清华大学电子工程系
概率论与数理统计
2020 年春季学期

作业 2

王哲凡 2019011200 2020 年 2 月 25 日

2.1. (1). *证明.* 先证明 $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

$$\begin{aligned} P(A+B) &= P(A+(B-A)) \\ &= P(A)+P(B-A) \\ &= P(A)+(P(B)-P(AB)) \\ &= P(A)+P(B)-P(AB) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} P(A+B+C) &= P(A+B)+P(C)-P((A+B)C) \\ &= P(A+B)+P(C)-P(AC+BC) \\ &= P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC+BC) \\ &= P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-(P(AC)+P(BC)-P((AC)(BC))) \\ &= P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(BC)-P(AC)+P(ABC) \end{aligned} \tag{2}$$

□

(2). *证明.* 根据乘法法则：

$$\begin{aligned} P(ABC) &= P(AB)P(C|AB) \\ &= P(A)P(B|A)P(C|AB) \end{aligned} \tag{3}$$

□

2.2. (1). *Solution.* 不正确.

如 A 为掷一次骰子点数大于 1，B 为掷一次骰子点数大于 2.

则 $P(A)=\frac{5}{6}, P(B)=\frac{2}{3}, P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=1>P(A)$

(2). *Solution.* 不正确.

如 $A=\varnothing$，则 $AB=\varnothing$ 即 A,B 互斥.

且 $P(AB)=0=0\cdot P(B)=P(A)P(B)$ 即 A,B 独立.

(3). *Solution.* 不正确.
只需令 A, B 不独立，$C = \varnothing$ 即可满足
$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0$ 且 A, B, C 不相互独立.

2.3. 证明. $\forall A \in \mathcal{F}, P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \geq 0$.
$P(\Omega) = P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = 1$.
$\forall A_i \in \mathcal{F}, A_iA_j = \varnothing, \forall i \neq j$:

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \frac{P((\sum_{i=1}^{\infty} A_i)B)}{P(B)} \\ = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_iB)}{P(B)} \\ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{P(A_iB)}{P(B)} \\ = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B) \end{aligned} \tag{4}$$

综上所述，$P(\cdot|B)$ 符合概率的公理化定义，故为概率函数. □

2.4. *Solution.*
$P(A_2) = \frac{6\times3}{6\times6} = \frac{1}{2}, P(A_3) = \frac{6\times2}{6\times6} = \frac{1}{3}, P(A_5) = \frac{6+1}{6\times6} = \frac{7}{36}$.
$P(A_2A_3) = \frac{6\times1}{6\times6} = \frac{1}{6} = P(A_2)P(A_3)$. 故 A_2, A_3 相互独立.
$P(A_2A_5) = \frac{3}{6\times6} = \frac{1}{12} \neq P(A_2)P(A_5)$. 故 A_2, A_5 相互不独立.

2.5. 证明. A 事件迟早发生的概率为：

$$\begin{aligned} P = \lim_{n\to\infty}(1-(1-P(A))^n) = \lim_{n\to\infty}(1-(1-\varepsilon)^n) \\ = 1 - \lim_{n\to\infty}(1-\varepsilon)^n = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

□

2.6. *Solution.* 令 $A =$ 朝上的面为红色.
令 $B =$ 朝下的面为黑色.
$P(A) = P(B) = \frac{2+1}{3\times2} = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{1}{3\times2} = \frac{1}{6}$.
则所求概率 $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{3}$.

2.7. 令 $A_i =$ 第 i 个人中了.

(1). *Solution.* $P(A_i) = \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-(i-1)}{n-(i-1)+1} \frac{1}{n-i+1} \frac{n-i}{n-i} \cdots \frac{1}{1} = \frac{1}{n}$.
故是公平的.

(2). *Solution.* $P(A_i) = \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-(i-1)}{n-(i-1)+1} \frac{1}{n-i+1} = \frac{1}{n}$.
故是公平的.

2.8. *Solution.* 所求概率为：$P = \frac{3^5-3\times2^5+1^5}{3^5} = \frac{148}{243}$

2.9. *Solution.* 此题中，医生认为患病与检测结果独立.
令其患病的概率为 $P = \frac{60\%}{60\%+40\%\times30\%} = 80\%$.
故应该继续建议手术.

2.10. (1). *Solution.* 若 $m = 0$，所求概率 $P(A_1) = \binom{2n}{n} p^n(1-p)^n$.
否则所求概率为
$P(A_1) = \binom{2n-m}{n}(p^{n+1}(1-p)^{n-m} + p^{n-m}(1-p)^{n+1})$

(2). *Solution.* 所求概率为
$P(A_2) = \binom{2n-m-1}{n-1}(p^n(1-p)^{n-m} + p^{n-m}(1-p)^n)$

2.11. *Solution.* 设 $A =$ 使用甲药物后治愈，$B =$ 使用乙药物后治愈，
显然使用药物治愈某具体病事件与患某种病事件独立.
$P(A) = 80\% \times 80\% + 10\% \times 5\% + 10 \times 10\% = 65.5\%$.
$P(B) = 80\% \times 60\% + 10\% \times 90\% + 10 \times 90\% = 66\%$.
故会推荐乙方案.

2.12. *Solution.* 所求概率为 $P = \frac{1-0.5\times1}{1-0.5\times0.75} = \frac{4}{5}$.

2.13. (1). *Solution.* $P(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

(2). *Solution.* 放回时：$P(B_2) = P(B_1) = \frac{3}{5}$. 因为与第一次取是独立的两次相同事件.
不放回时：
$P(B_2) = \frac{1}{2} \times (\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{5} \times \frac{4}{4}) + \frac{1}{2} \times (\frac{2}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{4}) = \frac{3}{5} = P(B_1)$.
因为在不知道第一个颜色时，相当于全部取完第一次取的袋子，其中第二次取到黑色的概率，这与任意一次取到黑色的概率实际上都相同.

(3). *Solution.*
$P(B_2|B_1) = \frac{P(B_1B_2)}{P(B_1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{5}} = \frac{7}{12} < P(B_2)$.
第一次拿走了黑色后，第二次拿到黑色的概率就会降低.

(4). *Solution.*

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}|B_1B_2\cdots B_n) &= \frac{P(B_1B_2\cdots B_{n+1})}{P(B_1B_2\cdots B_n)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^{n+1}+(\frac{2}{5})^{n+1})}{\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^{n}+(\frac{2}{5})^{n})} \\ &= \frac{(\frac{4}{5})^{n+1}+(\frac{2}{5})^{n+1}}{(\frac{4}{5})^{n}+(\frac{2}{5})^{n}}. \quad (6) \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} P(B_{n+1}|B_1B_2\cdots B_n) = \frac{4}{5}$.
n 越大，取出黑色概率更大的袋子的概率更大，进而趋向于 1，故最终概率由更大概率的决定.

(5). *Solution.* 令 $A=$ 第一次取的是 1 号袋子.

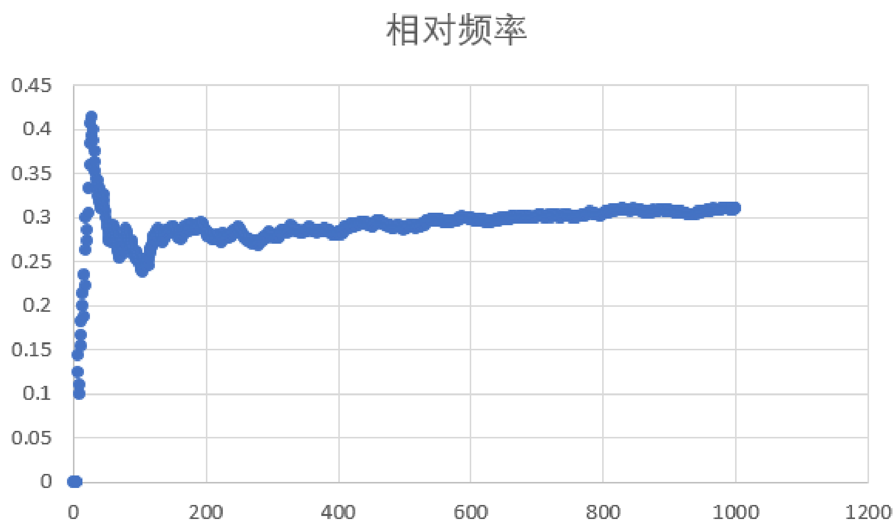
$$\begin{aligned} P(A|B_1B_2\cdots B_{n+1}) &= \frac{P(AB_1B_2\cdots B_{n+1})}{P(B_1B_2\cdots B_n)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\times(\frac{4}{5})^{n}}{\frac{1}{2}\times((\frac{4}{5})^{n}+(\frac{2}{5})^{n})} \\ &= \frac{4^n}{4^n+2^n}. \quad (7) \end{aligned}$$

$\lim_{n\to\infty} P(A|B_1B_2\cdots B_{n+1}) = 1$.
同第 (4) 问，n 越大，取出黑色概率更大的袋子的概率更大，进而趋向于 1.

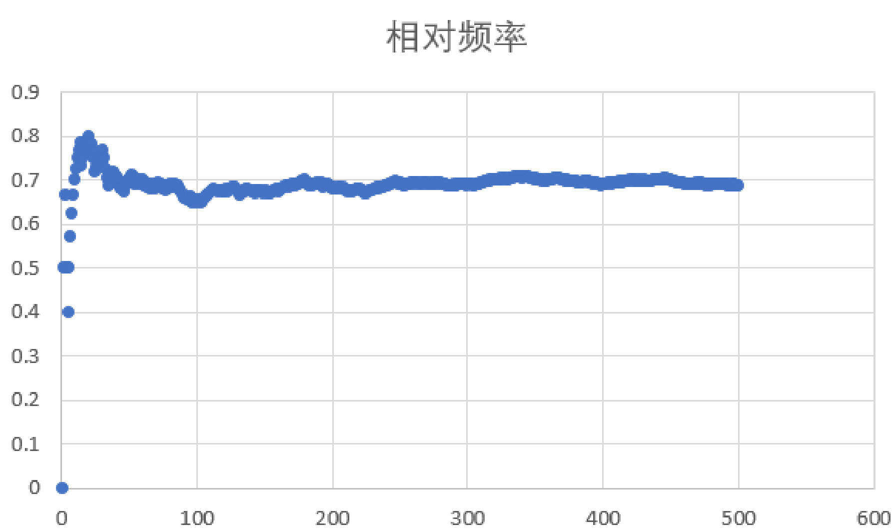
2.14. (1). 见下一页.

(2). *Solution.* 平均 301.91 次，与 $np=300$ 较为接近。

(3). *Solution.* $n=500, p=0.7$ 时，平均 350.2 次，与 $np=350$ 较为接近.
其中一次的图表同样见下一页.
$n=100, p=0.45$ 时，平均 45.08 次，与 $np=45$ 较为接近.



(a) n=1000,p=0.3



(b) n=500,p=0.7