清华大学电子工程系
概率论与数理统计
2020 年春季学期

作业 12

王哲凡 2019011200 2020 年 5 月 11 日

12.1. *Solution.* 设 $H_0 : \mu \geq \mu_0, H_1 : \mu < \mu_0$.

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

给定 $\alpha \in (0,1)$，设 $\overline{X} \leq C$ 时拒绝 H_0：

$$\begin{aligned} P(I) &= P_{\mu \leq \mu_0}\left(\overline{X} \leq C\right) \\ &= P_{\mu \leq \mu_0}\left(\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \leq \frac{C - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right) \leq \alpha \\ &\Rightarrow T_{n-1}\left(\frac{C - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\right) \leq \alpha, \forall \mu \geq \mu_0 \end{aligned}$$

其中 T_{n-1} 为自由度为 $n-1$ 的 t 分布的 cdf，因此可取：

$$C = \mu_0 - t_\alpha(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

当 $\overline{X} \leq \mu_0 - t_\alpha(n-1) \cdot \dfrac{S}{\sqrt{n}}$ 时拒绝 H_0.
再考虑单侧置信区间.
设 $\overline{X} > C'$ 时，其概率为等于 $1 - \alpha$，即：

$$P\left(\overline{X} \leq C'\right) = \alpha \Rightarrow C' = \mu + t_\alpha(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

因此 μ 的单侧置信区间为：

$$\left(\overline{X} - t_\alpha(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}, +\infty\right)$$

即当 μ_0 属于置信区间时，便不会拒绝 H_0.

12.2. *Solution.* 设元件寿命服从 $N(\mu, \sigma^2)$.
则：

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

设 $H_0 : \mu \geq 225, H_1 : \mu < 225$.

$$\overline{x} = 241.5, s \approx 101.9637$$

设 P 值为 P，则：

$$
\begin{aligned}
&P_{\mu\geq 225}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\leq\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)\\
&=P_{\mu\geq 225}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\leq\frac{16.5}{\frac{s}{\sqrt{n}}}+\frac{225-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)\\
&\leq P_{\mu\geq 225}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\leq\frac{16.5}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)\\
&\approx P_{\mu=225}\left(\frac{\overline{X}-225}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\leq 0.6267\right)\\
\Rightarrow P&=\sup_{\mu\geq 225}P_{\mu\geq 225}\left(\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\leq\frac{\overline{x}-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}\right)\\
&\approx P_{\mu=225}\left(T\leq 0.6267\right),T\sim t(n-1)\\
&\approx 0.73
\end{aligned}
$$

可见 $P>\alpha$，因此不拒绝 H_0，有理由认为元件的寿命大于 225 小时.

12.3. *Solution.* 设其负重样本分别为满足 $X_1,\cdots X_n$，总体均值为 μ，则：

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1)$$

设 $H_0:\mu=8,H_1:\mu\neq 8$，则 P 值为：

$$P_{\mu=8}\left(\left|\overline{X}-8\right|\geq|\overline{x}-10|\right)=P_{\mu=10}\left(\frac{\left|\overline{X}-8\right|}{\frac{0.5}{\sqrt{50}}}\geq\frac{|\overline{x}-8|}{\frac{0.5}{\sqrt{50}}}\right)=P(|Z|\geq 2\sqrt{2})\approx 0.0047$$

显然均小于 0.05 和 0.01，因此在 $\alpha=0.05,0.01$ 检验标准下，均不准确.

12.4. *Solution.*

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\sim\chi(n-1)$$

设 $H_0:0<\sigma<0.1,H_1:\sigma\geq 0.1$.

则 P 值为：

$$
\begin{aligned}
&\sup_{0<\sigma<0.1}P_{0<\sigma<0.1}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\geq\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right)\\
&=P_{\sigma=0.1}\left(Q\geq\frac{(n-1)s^2}{0.1^2}\right),Q\sim\chi^2(n-1)\\
&\approx P(Q\geq 1.8544)\\
&\approx 0.9936
\end{aligned}
$$

可见 $P>\alpha$，因此不拒绝 H_0，则说明数据提供了足够的证据表明装入量的标准差小于 0.1 盎司.

12.5. *Solution.* 设两组实验数据分别为 $X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m$，则：

$$\frac{\left(\overline{X}-\overline{Y}\right)-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n}+\dfrac{S_2^2}{m}}} \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)$$

设 $H_0: \mu_1 = \mu_2, H_1: \mu_1 \neq \mu_2$，则 P 值为：

$$\begin{aligned} & P_{\mu_1=\mu_2}\left(\frac{\left|\overline{X}-\overline{Y}\right|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n}+\dfrac{S_2^2}{m}}} \geq \frac{|\overline{x}-\overline{y}|}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n}+\dfrac{S_2^2}{m}}}\right) \\ \approx & P_{\mu_1=\mu_2}(|Z| \geq 3.772) \\ \approx & 0.000162 \end{aligned}$$

可见 $P < \alpha$，故拒绝 H_0，即存在显著不同.

12.6. (1). *Solution.* 错误，P 值较小只能说明有很充分的理由否定原假设，仍然存在犯第一类错误的可能.

(2). *Solution.* 错误，P 值是原假设为真时，比得到样本观察结果更极端的结果出现的概率，对于原假设为真的概率需要通过 Bayes 假设检验计算.

(3). *Solution.* 错误，原因同 (1).

(4). *Solution.* 错误，原因同 (2).

(5). *Solution.* 错误，此概率即为犯第一类错误的概率，应该是 α，与 P 值无关.

(6). *Solution.* 错误，此概率即为不犯第二类错误的概率，也就是功效，与 P 值无关.

12.7. (1). *Solution.* X 的取值为 $0, 1, \cdots, 10$，则：

$$P(X|H_0) = \frac{1}{2^{10}}\binom{10}{X}, P(X|H_1) = \frac{7^X 3^{10-X}}{10^{10}}\binom{10}{X}, P(H_0) = P(H_1) = \frac{1}{2}$$

因此：

$$f(X) = \frac{P(H_0|X)}{P(H_1|X)} = \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \cdot \frac{P(X|H_0)}{P(X|H_1)} = \frac{5^{10}}{7^X 3^{10-X}}$$

当观测值 x 满足 $f(x) < 1$ 时拒绝 H_0，$f(x) > 1$ 时不拒绝.

具体来说 $x = 0, 1, \cdots, 6$ 时不拒绝 H_0，$x = 7, \cdots, 10$ 时拒绝 H_0.

而第一类错误概率为：

$$P_1 = \sum_{x=7}^{10} P(x|H_0) \approx 0.1719$$

第二类错误概率为：

$$P_2 = \sum_{x=0}^{6} P(x|H_1) \approx 0.3504$$

(2). *Solution.* X 的取值为 $0,1,\cdots,10$，则：

$$P(X|H_0)=\frac{1}{2^{10}}\binom{10}{X},P(X|H_1)=\frac{7^X3^{10-X}}{10^{10}}\binom{10}{X},P(H_0)=\frac{10}{11},P(H_1)=\frac{1}{11}$$

因此：

$$f(X)=\frac{P(H_0|X)}{P(H_1|X)}=\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\cdot\frac{P(X|H_0)}{P(X|H_1)}=\frac{10\times5^{10}}{7^X3^{10-X}}$$

当观测值 x 满足 $f(x)<1$ 时拒绝 H_0，$f(x)>1$ 时不拒绝.

具体来说 $x=0,1,\cdots,8$ 时不拒绝 H_0，$x=9,10$ 时拒绝 H_0.

而第一类错误概率为：

$$P_1=\sum_{x=9}^{10}P(x|H_0)\approx0.0107$$

第二类错误概率为：

$$P_2=\sum_{x=0}^{8}P(x|H_1)\approx0.8507$$

12.8. (1). *Solution.*

$$\chi_0^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}=1$$

若 H_0 为真，自由度为 5，P 值为：

$$P(\chi^2\geq\chi_0^2)\approx0.9626>\alpha=0.05$$

因此接受 H_0 即骰子均匀.

(2). *Solution.*

$$\chi_0^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{(O_i-E_i)^2}{E_i}=10$$

若 H_0 为真，自由度为 5，P 值为：

$$P(\chi^2\geq\chi_0^2)\approx0.0752>\alpha=0.05$$

因此接受 H_0 即骰子均匀.

相比于 (1) 中 P 值下降了很多，说明在同样比例的结果在数据规模变大情况下的出现概率会变小.