清华大学电子工程系
概率论与数理统计
2020 年春季学期

作业 11

王哲凡 2019011200 2020 年 5 月 10 日

11.1. *Solution.* 首先 $H_0:\lambda=\lambda_0, H_1:\lambda\neq\lambda_0$.

假设 $\alpha>0$ 给定，则考虑统计量 $\gamma_n=\lambda_0 n\overline{X}$，其服从 $\Gamma(1,n)$ 分布，因此可计算对应分位数：

$$P(\gamma\leq\gamma_{\frac{\alpha}{2}}(n))=P(\gamma\geq\gamma_{1-\frac{\alpha}{2}}(n))=\frac{\alpha}{2}$$

则当 $\gamma_n\leq\gamma_{\frac{\alpha}{2}}(n)$ 或 $\gamma_n\geq\gamma_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)$ 时拒绝 H_0.

即 $\overline{X}\leq\dfrac{\gamma_{\frac{\alpha}{2}}(n)}{\lambda_0 n}$ 或 $\overline{X}\geq\dfrac{\gamma_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}{\lambda_0 n}$ 时拒绝 H_0.

再考虑 $H_0:\lambda\geq\lambda_0, H_1:\lambda<\lambda_0$.

假设 $\overline{X}\geq C$ 时拒绝，则设 $\gamma_n=\lambda n\overline{X}$：

$$\begin{aligned}P(I)&=P_{\lambda\geq\lambda_0}\left(\gamma_n\geq\lambda nC\right)\\&\Rightarrow 1-\Gamma(\lambda nC)\leq\alpha,\lambda\geq\lambda_0\end{aligned}$$

因此可取 $C=\dfrac{\gamma_{1-\alpha}(n)}{\lambda_0 n}$，即 $\overline{X}\geq\dfrac{\gamma_{1-\alpha}(n)}{\lambda_0 n}$ 时拒绝 H_0.

另一侧同理.

11.2. (1). *Solution.* 利用样本均值：

$$\theta=2E(X)\Rightarrow\theta\approx 2\overline{X}$$

设拒绝域为 $R=\left\{(X_1,\cdots,X_n)\middle|\overline{X}\in\left(-\infty,\frac{\theta_0}{2}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\theta_0}{\sqrt{12n}}\right]\cup\left[\frac{\theta_0}{2}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\theta_0}{\sqrt{12n}},+\infty\right)\right\}$.

若 H_0 成立，则 $\overline{X}\overset{\text{近似}}{\sim}N\left(\frac{\theta_0}{2},\frac{\theta_0^2}{12n}\right)$.

因此：

$$P_\theta((X_1,\cdots,X_n)\in R)=\alpha,\theta=\theta_0$$

若 H_1 成立，则 $\overline{X}\overset{\text{近似}}{\sim}N\left(\frac{\theta}{2},\frac{\theta^2}{12n}\right),\theta>\theta_0$：

$$P_\theta\left((X_1,\cdots,X_n)\in R\right)=1-\Phi\left(\sqrt{3n}\frac{\theta_0-\theta}{\theta}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\theta_0}{\theta}\right)+\Phi\left(\sqrt{3n}\frac{\theta_0-\theta}{\theta}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\theta_0}{\theta}\right),\theta>\theta_0$$

综上所述：

$$g(\theta)=1-\Phi\left(\sqrt{3n}\frac{\theta_0-\theta}{\theta}+z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\theta_0}{\theta}\right)+\Phi\left(\sqrt{3n}\frac{\theta_0-\theta}{\theta}-z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\theta_0}{\theta}\right),\theta\geq\theta_0$$

(2). *Solution.* 极大似然估计为：

$$\theta^*=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$$

因此：

$$P(\theta^* \leq x) = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n, 0 \leq x \leq \theta$$

故拒绝域为 $R = \{(X_1, \cdots, X_n) | \theta^* \in (-\infty, \theta_0 \sqrt[n]{\alpha}]\}$.
若 H_0 成立，则：

$$P_\theta((X_1, \cdots, X_n) \in R) = \alpha, \theta = \theta_0$$

若 H_1 成立，则：

$$P_\theta((X_1, \cdots, X_n) \in R) = \frac{\theta_0^n}{\theta^n}\alpha, \theta > \theta_0$$

综上所述：

$$g(\theta) = \frac{\theta_0^n}{\theta^n}\alpha, \theta \geq \theta_0$$

11.3. *Solution.* 取 $\alpha = 0.05$.

$$\overline{X} - \mu_0 = 1.9 > \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.05} \approx 0.443$$

且相差较为明显，因此可以否定 $H_0 : \mu \leq \mu_0$ 的原假设，选取备择假设 $H_1 : \mu > \mu_0$，即公司雇员比常人容易生病.

11.4. (1). *Solution.* 若取 $\alpha = 0.05$.

$$\overline{X} = 1160, S \approx 111.5235$$

则：

$$\mu_0 - \overline{X} = 20 < \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.05} \approx 106.32$$

因此可以选择原假设 $H_0 : \mu \geq \mu_0$，并且否定备择假设 $H_1 : \mu < \mu_0$，即灯泡是合格的.

(2). *Solution.*

$$\overline{X} - \mu_0 = -20 < \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.05} \approx 106.32$$

故选择原来的备择假设 $\mu < \mu_0$，这是由于检验水平选择较高，较不容易拒绝原假设.

(3). *Solution.* 取 $\alpha = 0.6$：

$$\frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.6} \approx -13.50$$

则对于 (1)，会否定原假设，选择备择假设；对于 (2)，会选择原假设.
即无论如何，结论都是 $\mu < \mu_0$.

11.5. *Solution.*

$$\overline{X} = 241.5, S \approx 101.9637$$

而：

$$\mu_0 - \overline{X} = -16.6 < \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.05} \approx 46.15$$

因此有理由认为元件寿命大于 225 小时.

11.6. *Solution.* $\overline{X} \sim N\left(\lambda, \frac{\lambda}{n}\right)$，因此若 H_0 为真：

$$P(I) = P_{\lambda_0}\left(\left|\frac{\overline{X}-\lambda_0}{\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{n}}}\right| \geq \frac{C}{\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{n}}}\right) \leq \alpha$$

故可取：

$$C = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{n}}$$

则 $\left|\overline{X}-\mu_0\right| \geq z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{n}}$ 时拒绝 H_0.

11.7. (1). *Solution.* 比例为：

$$\frac{200}{4000} = \frac{1}{20} = 5\%$$

(2). *Solution.* 比例为：

$$\frac{200}{700} = \frac{2}{7}$$

这说明第一类错误在选择拒绝原假设时占比很高.

(3). *Solution.* 比例为：

$$\frac{500}{1000} = 50\%$$

(4). *Solution.* 检验功效约为：

$$1-\beta(R) \approx 1-50\% = 50\%$$

11.8. (1). *Solution.* 不科学，设原假设为 $H_0: 2\% < p \leq 1$，备择假设为 $H_1: 0 \leq p < 2\%$.
则 $n\overline{X} \overset{近似}{\sim} B(n,p)$，因此 $\overline{X} \sim N\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right)$.
则可取拒绝域为 $R = \left\{(X_1,\cdots,X_n)|\overline{X} \in \left(-\infty, p_0 - z_\alpha\frac{\sqrt{p_0(1-p_0)}}{\sqrt{n}}\right]\right\}$. 设上界为 $h(\alpha)$，若 $3\% < h(\alpha)$，则不能说明更有效，否则可以.

(2). *Solution.* 可取 $\alpha = 0.05$，则 $h(\alpha) \approx 0.4\% < 3\%$，因此可以说明更有效.
若取 $\alpha = 0.6$，则 $h(\alpha) \approx 2.25\% < 3\%$，同样说明更有效.

11.9. *Solution.* 重复 1000 次试验，拒绝原假设次数为 44 次，第一次错误比例为：

$$\frac{44}{1000} = 0.044$$

与 0.05 较为接近.