第 6 次作业

1. 假设随机变量 $X_i \sim \mathrm{Poisson}(\lambda_i)$（$i=1,2$）相互独立，请确立 $Y=X_1+X_2$ 的分布．尝试给出结果的一个直观解释.
2. 假设随机变量 X_i（$i=1,2$）相互独立，且都服从标准正态分布，$X_1=R\cos\Theta$，$X_2=R\sin\Theta$，计算 (R,Θ) 的概率密度函数，并确定 R,Θ 是否独立？
3. *设 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，证明：$Y=X_1+X_2$ 服从正态分布 $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2)$.（可参考陈希孺书例 4.8 $\rho=0$ 情形的讨论）
4. *设 X,Y 独立，概率密度函数分别为 $f(x)$ 和 $g(y)$，且 $X>0$．请分别用以下两种方法计算 $Z=XY$ 的概率密度：
   （1） 利用变换 $Z=XY$，$W=X$.
   （2） 把 XY 表示为 Y/X^{-1}，先算出 X^{-1} 的密度，再利用课上得到的两个随机变量商的概率密度结果。
5. 设随机变量 X_i（$i=1,\cdots,n$）独立同分布，其分布函数为 $F(x)$，令

$$Y=\max\{X_1,\cdots,X_n\},\quad Z=\min\{X_1,\cdots,X_n\}$$

   分别求 Y,Z 的分布函数.
6. 了解统计上（与正态分布相关）的三大分布：卡方分布，t 和 F 分布（参阅陈希孺书或维基百科），给出其定义.
7. 判断下列结论对错并说明理由，这里假设所涉及的期望和方差皆存在.
   （1） 对任何常数 c 有 $E((X-c)^2)\ge Var(X)$，等号当且仅当 $c=E(X)$ 时成立.
   （2） 若 X 和 Y 独立，则 $Var(XY)=Var(X)Var(Y)$.
   （3） X 的中位数若存在则一定等于 $E(X)$.

8. 计算对数正态分布的均值和方差（对数正态分布见作业 4 第 12 题）

9. *设 X 有概率密度函数 $f(x)$，其中位数为 m．证明：对任何常数 c 都成立不等式 $E(|X-c|)\geq E(|X-m|)$.

10. *设随机变量 X_i（$i=1,\cdots,n$）独立同分布（这样的序列也称为来自同一分布的样本），其公共期望为 μ，公共方差为 σ^2，$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 称为样本均值，$S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ 称为样本方差．求 $\mathrm{Var}(\overline{X})$ 和 $E(S^2)$.

11. 下列叙述是否等价？请说明理由.

（1） $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$；

（2） X 与 Y 不相关；

（3） $E(XY)=E(X)E(Y)$；

（4） $\mathrm{Var}(X+Y)=\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$

12. 完成课上二元正态分布 ρ 的计算，即验证：若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 $\rho=\mathrm{Corr}(X,Y)$.

13. *设 X 为之前课上讨论的配对问题中拿到自己帽子的人数（总共有 n 个人），求 $E(X)$ 和 $\mathrm{Var}(X)$.

14. （1）*证明：$E^2(UV)\leq E(U^2)E(V^2)$，且等号成立当且仅当存在常数 c 使得 $P(V=cU)=1$.

（2）利用（1）证明：$|\mathrm{Corr}(X,Y)|\leq 1$，且等号成立当且仅当存在常数 a,b 使

得 $P(Y=aX+b)=1$.

15. **设随机变量 X_i（$i=1,\cdots,n$）独立同分布，其公共期望为 μ，公共方差为 σ^2.

（1） 证明：$\mathrm{Cov}(X_i-\overline{X},\overline{X})=0$.

（2） $X_i-\overline{X}$ 与 $\overline{X}$ 是否一定独立？尝试给出理由.

16. （计算机实验）模拟股票市场：设 Y_i（$i=1,\cdots,n$）为独立同分布随机变量，满足 $P(Y_i=1)=P(Y_i=-1)=\dfrac{1}{2}$，令 $X_n=\sum_{i=1}^{n}Y_i$. 将 $Y_i=1$ 视为股票价格上涨一元，将 $Y_i=-1$ 视为股票价格下降一元，X_n 视为第 n 天股票的价格.

（1） 求 $E(X_n)$ 和 $\mathrm{Var}(X_n)$；

（2） 模拟 X_n 并绘出 X_n 对于 $n=1,\cdots,10000$ 的图形，重复模拟几次并观察，随机序列是否呈现某种趋势？图形是否有差别？若有差别尝试利用（1）中的结论进行解释.