清华大学电子工程系

概率论与数理统计

2020 年春季学期

作业 7

王哲凡 2019011200 2020 年 3 月 31 日

7.1. *Solution.* 设第一次剩下的长度为 X，第二次剩下的长度为 Y.

则 $X \sim U(0,1), (Y|X=x) \sim U(0,x)$.

则 $E(Y|X) = \dfrac{X}{2} \sim U\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$.

因此：

$$E(Y) = E(E(Y|X)) = \frac{1}{4}$$

7.2. *Solution.* 设用时为 Y，设：

$$X = \begin{cases} 1 & \dfrac{1}{3} \\ 2 & \dfrac{1}{3} \\ 3 & \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$E(Y|X) = \begin{cases} 2 & \dfrac{1}{3} \\ 3 & \dfrac{1}{3} \\ 1 + E(Y) & \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

而 $E(Y) = E(E(Y|X))$ 可解得：

$$E(Y) = 3$$

7.3. 证明.

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}(X,Y) &= E((X-E(X))(Y-E(Y))) \\
&= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= E(E(XY|X)) - E(X)E(E(Y|X)) \\
&= E(XE(Y|X)) - E^2(X) \\
&= E(X^2)E^2(X) \\
&= Var(X)
\end{aligned}$$

□

7.4. (1). 证明.

$$\begin{aligned}
Var(Y|X) &= E\left[(Y-E(Y|X)^2)|X\right] \\
&= E(Y^2|X) - 2E(YE(Y|X)|X) + E(E^2(Y|X)|X) \\
&= E(Y^2|X) - 2E(Y|X)E(Y|X) + E^2(Y|X) \\
&= E(Y^2|X) - E^2(Y|X)
\end{aligned}$$

□

(2). 证明.

$$\begin{aligned}
& Var(Y) - Var(E(Y|X)) \\
&= E(Y^2) - E^2(Y) - E(E^2(Y|X)) + E^2(E(Y|X)) \\
&= E(Y^2) - E^2(Y) + E^2(Y) - E(E^2(Y|X)) \\
&= E(Y^2) - 2E(E^2(Y|X)) + E(E^2(Y|X)) \\
&= E(Y^2) - 2E(E(YE(Y|X)|X)) + E(E^2(Y|X)) \\
&= E(Y^2) - 2E(YE(Y|X)) + E(E^2(Y|X)) \\
&= E((Y-E(Y|X))^2) \\
&= E(E((Y-E(Y|X))^2|X)) \\
&= E(Var(Y|X))
\end{aligned}$$

□

7.5. *Solution.* $(Y|X=x) \in U(0,\sqrt{1-x^2})$.

故均方误差意义下，Y 的最优预测值为：

$$E(Y|X=0.5)=\frac{\sqrt{1-0.5^2}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

7.6. (1). *Solution.* 若 σ_1,σ_2 均不为 0.

设：

$$U=\frac{X-\mu_1}{\sigma_1},V=\frac{Y-\mu_2}{\sigma_2}$$

则 $E(U)=E(V)=0,Var(U)=Var(V)=1,E(UV)=\rho.$

$$\begin{aligned}
&E((Y-(aX+b))^2)\\
&=E^2(Y-aX-b)+Var(Y-aX-b)\\
&\geq Var(\sigma_2V-a\sigma_1U)\\
&=E((\sigma_2V-a\sigma_1U)^2)\\
&=\sigma_2^2E(V^2)-2a\sigma_1\sigma_2E(UV)+a^2\sigma_1^2E(U^2)\\
&=\sigma_2^2-2a\sigma_1\sigma_2\rho+a^2\sigma_1^2\\
&=(a\sigma_1-\rho\sigma_2)^2+(1-\rho^2)\sigma_2^2\\
&\geq(1-\rho^2)\sigma_2^2
\end{aligned}$$

其中等号取到的条件是 $\mu_2-a\mu_1-b=0$ 和 $a\sigma_1=\rho\sigma_2$.

因此：

$$\begin{cases}a=\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\\ b=\mu_2-\mu_1\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}\end{cases}$$

若 $\sigma_2=0,\sigma_1\neq0$ 结果显然相同（取 $V=0$ 即可）.

若 $\sigma_1=0$ 则此时 $\rho=0$：

$$E((Y-(aX+b))^2)=E((Y-b)^2)\geq\sigma_2^2=(1-\rho^2)\sigma_2^2$$

此时取：

$$\begin{cases}a\in\mathbb{R}\\ b=\mu_2\end{cases}$$

即可.

(2). *Solution.* 由 (1) 即得最小的均方误差为：

$$\min_{a,b} E\left[(Y-(aX+b))^2\right] = (1-\rho^2)\sigma_2^2$$

当 $\sigma_2 = 0$ 或 $\rho = 0$ 时值接近于 0.

(3). *Solution.* 此时应取：

$$\begin{cases} a = \rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \\ b = \mu_2 - \mu_1\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \end{cases}$$

显然：

$$aX + b = E(Y|X) = \mu_2 + \rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(X-\mu_1)$$

7.7. *Solution.* 不正确.

此数列的极限实际上并不存在，准确的说法应该是依概率收敛或者依概率 1 收敛.

7.8. 证明. 设：

$$Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$$

则由于 X_i 两两不相关：

$$Var(Y_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

存在. $\forall\varepsilon > 0$，由 Chebyshev 不等式可得：

$$\begin{aligned} 0 < P(|Y_n - E(Y_n)| \geq \varepsilon) &\leq \frac{Var(Y_n)}{\varepsilon^2} \\ &= \frac{1}{n^2\varepsilon^2}\sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \\ &< \frac{nc}{n^2\varepsilon^2} \\ &= \frac{c}{n\varepsilon^2} \to 0(n\to\infty) \end{aligned}$$

即：

$$\forall\varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mu_i\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

□

7.9. 证明. 根据中心极限定理，$\forall\varepsilon > 0$ 有：

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\overline{X}-\mu\right| < \varepsilon\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\sqrt{n}\varepsilon}{\sigma}\right) \\
&= \lim_{y\to\infty} \int_{-y}^{y} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= 1
\end{aligned}$$

即为（辛钦）弱大数定律. □

7.10. 证明. 而考虑：

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2\overline{X}X_i + \overline{X}^2) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - \overline{X}^2
\end{aligned}$$

根据弱大数定律：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2 \xrightarrow{P} \sigma^2+\mu^2, \overline{X} \xrightarrow{P} \mu$$

因此：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

故：

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$$

□

7.11. *Solution.*

$$P(X=20) = \frac{1}{2^{40}}\binom{40}{20} \approx 0.1254$$

而用正态逼近时：

$$\begin{cases} y_1 = -\frac{1}{2\sqrt{10}} \\ y_2 = \frac{1}{2\sqrt{10}} \end{cases}$$

因此：

$$P(X=20) \approx \int_{y_1}^{y_2} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \approx 0.1256$$

7.12. (1). *Solution.* 设 X_i 为第 i 个人赔付金额.

对于每个人，根据全期望公式，期望的保险赔付为：

$$E(X_i) = 0.001 \times 1000 = 1$$

所以卖 2 元较为合理，可以获得一半的利润.

(2). *Solution.* 设 Y_i 是第 i 个人是否赔付.

根据中心极限定理，即：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le 16\right) \approx \Phi(y_2)$$

其中：

$$y_2 = \frac{16 - np + \frac{1}{2}}{\sqrt{np(1-p)}}$$

可解得：

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \le 16000\right) \approx 0.9801$$

(3). *Solution.* 即：

$$\Phi(y_2) = 95\% \Rightarrow y_2 \approx 1.6445$$

则：

$$t_2 \approx 14.6989$$

毛利润比例为：

$$\frac{20 - t_2}{20} \approx 26.51\%$$

7.13. (1). *Solution.* 概率为：

$$\int_{-\varepsilon}^{\epsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中：

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n(n-1)!}\displaystyle\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\binom{n}{r}(x+n-2r)^{n-1} \\ 2k-n \le x \le 2(k+1)-n \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

其中 $k = 0, 1, \cdots, n-1$.

$\mu = 0, \sigma^2 = \frac{1}{3}$.

利用中心极限定理：

$$P(|\overline{X} - m| \le 0.2) \approx \Phi(\sqrt{3}) - \Phi(-\sqrt{3}) \approx 0.9167$$

(2). *Solution.* 标准正态分布置信度超过 95% 的区间为 $(-2, 2)$.

则：

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \le \varepsilon \Rightarrow n \ge \frac{100}{3}$$

因此应该进行 34 次测量.

(3). *Solution.*

$$P(|\overline{X} - E(\overline{X})| \ge \varepsilon) \le \alpha$$

而根据 Chebyshev 不等式可得：

$$\frac{Var(\overline{X})}{\varepsilon^2} \le \alpha \Rightarrow n \ge \frac{500}{3}$$

因此要进行 167 次测量，较 (2) 得出的结果偏大很多.

7.14. *Solution.* 标准正态分布区间为 $y \approx 2.5758, (-y, y)$.

故误差为：

$$\varepsilon = \frac{y\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \approx 0.0146$$

对应的合格产品数区间为：

$$[4000 - \varepsilon \times 5000, 4000 + \varepsilon \times 5000] \approx [3927, 4073]$$

7.15. *Solution.*

$$E(X) = E(x_0 + \beta + \varepsilon) = x_0 + \beta + E(\varepsilon) = x_0 + \beta$$

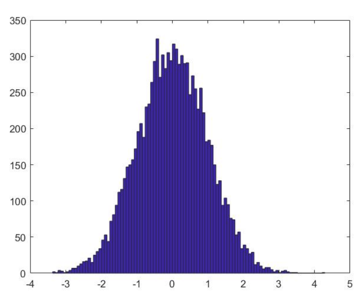
$$Var(X) = Var(x_0 + \beta + \varepsilon) = Var(\varepsilon) = \sigma^2$$

$$E[(X - x_0)^2] = E[(\beta + \varepsilon)^2] = \beta^2 + 2\beta E(\varepsilon) + E(\varepsilon^2) = \beta^2 + \sigma^2$$

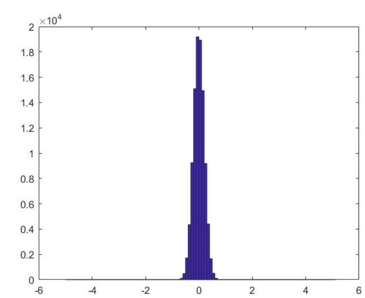
7.16. *Solution.* 图像见后.

前两个小题随着 n 的增大，$\overline{X}$ 逐渐接近正态分布，并且由于方差的减小，图像逐渐变细，所以符合中心极限定理.

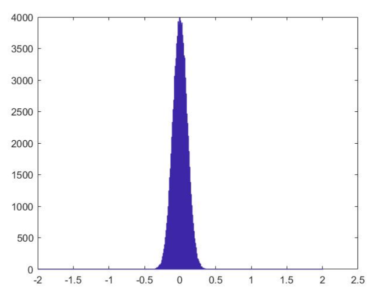
(3) 中无论 n 如何变化，$\overline{X}$ 的分布始终差别不大，与中心极限定理不同，应该是由于其不存在期望与方差导致.



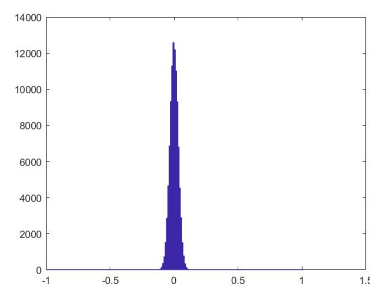
(a) 16.(1).$n = 1$



(b) 16.(1).$n = 25$

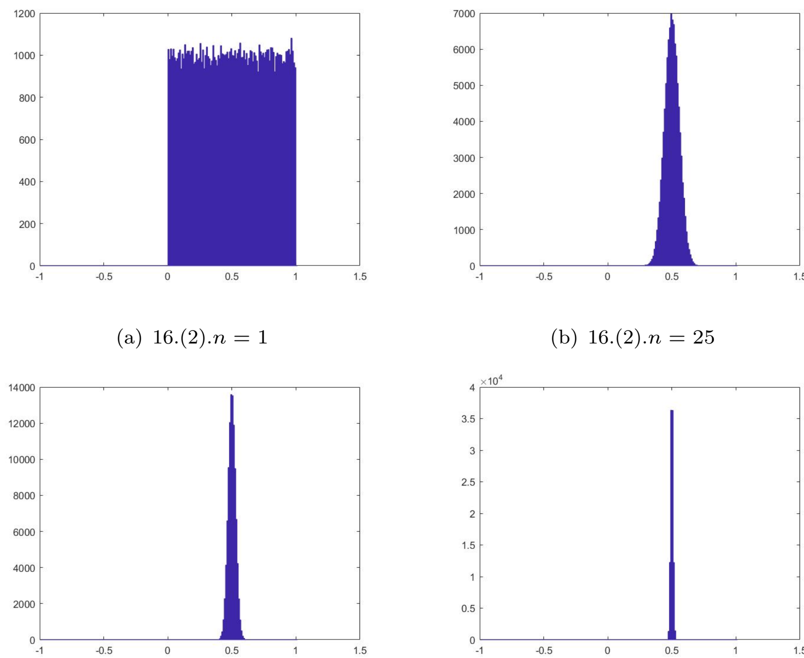


(c) 16.(1).$n = 100$



(d) 16.(1).$n = 1000$

图 1: 16.(1)



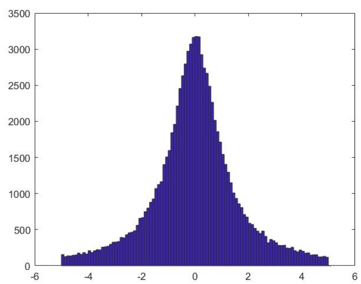
(a) 16.(2).$n = 1$

(b) 16.(2).$n = 25$

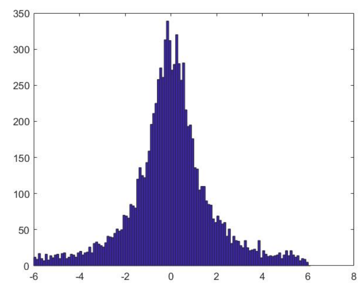
(c) 16.(2).$n = 100$

(d) 16.(2).$n = 1000$

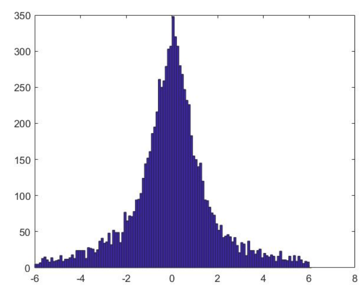
图 2: 16.(2)



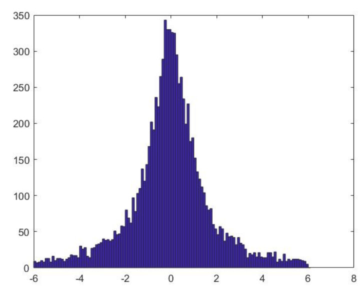
(a) 16.(3).$n = 1$



(b) 16.(3).$n = 25$



(c) 16.(3).$n = 100$



(d) 16.(3).$n = 1000$

图 3: 16.(3)