方图 (b) 9. $\hat{\theta}$ 的 pdf

图 1: 9