

1. 由题意: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$;

则 $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $AB = \emptyset$

$\bar{A} = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\bar{B} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

2. $\bar{A} = \{x \in \Omega : x < 1 \text{ or } x > 5\}$, $A \cup B = \{x \in \Omega : 1 \leq x < 7\}$

$B\bar{C} = \{x \in \Omega : 3 < x < 7\}$, $\bar{A} \cap \bar{B} \cap \bar{C} = \{x \in \Omega : 0 \leq x < 1 \text{ or } x \geq 7\}$

$(A \cup B)C = \emptyset$

3.(1) \bar{A} = "掷三枚硬币, 至少有一次为反面";

(2) \bar{B} = "抽检一批产品, 最多有两个次品";

(3) \bar{C} = "射击三次, 至少命中两次"

4. 原命题等价于对于任意正整数n:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^n A_i} = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i, \quad \overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

首先对于左边的式子, 当n = 1时显然成立, 当n = 2时, 由 $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$, 可知上式成立

当假设当n = k时, 上面的式子成立, 即:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^k A_i} = \bigcap_{i=1}^k \bar{A}_i$$

当n = k + 1时:

$$\begin{aligned} \overline{\bigcup_{i=1}^{k+1} A_i} &= \overline{A_1 \cup A_2 \dots \cup A_{k-1} \cup (A_k \cup A_{k+1})} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \dots \cap \bar{A}_{k-1} \cap \overline{(A_k \cup A_{k+1})} \\ &= \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \dots \cap \bar{A}_{k-1} \cap (\bar{A}_k \cap \bar{A}_{k+1}) = \bigcap_{i=1}^{k+1} \bar{A}_i \end{aligned}$$

也满足左式, 所以有数学归纳法可得左式成立;

对于右式, 可以由左式得到:

$$\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i} = \overline{\overline{\overline{\bigcap_{i=1}^n A_i}}} = \overline{\overline{\bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i}} = \bigcup_{i=1}^n \bar{A}_i$$

5.(1) 由于 $A, B \in F$, 根据事件域的定义, $A \cup B \in F$

(2) $AB = \overline{\overline{A \cup B}}$, 由 $A, B \in F \rightarrow \bar{A}, \bar{B} \in F \rightarrow \overline{\overline{A \cup B}} \in F$, 可得 $AB \in F$

(3) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$, 由于 $\bar{B} \in F$, $\rightarrow A \cap \bar{B} \in F$ (由2的结论), 可得 $A \setminus B \in F$

(4) $A \triangle B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$, 由于 $A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B \in F$ (由3的结论), 可得 $A \triangle B \in F$

6.(1). 证明 $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

对于任意 $\omega \in A(B \cup C) \rightarrow \omega \in A, \omega \in B$ 或 $\omega \in C$, 当 $\omega \in B \rightarrow \omega \in AB \rightarrow \omega \in (AB) \cup (AC)$, 同理当 $\omega \in C, \omega \in (AB) \cup (AC)$

而对于任意 $\omega \in (AB) \cup (AC) \rightarrow \omega \in AB$ 或 $\omega \in AC$, 当 $\omega \in AB, \omega \in A$ 且 $\omega \in B \cup C$, 则 $\omega \in A(B \cup C)$, 同理当 $\omega \in AC, \omega \in A(B \cup C)$

综上, $A(B \cup C) = (AB) \cup (AC)$

(2). 证明 $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$

对于任意 $\omega \in A \cup (BC)$, 则 $\omega \in A$ 或 $\omega \in BC$, 当 $\omega \in A, \omega \in A \cup B$ 且 $\omega \in A \cup C$, 得出 $\omega \in (A \cup B)(A \cup C)$, 当 $\omega \in BC$, 则 $\omega \in B$ 且 $\omega \in C$, 则 $\omega \in A \cup B$ 且 $\omega \in A \cup C$, 得 $\omega \in (A \cup B)(A \cup C)$

对于任意 $\omega \in (A \cup B)(A \cup C)$, 得 $\omega \in A \cup B$ 且 $\omega \in A \cup C$, 则当 $\omega \in A$ 时, $\omega \in A \cup (BC)$, 否则, $\omega \in B$ 且 $\omega \in C$, 得 $\omega \in BC$, 则 $\omega \in A \cup (BC)$

综上, $A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$

7. 证明 : (1) 当取 $A = \Omega \rightarrow AB = B = \Omega_B$, 则 $\Omega_B \in F_B$

(2). 对于 $AB \in F_B$, 对于任意 $\omega \in AB \rightarrow \omega \in B$, 则 $AB \subset \Omega_B$, 则 $\overline{AB} = B - AB$, 所以对于任意 $\omega \in \overline{AB}, \omega \in \Omega_B$, 推出 $\overline{AB} \in F_B$

(3) 对于任意 $A_1 B \in F_B, A_2 B \in F_B, A_1 B \cup A_2 B = (A_1 \cup A_2)B$, 而 $A_1 \in F, A_2 \in F$, 可推出 $(A_1 \cup A_2) \in F$, 则 $(A_1 \cup A_2)B \in F_B$

由以上三条可以推出 F_B 为 Ω_B 上的事件域