2.设随机变量X服从指数分布$Exp(\lambda)$，求$X^{1/a}$($a>0$为常数)的分布（此分布称为Weibull分布）

解：记$F_Y(y)$是$Y=X^{1/a}$的分布函数.

由X服从指数分布$Exp(\lambda)$可知X的分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$$

$$y\le 0, F_Y(y)=0$$

$$y>0,\quad F_Y(y)=P(Y\le y)=P\left(X^{\frac{1}{a}}\le y\right)=P\left(X\le y^a\right)=F_X\left(y^a\right)=1-e^{-\lambda y^a}$$

所以$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y^a}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}$

4. 设随机变量X与Y分别服从指数分布$Exp(\lambda_1)$和$Exp(\lambda_2)$, 且相互独立, 分别求出随机变量$X+Y$, $\max(X,Y)$ 和$\min(X,Y)$的分布.

解. 显然, X与Y的概率密度函数分别

$$p_X(x)=\begin{cases}\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad p_Y(y)=\begin{cases}\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

分布函数分别

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

记$Z=X+Y, T=\max(X,Y), S=\min(X,Y)$.

由卷积公式, $Z=X+Y$的概率密度函数为

$$p_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}p_X(x)p_Y(z-x)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2(z-x)}\mathrm{d}x, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

于是, 当$\lambda_1=\lambda_2=\lambda$时, $Z=X+Y$的概率密度函数为$p_Z(z)=\begin{cases}\lambda^2 z e^{-\lambda z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

当$\lambda_1\neq\lambda_2$时, $Z=X+Y$的概率密度函数为$p_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\left(e^{-\lambda_2 z}-e^{-\lambda_1 z}\right), & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$

由分布函数的定义和独立性, $T=\max(X,Y)$的分布函数为

$$F_T(t) = P(T \le t) = P(X \le t, Y \le t) = P(X \le t)P(Y \le t) = F_X(t)F_Y(t) = \begin{cases} (1-e^{-\lambda_1 t})(1-e^{-\lambda_2 t}), & t > 0, \\ 0, & t \le 0. \end{cases}$$

类似地, $S = \min(X, Y)$的分布函数为

$$F_S(s) = P(S \le s) = 1 - P(X > s, Y > s) = 1 - (1 - F_X(s))(1 - F_Y(s)) = \begin{cases} (1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)s}), & s > 0, \\ 0, & s \le 0. \end{cases}$$

即$S = \min(X, Y)$服从指数分布$Exp(\lambda_1 + \lambda_2)$. □

6. 设随机变量X服从标准正态分布$N(0, 1)$, $a > 0$, 记

$$Y = \begin{cases} X, & |X| < a; \\ -X, & |X| \ge a. \end{cases}$$

求随机变量Y的分布.

解. 由定义, Y的分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) =& P(Y \le y) = P(Y \le y, |X| < a) + P(Y \le y, |X| \ge a) \\ =& P(X \le y, |X| < a) + P(X \ge -y, |X| \ge a) \\ =& \begin{cases} P(\emptyset) + P(X \ge -y) & y < -a, \\ P(-a < X \le y) + P(X \ge a), & |y| \le a, \\ P(|X| < a) + P(-y \le X \le -a\text{或}X \ge a), & y > a. \end{cases} \\ =& \Phi(y) \end{aligned}$$

故$Y \sim N(0, 1)$. □

8.设随机变量 $X \sim U(0,1)$, 分别求出随机变量 $\left(X-\frac{1}{2}\right)^2$ 和$\sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$ 的分布.

解: (1) 令 $Y = (X - 1/2)^2$,记 $F_Y(y) = P(Y \le y) = P\left((X - 1/2)^2 \le y\right)$.

$y < 0, F_Y(y) = 0$

$y \ge 0, F_Y(y) = P(1/2 - \sqrt{y} \le X \le 1/2 + \sqrt{y}) = F_X\left(\frac{1}{2} + \sqrt{y}\right) - F_X\left(\frac{1}{2} - \sqrt{y}\right)$

当 $y > \frac{1}{4}$ 时, $F_X\left(\frac{1}{2} + \sqrt{y}\right) = 1, F_X\left(\frac{1}{2} - \sqrt{y}\right) = 0$ 所以

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ 2\sqrt{y} & 0 < y \le \frac{1}{4} \\ 1 & \frac{1}{4} < y \end{cases}$$

(2)类似地,今 $Z = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = \begin{cases} 0 & ,z \le 0 \\ P\left(X \le \frac{2}{\pi}\arcsin(z)\right) & ,0 < z \le 1 \\ 1 & ,1 < z \end{cases} = \begin{cases} 0 & ,z \le 0 \\ \frac{2}{\pi}\arcsin(z) & ,0 < z \le 1 \\ 1 & ,1 < z \end{cases}$$

10. 设随机变量X服从指数分布$Exp(\lambda)$, 求$Y = [X]$($[a]$表示小于a的最大整数)的分布.

解. 显然, Y可能取值于$0, 1, 2, \cdots$. Y的分布列为

$$P(Y = k) = P(k \leq X < k + 1) = \int_k^{k+1} p(x)\mathrm{d}x = \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x}\mathrm{d}x = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} = (1 - e^{-\lambda})e^{-\lambda k},$$

其中$k = 0, 1, 2, \cdots$ 故$Y + 1$服从几何分布$Ge(1 - e^{-\lambda})$. □

标准正态分布分布函数常用：Φ（x）
标准正态分布密度函数常用：ϕ(x)
（大小写的区别）