第2章 递归方程求解

柳银萍

递推方程：给定数列f(0), f(1), …, f(n), 一个把f(n)和某些f(i)，$0 \le i < n$，联系起来的等式称为递推方程.

给定关于f(n)的递推方程和初值，求解递推方程的方法有：

1. 公式法
2. 换元法
3. 迭代归纳法
4. 差消法
5. Master定理
6. 生成函数方法
7. 成套方法

1. 常系数线性齐次递推方程的求解（公式法）

标准形式：k阶

$$H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-\cdots-a_kH(n-k)=0,$$

$$n\geq k, a_1, a_2, \ldots, a_k \text{是常数，} a_k\neq 0$$

求解步骤：

（1）求出特征方程 $x^k-a_1x^{k-1}-\ldots-a_k=0$ 的k个根；

（2）如果没有重根，则该递推方程的通解为

$$H(n)=C_1q_1{}^n+C_2q_2{}^n+\ldots+C_kq_k{}^n$$

$C_1, C_2, \ldots, C_k$ 待定常数

如果有重根，如果q是e重特征根，通解对应于根q的部分为

$$(C_1+C_2n+\ldots+C_en^{e-1})q^n$$

整个通解为各个不等的特征根的对应部分之和

（3）代入初值确定待定常数。

例1. Fibonacci数列

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$
$$f_0 = 1,\ f_1 = 1$$

解：$x^2-x-1=0$ 的根为 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

递推方程的通解为 $$f_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

代入初值 得 $$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + C_2\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

解得

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

例2. H(n)+H(n-1)-3H(n-2)-5H(n-3)-2H(n-4) = 0，

满足初值 H(0) = 1, H(1) = 0, H(2) = 1, H(3) = 2.

特征方程 $x^4+x^3-3x^2-5x-2 = 0$，特征根-1，-1，-1，2，

通解为 $H(n)=(C_1+C_2n+C_3n^2)(-1)^n+C_4 2^n$，

代入初值得 $\begin{cases} C_1+C_4=1 \\ -C_1-C_2-C_3+2C_4=0 \\ C_1+2C_2+4C_3+4C_4=1 \\ -C_1-3C_2-9C_3+8C_4=2 \end{cases}$

解得 $C_1=\frac{7}{9}, C_2=-\frac{1}{3}, C_3=0, C_4=\frac{2}{9}$

故解为 $H(n)=\frac{7}{9}(-1)^n-\frac{1}{3}n(-1)^n+\frac{2}{9}2^n$

常系数线性非齐次递推方程求解（公式法）

标准形

$$H(n)-a_1H(n-1)-a_2H(n-2)-...-a_kH(n-k)=f(n)$$
$$H(0)=d_0, H(1)=d_1, H(2)=d_2, ..., H(k-1)=d_{k-1}$$

通解为对应的齐次通解加上特解

$$H(n)=\overline{H}(n)+H^*(n)$$

特解的函数形式依赖于**f(n)**，求解的关键是用待定系数法确定一个特解**H*(n)**）

注：**f(n)**为**n**的**t**次多项式，一般**H*(n)**也为**n**的**t**次多项式.

例3. 求$a_n + 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 3n^2$ 的通解

设 $a_n^* = P_1 n^2 + P_2 n + P_3$，代入得

$$P_1 n^2 + P_2 n + P_3 + 5[P_1(n-1)^2 + P_2(n-1) + P_3] + 6[P_1(n-2)^2 + P_2(n-2) + P_3] = 3n^2,$$

从而得到方程组

$$12P_1 = 3,$$

$$-34P_1 + 12P_2 = 0,$$

$$29P_1 - 17P_2 + 12P_3 = 0.$$

$$P_1 = \frac{1}{4}, \quad P_2 = \frac{17}{24}, \quad P_3 = \frac{115}{288}$$

$$a_n^* = \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

通解为 $$a_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{17}{24}n + \frac{115}{288}$$

例4. Hanoi塔问题

$$H(n) = 2\,H(n-1)+1$$

设 $H^*(n) = P$，得

$$P = 2P + 1,\ P = -1$$

$$H(n) = A\,2^n - 1.$$

代入初值：$H(1) = 1$

得 $A = 1$,

解为 $H(n) = 2^n - 1.$

若 $f(n)$ 为指数函数 β^n，特解也为指数形式.

若 β 不是特征根，则特解为 $H^*(n) = P\beta^n$;

若 β 是 e 重特征根，则特解为 $Pn^e\beta^n$.

例5. $H(n) +5H(n-1) +6H(n-2) = 42\cdot4^n$

令 $H^*(n) = P\,4^n$，代入得

$$P\,4^n + 5P\,4^{n-1} + 6P\,4^{n-2} = 42\cdot4^n$$

$$42P = 42\cdot16,\quad P =16,$$

通解为 $H(n) = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n + 4^{n+2}$.

例6. $H(n) - 5H(n-1) + 6H(n-2) = 2^n$，求特解.

∵ 2为1重根

令 $H^*(n) = Pn\,2^n$,

代入得

$$Pn2^n - 5\,P(n-1)\,2^{n-1} + 6\,P(n-2)\,2^{n-2} = 2^n$$

解得 $P = -2$,

$$H^*(n) = -n\,2^{n+1}\,.$$

2．转化成常系数线性递推方程求解---换元法

例7. $\begin{cases} a_n^2 = 2a_{n-1}^2 + 1 \qquad a_n \geq 0 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

令 $b_n = a_n^2$,

代入得

$b_n = 2 b_{n-1} + 1$,

$b_0 = 4$.

解得

$$b_n = 5 \cdot 2^n - 1, \quad a_n = \sqrt{5 \cdot 2^n - 1}$$

例**8.** 归并排序

$$T(n) = 2\,T(n/2) + n-1,$$

$$T(2) = 1.$$

令 $n = 2^k$, $T(n)=H(k)$，得

$$H(k)= 2H(k-1) + 2^k - 1,$$

$$H(1) = 1.$$

令 $H^*(k) = P_1 k2^k + P_2$，解得

$$P_1=P_2=1,\ H^*(k) = k2^k + 1.$$

通解 $H(k)=C2^k + k2^k + 1,$

代入初值，得 $C= -1,$

$$H(k) = -2^k + k2^k + 1,$$

故 $T(n) = n \log n - n + 1.$

3．迭代归纳法

例9. **H(n) = (4n-6) H(n-1), H(1) =1.**

$$
\begin{aligned}
H(n) &= (4n-6)H(n-1) \\
&= (4n-6)(4n-10)H(n-2) \\
&= \ldots \\
&= (4n-6)(4n-10)\ldots 6\cdot 2\cdot H(1) \\
&= 2^{n-1}[(2n-3)(2n-5)\ldots 3\cdot 1] \\
&= 2^{n-1}\frac{(2n-2)!}{(2n-2)(2n-4)\ldots 4\cdot 2} \\
&= \frac{(2n-2)!}{(n-1)!}
\end{aligned}
$$

用归纳法验证.

4. 差消法----化简递推方程

例10. 求解递推方程

$$T(n)=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+n-1,\quad n\geq 2$$

$$T(1)=0$$

$$nT(n)=2\sum_{i=1}^{n-1}T(i)+n^2-n$$

$$(n-1)T(n-1)=2\sum_{i=1}^{n-2}T(i)+(n-1)^2-(n-1)$$

相减并化简得

$$nT(n)=(n+1)T(n-1)+2n-2$$

$$\frac{T(n)}{n+1}=\frac{T(n-1)}{n}+\frac{2}{n+1}-\frac{2}{(n+1)n}$$

由迭代归纳法得

$$\frac{T(n)}{n+1}=\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n}+\frac{2}{n-1}+\ldots+\frac{T(1)}{2}-O(n)$$

$$=2\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{3}\right)-O(n)$$

T(n)=O(nlog n) .

5. Master定理

设$a \geq 1, b > 1$为常数，$f(n)$为函数

$$T(n) = aT(n/b) + f(n),$$

$T(n)$为非负整数

1. $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon}), \varepsilon > 0,$

   那么$T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

2. $f(n) = \Theta(n^{\log_b a}),$

   那么$T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log n)$

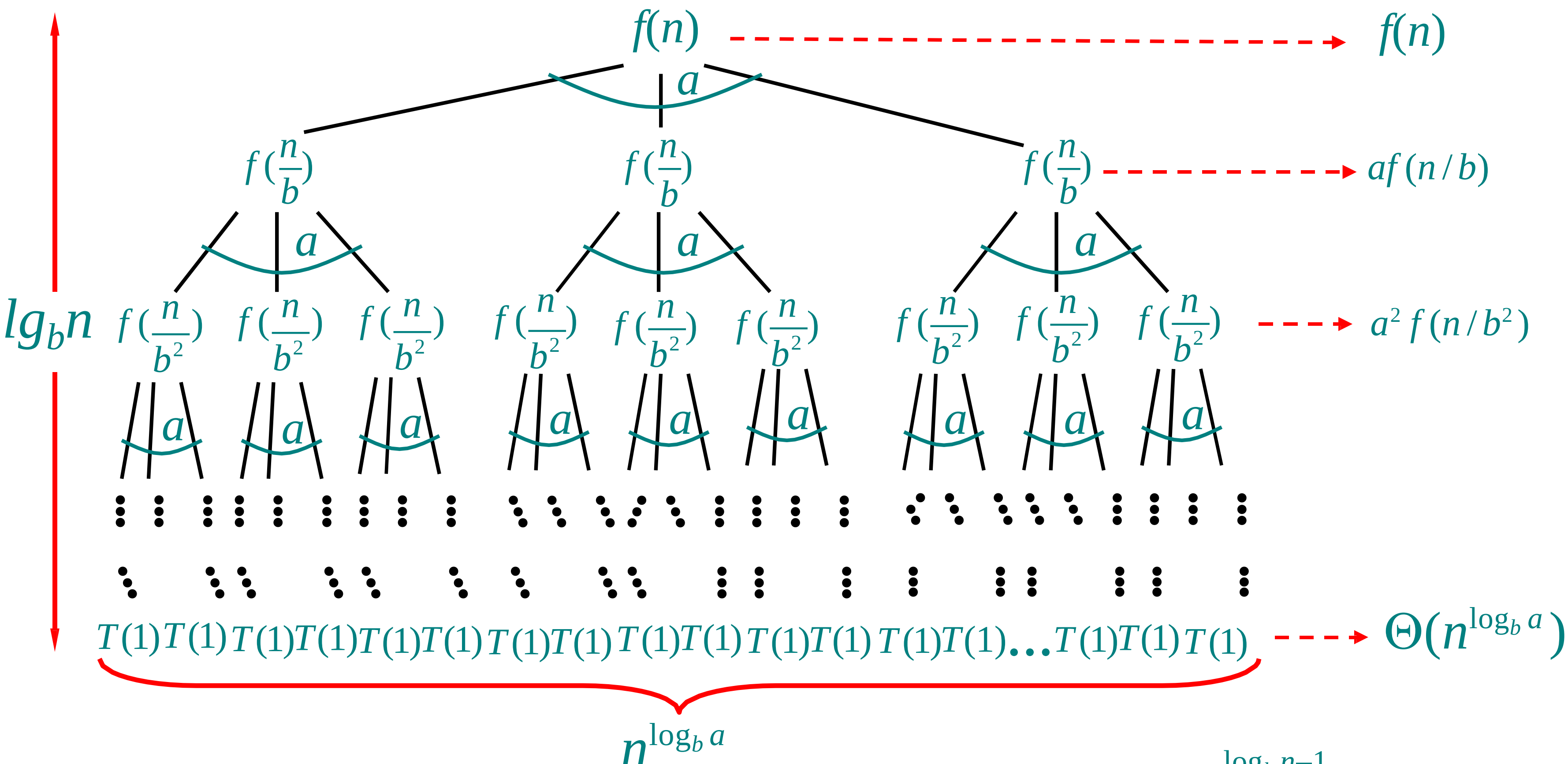
3. $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon}), \varepsilon > 0,$

   且对于某个常数$c < 1$和所有的充分大的n有

   $$af(n/b) \leq cf(n),$$

   那么$T(n) = \Theta(f(n))$

Idea of master theorem



Total: $\Theta(n^{\log_b a}) + \sum_{j=0}^{\log_b n-1} a^j f(n/b^j)$

例11. $T(n)=9T(n/3)+n$

$$a=9, b=3, f(n)=n, \quad n^{\log_3 9}=n^2,$$

$$f(n)=O(n^{\log_3 9-1}), \quad T(n)=\Theta(n^2)$$

例12. $T(n)=T(2n/3)+1$

$$a=1, b=3/2, f(n)=1, n^{\log_{3/2} 1}=n^0=1,$$

$$f(n)=\Theta(n^{\log_{3/2} 1}), T(n)=\Theta(\log n)$$

例13. $T(n)=3T(n/4)+n\log n$

$$a=3, b=4, f(n)=n\log n, n^{\log_4 3}=O(n^{0.793}),$$

$$f(n)=\Omega(n^{\log_4 3+\varepsilon}), \varepsilon\approx 0.2,$$

$af(n/b)=3(n/4)\log(n/4)\le(3/4)n\log n=cf(n), c=3/4, n$充分大

$$T(n)=\Theta(n\log n)$$

6. 生成函数方法

7. 成套方法

各附上单独的讲义，要求大家课下自学。