第 8 次作业

1. 尝试以简要框架形式给出概率部分知识的总结，并指出自己掌握起来相对困难的知识点.
2. 给出一个抽样调查实例，试指出你认为的其可能的不当之处.
3. （简单随机抽样）设总体的大小为 N，总体均值和方差分别为 μ,σ^2， X_i（$i=1,\cdots,n$）为简单随机样本（无放回抽取）.

   （1） *证明：$E(X_i)=\mu$，$Var(X_i)=\sigma^2$.

   （2） **证明：$E(\bar{X})=\mu$，$Var(\bar{X})=\dfrac{\sigma^2}{n}\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)$.

4. 设随机样本 X_i（$i=1,\cdots,n$）来自二项总体 $B(k,p)$.

   （1） 给出参数 k 和 p 的矩估计；

   （2） 尝试讨论上述估计的不足之处.

5. 设随机样本 X_i（$i=1,\cdots,n$）来自均匀分布 $U(\theta,2\theta)$，求 θ 的矩估计和极大似然估计.
6. 设函数 $f(x;a,\sigma)=(\sqrt{2\pi}\sigma^3)^{-1}(x-a)^2\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2\right)$， $x\in\mathbb{R}$，其中 $a\in\mathbb{R}$，$\sigma>0$ 为参数.

   （1） 证明：$f(x;a,\sigma)$ 作为 x 的函数是一个概率密度.

   （2） 设随机样本 X_i（$i=1,\cdots,n$）来自此总体，求 a 和 σ^2 的矩估计.

   （3） 列出 a,σ^2 的极大似然估计所满足的方程，并指出一种迭代求解的方法.

7. 设随机样本 X_i（$i=1,\cdots,n$）来自 Bernoulli 总体 $B(p)$，请给出参数 p 的矩估计和极大似然估计.

8. 设总体是总数为n，单元概率分别为$p_1,\cdots,p_m$（$p_1+\cdots+p_m=1$）的多项分布，X_i（$i=1,\cdots,m$）分别为m个单元的观测频数（$X_1+\cdots+X_m=n$）. 请给出参数p_i（$i=1,\cdots,m$）的极大似然估计.

9. 设总体X具有以下分布表

X 取值	1	2	3
概率	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中$0<\theta<1$是未知参数。已取得了样本值$x_1=1$，$x_2=2$，$x_3=1$，请据此求θ的矩估计值和极大似然估计值.

10. **设总体累积分布函数为$F(x)$未知，随机样本X_i（$i=1,\cdots,n$）来自该总体，$F_n(x)$为经验分布函数.

（1） 求$F_n(x)$的期望和方差

（2） 试证：$F_n(x)$依概率收敛于$F(x)$.

以下作为概率部分自测题目，建议测试时间不超过 40 分钟：

11. 某公司用三个当地酒店（记为 A,B,C）安排其客户住宿，根据过去经验可知分别有 20%，50%和 30%的客户被相应地分配到酒店 A，B 和 C 的房间. 已知酒店 A,B,C 的管道故障率分别为 5%,4%和 8%.

(1) 一个客户被分配到管道发生故障的房间的概率为多少？

(2) 如果一个客户被分到管道发生故障的房间，那么他是被分配到酒店 C 的概率是多少？

12. 有一条公路每天有大量汽车通过，公路上有一弯道处为事故多发地，已知在某时段每辆通过此地的车辆发生事故的概率为 0.001，每天该时段大约有 1000 辆车经过此弯道.

（1） 利用 Poisson 近似计算明天该时段在此弯道处发生事故车辆数不小于 2 的概率.

（2） 求接下来 30 天里至多有 1 天该时段在此弯道处发生事故车辆数不小于 2 的概率.（不必求其具体数值结果）

13. 设 X 的概率密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\theta}{x^{\theta+1}}, & x>1\\ 0, & x\le 1\end{cases}$，其中 $\theta>1$ 是未知参数.

（1） 求 X 的期望.

（2） 当 $X>1$ 时，令 $Y=\ln X$，求 Y 的分布.

14. *假设一批灯泡的使用寿命服从 $\lambda=1$ 的指数分布. 从这批灯泡中任取两个分别标记为 1 号和 2 号，先点亮 1 号灯泡并开始计时，等其熄灭后立即点亮 2 号灯泡，两灯泡亮的总时间记为 Y.

（1） 将 1 号灯泡的使用寿命记作 X，求当 $X=x>0$ 时 Y 的分布.

（2） 求 X,Y 的联合分布.

（3） 判断 X,Y 的独立性并说明理由.

（4） 已知 $X=a>0$ 的条件下，求 Y 值在均方误差意义下的最优预测.