

2.

双调巡游

可以先将所有节点按照横坐标从小到大排序,发现除去最左结点A进而最右结点B,将剩下结点分成两组,向左巡游即是从A出发,经过其中一组(按横坐标升序),到达B,向右巡游就是从B出发,经过另一组(按横坐标降序),到达A,所以对于每个点(除去端点),都可以分到两个组。

所以可以从最左第二个点到最右第二个点进行dp,当讨论到第*i*个结点的时候,有一组的最后一个节点肯定是*i-1*,有一组的最后一个结点肯定是*j* ($1 \leq j < i-1$),此时所有连线长度可以记做 $dp(i-1, j)$,若是第*i*个节点与*i-1*个结点相连,则可以去更新 $dp(i, j)$,若是第*i*个结点与第*j*个结点相连,则可以更新 $dp(i, i-1)$

可以得到递推式:

$$\begin{aligned} dp(i, i-1) &= \min dp(i-1, j) + dis(i-1, j) \quad (j < i-1) \\ dp(i, j) &= dp(i-1, j) + dis(i, i-1) \end{aligned}$$

此时时间复杂度为 $O(n^2)$, 由于计算每个点间的距离就需要 $O(n^2)$ 的时间,所以这应该是较好的复杂度了。

空间复杂度若是采用滚动数组可以从 $O(n^2)$ 降到 $O(n)$

整齐打印

第一个单词只能放在一行的开头,而后面的单词,能放在前面一个单词的后面(如果放的下的话),或者另起一行来放。

所以可以记录前一个单词放好以后有哪些情况(一种情况保留两个信息,一个是最后一行还剩几个空白,一个是这种情况除最后一行额外空格的立方之和)。

理论上每增加一种单词,会多出一种情况(这个单词单独占有一行的情况),但是也很可能其他的情况后面不能摆这个单词,只能另起一行,这样情况数就会减少,因此最坏复杂度为 $O(n^2)$, 大部分情况应该是到不了这个上界的

空间复杂度若是采用滚动数组可以从 $O(n^2)$ 降到 $O(n)$

斐波那契数列和

一个数是可以用来斐波拉契数列计数的,如 $16 = 1 * fib(6) + 1 * fib(3)$ ($fib(6) = 13, fib(3) = 3$), 因为我每次可以剪去 小于等于这个数 的最大一个斐波那契数列项,直到剪到等于0(若不等于0表示还可以继续剪)

而将斐波那契数列的某一项拆分的话, A_i 可以拆成 $\{A_{i-1}, A_{i-2}\}$, A_{i-1} 是不可以继续拆分的(因为拆分 A_{i-1} 必然还会再出现一个 A_{i-2}), 但可以拆分 A_{i-2} , 则可以继续拆分成 $\{A_{i-1}, A_{i-3}, A_{i-4}\}$, 可以推出第*i*个斐波那契数列可以有 $(i-1)/2$ 种拆法

所以一个数可以拆成斐波那契数列计数(每次减去最大的能减去的斐波那契数), 从大到小分别是 A_0, A_1, A_2, \dots , 分别是第 $pos_0, pos_1, pos_2, \dots$ 个斐波拉契数, 若是 A_1 拆分, 则可以将 A_0 在 $[A_1, A_0]$ 范围里拆分(若是拆分到小于 A_1 的话, 可以证明与 A_1 的拆分会重复), 若是 A_1 不拆分, 则可以将 A_0 在 $[A_1, A_0]$ 范围里拆分

可以得到递推式: (0表示不拆分, 1表示拆分)

$$dp[i][0] = dp[i+1][0] + dp[i+1][1]$$

$$dp[i][1] = dp[i+1][0] \times (pos[i] - pos[i+1] - 1)/2 + dp[i+1][1] \times (pos[i] - pos[i+1] - 1)/2$$

假设小于等于 $1e18$ 的斐波那契数列共有 c 项(c 应该是稍大于64的一个常数), 则一个数可以拆成斐波那契数列计数需要 $O(c)$ 时间, dp过程需要 $O(2c)$ 时间, 则一次需要的是常数时间, T 次询问需要 $O(cT)$

3.

a. 可以记 $dp(i, j)$ 表示X串遍历到第 i 个元素, Z串遍历到第 j 个元素, 而我们所要求的就是 $dp(m, n)$

根据六种操作, 可以得出以下递推关系式:

$$dp[i][j] = \min \begin{cases} dp[i-1][j-1] + cost(copy) & \text{if } x[i] = y[j] \\ dp[i-1][j-1] + cost(replace) & \text{if } x[i] \neq y[j] \\ dp[i-2][j-2] + cost(twiddle) & \text{if } x[i] = y[j-1] \ \&\& \ x[i-1] = y[j] \\ dp[i-1][j] + cost(delete) \\ dp[i][j-1] + cost(insert) \end{cases}$$

$$dp[m][n] = \min(dp[i][n] + cost(kill))$$

时间空间复杂度为 $O(mn)$

b. 可以进行类比, 若是两个位置相同, 则相当于copy, 两个位置不同(且都不是空格), 则相当于replace, 若两个位置有一个是空格, 则是delete或者是insert

由于编辑距离问题计算的是最小值, 所以可以让copy数值为-1, replace为1, delete或者insert为2, 不用kill和twiddle(可以让这两种操作cost为INF), 计算得到的最小值的相反数, 就是DNA问题的分数。