计算看是否落入拒绝域而加以判断. 在给定显著性水平$\alpha$下, 依据样本观测值要么拒绝原假设$H_0$, 要么接受$H_0$. 显然, $\alpha$越大, 就越容易拒绝$H_0$; $\alpha$ 越小, 就越不容易拒绝$H_0$. 实际应用中, 为了便于使用假设检验, 我们有下面的定义.

♣**定义7.1.4** 在假设检验问题中, 由样本观测值能够作出拒绝原假设的最小显著性水平称为该**检验的**$p$**值**.

♠**注记7.1.5** 有了检验的$p$值, 只需要将检验水平$\alpha$与$p$值进行对照比较大小, 即可方便地作出拒绝或接受$H_0$的推断:

(1) 若$\alpha \geqslant p$, 则在显著性水平$\alpha$下拒绝$H_0$.

(2) 若$\alpha < p$, 则在显著性水平$\alpha$下接受$H_0$.

在实践中, 当$\alpha = p$时, 为慎重起见, 通常需要增加样本容量$n$, 重新进行抽样检验.

▶**例7.1.6** 在例7.1.1中, 检验统计量为$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma}\sqrt{n}$, 在显著性水平$\alpha$下, 拒绝域为$W = \{|U| \geqslant u_{1-\alpha/2}\}$. 代入样本观测值计算可得$|U| = 2.2$. 据此可以由$u_{1-p/2} = 2.2$, 查标准正态分布函数表, 得到$p = 0.0278$. 此即为该假设检验的$p$值. 题目中给定$\alpha = 0.05$, 而$0.05 > 0.0278$, 故拒绝$H_0$. 倘若现在给定显著性水平为0.01, 则由于$0.01 < 0.0278$, 从而接受$H_0$.

### 习题7.1

1. 在假设检验问题中, 若检验结果是接受原假设, 则检验可能犯哪一类错误? 若检验结果是拒绝原假设, 则又可能犯哪一类错误?
2. 在假设检验问题中, 检验水平$\alpha$的意义是什么?
3. 设$X_1, \ldots, X_n$是来自正态总体$N(\mu, 1)$的样本, 考虑如下假设检验问题
$$H_0: \mu = 2, \qquad H_1: \mu = 3$$
若检验由拒绝域$W = \{\overline{X} \geqslant 2.6\}$确定.
(1)当$n = 20$时, 求检验犯两类错误的概率;
(2)证明当$n \to \infty$时, $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$.
(3)如果要使得检验犯第二类错误的概率$\beta \leqslant 0.01$, $n$ 最小应取多少?
4. 在一个检验问题中采用$u$检验, 其拒绝域为$W = \{U \geqslant 1.645\}$, 据样本求得$U = 2.94$, 求检验的$p$值.

## 7.2 单个正态总体未知参数的假设检验问题

本节我们来考虑单个正态总体的未知参数的假设检验问题. 设总体$X$服从正态分

对给定的检验水平$\alpha$, 相应的拒绝域分别为

$$W_1 = \{\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\},$$

和

$$W_2 = \{\chi^2 \leqslant \chi^2_{\alpha}(n-1)\}.$$

▶**例7.2.6** 某种导线电阻服从正态分布, 生产标准要求其电阻的标准差不得超过0.005欧姆, 今在生产的一批这种导线中取样品9根, 测得$s = 0.007$欧姆, 问在显著性水平$\alpha = 0.05$下能否认为这批导线的标准差显著偏大?

解 注意到总体分布中的均值$\mu$未知.

(1)考虑关于参数$\sigma$的假设检验问题.

$$H_0 : \sigma \leqslant \sigma_0 = 0.005, \qquad H_1 : \sigma > \sigma_0.$$

(2)总体均值$\mu$未知, 选取检验统计量$\chi^2 = \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$.

(3)在检验水平$\alpha$下, 拒绝域$W = \{\chi^2 \geqslant \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\}$.

(4)当$\alpha = 0.05$时, 查卡方分布分位数表得$\chi^2_{0.95}(8) = 15.5073$; 代入样本数据$s = 0.007$计算得

$$\chi^2 = \frac{(9-1)\cdot 0.007^2}{0.005^2} = 15.68 > 15.5073.$$

即样本落在拒绝域内, 从而拒绝$H_0$. 故在显著性水平$\alpha = 0.05$下能认为这批导线的标准差显著偏大. □

♠**注记7.2.7** 正态总体的参数假设检验与其区间估计是相互对应的. 置信水平为$1-\alpha$的置信区间对应同一参数显著性水平为$\alpha$的双边检验的接受域, 枢轴量与检验统计量相对应. 例如, 当$\sigma$已知时, 参数$\mu$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间是

$$\left[\overline{X} - u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

其正好与参数$\mu$的$u$-检验相对应.

## 习题7.2

1. 某电器零件的平均电阻(单位:欧姆)一直保持在2.64, 改变加工工艺后，测得100个零件的平均电阻为2.62, 如改变工艺前后电阻的标准差保持在0.06, 问新工艺对此零件的电阻有无显著影响(假设检验水平为0.01).
2. 某工厂宣称该厂日用水量平均为350公升, 抽查11天的日用水量的记录为

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 340 | 344 | 362 | 375 | 356 | 380 | 354 | 364 | 332 | 402 | 340 |

假设用水量服从正态分布, 能否同意该厂的看法?(设检验水平为0.05, 用水越少越好)

3. 根据去年的调查, 某城市一个家庭每月的耗电量服从正态分布$N(32,10^2)$, 为了确定今年家庭平均每月耗电量有否提高, 随机抽查100个家庭, 统计得他们每月的耗电量的平均值为34.25, 你能作出什么样的结论(检验水平取为0.05)?
4. 假设某产品的重量服从正态分布, 现在从一批产品中随机抽取16件, 测得平均重量为820克, 标准差为60克, 试以显著性水平$\alpha = 0.05$检验这批产品的平均重量是否是800克.
5. 测定某种溶液中的水分, 它的10个测定值给出样本均值$\bar{x} = 0.452\%$, 样本标准差$s = 0.037\%$, 设测定值总体为正态分布, $\sigma^2$为总体方差. 试在水平5% 下检验假设
$$H_0: \sigma = 0.04\% \quad vs \quad H_1: \sigma \neq 0.04\%.$$
6. 某工厂所生产的某种细纱支数的标准差为1.2, 现从某日生产的一批产品中随机抽16缕进行支数测量, 求得样本标准差为2.1, 问纱的均匀度是否变劣(假设检验水平为0.05).

## 7.3 双正态总体未知参数的假设检验问题

本节我们来考虑两个正态总体下的未知参数的假设检验问题. 设总体$X$服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$, 总体$Y$服从正态分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$, 且$X$与$Y$相互独立. 又设$X_1,\ldots,X_m$和$Y_1,\ldots,Y_n$分别是来自总体$X$ 与$Y$ 的两个相互独立的样本, 相应的样本均值和样本方差分别记为:
$$\overline{X} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i, \qquad S_X^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2;$$
$$\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j, \qquad S_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \overline{Y})^2.$$
我们将要考虑关于参数$\mu_1 - \mu_2$和$\sigma_1^2/\sigma_2^2$的假设检验问题.

### 7.3.1 双正态总体均值差的假设检验问题

本小节中, 记$\theta = \mu_1 - \mu_2$, $\theta_0 = 0$, 考虑如下的三类假设检验问题:

(i) $H_0: \theta \leqslant \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta > \theta_0;$

(ii) $H_0: \theta \geqslant \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta < \theta_0;$

(iii) $H_0: \theta = \theta_0 \quad vs \quad H_1: \theta \neq \theta_0.$

这三类假设检验所采用的检验统计量都是相同的, 差别在拒绝域上.

下面分四种情形来考虑, 为节约篇幅, 我们仅简要地给出检验统计量和三个拒绝域.

故选择$F$为检验统计量，在显著性水平$\alpha$下，三类假设检验问题的拒绝域依次为

$$W_1 = \{F \geqslant F_{1-\alpha}(m-1, n-1)\},$$
$$W_2 = \{F \leqslant F_\alpha(m-1, n-1)\}$$

和$W_3 = \{F \leqslant F_{\alpha/2}(m-1, n-1)$或$F \geqslant F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)\}$.

上述利用$F$统计量得出的检验方法称为$F-$检验法.

♠**注记7.3.3** 读者可以自行考虑：对$\mu_1$和$\mu_2$已知或有一个已知时的情形，该如何选用检验统计量和相应的拒绝域.

▶**例7.3.4** 甲乙两台机床加工某种零件，零件的直径服从正态分布，其中方差反映了加工精度．现从各自加工的零件中分别抽取了8件和7件样品，测得直径(单位：毫米)为

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 机床甲： | 20.5 | 19.8 | 19.7 | 20.4 | 20.1 | 20.0 | 19.0 | 19.9 |
| 机床乙： | 20.7 | 19.8 | 19.5 | 20.8 | 20.4 | 20.2 | 19.6 | |

试问在显著性水平$\alpha = 0.05$下可否认为这两台机床加工的零件精度一致？

解 设甲乙两机床生产的零件直径分别为$X$和$Y$，则$X$和$Y$依次服从正态分布$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$．考虑假设检验问题：

$$H_0: \sigma_1 = \sigma_2, \qquad H_1: \sigma_1 \neq \sigma_2$$

采用$F$检验，检验统计量为$F = \dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$，在显著性水平$\alpha$下，拒绝域为

$$W = \{F \leqslant F_{\alpha/2}(m-1, n-1) \text{或} F \geqslant F_{1-\alpha/2}(m-1, n-1)\}.$$

经计算得$s_X^2 = 0.2164$, $s_Y^2 = 0.2729$．于是$F = \dfrac{0.2164}{0.2729} = 0.793$.

当$\alpha = 0.05$时，查表得$F_{0.975}(7, 6) = 5.70$，而

$$F_{0.025}(7, 6) = \frac{1}{F_{0.975}(6, 7)} = \frac{1}{5.12} = 0.195.$$

由于$0.195 < 0.793 < 5.70$，故接受$H_0$，即在显著性水平$\alpha = 0.05$下可认为这两台机床加工的零件精度一致． □

## 习题7.3

1. 甲、乙两厂生产相同规格的灯泡，寿命$X$与$Y$分别服从正态分布$N(\mu_1, 84^2)$和$N(\mu_2, 96^2)$．现从两厂生产的灯泡中各取60只，测得甲厂灯泡平均寿命为1295小时，乙厂灯泡平均寿命为1230小时，问在检验水平$\alpha = 0.05$下能否认为两厂灯泡寿命无显著差异.

2. 假设甲、乙两煤矿所出煤的含灰率分别服从正态分布$N(\mu_1, \sigma_1^2)$和$N(\mu_2, \sigma_2^2)$．为检验这两个煤矿的含灰率有无显著差异，从两矿中各取若干份，分析结果为：

甲矿：24.3， 18.8， 22.7， 19.3， 20.4 (%)

乙矿：25.2, 28.9, 24.2, 26.7, 22.3, 20.4 (%)
试在水平$\alpha = 0.05$之下，检验"含灰量无差异"这个假设.

3. 随机地挑选20位失眠者，分别服用甲、乙两种安眠药，记录下他们睡眠的延长时间(单位：小时)，得到数据如下：
服用甲药：1.9, 0.8, 1.1, 0.1, −0.1, 4.4, 5.6, 1.6, 4.6, 3.4
服用乙药：0.7, −1.6, −0.2, −0.1, 3.4, 3.7, 0.8, 0, 2.0, −1.2
试问水平$\alpha = 0.05$下能否认为甲药的疗效显著地高于乙药？(提示：考虑假设检验问题$H_0 : \mu_1 = \mu_2$, $H_1 : \mu_1 > \mu_2$.)
4. 从某锌矿的东西两支矿脉中，各抽取样本容量分别为8与9的样本进行测试，计算得样本含锌平均数及样本方差如下：
东支：$\bar{x} = 0.269, s_1^2 = 0.1736$
西支：$\bar{x} = 0.230, s_2^2 = 0.1337$
问东西两支矿脉含锌量的平均值是否可以看作一样(假设检验水平$\alpha = 0.10$)？
5. 有两台机器生产金属部件，重量都服从正态分布，分别在两台机器所生产的部件中各取一容量$m = 60$ 和$n = 40$的样本，测得部件重量的样本方差分别为$s_1^2 = 15.46$和$s_2^2 = 9.66$，设两样本相互独立，试在水平$\alpha = 0.05$下检验两台机器生产金属部件的重量方差是否相等.
6. 用两种方法生产某种化工产品的产量均服从正态分布，需要检验这两种方法的产量的方差是否相同，为此用第一种方法生产10 批，其样本方差为0.14，用第二种方法生产11批，其样本方差为0.25，你能得出什么结论？(设检验水平$\alpha = 0.05$)
7. 某种作物有甲、乙两个品种，为了比较它们的优劣，两个品种各种10亩，假设亩产量服从正态分布，收获后测得甲品种的亩产量(单位:千克)的均值为30.97，标准差为26.7；乙品种的亩产量的均值为21.79，标准差为12.1，取检验水平为0.01，能否认为这两个品种的产量没有差别？(提示：先检验两个品种的亩产量的方差是否相等，再检验均值是否相等.)

## *7.4 补充

前面讨论的假设检验问题，总体服从的分布类型是已知的，只是分布中的某个参数未知，例如知道总体服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，但$\mu$ 或$\sigma^2$未知，这类已知分布检验参数的假设检验问题，我们称之为参数假设检验问题. 但是在实际问题中，总体的分布类型常常是不知道的，这类在未确切了解总体的分布类型的情形下，需要根据样本对总体的分布类型的各种假设进行检验的问题，就是非参数检验. 本节我们补充讲述两种非参数检验：分布检验和独立性检验.