清华大学电子工程系
概率论与数理统计
2020 年春季学期

作业 8

王哲凡 2019011200 2020 年 4 月 14 日

8.1. 1 概率的引入

- 试验与事件
- 事件的运算
- 事件集类
- 概率的定义
- 容斥恒等式
- 古典概型
- 条件概率
- 独立事件
- Bayes 公式

2 随机变量

- （1 维）随机变量
- （累积）分布函数
- 概率质量函数
- 期望与方差
- 常见离散分布（Bernoulli 分布，二次分布，Poisson 分布）
- 概率密度函数
- 常见连续分布（均匀分布，正态分布，指数分布）
- 随机变量的函数

3 联合分布

- 随机向量
- 联合累积分布函数
- 连续型以及离散型随机向量
- 边际分布
- 条件分布

  - 随机变量独立性
  - 多随机变量函数

4 随机变量的数字特征

  - 期望
  - 分位数和中位数
  - 方差
  - 矩
  - 协方差与相关系数
  - 条件期望
  - 大数定律
  - 中心极限定理

其中比较困难的是联合分布中一些条件分布、随机变量函数的计算，随机变量的矩，协方差与相关系数以及中心极限定理.

8.2. *Solution.* 一个实例是各个微信群中经常出现的调查问卷.
这种问卷发布的群，一般不能体现抽样的一般性，一个微信群里的人往往有人群特征，所以往往是有偏取样.
除此之外，设置问卷的内容也会很影响大家填写的兴趣，如果设置的内容不当，可能会导致问卷结果失真.

8.3. (1). 证明. 设所有样本分别为 $x_1, \cdots, x_N$，则：

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \mu$$

因此：

$$E(X_i) = \sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \frac{1}{N} = \mu$$

而：

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu)^2 = \sigma^2$$

因此：

$$Var(X_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{N}(x_i - E(X_i))^2 = \sigma^2$$

□

(2). 证明.

$$
\begin{aligned}
E\left(\overline{X}\right) &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le N} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i_n}}{n} \\
&= \frac{1}{n\binom{N}{n}} \sum_{i=1}^{N} x_i \binom{N-1}{n-1} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}{N} \\
&= \mu
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& Var\left(\overline{X}\right) \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{1\le i_1<i_2<\cdots<i_n\le N} \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i_n}}{n}\right)^2 - \mu^2 \\
&= \frac{1}{n^2\binom{N}{n}} \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \binom{N-1}{n-1} + 2\sum_{1\le i<j\le N} x_i x_j \binom{N-2}{n-2}\right) - \mu^2 \\
&= \frac{\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2}{Nn} + \frac{2(n-1)}{N(N-1)n} \sum_{1\le i<j\le N} x_i x_j - \mu^2 \\
&= \frac{1}{n}(\sigma^2+\mu^2) + \frac{(n-1)}{N(N-1)n} \sum_{i=1}^{N} \left(x_i \left(\sum_{i=1}^{N} x_j\right) - x_i^2\right) - \mu^2 \\
&= \frac{1}{n}(\sigma^2+\mu^2) + \frac{(n-1)}{N(N-1)n} \left(N^2\mu^2 - N(\sigma^2+\mu^2)\right) - \mu^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{n}\left(\frac{N-n}{N-1}\right)
\end{aligned}
$$

□

8.4. (1). *Solution.*

$$
\begin{cases}
kp = E(X) \approx \overline{X} \\
kp(1-p) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2
\end{cases}
$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p \approx 1 - \dfrac{1}{n\overline{X}} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2 = 1 - \dfrac{m_2}{\overline{X}} \\ k \approx \dfrac{\overline{X}}{1 - \frac{1}{n\overline{X}} \sum\limits_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2} = \dfrac{\overline{X}}{1 - \frac{m_2}{\overline{X}}} \end{cases}$$

(2). *Solution.* 计算较为复杂，容易降低精度.

样本数量不足即 n 较小时，精度较低.

8.5. *Solution.* 矩估计：

$$\frac{3}{2}\theta = E(X) \approx \overline{X} \Rightarrow \theta = \frac{2}{3}\overline{X}$$

$$\frac{1}{12}\theta^2 = Var(X) \approx m_2 \Rightarrow \theta = \sqrt{12m_2}$$

极大似然估计：

$$L(\theta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta^n} & X_i \in (\theta, 2\theta), \forall i \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

$$\Rightarrow \theta^* = \frac{1}{2}\max\{X_1, \cdots, X_n\}$$

8.6. (1). 证明. 设 $X \sim N(a, \sigma^2)$，其期望为 a，则其方差为：

$$\begin{aligned} Var(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(x-a)^2 \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x;a;\sigma)\,\mathrm{d}x \\ &= \sigma^2 \end{aligned}$$

因此：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x;a;\sigma)\,\mathrm{d}x = 1$$

即 $f(x;a;\sigma)$ 作为 x 的函数是一个概率密度函数. □

(2). *Solution.* 设总体为 Y.

则：

$$
\begin{aligned}
&E(Y)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}x(x-a)^2\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right)\,\mathrm{d}x\\
&=a\frac{Var(X)}{\sigma^2}+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}(x-a)^3\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right)\,\mathrm{d}x\\
&=a+\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}x^3\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)\,\mathrm{d}x\\
&=a
\end{aligned}
$$

第二项为奇函数积分，因此：

$$a=E(Y)\approx\overline{Y}$$

而：

$$
\begin{aligned}
&Var(Y)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}(x-a)^4\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right)\,\mathrm{d}x\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}x^4\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}x^2\right)\,\mathrm{d}x\\
&=\sigma^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^4\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}-x^3\,\mathrm{d}\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\\
&=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-x^3\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}-3x^2\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\,\mathrm{d}x\right)\\
&=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}3x^2\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right)\,\mathrm{d}x\\
&=3\sigma^2
\end{aligned}
$$

因此：

$$\sigma^2=\frac{Var(Y)}{3}\approx\frac{m_2}{3}$$

(3). *Solution.* 即对于 a 和 σ^2 的偏导均为 0：

$$L(a,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}(X_i-a)^2\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(X_i-a)^2\right)\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\ln L}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial\ln L}{\partial\sigma^2}=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{2\sigma^2}{X_i-a}=\sum_{i=1}^{n}(X_i-a)\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-a)^2}{3n}=\sigma^2\end{cases}$$

先根据两个等式的 σ^2 得到 a 的方程，然后化简可得 a 的多项式方程，对其牛顿迭代求解，得到的解代入 σ^2 的表达式即可.

8.7. *Solution.* 矩估计：

$$p=E(X)\approx\overline{X}$$

$$p(1-p)=Var(X)\approx m_2\Rightarrow p\approx\frac{1\pm\sqrt{1-4m_2}}{2}$$

极大似然估计：（设 $k=n\overline{X}$）

$$L(p)=p^k(1-p)^{n-k},\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=\frac{k}{p}-\frac{n-k}{1-p}$$

因此：

$$\frac{\mathrm{d}\ln L(p)}{\mathrm{d}p}=0\Rightarrow p^*=\frac{k}{n}=\overline{X}$$

而：

$$\frac{\mathrm{d}^2\ln L(p)}{\mathrm{d}p^2}=-\frac{k}{p^2}-\frac{n-k}{1-p}^2$$

代入 $p^*=\dfrac{k}{n}$ 显然小于 0，因此此时确实是 $\ln L(p)$ 也是 $L(p)$ 的最大值.

8.8. *Solution.*

$$L(p_1,\cdots,p_{m-1})=\prod_{i=1}^{m}p_i^{X_i}$$

$$\ln L(p_1,\cdots,p_{m-1})=\sum_{i=1}^{m}X_i\ln p_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p_i} = \frac{X_i}{p_i} - \frac{X_m}{p_m} = 0, \forall 1 \le i < m$$

可解得：

$$p_i^* = \frac{X_i}{n}$$

而：

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p_j \partial p_i} = \begin{cases} -\frac{X_m}{p_m^2} & i \neq j \\ -\frac{X_i}{p_i^2} - \frac{X_m}{p_m^2} & i = j \end{cases}, 1 \le i, j < m$$

代入 p_i^*：

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p_j \partial p_i} = \begin{cases} -\frac{n^2}{X_m} & i \neq j \\ -\frac{n^2}{X_i} - \frac{n^2}{X_m} & i = j \end{cases}, 1 \le i, j < m$$

Hesse 矩阵的特征值为 $-\frac{n^2}{X_i^2}, 1 \le i < m$，则所有特征值小于零，因此矩阵负定，则此时取到最大值.

因此其极大似然估计为：

$$p_i^* = \frac{X_i}{n}, 1 \le i \le m$$

8.9. *Solution.* 矩估计：

$$E(X) = 3 - 2\theta \approx \overline{X} \Rightarrow \theta \approx \frac{5}{6}$$

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X) = 2\theta - 2\theta^2 \approx m_2 \Rightarrow \theta \approx \frac{3 \pm \sqrt{5}}{6}$$

结合样本可得：

$$\theta \approx \frac{3 + \sqrt{5}}{6}$$

极大似然估计：

$$L(\theta) = (\theta^2)^2 \cdot 2\theta(1-\theta) = 2\theta^5(1-\theta)$$

$$\ln L(\theta) = \ln 2 + 5 \ln \theta + \ln(1-\theta)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \theta^* = \frac{5}{6}$$

而：

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{5}{\theta^2} - \frac{1}{(1-\theta)^2}$$

代入 θ^* 可知二阶导小于零，因此此时确实为最大值.
因此极大似然估计为：

$$\theta^* = \frac{5}{6}$$

8.10. (1). *Solution.*

$$E(I(X_i \le x)) = P(X_i \le x)$$

因此：

$$E(F_n(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(I(X_i \le x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P(X_i \le x) = F(x)$$

$$P(X_i \le x, X_j \le x) = \begin{cases} F(x) & i = j \\ F^2(x) & i \ne j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} E(F_n^2(x)) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} E(I(X_i \le x) I(X_j \le x)) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} P(X_i \le x, X_j \le x) \\ &= \frac{n-1}{n}F^2(x) + \frac{1}{n}F(x) \end{aligned}$$

因此：

$$\begin{aligned} Var(F_n(x)) &= E(F_n^2(x)) - E^2(F_n(x)) \\ &= \frac{n-1}{n}F^2(x) + \frac{1}{n}F(x) - F^2(x) \\ &= \frac{1}{n}F(x)(1-F(x)) \end{aligned}$$

(2). 证明. $\forall \varepsilon > 0$，根据 Chebyshev 不等式：

$$P(|F_n(x) - E(F_n(x))| \ge \varepsilon) \le \frac{Var(F_n(x))}{\varepsilon^2} = \frac{F(x)(1-F(x))}{n\varepsilon^2}$$

而：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(x)(1-F(x))}{n\varepsilon^2}=0$$

因此：

$$\lim_{n\to\infty}P(|F_n(x)-E(F_n(x))|\geq\varepsilon)=0$$

即 $F_n(x)\xrightarrow{P}F(x)$. □

8.11. (1). *Solution.* 设 D 是分配到管道故障房间.

根据全概率公式可得所求概率为：

$$\begin{aligned}P(D)&=P(A)P(D|A)+P(B)P(D|B)+P(C)P(D|C)\\&=20\%\times5\%+50\%\times4\%+30\%\times8\%\\&=5.4\%\end{aligned}$$

(2). *Solution.* 根据条件概率有：

$$P(C|D)=\frac{P(CD)}{P(D)}=\frac{4}{9}$$

8.12. (1). *Solution.* $\lambda=np=1$，因此：

$$P(X\geq2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}=\frac{e-2}{e}$$

(2). *Solution.* 所求概率为：

$$P=\frac{2^{30}+30\times2^{29}\times(e-2)}{e^{30}}=\frac{2^{29}}{e^{30}}(30e-58)$$

8.13. (1). *Solution.*

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x\\&=\int_{1}^{+\infty}\frac{\theta}{x^\theta}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{\theta}{(1-\theta)x^{\theta-1}}\bigg|_1^{+\infty}\\&=\frac{\theta}{\theta-1}\end{aligned}$$

(2). *Solution.* $x > 1$ 时：

$$\begin{aligned} P(X \le x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{1}^{x} \frac{\theta}{t^{\theta+1}}\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{t^{\theta}}\Big|_{1}^{x} \\ &= 1 - \frac{1}{x^{\theta}} \end{aligned}$$

因此 Y 的 cdf 为 $y > 0$：

$$P(Y \le y) = P(X \le e^{y}) = 1 - \frac{1}{e^{\theta y}}$$

即：

$$P(Y \le y) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{e^{\theta y}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

Y 的 pdf 为：

$$g(y) = \begin{cases} \dfrac{\theta}{e^{\theta y}} & y > 0 \\ 0 & y \le 0 \end{cases}$$

8.14. (1). *Solution.* 此时 Y 的分布的 pdf 为：

$$f_Y(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \frac{e^{-x}e^{-(y-x)}}{e^{-x}} = e^{x-y}, y \ge x$$

其 cdf 为：

$$P(Y \le y|X = x) = 1 - e^{x-y}, y \ge x$$

(2). *Solution.* 根据 (1) 可得：

$$f(x,y) = e^{-x}e^{-(y-x)} = e^{-y}, 0 \le x \le y$$

则对应 cdf 为：

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u = 1 - e^{-x} - xe^{-y}, 0 \le x \le y$$

(3). *Solution.*

$$f_X(x) = e^{-x}, x \geq 0$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \\ &= ye^{-y}, y \geq 0 \end{aligned}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & 0 \leq x \leq y \\ 0 & otherwise \end{cases} \neq f_X(x)f_Y(y)$$

(4). *Solution.* 即为求 $E(Y|X=a)$：

$$\begin{aligned} E(Y|X=a) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y|a)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{a}^{+\infty} y e^{a-y}\,\mathrm{d}y \\ &= (-y-1)e^{a-y}\Big|_a^{+\infty} \\ &= a+1 \end{aligned}$$