Discrete Mathematics

2019~2020 (第一学期)

Department of Computer Science, East China Normal University

September 10, 2019

Chapter 3 PROPOSITIONAL LOGIC

Outline of §-4 Reasoning over Propositional Logic

逻辑推理实例

如果

- $p \to q$: 两个三角形全等, 那么它们的对应角相等.
- p: 两个三角形全等;

则 q: 它们的对应角相等, 即 $(p \to q) \land p \Rightarrow q$.

如果

- $p \to q$: 两个三角形全等, 那么它们的对应角相等.
- q: 它们的对应角相等;

则 p: 两个三角形全等, 即 $(p \to q) \land q \Rightarrow p$.

前者推理正确, 即 $(p \to q) \land p \to q$ 是永真的.
前者推理不正确, 即 $(p \to q) \land q \to p$ 不是永真的.

Problem: 如何正确地推理?

逻辑推理

1. 逻辑推理就是从若干前提(命题)依据一些推理规则推出一个结论(命题)的过程.
2. 逻辑推理的正确性取决于前提和结论的命题构成形式(布尔结构),与具体原子命题的语义无关.
3. 正确的推理形式对应于一个永真的蕴含式,其前件是所有前提的合取,其后件是结论.

推理的基本模型

Definition (推理的基本模型)

给定: 命题公式 $H_1, H_2, \ldots, H_n, C$.

若 $H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \rightarrow C$ 是永真的, 则称推理 $H_1, H_2, \ldots, H_n \Rightarrow C$ 是有效的 (valid).

其中: $H_1, H_2, \ldots, H_n$ 是前提假设 (hypothesis), C 是结论 (conclusion).

注意: $\rightarrow$ 与 $\Rightarrow$ 的区别

推理的基本模型

Definition (形式证明)

给定: 命题公式 $H_1, H_2, \ldots, H_n, C$.
$H_1, H_2, \ldots, H_n$ 推出 C 的形式证明: 公式的序列 $S_1, S_2, \ldots, S_m$, 其中:
S_m 恰为公式 C, $S_i \in \{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ 或可由其前面的公式 $S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}$ 根据推理规则推出.

命题逻辑的常用推理规则

1. 置换规则: 对于任何命题公式 A, B, 若 $A = B$, 则 A 推出 B.
2. 假言推理规则: $p, p \to q$ 推出 q.
3. 附加规则: p 推出 $p \vee q$.
4. 化简规则: $p \wedge q$ 推出 p.
5. 拒取式规则: $\neg q, p \to q$ 推出 $\neg p$.
6. 假言三段论规则: $p \to q, q \to r$ 推出 $p \to r$.
7. 析取三段论规则: $\neg q, p \vee q$ 推出 p.
8. 构造性二难推理规则: $p \vee s, p \to q, s \to t$ 推出 $q \vee t$.
9. 破坏性二难推理规则: $\neg q \vee \neg t, p \to q, s \to t$ 推出 $\neg p \vee \neg s$.
10. 合取引入规则: p, q 推出 $p \wedge q$.

示例

构造 $p, p \to q, q \to r \Rightarrow r$ 的形式证明.

i	p	(前提引入)
ii	$p \to q$	(前提引入)
iii	q	(i,ii 假言推理)
iv	$q \to r$	(前提引入)
v	r	(iii,iv 假言推理)

示例

构造 $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \Rightarrow s \vee r$ 的形式证明.

i	$p \vee q$	(前提引入)
ii	$\neg p \rightarrow q$	(i 置换)
iii	$q \rightarrow s$	(前提引入)
iv	$\neg p \rightarrow s$	(ii,iii 假言三段论)
v	$\neg s \rightarrow p$	(iv 置换)
vi	$p \rightarrow r$	(前提引入)
vii	$\neg s \rightarrow r$	(v,vi 假言三段论)
viii	$s \vee r$	(vii 置换)

示例

证明下列推理的正确性.

如果他是工科学生, 那么他必学好物理.
如果他不是理科学生, 那么他必是工科学生.
他没学好物理.
所以他是理科学生.

符号化

p: 他是工科学生
q: 他学好物理
r: 他是理科学生
前提: $p \to q, \neg r \to p, \neg q$
结论: r

构造形式证明

i $p \to q$ (前提引入)
ii $\neg q$ (前提引入)
iii $\neg p$ (i,ii 拒取式)
iv $\neg r \to p$ (前提引入)
v $\neg\neg r$ (iii,iv 拒取式)
vi r (v 置换)

小结

常用推理规则相互不独立

1 置换规则: 对于任何命题公式 A, B, 若 $A = B$, 则 A 推出 B.

5 拒取式规则: $\neg q, p \rightarrow q$ 推出 $\neg p$.

7 析取三段论规则: $\neg q, \neg p \vee q$ 推出 $\neg p$.

(5) 可由 (1) 和 (7) 推导出.

消解法 (resolvent): $p \vee q$, $\neg p \vee r$ 推出 $q \vee r$.
(消解法+置换规则) 是完备的.

其他方法: DPLL, BDD

推理方法

Theorem

$H_1, H_2, \ldots, H_n, H \Rightarrow C$ 当且仅当 $H_1, H_2, \ldots, H_n \Rightarrow H \rightarrow C$.

Theorem

若存在公式 B, 使得 $H, \neg C \Rightarrow B$ 和 $H, \neg C \Rightarrow \neg B$, 则 $H \Rightarrow C$.

Analogous to: 反证法.

从悖论可以推出任意命题.
因为对于任意命题公式 C 和 A, $A \wedge \neg A \rightarrow C$ 是永真公式, 所以 $A \wedge \neg A \Rightarrow C$.

示例

证明 $p \to (q \to r), \neg s \vee p, q \Rightarrow s \to r$.

i $\neg s \vee p$ (前提引入)
ii s (附加前提引入)
iii p (i,ii 析取三段论)
iv $p \to (q \to r)$ (前提引入)
v $q \to r$ (iii,iv 假言推理)
vi q (前提引入)
vii r (v,vi 假言推理)

示例

证明 $(p \to q) \to q \Rightarrow p \vee q$.

i $\neg(p \vee q)$ (引入否定结论)

ii $\neg p \wedge \neg q$ (i 置换)

iii $\neg q$ (ii 化简)

iv $(p \to q) \to q$ (前提引入)

v $\neg(p \to q)$ (iii,vi 拒取式)

vi $p \wedge \neg q$ (v 置换)

vii p (vi 化简)

viii $\neg p$ (ii 化简)

ix $p \wedge \neg p$ (vii,viii 合取引入)

Homework

1. P. 50: Exercises 17(1), 19.