Discrete Mathematics

2019~2020 (第一学期)

Department of Computer Science, East China Normal University

September 10, 2019

Chapter 3 PROPOSITIONAL LOGIC

Outline of §-2 Proposition Calculus

命题公式等值

Definition (命题公式等值)

命题公式 A 和 B 等值 ($A = B$): A 和 B 对任意赋值都取相同的真值.

例如: $(A \to B) = (\neg A \vee B)$.

证明两个命题公式相等的方法:

1. 比较它们的真值表
2. 等值演算 (see the next subsection)
3. 范式 (see the next section)

命题公式等值

证明: $(p \wedge q) \vee r = (p \vee r) \wedge (q \vee r)$.

p	q	r	$p \vee r$	$q \vee r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$(p \vee r) \wedge (q \vee r)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	1	0	1	1
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

等值演算

设 A, B, C 是任意的命题公式.

1. 等幂律: $A \wedge A = A$, $A \vee A = A$.
2. 零律: $A \wedge 0 = 0$, $A \vee 1 = 1$.
3. 同一律: $A \vee 0 = A$, $A \wedge 1 = A$.
4. 排中律: $A \vee \neg A = 1$.
5. 矛盾律: $A \wedge \neg A = 0$.
6. 双重否定: $\neg\neg A = A$.
7. 交换律: $A \wedge B = B \wedge A$, $A \vee B = B \vee A$.
8. 结合律: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$, $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.

等值演算

设 A, B, C 是任意的命题公式.

9. 分配律: $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$,
   $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
10. 吸收律: $A \wedge (A \vee B) = A$, $A \vee (A \wedge B) = A$.
11. 德·摩根律: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.
12. 蕴涵恒等式: $A \rightarrow B = \neg A \vee B$.
13. 假言易位: $A \rightarrow B = \neg B \rightarrow \neg A$.
14. 等价恒等式: $A \leftrightarrow B = (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

等值演算

证明: $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) = \neg p \wedge \neg q$.

Proof.

$$
\begin{aligned}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) &= \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) && \text{(德·摩根律)} \\
&= \neg p \wedge (\neg\neg p \vee \neg q) && \text{(德·摩根律)} \\
&= \neg p \wedge (p \vee \neg q) && \text{(双重否定)} \\
&= (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(分配律)} \\
&= 0 \vee (\neg p \wedge \neg q) && \text{(矛盾律)} \\
&= \neg p \wedge \neg q. && \text{(同一律)}
\end{aligned}
$$

□

等值演算

证明: $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ 是永真式.

Proof.

$$
\begin{aligned}
(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &= \neg(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{(蕴涵恒等式)} \\
&= (\neg p \vee \neg q) \vee (p \vee q) && \text{(德·摩根定律)} \\
&= (\neg p \vee p) \vee (\neg q \vee q) && \text{(结合律)} \\
&= 1 \vee 1 && \text{(排中律)} \\
&= 1 && \text{(等幂律)}
\end{aligned}
$$

□

对偶原理

几个观察

1. $\wedge$ 和 $\vee$ 的结合律与命题公式的简化记法.
2. 命题公式的恒等式与集合公式的恒等式之间的高度相似性.
3. 对偶原理也成立.

Definition (dual formula)

命题公式 A 的对偶式 A^*: 若 A 仅含 $\neg, \wedge, \vee$, 将 $\wedge, \vee, 0, 1$ 分别替换成 $\vee, \wedge, 1, 0$.

Theorem (the principle of duality)

对于任意命题公式 A 和 B, $A = B$ 当且仅当 $A^* = B^*$.

Homework

1. P. 50: Exercises 11, 12(1), 15.

Outline of §-3 Normal Form

范式: 公式的规范形式

5个联结词是否足以描述所有的逻辑关系? 是否都是必须的?

3.3.1 主析取范式

3.3.2 主合取范式

3.3.3 联结词的功能完备集

主析取范式

Definition (主析取范式)

文字 (literal): 命题变量或命题变量的否定 (如 $p, \neg p$).
极小项: 文字的合取式, 每个命题变量都出现一次.
主析取范式(disjunctive normal form, DNF): 极小项的析取式, 与原命题公式等值.

例如: $(A \to B) = (\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B)$.

极小项的编号

极小项的编号

命题公式 A 含 n 个命题变量, A 的极小项含 n 个文字, 将它们按指定的顺序排列, 命题变量记作 1, 命题变量的否定记作 0, 得到长度为 n 的二进制串, 其数值 k 即为该极小项的编码, 该极小项记为 m_k.

极小项的编码的二进制串对应于其唯一的成真赋值.
如, $p \wedge \neg q$ 是含两个命题变量的公式的一个极小项, 编码为 10, 即 2, $p = 1, q = 0$ 是这个极小项唯一的成真赋值.

示例

求与 $(\neg p \to r) \to q$ 等值的主析取范式.

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee r$	$(\neg p \to r) \to q$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

示例

求与 $(\neg p \to r) \to q$ 等值的主析取范式.
5 个成真赋值对应的极小项: m_0, m_2, m_3, m_6, m_7.

$$
\begin{aligned}
(\neg p \to r) \to q &= m_0 \vee m_2 \vee m_3 \vee m_6 \vee m_7 \\
&= (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \\
&\quad \vee (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r).
\end{aligned}
$$

唯一性

Theorem

每个命题公式都存在唯一的主析取范式.

任意非永假的命题公式都存在与之等值的主析取范式, 该主析取范式恰由与命题公式的成真赋值所对应的极小项组成. 若再固定命题变量的顺序, 则与一个命题公式等值的主析取范式是唯一的.

计算步骤

主析取范式的计算步骤:

1. 消去 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$, (蕴涵和等价恒等式)
2. 内移 $\neg$, 使 $\neg$ 只作用在命题变量上, (德·摩根律和双重否定)
3. 展开为合取式的析取, ($\wedge$ 关于 $\vee$ 的分配律)
4. 补足各合取式所缺失的命题变量. (同一律, 排中律, $\vee$ 关于 $\wedge$ 的分配律)

示例

求与 $(\neg p \to r) \to q$ 等值的主析取范式.

$$
\begin{aligned}
(\neg p \to r) \to q &= \neg(\neg p \to r) \lor q \\
&= \neg(p \lor r) \lor q \\
&= (\neg p \land \neg r) \lor q \\
&= (\neg p \land (\neg q \lor q) \land \neg r) \lor ((\neg p \lor p) \land q \land (\neg r \lor r)) \\
&= (\neg p \land \neg q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land \neg r) \lor (\neg p \land q \land r) \\
&\quad \lor (p \land q \land \neg r) \lor (p \land q \land r).
\end{aligned}
$$

主合取范式

主合取范式与主析取范式对称.

Definition (主合取范式)

极大项: 文字的析取式, 每个命题变量都出现一次.
主合取范式 (conjunctive normal form, CNF): 极大项的合取式, 与原命题公式等值.

极大项的编号

命题公式 A 含 n 个命题变量, A 的极大项含 n 个文字, 将它们按指定的顺序排列, 命题变量记作 0, 命题变量的否定记作 1, 得到长度为 n 的二进制串, 其数值 k 即为该极大项的编码, 该极大项记为 M_k.

极大项的编码的二进制串对应于其唯一的成假赋值.

唯一性

Theorem

每个命题公式都存在唯一的主合取范式.

任意非永真的命题公式都存在与之等值的主合取范式, 该主合取范式恰由与命题公式的成假赋值所对应的极大项组成. 若再固定命题变量的顺序, 则与一个命题公式等值的主合取范式是唯一的.

示例

求与 $(\neg p \to r) \to q$ 等值的主合取范式.

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee r$	$(\neg p \to r) \to q$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	1

示例

求与$(\neg p \to r) \to q$等值的主合取范式.
利用真值表, 可得3个成假真赋值对应的极大项: M_1, M_4, M_5.

$$\begin{aligned}(\neg p \to r) \to q &= M_1 \wedge M_4 \wedge M_5 \\ &= (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r).\end{aligned}$$

或者利用等值演算

$$\begin{aligned}(\neg p \to r) \to q &= \neg(\neg p \to r) \vee q \\ &= \neg(p \vee r) \vee q \\ &= (\neg p \wedge \neg r) \vee q \\ &= (\neg p \vee q) \wedge (q \vee \neg r) \\ &= (\neg p \vee q \vee (\neg r \wedge r)) \wedge ((\neg p \wedge p) \vee q \vee \neg r) \\ &= (p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r).\end{aligned}$$

联结词的功能完备集

一个观察

范式中没有联结词 $\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$.

$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 并非必须.

QUIZ: 5 个常用联结词哪些是必须的?

真值函数

n 元真值函数: $\{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$.
不同的 2 元真值函数有 16 个.

p	q	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

p	q	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

联结词的功能完备集

每个命题公式都对应于一个真值函数，反之亦然.

联结词 $\neg, \wedge, \vee$ 足以描述所有的逻辑关系,
$\rightarrow$ 和 $\leftrightarrow$ 并非必须.

联结词的功能完备集

Definition (联结词的功能完备集)

联结词集合 S, 对任意真值函数 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, 都能仅使用 S 中的联结词组成命题公式 A, 使得 A 所对应的真值函数恰为 $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Theorem

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ 是一个联结词的功能完备集.

一些术语

冗余联结词: 联结词, 删除它后的联结词集仍功能完备
独立联结词: 非冗余联结词
极小完备集: 不含冗余联结词

联结词的功能完备集

Example

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ 不是极小的, $\{\neg, \wedge\}$ 和 $\{\neg, \vee\}$ 是极小的.

Example

证明 $\{\uparrow\}$ (与非) 是极小功能完备集.
NOTE: $p \uparrow q$ 的真值为 1 当且仅当 p 和 q 不同时为 1, 即 $p \uparrow q = \neg(p \wedge q)$.

$\neg p = p \uparrow p$
$p \wedge q = (p \uparrow q) \uparrow (p \uparrow q)$

Homework

1. P. 50: Exercises 14(1), 16.