Discrete Mathematics

2019~2020 (第一学期)

Department of Computer Science, East China Normal University

September 10, 2019

逻辑

逻辑是研究演绎(推理)规律的科学.
逻辑分为两大流派:

1. 传统逻辑, 又称亚式逻辑, 由亚里士多德创立, 它是从日常生活的经验出发, 训练我们在生活中如何使用概念, 以及如何判断和推理, 其推理的主要规则: 直言三段论.
2. 数理逻辑, 又称符号逻辑, 是近代由欧美人创立, 使用的都是抽象的数学符号和数学公式,即用数学的方法来研究逻辑, 所以数理逻辑又称符号逻辑.

逻辑研究的内容

逻辑研究的内容:

- 着重于推理过程是否正确;
- 着重于语句之间的关系, 而不是一个语句的具体内容.

例.

语句1. 所有的数学家都穿凉鞋.

语句2. 任何一个穿凉鞋的人都是代数学家.

语句3. 所有数学家都是代数学家.

逻辑并不关注这些语句是否为真; 然而, 如果前两个语句为真, 逻辑可以保证语句3为真.

数理逻辑与计算机科学的联系

数理逻辑是计算机软件理论技术和硬件逻辑设计、人工智能等学科的重要理论基础.

- 计算理论: 可计算性, Turing 机, 形式语言, 自动机, 计算复杂性;
- 程序语义与验证技术: Intel bug: 5 亿美元;
- 程序的自动生成与转换;
- 布尔电路: 香龙(Shanon) 是第一人;
- SQL: 本质上等价于一阶逻辑;
- Prolog语言——以逻辑演算为基础;
- LISP语言——以λ 演算为基础.

成功实例

- 巴黎地铁14号线自动驾驶系统, 1998年投入运行;
- 巴黎Roissy 机场自动穿梭车, 2006年投入运行;
- NASA的航天飞机设计;
- Air Bus A320, A380的设计;
- Intel 奔腾芯片除法表错误的查找;
- AMD公司ABD K5 浮点除法运算的正确性证明;
- Windows 2000 的源代码中找出了大量的错误和漏洞.

Dijkstra 的话

我现在年纪大了, 搞了这么多年的软件, 错误不知犯了多少, 现在觉悟了, 我想假如我早年在数理逻辑上好好下点功夫的话, 我就不会犯这么多错误, 不少东西逻辑学家早就说了, 可我不知道, 要是我能年轻20岁的话, 我要回去学逻辑.

[1] 钱学森, 关于思维科学的研究, 思维科学, 第3卷.

本课程主要讲授数理逻辑的两个基础演算, 即命题逻辑演算与谓词逻辑演算. 主要学习演算过程的正确性标准, 即规则.

Chapter 3 PROPOSITIONAL LOGIC

3.1 命题与命题公式

3.2 等值演算

3.3 范式

3.4 命题逻辑的推理理论

本章的教学重点和难点: 命题公式的概念, 命题公式的等值演算和范式, 形式证明.

讲授 8 课时.

Outline of §-1 Propositions and Formulas

命题

逻辑推理的前提和结论: 关于某些事物的判断 (陈述).

Definition (命题)

命题 (proposition): 有确定的真、假性的陈述句.
命题的真值 (truth): 命题的真假属性, 分别用 0 和 1 表示.
真命题: 真值为真的命题, 即为真的命题, 真值为 1.
假命题: 真值为假的命题, 即为假的命题, 真值为 0.

命题是数理逻辑最基本的概念.

命题

Example

判断下列句子是否是命题以及真假性.

1. $2 + 4 = 8$.
2. 北京是中国的首都.
3. 华盛顿是英国的首都.
4. $x + 1 = 4$.
5. 公园里的人真多啊!
6. 请勿吸烟!
7. 今天去学校吗?
8. **明年二月五日下雨.**
9. **火星上有生命.**
10. 本句子是假的.

原子命题与复合命题

Definition (原子命题与复合命题)

原子命题 (atomic proposition): 最简单的, 不能再分解的命题.
复合命题 (compound proposition): 多个命题组合 (使用联结词) 而成的命题.

Example

下列命题是原子命题吗?

1. Wong 既学英语又学日语.
2. 4 不是奇数.
3. 如果天不下雨那么我骑车上班.
4. 小女孩七岁或八岁了.
5. 3 是偶数当且仅当 3 能被 2 整除.

命题符号化

原子命题符号化

用字母表示命题, 原子命题常用小写字母.

Example

$p:\ 2+4=8$,
q: 水是液体.

复合命题符号化

用符号表示基本命题的组合方式(联结词).

Application: 布尔组合检索

联结词

设 p 和 q 为命题.

1. 否定联结词 $\neg$
   复合命题“非 p”: $\neg p$, p 的否定,
   $\neg p$ 的真值为 1 当且仅当 p 的真值为 0.

2. 合取联结词 $\wedge$
   复合命题“p 并且 q”: $p \wedge q$, p 与 q 的合取,
   $p \wedge q$ 的真值为 1 当且仅当 p 和 q 的真值都为 1.

3. 析取联结词 $\vee$
   复合命题“p 或者 q”: $p \vee q$, p 与 q 的析取,
   $p \vee q$ 的真值为 0 当且仅当 p 和 q 的真值都为 0.

联结词

4. 蕴涵联结词 $\to$
复合命题“如果 p, 那么 q”: $p \to q$, p 蕴涵 q,
p 称为蕴涵式 (implication) $p \to q$ 的前件 (precondition), q 称为蕴涵式 $p \to q$ 的后件 (postcondition),
$p \to q$ 的真值为 0 当且仅当 p 的真值为 1 且 q 的真值为 0.

5. 等价联结词 $\leftrightarrow$
复合命题“p 当且仅当 q”: $p \leftrightarrow q$, p 与 q 等价,
$p \leftrightarrow q$ 的真值为 1 当且仅当 p 和 q 的真值相同.

真值表

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \to q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

关于蕴涵式

当 p 为假时, 定义 $p \to q$ 总为真.
在日常推理中, p 为假无法否定 $p \to q$ 的成立.

Example

"如果 5 是 4 的倍数, 那么 5 是 2 的倍数"是合理的.

命题符号化

1. 找出原子命题, 并用小写英文字母表示.
2. 用适当的联结词把原子命题组合 (联结) 成复合命题.
3. 对于复杂命题, 步骤 2 可能需要“自底向上”逐步进行.

关注含有蕴涵意义的命题

在命题 $p \to q$ 中, p 是 q 的充分条件 (sufficient condition), q 是 p 的必要条件 (necessary condition).

- “只要 p 就有 q”: $p \to q$
- “只有 p 才有 q”: $q \to p$
- “p 当且仅当 q”: $p \leftrightarrow q$

命题符号化

Example

期末考试得 A 并且做本书的每道练习，足以使你这门课得 A.

Solution: p—期末考试得 A; q—做本书的每道练习; r—你这门课得 A.

$$p \wedge q \to r.$$

Example

如果我上街，我去超市购物，除非我很累.

Solution: p—我上街; q—我去超市购物; r—我很累.

$$p \to q \vee r.$$

命题符号化

Example

只有你主修计算机科学或不是新生，才可以从校园内访问因特网.

Solution: p—主修计算机; q—你是新生; r—可以访问因特网.

$$r \to p \vee \neg q.$$

Example

4 是偶数和 4 能被 2 整除是一个意思.

Solution: p—4 是偶数; q—4 能被 2 整除.

$$p \leftrightarrow q.$$

命题公式

命题公式: 命题符号化的结果, 符号串.
命题变量: 表示某个不确定的命题的符号 $A, B, C, \ldots$, 值只能取 0 或 1.
命题常量: 表示一个具体命题的符号、命题公式中的0 ,1.

Definition

命题公式的递归定义为:

- 单个命题变量和命题常量是命题公式;
- 如果 A 是命题公式, 那么 $\neg A$ 也是命题公式;
- 如果 A 和 B 是命题公式, 那么 $A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ 都是命题公式;
- 仅有限次使用上面三条规则而得到的符号串是命题公式.

命题公式

Example

- 命题公式: $(\neg A), ((A \wedge B) \vee B), ((A \rightarrow B) \wedge (A \leftrightarrow B))$;
- 非命题公式: $(\vee B), \rightarrow B, A \wedge \vee B$.

命题公式的简写

1. 约定最外层的括号可以省略;
2. 规定联结词的优先次序(从高到低): $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

例如: 命题公式$((A \vee B) \leftrightarrow C)$可简写为$A \vee B \leftrightarrow C$.

命题公式

命题公式和命题

命题公式是符号串, 表示一类命题的组成结构.
命题公式不是命题.
当其中所有的命题变量都替换为具体命题后, 它才转化为命题.

Example

命题公式 $p \to q$ 非命题, 表示命题的一种形式结构.
p—今天天气晴朗; q—我们去野炊.
$p \to q$ 表示命题"如果天气晴朗, 那么我们去野炊"的结构.

命题公式

例如"若存在外星人, 则 $2+2 \neq 4$"这是否是命题? 真值? 符号化?

命题逻辑关心命题的复合结构, 而非研究原子命题本身的语义.

命题公式

Definition

n 元命题公式: 含 n 个命题变量的命题公式, 记为 $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, 其中 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 是公式中的 n 个命题变量.

Definition

子公式: 含于另一个命题公式中的命题公式.

命题公式

Definition (命题公式的赋值)

n 元命题公式 $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 的赋值: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, 其中 $a_1, a_2, \ldots, a_n$ 是分别给 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 指定的真值.
成真赋值: $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 的真值为 1.
成假赋值: $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ 的真值为 0.

n 元命题公式恰有 2^n 个不同的赋值.
命题公式的所有赋值以及相应的公式真值构成真值表.

$p \to p \vee q$的真值表

p	q	$p \vee q$	$p \to p \vee q$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	1

$p \to (q \to r)$ 的真值表

p	q	r	$q \to r$	$p \to (q \to r)$
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	1	1
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	1	1	1

命题公式

命题公式的类型

重言式(永真式, tautology): 所有赋值都是成真赋值.
矛盾式(永假式, contradiction): 所有赋值都是成假赋值.
可满足式(satisfiable formula): 有成真赋值.

真值表可用来判断命题公式的类型.

Example

1. $p \to p \vee q$ 是重言式.
2. $p \wedge \neg p$ 是矛盾式.
3. $p \to q \to r$ 是可满足式, 但不是重言式, 也不是矛盾式.

重言式 **必是** 可满足式, 反之不然.
矛盾式 **等同于** 不可满足式(unsatisfiable formula).

Homework

1. PP. 49–50: Exercises 1, 2(1,2), 13.
2. 请将语句“除非你已满16周岁，否则只要你身高不足1.2米就不能乘公园的滑行铁道”符号化.
3. 设 p, q, r 为如下命题:
   - p—你得流感了;
   - q—你错过了最后的考试;
   - r—这门课你通过了.

   请用自然语言表达命题 $(p \to \neg r) \vee (q \to \neg r)$.
4. 请给出联结词 $\to, \leftrightarrow$ 的结合规则.