

第 4 次作业

1. 若 X 的概率密度函数为：

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

如果 $E(X) = \frac{2}{3}$ ，求 a, b 。

2. 科技馆上午 9 点钟开馆，从 10 点开始每隔半小时有一次同样的科普实验展示，如果某个参观者到馆的时间服从 10 点至 11 点的均匀分布，求以下事件的概率：
- (1) 他等待科普实验展示的时间不超过 10 分钟；
 - (2) 他等待科普实验展示的时间超过 20 分钟。
3. 某人被指控为一个新生儿的父亲。此案鉴定人作证时指出：母亲的怀孕期（即从受孕到婴儿出生的时间）的天数近似地服从正态分布，其参数为 $\mu = 270$ ，

$\sigma^2 = 100$ 。被告提供的证词表明，他在孩子出生前 290 天出国，而于出生前 240 天才回来。如果被告事实上是这个孩子的父亲，试问那位母亲确有与证词相符的过长或过短的怀孕期的概率是多少？

4. *某人计划要开始一个 1 万公里的自驾旅行，他的汽车已经跑了 1.5 万公里，假设该品牌汽车在电池报废之前跑的公里数服从均值为 3 万公里的指数分布，那么他不用更换电池就能跑完全程的概率是多大？如果该品牌汽车在电池报废之前跑的公里数不服从指数分布（但是知道其分布函数 F ）呢？
5. 涉及犯罪嫌疑人的证据可看成一个随机变量 X 的值， X 服从指数分布，其均值为 μ 。若该人无罪，则 $\mu = 1$ ，否则 $\mu = 2$ 。法官按以下方式判罪：当 $X > c$ 时判其有罪，否则判其无罪。

(1) 法官希望以 95% 的把握不冤枉一个无罪的人， c 应该取何值？

(2) 利用 (1) 中得到的 c 值，计算将一个确实有罪的被告判为有罪的概率。

6. ** “各个年龄段吸烟者的死亡率是非吸烟者死亡率的 2 倍” 这个说法的意思是什么？是不是说对于同年龄的非吸烟者和吸烟者来说，前者活到一个给定时间的概率是后者的 2 倍？假设仅仅知道 50 到 60 岁之间的非吸烟者死亡率是 $\frac{1}{30}$ ，分别求一个 50 岁非吸烟者和吸烟者活到 60 岁的概率（结果保留 4 位小数）。

7. (通过查参考资料) 给出参数为 a, b 的 β 分布并计算其期望和方差.
8. 令 X 为连续型随机变量, 其概率密度函数为 $f(x)$, 假设 $g(x)$ 为严格单调可微函数, 求 $g(X)$ 的概率密度函数.
9. *将线段 $[0, 1]$ 随机断开, 求包含固定点 $p \in (0, 1)$ 的那一段的长度的期望值.
10. *假设按如下方式生成随机变量 X : 首先抛一枚均匀的硬币, 如果出现正面, 令 X 服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布; 如果出现反面, 令 X 服从 $(3, 4)$ 的均匀分布. 求 X 的期望和方差
11. 令随机变量 X 服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布.
- (1) 求 $Y = \frac{1}{X}$ 的分布.
- (2) 利用 X 构造一个随机变量使其服从参数为 $\lambda > 0$ 的指数分布.
12. 设随机变量 $Y > 0$, $\log Y$ 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 求 Y 的概率密度函数.
13. (计算机实验) 利用第 11 题 (2) 生成源于参数为 $\lambda = 2$ 的指数分布的 100 个随机数.
14. (计算机实验) 从正态分布 $N(100, 100)$ 中随机产生 1000 个随机数.
- (1) 作出这 1000 个正态随机数的直方图;
- (2) 从这 1000 个随机数中随机有放回地抽取 500 个, 作出其直方图;
- (3) 比较它们的均值与方差.