

第 10 次作业

1. 有一大批糖果，现从中随机取 16 袋称得重量（克）为

506 508 499 503 504 510 497 512
514 505 493 496 506 502 509 496

假设袋装糖果重量服从正态分布，求总体均值的 95%置信的区间估计。如果用这 16 袋样品的平均重量作为总体均值的估计，误差的范围为多少？这个范围是在什么意义下？

2. 从一大批灯泡中随机地取 5 只作寿命试验，测得寿命（小时）为

1050 1100 1120 1250 1280

假设灯泡寿命服从正态分布，求这批灯泡寿命平均值 95%置信的单侧置信下限（即求 $\hat{\mu}(X_1, \dots, X_n)$ 使得 $P(\mu > \hat{\mu}) \geq 0.95$ ）。

3. *为提高某一化学生产过程的得率，试图采用一种新的催化剂。为慎重起见，先进行试验。采用原催化剂 20 次试验的得率均值为 91.73，样本方差为 3.89；采用新催化剂 30 次试验的得率均值为 93.75，样本方差为 4.02。假设两总体都服从正态分布，且两样本独立。

- (1) 假设两总体方差相等。求两总体均值差的 95%置信的区间估计。
- (2) 不假设两总体方差相等，求两总体均值差的 95%置信的区间估计。
- (3) 两种催化剂有显著差别吗？

4. *设随机样本 X_i ($i = 1, \dots, n$) 来自总体 $U(0, \theta)$ 。证明：对于任意给定常数

$0 < \alpha < 1$ ，可以找到常数 c_n ，使 $(\max\{X_1, \dots, X_n\}, c_n \max\{X_1, \dots, X_n\})$ 为 θ

的一个 $(1 - \alpha)$ 置信区间。

5. *假设总体服从参数为 λ 的 Poisson 分布， X_1, \dots, X_n 为其独立随机样本，求 λ 的 $1 - \alpha$ 置信的区间估计。

6. 从一批次产品随机地取 100 个样品进行检测，发现 40 个不合格，求这批产品合格率 p 的 95%置信的区间估计。

7. *假设总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，参数 σ^2 已知， X_1, \dots, X_n 为其独立随机

样本， μ 的先验分布为 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ ， μ_0, σ_0^2 为已知常数， $0 < \alpha < 1$ 为常数。

(1) 求 μ 的 $(1-\alpha)$ 置信区间.

(2) 令 $\sigma_0 \rightarrow \infty$, 给出 (3) 中置信区间的极限情况, 并将其与经典方法所求置信区间相比较. 尝试给予直观解释.

8. *假设总体服从参数为 p ($0 < p < 1$) 的 Bernoulli 分布, X_1, \dots, X_n 为其独立随机样本, 试证明: $X_1 + \dots + X_n$ 是 p 的充分统计量.

9. *假设总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 参数 μ, σ^2 未知, X_1, \dots, X_n 为其独立随机样本, 试证明: (1) (\bar{X}, S^2) 是 (μ, σ^2) 的充分统计量. (2) $(\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$ 是 (μ, σ^2) 的充分统计量.

10. (计算机实验) 作业 9-9 续.

(1) 利用作业 9-9 的结果给出 $\theta = e^\mu$ 的 95% 置信的区间估计.

(2) 注意到 \bar{X} 是 μ 的极大似然估计, 你还能据此给出其他建立置信区间的方法吗? 对于方法的合理性进行简要说明.