第 3 次作业

1. 给出 5 个不同的随机变量的例子，并指明随机变量的类型和相关的样本空间.
2. **已知 $F(x)=P(X\le x)$ 是随机变量 X 的分布函数.

   （1） 证明：$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$.

   （2） 证明：$F(x)$ 右连续.

   （3） 求 $P(a\le X\le b)$.

3. 设样本空间 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$，$P(\omega_1)=P(\omega_2)=P(\omega_3)$，定义 X,Y 如下：

   $$X(\omega_1)=1, X(\omega_2)=2, X(\omega_3)=3，Y(\omega_1)=2, Y(\omega_2)=3, Y(\omega_3)=1.$$

   （1） 试证明 X,Y 这两个随机变量分布相同；

   （2） 求 $X+Y$，$Y-X$ 的概率分布.

4. *已知 X 为离散型随机变量，证明：$\mathrm{Var}(X)=E(X^2)-E^2(X)$；你中学学到的方差是否与课上的定义相一致？请简要说明理由.
5. 假设袋中有 a 个黑球，b 个白球. 每次取出一个球，取到白球则停止，记 X 为此时已取出球的个数.

   （1） 每次取球后不放回，求 X 的分布；

   （2） 每次取球后放回，求 X 的分布和期望.

6. *掷 2 颗均匀的骰子，并记录点数之和 X.

   （1） 若掷一次并观察到点数之和为奇数，求 $P(X=7)$.

   （2） 若设反复掷直到 $X=7$ 出现为关注事件，求该事件发生的概率. 与直觉是否相符？

   （3） 若反复掷，求 $X=7$ 先于 $X=8$ 出现的概率.

7. 某项调查表明，60%的消费者曾通过某电商平台购买商品。假定随机抽取 25 名消费者，并对他们的购买习惯进行调查.

   （1） 至少 15 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少？

   （2） 大于 20 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少？

   （3） 不足 10 名消费者曾通过该电商平台购买商品的概率是多少？

8. 利用定义计算二项分布 $B(n,\ p)$ 的期望与方差.
9. 掷 6 颗均匀骰子，求恰有两个一点出现的概率及其 Poisson 近似值（保留小数点后 4 位）.
10. 若惯用左手者的平均百分数是 1%，试计算 200 人中至少有 4 个惯用左手者的概率及其 Poisson 近似（结果保留 4 位小数）.
11. *一只昆虫产卵概率服从参数为 λ 的 Poisson 分布，而虫卵能发育成虫的概率为 p（$0<p<1$），又设每个虫卵是否发育成虫是彼此独立的. 证明：有 k 个后代的概率是

服从参数为 λp 的 Poisson 分布.

12. 假设湖中有 N 条鱼，捕获 M 条做了记号后放回，充分混合后再捕获 n 条上来，记 X 为其中带有记号的鱼的数量.

（1） 求 $P(X=m)$；

（2） 若 N 的具体值未知，而再捕获上来的当中有 m 条带有记号，给出你对湖中鱼总数 N 的估计值；

（3） 求使得 $P(X=m)$ 值最大的 N 的值（M,n,m 的值固定），并比较与（2）中的估计值作比较.

（4） 这个例子体现的极大似然估计的思想你能够理解吗？试着将这一思想做简要说明.

13. （计算机实验）绘制第 7 题的二项分布图.

（1） x 为何值时有最大概率？

（2） 计算该分布的期望值（记为 μ），并比较期望值和最大概率对应的 x 值的大小.

（3） 计算该分布的方差（记为 σ^2）.

（4） 通过该电商平台购买商品的消费者人数介于 $\mu \pm 2\sigma$ 的概率有多大？