清华大学电子工程系

概率论与数理统计

2020 年春季学期

作业 3

王哲凡 2019011200 　　　　　　　　　　　　2020 年 3 月 3 日

3.1. *Solution.* 1. $X=$ 掷骰子一次的点数，是离散型，样本空间为 $\{1,2,3,4,5,6\}$.

2. $X=$ 掷 2 次硬币，正面向上的次数，是离散型，样本空间为 $\{0,1,2\}$.

3. $X=$ 每 10 分钟一班车，等待分钟数，是连续型，样本空间为 $[0,10)$.

4. $X=[0,1]$ 上一个随机数，是连续型，样本空间为 $[0,1]$.

5. $X=$ 进行 n 次游戏获胜的次数，是离散型，样本空间为 $\{0,1,2,\cdots,n\}$.

3.2. (1). 证明. $F(x)$ 单调增，有上确界 $P(X\in\mathbb{R})=1$，有下确界 $P(x\in\varnothing)=0$.

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1, \lim\limits_{x\in-\infty}F(x)=0.$ □

(2). 证明. 由第一问知，$F(x)$ 为单调有界函数，故其任意点 x_0 的右极限必存在.

只需证明对于任意单调严格下降且极限为 x_0 的数列 $\{x_n\}$ 证明：

$$\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x_0)$$

则：

$$\begin{aligned}F(x_1)-F(x_0)=P(x_0<X\le x_1)&=P(\bigcup_{i=1}^{\infty}x_{i+1}<X\le x_i)\\&=\sum_{i=1}^{\infty}P(x_{i+1}<X\le x_i)=\sum_{i=1}^{\infty}(F(x_i)-F(x_{i+1}))\\&=\lim_{n\to\infty}(F(x_1)-F(x_{n+1}))=F(x_1)-\lim_{n\to\infty}F(x_n)\end{aligned}\tag{1}$$

化简即得：

$$\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x_0)$$

□

(3). *Solution.*

$$\begin{aligned} P(a \le X \le b) &= P(a < X \le b) + P(X = a) \\ = F(b) - F(a) + P(x = a) &= F(b) - \lim_{x \to a^-} F(x) \end{aligned} \tag{2}$$

3.3. (1). 证明. X 与 Y 的可能取值均为 $\{1, 2, 3\}$.
其中 $P(X = 1) = P(\omega_1) = P(\omega_3) = P(Y = 1)$，2, 3 情况同理，
故两随机变量分布相同. □

(2). *Solution.*

$$(X + Y)(\omega_1) = 3, (X + Y)(\omega_2) = 5, (X + Y)(\omega_3) = 4$$

对应概率为
$P(X + Y = 3) = P(X + Y = 5) = P(X + Y = 4) = \frac{1}{3}$.

$$(Y - X)(\omega_1) = 1, (Y - X)(\omega_2) = 1, (Y - X)(\omega_3) = -2$$

对应概率为 $P(Y - X = 1) = \frac{2}{3}, P(Y - X = -2) = \frac{1}{3}$.

3.4. 证明. $f(x)$ 为概率质量函数.

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_i (x_i - E(X))^2 f(x_i) \\ &= \sum_i (x_i^2 - 2x_i E(X) + E^2(X)) f(x_i) \\ &= E(X^2) - 2E(X) \cdots E(X) + E^2(X)E(1) \\ &= E(X^2) - E^2(X) \end{aligned} \tag{3}$$

不完全一样，中学时所有情况均为等概率即 $P = \frac{1}{n}$. □

3.5. (1). *Solution.* 易得 X 的可能取值为 $\{1, 2, \cdots, a + 1\}$。各取值概率分别为：

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \frac{a}{a+b} \frac{a-1}{a+b-1} \cdots \frac{a-i+2}{a+b-i+2} \cdot \frac{b}{a+b-i+1} \\ &= \frac{\frac{a! \cdot b}{(a-i+1)!}}{\frac{(a+b)!}{(a+b-i)!}} = \frac{a!(a+b-i)!b}{(a+b)!(a-i+1)!} \end{aligned} \tag{4}$$

(2). *Solution.* 易得 X 的可能取值为 $\{1,2,\cdots\}$。各取值概率分别为：

$$P(X=i)=(\frac{a}{a+b})^{i-1}\frac{b}{a+b}=\frac{a^{i-1}b}{(a+b)^i}$$

其期望为：

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty}i\times\frac{a^{i-1}b}{(a+b)^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a^{i-1}}{(a+b)^{i-1}}=\frac{1}{1-\frac{a}{a+b}}=\frac{b}{a+b}$$

3.6. (1). *Solution.*

$$P(X=7)=\frac{\frac{6}{36}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

(2). *Solution.* 第 i 次才出现 $X=7$ 的概率：

$$P_i=\frac{1}{6}\cdot(1-\frac{1}{6})^{i-1}=\frac{5^{i-1}}{6^i}$$

则最终出现 $X=7$ 的概率：

$$P_1=\sum_{i=1}^{\infty}P_i=1$$

符合直觉，因为最终 $X=7$ 不出现的概率随着实验次数的增加会趋于零.

(3). *Solution.*

$$P(X=8)=\frac{5}{36}$$

故 $X=7$ 早于 $X=8$ 出现的概率为：

$$P_2=\sum_{i=1}^{\infty}(\frac{25}{36})^{i-1}\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\frac{1}{1-\frac{25}{36}}=\frac{6}{11}$$

3.7. (1). *Solution.* 所求概率为：

$$P_1=\sum_{i=15}^{25}\frac{3^i\times 2^{25-i}}{5^{25}}\binom{25}{i}$$

(2). *Solution.* 所求概率为：

$$P_2 = \sum_{i=21}^{25} \frac{3^i \times 2^{25-i}}{5^{25}} \binom{25}{i}$$

(3). *Solution.* 所求概率为：

$$P_3 = \sum_{i=0}^{9} \frac{3^i \times 2^{25-i}}{5^{25}} \binom{25}{i}$$

3.8. *Solution.* 设 $X \sim B(n,p)$，$f(x)$ 为概率质量函数：

$$\begin{aligned} E(X) = \sum_i x_i f(x_i) &= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} \\ &= np(1-p+p)^{n-1} = np \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 &= -n^2p^2 + \sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= -n^2p^2 + \sum_{k=0}^{n} (k(k-1)+k) \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= -n^2p^2 + \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &\quad + \sum_{k=2}^{n} n(n-1) \binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= -n^2p^2 + np + n(n-1)p^2 = np(1-p) \end{aligned} \tag{6}$$

3.9. *Solution.* 设 X 为掷出一点的个数.

$$P(X=2) = \binom{6}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{3125}{15552} \approx 0.2009$$

$\lambda = np = 1$，Poisson 近似值为：

$$P'(X=2) = \frac{\lambda^2}{2!}e^{-\lambda} = \frac{1}{2e} \approx 0.1839$$

3.10. *Solution.* 设 X 为惯用左手者的人数.

$$P(X \geq 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \binom{200}{i} 0.01^i 0.99^{200-i} \approx 0.1420$$

$\lambda = np = 2$，Poisson 近似值为：

$$P'(X \geq 4) = 1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \approx 0.1429$$

3.11. 证明. 设 X 为一只昆虫产卵数量，Y 为其后代数量，则：

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$\begin{aligned}
P(Y=k) &= \sum_{n=k}^{\infty} P(X=n)P(Y=k|X=n) \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^n}{n!} \\
&= \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda(1-p)} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}
\end{aligned} \tag{7}$$

即满足参数为 λp 的 Poisson 分布. □

3.12. (1). *Solution.*

$$P(X=m) = \frac{\binom{M}{m}\binom{N-M}{n-m}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{n}{m}\binom{N-n}{M-m}}{\binom{N}{M}}$$

(2). *Solution.*

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{m=0}^{n} m \cdot \frac{\binom{n}{m}\binom{N-n}{M-m}}{\binom{N}{M}} \\
&= n \times \sum_{m=0}^{n} \frac{\binom{n-1}{m-1}\binom{N-n}{M-m}}{\binom{N-1}{M-1} \cdot \frac{N}{M}} \\
&= n \times \frac{M}{N} \times 1 = \frac{Mn}{N} = m
\end{aligned} \tag{8}
$$

故可得 $N = \frac{Mn}{m}$.

(3). *Solution.* $P(x = m)$ 中与 N 相关的表达式为：

$$
a_N = \frac{(N-M)\cdots((N-M)-(n-m)+1)}{N(N-1)\cdots(N-n+1)}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{N+1}}{a_N} &= \frac{(N-M+1)(N-n+1)}{(N+1)((N-M)-(n-m)+1)} \\
&= \frac{N^2-(M+n-2)N+(M-1)(n-1)}{N^2-(M+n-2+m)N-M-n+m+1}
\end{aligned} \tag{9}
$$

$Mn > mN + m$ 时，$a_{N+1} > a_N$，反之 $a_N > a_{N+1}$. 故在
$N \approx \frac{Mn}{m}$ 时，概率值最大.
这与第二问中的 $\frac{Mn}{m}$ 一致.

(4). *Solution.* 这个例子中，利用出现可能性概率最大来估计，与利用期望估计也较为接近，故十分准确.

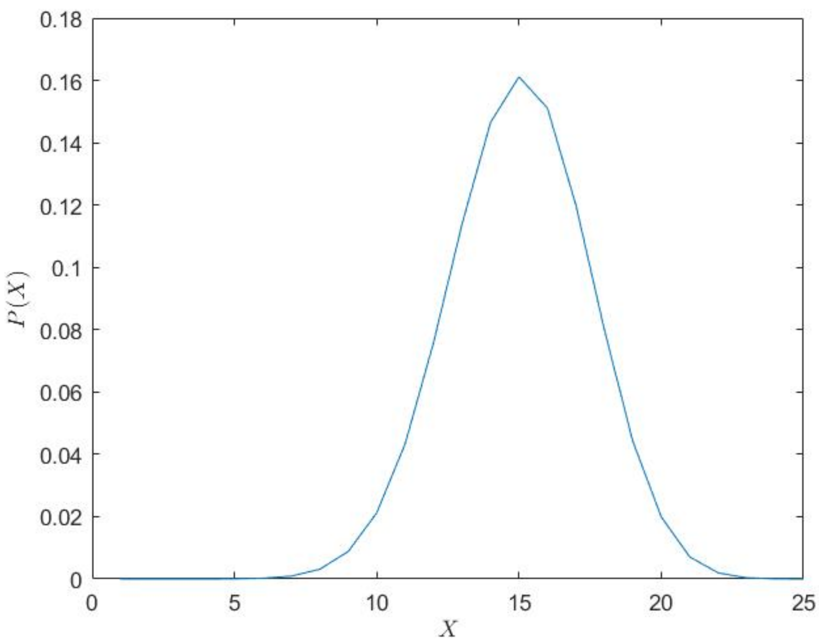
3.13. 分布图见下页，分布图与下面数据均通过 MATLAB 计算得出.

(1). *Solution.* $x = 15$ 时有最大概率.

(2). *Solution.* $\mu = 15 = x$.

(3). *Solution.* $\sigma^2 = 6$.

(4). *Solution.* $P \approx 0.6927$.


0.18
0.16
0.14
0.12
0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
$P(X)$
0
5
10
15
20
25
X