华东师范大学期中考试试卷

2017-2018学年　第二学期

课程名称: 概率统计　　　　**课程性质：**专业必修

专　　业:　　　　**年级/班级:**

姓　　名:　　　　**学　　号:**

★ 答案请写在答题纸上.　　　　试题共3页, 含1页统计表.

一. 填空题 (每题3分, 共30分)

1. 设随机变量X服从参数为6的泊松分布, 写出X的分布列_____.
2. 设A, B为两个随机事件, $P(A) = a$, $P(B) = b$, $P(B|\overline{A}) = c$, 则$P(A \cup B) =$ _____.
3. 设$D = (a_1, b_1] \times (a_2, b_2]$, 随机变量$(X, Y)$服从均匀分布$U(D)$, 则$X$的概率密度函数为$p_X(x) =$ _____.
4. 设随机变量X_1, X_2独立同分布, 都服从指数分布$Exp(1)$, 则随机变量$X_1 + X_2$服从_____分布(注明参数).
5. 从$0, 1, 2, 3$四个数字中随机地取两个不同的数相乘, 用X表示它们的乘积, 则随机变量X的分布函数为$F(x) =$ _____.
6. 设X服从正态分布$N(10, 4)$, 则概率$P(X \geq c) = 0.025$, 则$c =$ _____.
7. 设随机变量(X, Y)服从二维正态分布$N(0, 1; 0, 1; \rho)$, 则随机变量$X - Y$服从_____分布(注明参数).
8. 设随机变量X与Y独立, 且X服从两点分布$b(1, p)$, Y服从均匀分布$U(0, 1)$, 则$X + Y$的分布函数有_____个间断点.
9. 设随机变量X的概率密度函数为$p(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$, 则概率$P(X > 1/2) =$ _____.
10. 将两个不同的小球随机地放入编号分别为$1, 2, 3$的三个盒子中, 记X为空盒数, Y为不空盒子中的最小编号, 写出(X, Y) 的联合分布列_____.

二. 解答题 (第11-14题每题10分, 第15-16题每题15分; 共70分)

11. 设有三张卡片, 第一张两面皆为红色, 第二张两面皆为黄色, 第三张一面是红色一面是黄色. 随机地选择一张卡片并随机地选择其中一面. 如果已知此面是红色, 求另一面也是红色的概率(必须给出详细求解过程).

12. 设随机变量X的概率密度函数为$p(x) = \begin{cases} axe^{-x}, & x > 0; \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$, 求常数$a$和随机变量$X$的分布函数$F(x)$.

13. 设X的分布函数为$F_X(x)$, a与b都是已知的实数, 且$a < b$, 求随机变量

$$Y = \begin{cases} a, & X < a, \\ X, & a \le X < b, \\ b, & X \ge b. \end{cases}$$

的分布函数$F_Y(y)$.

14. 设随机变量X服从均匀分布$U(0,1)$, 求随机变量$Y = -2\ln X$的概率密度函数$p_Y(y)$.

15. 设随机变量X服从均匀分布$U(0,1)$, 随机变量Y服从指数分布$Exp(1)$, 且X与Y相互独立, 求
(1)随机变量$T = X - Y$的概率密度函数$p_T(t)$,
(2)概率$P\left(Y - X > \frac{1}{2}\right)$.

16. 设随机变量(X, Y)的概率密度函数为

$$p(x, y) = \begin{cases} cx^2y, & x^2 \le y \le 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求
(1)常数c的值,
(2)随机变量X的概率密度函数$p_X(x)$,
(3)随机变量Y的概率密度函数$p_Y(y)$.

三. 附加题(5分)

17. 至少给出5条你对当前所考课程教学的意见或建议.

附表　标准正态分布函数表

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t$$

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.877	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990	0.9990

参考答案

1. $P(X=k)=\dfrac{6^k}{k!}e^{-6}, k=0,1,2,\cdots$

2. $a+(1-a)c$

3. $p_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b_1-a_1}, & a_1<x<b_1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

4. $Ga(2,1)$

5. $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1/2, & 0\le x<2,\\ 2/3, & 2\le x<3,\\ 5/6, & 3\le x<6,\\ 1, & x\ge 6.\end{cases}$

6. 13.92

7. $N(0,2-2\rho)$

8. 0

9. $\dfrac{1}{8}$

10.

$X \backslash Y$	1	2	3
1	4/9	2/9	0
2	1/9	1/9	1/9

11. 设B_i表示事件"选择的是第i张卡片", $i=1,2,3$, A表示事件"随机地选择一张卡片并随机地选择其中一面, 发现此面是红色". 则由已知$P(A|B_1)=1$, $P(A|B_2)=0$, $P(A|B_3)=\dfrac{1}{2}$. $P(B_i)=\dfrac{1}{3}$. 于是, 由Bayes公式, 所求概率为

$$P(B_1|A)=\frac{P(A|B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{3}P(A|B_i)P(B_i)}=\frac{1\cdot 1/3}{1\cdot 1/3+0\cdot 1/3+1/2\cdot 1/3}=\frac{2}{3}.$$

12. 由概率密度函数的正则性知,

$$1=\int p(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\infty}axe^{-x}\mathrm{d}x=a,$$

即$a=1$.

分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_0^x te^{-t}\mathrm{d}t, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases} = \begin{cases} 1 - (x+1)e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

13. 由分布函数的定义知, Y的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \le y) = P(Y \le y, X < a) + P(Y \le y, a \le X < b) + P(Y \le y, X \ge b) \\ =& P(a \le y, X < a) + P(X \le y, a \le X < b) + P(b \le y, X \ge b) \\ =& \begin{cases} 0, & y < a, \\ F_X(y), & a \le y < b, \\ 1, & y \ge b. \end{cases} \end{aligned}$$

14. $X \sim U(0,1)$, 故X的概率密度函数为$p_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$.

$y = -2\ln x$单调, 且有反函数$h(y) = e^{-\frac{y}{2}}$, $h'(y) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}$, 故$Y = -2\ln X$的概率密度函数为

$$p_Y(y) = p_X(h(y))|h'(y)| = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

15. 易知X与Y的概率密度函数分别为

$$p_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \qquad p_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

由卷积公式, $T = X - Y$的概率密度函数为

$$p_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(x-t)\mathrm{d}x.$$

被积函数$p_X(x)p_Y(x-t)$的非零区域为

$$\{(x,t) : 0 < x < 1, x - t > 0\} = \{(x,t) : t < 1, t \vee 0 < x < 1\}.$$

故$T = X - Y$的概率密度函数为

$$p_T(t) = \int_{-\infty}^{\infty} p_X(x)p_Y(x-t)\mathrm{d}x = \begin{cases} \int_{t\vee 0}^{1} e^{-(x-t)}dx, & t < 1, \\ 0, & t \ge 1. \end{cases} = \begin{cases} e^t - e^{t-1}, & t \le 0, \\ 1 - e^{t-1}, & 0 < t < 1, \\ 0, & t \ge 1. \end{cases}$$

所求概率为

$$P\left(Y-X>\frac{1}{2}\right)=P\left(T<-\frac{1}{2}\right)=\int_{-\infty}^{-1/2} p_T(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{-1/2}(e^t-e^{t-1})\mathrm{d}t=e^{-1/2}-e^{-3/2}.$$

16. 由概率密度函数的正则性,

$$1=\iint p(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{1}cx^2y\mathrm{d}y=\frac{4}{21}c$$

解得$c=21/4$.

X的概率密度函数为

$$p_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\displaystyle\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}y, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{21}{8}x^2(1-x^4), & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1.\end{cases}$$

Y的概率密度函数为

$$p_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}\frac{21}{4}x^2y\mathrm{d}x, & 0\le y\le 1;\\ 0, & y<0\text{或}y>1.\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{7}{2}y^{5/2}, & 0\le y\le 1;\\ 0, & y<0\text{或}y>1.\end{cases}$$

17. 略.