第十二章 静电场

1. 电荷

- 电荷分正负。
- 量子化。
- 基本电荷 $e = 1.60217733 \times 10^{-19} C$。
- 电荷守恒定律。

2. 库仑定律与叠加定理

库仑定律：

$$\vec{F}_{21} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\hat{r}_{12} = -\vec{F}_{12}$$

其中：

$$\begin{aligned} k &= 9 \times 10^9 N \cdot m^2/C^2 \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \end{aligned}$$

则：

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\frac{C^2}{m^2 N}$$

称为**真空介电常数**。

定律可化为：

$$\vec{F}_{21} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}^2}\hat{r}_{12} = -\vec{F}_{12}$$

叠加定理：

多个点电荷存在，则两个点电荷间的力不因第三个电荷存在而受影响。

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

3. 电场和电场强度

电场强度：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q2}$$

静止点电荷的电场：

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

电场叠加定理：

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E}_i$$

连续分布电荷的电场：

$$\vec{E} = \int dE = \int \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

电荷分布：

体电荷密度：$\rho = \dfrac{dq}{dV}$。

面电荷密度：$\sigma = \dfrac{dq}{dS}$。

线电荷密度：$\lambda = \frac{dq}{dl}$。

电偶极子的场强：

电偶极子指靠的很近的等量异号点电荷。

其中 $\vec{p} = q\vec{l}$ 称为**电偶极矩**。

中轴线上：

$$\vec{E} = -\frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^3}$$

轴线上：

$$\vec{E} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} \propto \frac{1}{r^3}$$

一般情况：

$$E = \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{3\cos^2\theta + 1}$$

均匀电场中所受力矩：

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}$$

也就是力矩使 p 尽量和 E 方向一致。

4. 电场线和电通量

电场线：

电场线上每一点的切线方向为 $\vec{E}$ 方向。

任一场点，取垂直于该点场强方向的面积元，使得：

$$E = \frac{d\Phi_e}{dS_\perp}$$

电通量：

通过任一面的电场线条数。

$$\begin{aligned} \phi &= E \cdot S_\perp \\ &= ES\cos\theta \\ &= \vec{E} \cdot \vec{S} \end{aligned}$$

连续情况：

$$\phi = \int_S d\phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

电通量的正负取决于面元法线方向，小于零代表电场线穿入。

5. 高斯定理

高斯定理：

真空静电场内，通过任意闭合曲面的电通量等于该曲面包围的电量代数和的 $1/\varepsilon_0$ 倍：

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\Omega q_i$$

其中 S 为任意闭合曲面——高斯面。

其不仅适用于静电场，还适用于变化电场。

可推得：电场线源于正电荷，终止于负电荷，无电荷处不中断。

应用：均匀带电球壳

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R_1\\ \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(r-\frac{R_1^3}{r^2}\right)\vec{e}_r & R_1<r<R_2\\ \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r & r>R_2\end{cases}$$

均匀带电球：

$$\vec{E}=\begin{cases}\frac{\rho\vec{r}}{3\varepsilon_0} & r<R\\ \frac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

均匀带电球面：

$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R\\ \frac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & r>R\end{cases}$$

应用：无限长均匀带电直线

线密度为 λ：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

应用：无限大均匀带电平板

电场：

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

第十三章 电势

1. 静电场保守性与环路定理

静电场是保守场。

环路定理：

静电场强沿任意闭合路径的积分等于零：

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$$

高斯定理与环路定理完备描述静电场，即**有源、无旋**。

2. 电势差和电势

电势差：

把单位正电荷由点 $a \to b$ 电场力做的功：

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

电势的减少 $=$ 电场力做的功。

电势：

选 b 点为电势零点 $\varphi_b = 0$，则 a 点电势为：

$$\varphi_a = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

即为单位正电荷自该点移动到电势零点，电场力做的功。

也即为单位正电荷自电势零点移到该点，外力做的功。

一般选择无穷远作为电势零点：

$$\varphi(p) = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

注：电荷分布到无限远时，则不能选取无限远为电势零点。

点电势的计算：

$$\varphi(r) = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

均匀带电球体的电势：

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}[3R^2 - r^2] & r < R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

球心恰好为球面处的 $\dfrac{3}{2}$ 倍。

均匀带电球面的电势：

$$\varphi(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} & r < R \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} & r > R \end{cases}$$

球面内等电势，球面外电势等于处于球心的“点电荷”在该点的电势。

无限长圆柱面的电势：

$$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_0}{R} & r<R\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{r_0}{r} & r>R\end{cases}$$

选取 $p_0(r=r_0)$ 为电势零点。

3. 电势叠加定理

点电荷系的电场，其中任一场点的电势等于各点电荷单独在该点的电势的叠加。

$$\varphi(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$$

连续分布的电荷：

$$\varphi(p)=\iiint\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

4. 电势梯度

等势面：由电势相等的点组成的面叫等势面。

满足方程 $\varphi(x,y,z)=C$。

电场线处处垂直等势面，并指向电势降低的方向。

两等势面相距较近处的场强大，相距较远处场强较小。

场强与电势的关系：

积分关系：

$$\int_{(p_1)}^{(p_2)}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\varphi_1-\varphi_2=-(\varphi_2-\varphi_1)$$

微分关系：

$$\vec{E}=-\nabla\varphi$$

电场强度等于电势梯度的负值。

5. 静电势能

电荷在外电场中的电势能：

$$W=q\varphi$$

点电荷体系的相互作用能：

把 n 个静止点电荷从现有位置彼此分散到无穷远时，它们间静电力所做的功，称为这 n 个点电荷的相互作用能。

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi_i$$

连续带电体的静电能（自能）：

把电荷无限分割并分散到相距无穷远时，电场力做的功。

只有一个带电体：

$$W = W_{\text{自}} = \frac{1}{2}\int_q \varphi\, dq$$

多个带电体：

$$W = \sum_i W_{\text{自}\,i} + \sum_{i<j} W_{\text{互}\,ij}$$

6. 静电场的能量

两个均匀带电大平行板，带点相反，电场被定于两板之间，场强为：

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

负电板受正板引力：

$$F = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma S$$

让负电板右移 Δx，外力做功：

$$A = F\Delta x = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}S\Delta x$$

转换成了体积为 $S\Delta x$ 的电场能量，因此得到能量密度：

$$w_e = \frac{A}{S\Delta x} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

第十四章 静电场中的导体

1. 导体静电平衡条件

导体特点：有可移动的自由电子。

静电平衡条件：

1. **场强描述**：$\vec{E}_{\text{内}} = 0, \vec{E}_{\text{表}} \perp \text{表面}$

2. **电势描述**：导体是等势体，其表面是等势面

2. 静电平衡导体上的电荷分布

导体静电平衡时电荷分布在表面，腔内无带电体。

注：腔内的场与腔外（包括腔的外表面）的电量及其分布无关，只与腔内带电体以及腔内的几何因素、介值有关。

导体表面场强：

$$\vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$$

孤立导体表面大处面电荷密度也大，但不存在单一函数关系。

尖端放电：带点的尖端，场强大，使附近的空气电离，因而产生放电。

3. 导体存在时静电场的分析计算

静电平衡条件、基本性质方程、电荷守恒定律。

接地的含义：

1. 提供电荷流动的通道（导体上的电量可变）；
2. 导体与地等电势。

4. 静电屏蔽

保护腔内区不受外界场的影响。

导体壳起到了屏蔽外面电荷电场的作用。

5. 唯一性定理

在给定的区域中，若电荷分布给定，则边界尚按下列条件之一给定，域内的静电场必定唯一：

1. 给定各边界上的电势分布 $\varphi_{S_i}(i=1,2,3,\cdots)$。
2. 已知各边界面均为等势面，并给定了各闭合边界面的电通量，即 $\varphi_i = c_i$ 且 $\oint_{S_i}\vec{E}\cdot d\vec{S} = \Phi_{S_i}$ 已知。
3. 一部分按 1 给出，另一部分按 2 给出。

电像法：

用与原电荷相似的若干点电荷或者线电荷来代替实际导体上的感应电荷，来计算原电荷与感应电荷合成的场。

这些相似的电荷称为**镜像电荷**。

镜像电荷与原电荷产生的合场需满足同样的边界条件。

第十五章 静电场中的电介质

1. 电介质对电场的影响

电介质的特点：无自由电荷，不导电。

电场中置入各向同性的均匀电介质时的影响，保持 Q 不变，则：

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}, U = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$$

其中 ε_r 为相对介电常数。

2. 电介质的极化

极化强度：

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum\limits_i \vec{p}_i}{\Delta V}$$

其中 ΔV 宏观小，微观大。

$\vec{P}$ 是量度各点极化状态的物理量。

对非极性电介质，因各 p 相同，有 $\vec{P} = n\vec{p}$。

$\vec{P} = 0$ 代表无极化，为常矢量代表均匀极化。

各向同性线性电介质：

$$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}$$
$$\chi_e = \varepsilon_r - 1$$

后者称为介质的电极化率，是无量纲的纯数，与 $\vec{E}$ 无关。

而对于各向异性线性电介质，χ_e 与 $\vec{E}$、与晶轴的方位有关。

小面积 dS 附近分子对极化电荷的贡献：

在 dS 附近薄层内认为介质均匀极化，以 dS 为底作小斜柱体，有：

$$|dq'| = |q_{分}\, n l_{分}\ dS \cos\theta| = |P\, dS \cos\theta|$$

其中 n 为分子数密度。

故：

$$dq' = -PdS\cos\theta = -\vec{P} \cdot d\vec{S}$$

S 所围的体积内的极化电荷：

$$q' = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S}$$

电介质表面（层）极化电荷面密度：

$$|dq'| = |\vec{P} \cdot d\vec{S}| = P_n dS$$
$$\sigma' = \frac{dq'}{dS} = P_n = \vec{P} \cdot \hat{n}$$

若介质均匀极化，则体内无极化电荷，电荷只出现在表面。

3. $\vec{D}$ 的高斯定律

高斯定律：

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} \cdot d\vec{S} = -\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} + \sum_i q_{0i}$$

定义**电位移**：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

则：

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{0i}$$

对于各向同性线性介质，$\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$，$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$。

其中 $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ 称为介质的介电常数（电容率）。

电位移在闭合面上的通量只和闭合面内的自由电荷有关。

D 的分布一般也和束缚电荷有关。

静电场的界面关系：

对于无自由电荷的分界面，D 的法向向量连续，对各向同性线性介质交界面，E 的法向分量不连续。

E 的切向分量连续。

在交界面两侧 E 线折射。

4. 电容器和电容

孤立导体的电容：

孤立导体的电势 $U \propto Q$，定义电容：

$$C \equiv \frac{Q}{U}$$

电容只跟几何因素和介质有关。

导体组的电容:

$$C=\frac{Q}{U}$$

有介质时的电容器电容:

$$\begin{gathered}D=\sigma=\frac{Q}{S},E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}=\frac{E_0}{\varepsilon_r}\\U=Ed=\frac{Qd}{\varepsilon_0\varepsilon_r S},C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}\end{gathered}$$

电介质减弱了极板间的电场和电势差，电容增加到 ε_r 倍。

电容器的串联:

$$\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$

电容器的并联:

$$C=\sum_{i=1}^{n}C_i$$

5. 电容器的能量、静电场的能量

电容器的静电能:

$$\begin{gathered}W=\frac{1}{2}\int_q\varphi\,dq\\=\frac{1}{2}Q(\varphi_+-\varphi_-)\\=\frac{1}{2}QU\\=\frac{1}{2}CU^2\end{gathered}$$

有介质时静电场的能量密度:

$$\begin{gathered}W=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon S}{d}\cdot(Ed)^2\\=\frac{1}{2}\varepsilon E^2(S\cdot d)\end{gathered}$$

电场能量密度:

$$w_e=\frac{W}{Sd}=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}$$

可以证明此式对所有线性极化介质都成立。

在空间中任意体积 V 内的电场能：

$$W=\int_V w_e dV=\int_V \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\,dV$$

对各向同性介质：

$$W=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2\cdot dV$$

在真空中：

$$W=\int_V \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2\cdot dV$$

第十六章 恒定电流

1. 电流密度

电流强度：

单位时间内通过导体某一横截面的电量：

$$I=\frac{dq}{dt}$$

方向：正电荷运动方向。

电流密度：

$$\vec{J}=\frac{dI}{dS_\perp}\hat{e}_v$$

大小为与该点正电荷正向移动方向垂直的单位面积上的电流密度，方向为该点正电荷定向移动的方向。

对任意小面元 $d\vec{S}$：

$$dI=J\,dS_\perp=J\,dS\cos\theta=\vec{J}\cdot d\vec{S}$$

对任意曲面 S：

$$I=\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

电流线：

电流线上某点的切线与该点电流密度方向一致，其疏密程度反映了电流密度的大小，即：

$$\frac{dN}{dS_\perp}=J$$

微观机制：

$$\vec{J}=\sum_{i}n_iq_i\vec{v}_i$$

电流的连续性方程：

对闭合曲面 S，根据电荷守恒定律，单位时间流出封闭面的电量等于单位时间内封闭面内减少的电量。

$$\oint_S\vec{J}\cdot d\vec{S}=-\frac{dq_{内}}{dt}$$

注：电流线发出于正电荷减少的地方，终止于正电荷增加的地方。

2. 恒定电流与恒定电场

恒定电流：

电流场中每一点的电流密度的大小和方向均不随时间改变。

条件为：

$$\oint_S\vec{J}\cdot d\vec{S}=\frac{dq_{内}}{dt}=0$$

即恒定电流必须闭合。

对一段无分支的恒定电流的电路，其各横截面的电流强度相等。

节点电流方程（基尔霍夫第一定律）：

$$\oint_S\vec{j}\cdot d\vec{S}=0\Rightarrow\sum_{i}I_i=0$$

规定从节点流出 $I>0$，流入 $I<0$。

恒定电场：

对于恒定电流的电路，导体内存在电场。

恒定电场由不随时间改变的电荷分布产生。

恒定电场导体中 $E_S\neq0$。

回路电压方程（基尔霍夫第二定律）：

$$\sum_{i}\varepsilon_i=\sum_{i}I_iR_i$$

3. 欧姆定律和电阻

欧姆定律：

对一段均匀的金属导体，有欧姆定律：

$$U_{ab} = IR$$

其中电阻：

$$R = \rho \cdot \frac{L}{S}$$

ρ 为电阻率，$\sigma = \dfrac{1}{\rho}$ 称为电导率。

欧姆定律微分形式：

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

对非均匀导体、非稳恒电流也成立。

4. 电动势

要维持稳恒电流，电路必须闭合，必须有非静电力 $\vec{F}_K$ 存在。

非静电力场强：

$$\vec{E}_K = \frac{\vec{F}_K}{q}$$

电动势：

$$\varepsilon = \frac{A_k}{q} = \int_{-}^{+} \vec{E}_K \cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}_K \cdot d\vec{l}$$

5. 有电动势的电路

单回路中：

$$\varepsilon_{总} = I(R + r) = U + Ir$$

有分叉的回路，根据基尔霍夫第二定律。

6. 电容器的充电与放电

充电：

$$q = cu_\lambda \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

放电：

$$i = \frac{u_\lambda}{R} e^{-t/\tau}$$
$$u_c = u_\lambda e^{-t/\tau}$$

其中时间常数 $\tau = RC$。

第十七章 磁场和它的源

1. 磁力与电荷的运动

- 传导电流。
- 分子电流。

磁力是运动电荷之间相互作用的表现。

2. 磁场与磁感应强度

磁场：

产生磁力的场叫磁场。

用磁感应强度 $\vec{B}$ 描述磁场（大小、方向）。

磁感应强度：

电荷 q 以速度 $\vec{v}$ 在磁场中运动时，将受到作用力 $\vec{F}_m$，称为洛伦兹力：

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

故可定义磁感应强度：

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}_{\max} \times \hat{v}}{qv}$$

某点磁感应强度数值上等于单位电荷以单位速率通过该点所受的最大磁力。

磁场叠加原理：

$$\vec{B} = \sum_i \vec{B}_i, \vec{B} = \int d\vec{B}$$

磁感线：

磁感线上某点的切向和该点磁感应强度的方向一致。

通过垂直于 $\vec{B}$ 的单位面积的磁感线的条数等于该点 $\vec{B}$ 的大小，磁场强处磁感线密。

3. 毕奥-萨伐尔定律

毕奥-萨伐尔定律：

对于电流元 $I\,d\vec{l}$：

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0 I\,d\vec{l}\times\hat{r}}{4\pi r^2}$$

其中 $\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,H/m$ 为真空中的磁导率。

电流元的磁感线在垂直于电流元的平面内，是圆心在电流元轴线上的一系列同心圆。

磁通量：

$$\phi_m=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}$$
$$\vec{B}=\frac{d\Phi_m}{dS_\perp}$$

磁通连续原理（磁场的高斯定理）：

$$\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

磁感线的性质：

- 无头无尾闭合曲线。
- 与电流套连。
- 与电流成右手螺旋关系。

4. 匀速运动点电荷的磁场

电流 $I=vSnq$，则：

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{vSnq\,d\vec{l}\times\hat{r}}{r^2}$$

由于 $v\,d\vec{l}=dl\cdot\vec{v}$，而每个运动电荷产生的磁场为：

$$\vec{B}=\frac{dB}{nS\,dl}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{v}\times\hat{r}}{r^2}$$

5. 安培环路定理

在恒定电流的磁场中，磁感应强度 $\vec{B}$ 沿任何闭合路径 L 的线积分（环量）等于路径 L 所环绕的电流强度的代数和的 μ_0 倍：

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_{\text{内}}$$

$\vec{B}$ 为非保守场（也称涡旋场）。

注：只适用于恒定电流。

6. 利用安培环路定理求磁场的分布

方法：

- 对称性分析。
- 选取合适的环路 L。
- 用环路定理计算磁场。

几种典型电流的 B：

- 一段载流直导线：

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

- 无限长载流直导线：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- 无限长均匀载流薄圆筒：

$$B_{\text{内}}=0, B_{\text{外}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

- 无限长载流密绕直螺线管，细螺绕环：

$$B_{\text{内}}=\mu n I, B_{\text{外}}=0$$

- 圆电流圈的圆心和轴线上：

$$B_{中心} = \frac{\mu_0 I}{2R}$$
$$B_{轴线} = \frac{\mu IS}{2\pi(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

- 无限长均匀平面电流的磁场，两侧为均匀磁场，方向相反，大小为：

$$B = \frac{\mu j}{2}$$

第十八章 磁力

1. 带电粒子在磁场中的运动

当 $\vec{v} \parallel \vec{B}$，粒子不受洛伦兹力，作匀速直线运动。

当 $\vec{v} \perp \vec{B}$，粒子作匀速圆周运动：

$$qvB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{mv}{qB}, T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

周期和速度无关。

当 $\vec{v}$ 与 $\vec{B}$ 有夹角 θ，粒子作螺旋运动，螺旋半径：

$$R = \frac{mv_\perp}{qB} = \frac{mv\sin\theta}{qB}$$

螺距：

$$h = v_\parallel T = \frac{2\pi mv\cos\theta}{qB}$$

2. 霍尔效应

霍尔效应：

在磁场中，载流导体或半导体上出现横向电势差的现象。

产生根源：载流子因漂浮运动在磁场中受力。

$$U_H = \frac{IB}{nqb} = \frac{1}{nq}\frac{IB}{b}$$

可根据电势何高何低判断载流子正负，由电压大小判断载流子浓度。

3. 载流导线在磁场中受力

安培力：

任意电流元受力为：

$$
\begin{aligned}
d\vec{F} &= nS\,dlq\vec{v} \times \vec{B} = nSvq\,d\vec{l} \times \vec{B} \\
&= Id\vec{l} \times \vec{B}
\end{aligned}
$$

整个电流元受力为：

$$\vec{F} = \int_{(l)} I\,d\vec{l} \times \vec{B}$$

因此可根据电流元受力定义磁感应强度：

$$B = \frac{(dF_{安})_{\max}}{I\,dl}$$

4. 载流线圈在均匀磁场中受的磁力矩

磁力矩：

当平面载流线圈的法线方向与磁感应强度 $\vec{B}$ 的方向平行时，该线圈受力沿径向，合力为零，合力矩为零。

当平面载流线圈的法线方向与磁感应强度 $\vec{B}$ 的方向垂直时，该线圈受合力为零。但力矩不为零。

当平面载流线圈的法向与磁感应强度 $\vec{B}$ 的方向有夹角 θ 时，可分成两个分量 $B_\perp, B_\parallel$。

$$
\begin{aligned}
dF &= I\,dlB_\perp \sin\beta \\
dl &= R\,d\beta \\
dM &= r\,dF = IR^2B_\perp \sin^2\beta \cdot d\beta \\
M &= \int dM = \int_0^{2\pi} IR^2B_\perp \sin^2\beta \cdot d\beta \\
&= I\pi R^2B_\perp = ISB_\perp = ISB\sin\theta \\
\vec{M} &= IS\hat{n} \times \vec{B}
\end{aligned}
$$

设 $\vec{m} = IS\hat{n}$ 为磁矩，则力矩为 $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$。

从力矩的角度看：

$$B = \frac{M_{\max}}{m}$$

某点磁感应强度数值上等于单位磁矩（单位电流单位面积）在该处所受的最大力矩。

载流线圈在均匀磁场中得到的能量：

$$A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} mB\sin\theta\,d\theta$$
$$W_m = -\vec{m}\cdot\vec{B}$$

第十九章 有磁介质时的磁场

磁介质：

在磁场中发生变化并影响磁场的物质。

1. 磁介质对磁场的影响

所有物质都是磁介质。

长螺线管通电流 I，内部产生一个均匀磁场，再将磁介质充满磁场（保持电流不变），发现磁介质中的磁场：

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$$

传导电流 $I \to \vec{B}_0$，而磁介质上的磁化电流 $I' \to \vec{B}'$。

实验表明：均匀各向同性介质充满磁场所在空间时，有：

$$B = \mu_r B_0$$

μ_r 为介质的相对磁导率。

按 μ_r 不同磁介质分为：

- 顺磁质 $\mu_r > 1$。
- 抗磁质 $\mu_r < 1$。
- 铁磁质 $\mu_r >> 1$。

2. 原子的磁矩

自旋磁矩 m_s，轨道磁矩 m_l，核磁矩 m_n，得到分子磁矩：

$$\vec{m} = \vec{m}_l + \vec{m}_s + \vec{m}_n = I\vec{S}$$

等效成分子电流。

根据 $\vec{m}$ 是否为零可区分顺磁质和抗磁质。

3. 磁介质的磁化

磁化：

磁场作用下，介质出现磁性或者磁性发生变化的现象。

顺磁性：取向磁化

外磁场中，分子磁矩 m 会发生转向而排列，这就是顺磁质被磁化。

外磁场越强，转向排列越整齐。

抗磁性：感应磁化

抗磁质的分子固有磁矩为 0。

附加磁矩 $\Delta\vec{m}$ 反平行于 $\vec{B}_0$。

磁化电流：

分子磁矩取向有序，分子电流排列有序，介质中以及表面出现等效的宏观电流。

这也就是磁化电流。

对顺磁质和铁磁质，磁化电流产生的磁场加强原磁场，而对抗磁质，磁化电流产生的磁场削弱原磁场。

磁化电流 I' 的大小反映了的磁化的强弱。

磁化强度：

磁化的强弱还可以用磁化强度来描述：

$$\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{m}}{\Delta V}$$

单位体积内分子磁矩的矢量和。

实验表明，在各向同性的顺磁质、抗磁质内有：

$$\vec{M} = \frac{\mu_r - 1}{\mu_0 \mu_r} \vec{B}$$

对铁磁质，实验表明 $\vec{M}$ 和 $\vec{B}$ 呈非线性关系。

磁化强度与磁化电流的关系：

$$dI' = \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

在磁介质表面，垂直磁化面电流方向的单位长度上的磁化面电流，称为磁化面电流密度：

$$j' \equiv \frac{dI'}{dl} = \frac{\vec{M}_{表} \cdot d\vec{l}}{dl} = M_{表} \cdot \cos\theta$$

可用：

$$\vec{j}' = \vec{M}_{表} \times \hat{n}$$

表示二者的矢量关系。

磁介质内部，任取一面积 S，其周界为 L，则通过 S 面的磁化电流是与周界套连的分子电流的总和：

$$I'_{内} = \oint_L \vec{M} \cdot d\vec{l}$$

4. H 的环路定理

高斯定律：

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

安培环路定理：

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum (I_{0内} + I'_{内})$$
$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} = \sum I_{0内}$$

磁场强度：

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

则：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I_{0内}$$

称为 H 的环路定理。

沿任一闭合路径的磁场强度的环流，等于该闭合路径所套连的传导电流的代数和。

当无磁介质时，上式自然过渡到真空时的环路定理。

对各项同性的磁介质：

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$
$$\Rightarrow \vec{B} = \mu \vec{H}$$

称为磁介质的物性方程。

而磁化强度 $\vec{M}$：

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

其中 χ_m 称为磁化率。

5. 铁磁质

铁磁质不同之处：

形式上有 $B=\mu H$，但 μ 不是常数。

由于量子效应，小区域内自发磁化整齐。

第二十章 电磁感应

1. 法拉第电磁感应定律

法拉第电磁感应定律：

线圈中磁通量发生改变导致产生感应电动势。

感应电动势：

$$\varepsilon_i = K\frac{d\phi}{dt}$$

约定回路 L 的绕行方向——任定。

ε 的正方向：L 的方向。

ϕ 取正：与 L 成右手螺旋。

则：

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi}{dt}$$

此约定下，式中负号反映的是楞次定律。

楞次定律：

闭合回路中感应电流的方向，总是使它所激发的磁场的作用来阻止引起感应电流的原因。

楞次定律是能量守恒定律在电磁感应现象上的具体体现。

磁链：

N 匝串联回路，每匝中穿过的磁通分别为 $\phi_1,\cdots,\phi_N$。

则有：

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_N \\ &= -\frac{d\phi_1}{dt}-\frac{d\phi_2}{dt}-\cdots-\frac{d\phi_N}{dt}\end{aligned}$$

令：

$$\psi = \sum_i \phi_i$$

则：

$$\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt}$$

若磁通均为 ϕ，则：

$$\varepsilon = -N\frac{d\phi}{dt}$$

感应电流：

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = -\frac{1}{R}\frac{d\psi}{dt}$$

R 为回路电阻，其中感应电流的方向与感应电动势的方向总是一致的。

2. 动生电动势

因导体在恒定磁场中运动而产生。

动生电动势的非静电力为洛伦兹力：

$$\vec{f}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$
$$\vec{E}_k = \frac{q\vec{v} \times \vec{B}}{q} = \vec{v} \times \vec{B}$$
$$\varepsilon_i = \int_{(b)}^{(a)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

（适用于切割磁力线的导体）

3. 感生电动势和感生电场

因磁场随时间变化而产生。

感生电动势：

$$\varepsilon_{\text{感}} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

符号规定：ϕ 的正方向与 L 的绕向成右螺旋关系，由此定出 $d\vec{S}$ 法线的正向。

感生电场：

实验表明，$\varepsilon_{\text{感}}$ 与导体回路的材料无关。

性质：

$$\varepsilon_{感} = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$
$$\oint_S \vec{E}_{感} \cdot d\vec{S} = 0$$

感生电场线闭合。

- 非保守场。
- 无源而有旋。

感生电场假说的检验与应用：

- 涡电流（感应加热炉）
- 电子感应加速器

4. 互感

互感：

M 称为互感系数，它由两线圈的大小、形状、圈数、相对位形和介质情况决定。

互感电动势为：

$$\varepsilon_{12} = -M\frac{di_2}{dt}$$

规定 i_2 正向通过右手螺旋给定 ψ_{12} 正向，再通过右手螺旋给定 ε_{12} 正向。

5. 自感

自感：

L 称自感系数（电感量），它由线圈圈数、形状、尺寸、介质情况等因素决定。

自感电动势为：

$$\varepsilon_L = -L\frac{di}{dt}$$

L 是反抗电流变化的能力（电惯性）。

6. 磁场能量

载流自感线圈的磁能：

线圈中电流由 $0 \to I$，经历暂态过程，过程中电源反抗自感电动势作功：

$$dA = -\varepsilon_{自}\, dq = L\frac{di}{dt} i\, dt = Li\, dt$$
$$A = \int_0^I Li\, di = \frac{1}{2}LI^2$$

可得线圈磁能：

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

由两个邻近通电线圈的磁能可证明 $M_{12} = M_{21}$。

K 个线圈的总磁能：

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} M_{ij} I_i I_j$$

磁场能量密度：

对长直螺线管由 $B = \mu n I$ 和 $L = \mu n^2 V$，得到：

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \mu n^2 V I^2 = \frac{B^2}{2\mu} V = \frac{1}{2} B H V$$

因此能量密度：

$$w_m = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

磁场能量：

$$W_m = \int_V \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H} \, dV$$

第二十一章 电磁场

1. 位移电流

平板电容器极板之间存在某个物理量，起着延续“电流”的作用（应是电流的量纲）。

它和传导电流总体（全电流）满足连续性方程。

同时将安培环路定理修正为对全电流成立。

根据连续性方程：

$$\begin{gathered} \oint_S \vec{J}_0 \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt} \\ \Rightarrow \oint_S \left(\vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \end{gathered}$$

位移电流密度：

$$\vec{J}_d = \frac{d\vec{D}}{dt}$$

位移电流：

$$I_d = \frac{d\phi_D}{dt}$$

通过某个面积的电位移通量的时间变化率。

全电流及修正后的安培环路定理：

全电流密度：

$$\vec{J}_{全} = \vec{J}_0 + \vec{J}_d$$

全电流连续：

$$\oint_S \vec{J}_{全} \cdot d\vec{S} = 0$$

安培环路定理修正为：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_i I_{全}$$

即：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

位移电流与传导电流按相同的规律激发磁场，本质是时变电场激发磁场。

2. 麦克斯韦方程组

积分形式：

$$\begin{gathered}
\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho_0 \, dV \\
\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\
\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\
\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}_0 \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}
\end{gathered}$$

微分形式：

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_0$$
$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$
$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$
$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_0 + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

积分形式反映了电磁场的瞬时关系与区域关系。

微分形式反映了电磁场的瞬时关系与当地关系。

介质方程：

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$$
$$\vec{B} = \mu \vec{H}$$
$$\vec{J}_0 = \sigma \vec{E}$$

再加上：

$$\vec{f} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$$

方程组在任何惯性系中形式相同。

边界条件：

$$D_{n1} = D_{n2}$$
$$E_{t1} = E_{t2}$$
$$B_{n1} = B_{n2}$$
$$H_{t1} = H_{t2}$$

（界面上无自由电荷，界面上无传导电流）

3. 电磁波

电磁波的波动方程：

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \mu\varepsilon \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

电磁波波速：

$$u = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

电磁波的性质：

1. $\vec{E} \perp \vec{H}$
2. $\vec{E} \times \vec{H} \parallel \vec{u}$——传播方向，电磁波是横波

3. 同一点 E 和 H 成正比，$\sqrt{\varepsilon}E=\sqrt{\mu}H$
4. 真空波速：$u=\dfrac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times10^8 m/s=c$，光是电磁波

与物质作用的主要是 $\vec{E}$ 矢量，称为**光矢量**。

能量密度：

对于电磁波：

$$w_m=\frac{1}{2}\mu H^2=\frac{1}{2}\mu\cdot\frac{\varepsilon}{\mu}E^2=w_e$$
$$w=2w_e=\sqrt{\varepsilon\mu}EH=EH/u$$

能流密度 S：

单位时间通过垂直波传播方向单位面积的能量。

能流密度矢量为：

$$\begin{aligned}\vec{S}=S\hat{k}=w\cdot u\hat{k}=\frac{EH}{u}u\hat{k}\\=EH\hat{k}=\vec{E}\times\vec{H}\end{aligned}$$

动量密度：

电磁波的质量密度：

$$m=\frac{w}{c^2}=\frac{EH}{c^2u}$$

动量密度：

$$\vec{p}=m\vec{u}=\frac{1}{c^2}\vec{E}\times\vec{H}=\frac{\vec{S}}{c^2}$$

电磁波有动量，它射到一个物体的表面上时会对表面产生压力——光压。