华东师范大学期末试卷（A）
2018 — 2019 学年第 二 学期

课程名称: <u>算法分析与设计</u>

学生姓名: ________________　　学　　号: ______________

专　　业: ________________　　年级/班级: ______________

课程性质: 专业选修

本试卷共 5 页, 考试时间 120 分钟

一	二	三	总分	阅卷人签名

一、 判断题 Ture Or False（每题 2 分，共 10 分）

1、带权无向连通图 G 中每条边的权值都互不相同，那么这个图的次小生成树是唯一的。

2、在 Floyd–Warshall 算法中，

$$d_{uv}^{(k)} = \min\{d_{uv}^{(k-1)}, d_{uk}^{(k-1)} + d_{kv}^{(k-1)}\}$$

$d_{uv}^{(k)}$ 表示从结点 u 到结点 v 的最多经过 k 条边的一条最短路径的权重。

3、即使 P = NP 成立， 3SAT 问题仍然不能在多项式时间被解决。

4、每个线性规划问题都有唯一的最优解。

5、一个流网络中每条边的容量均为正整数，则 Ford-Fulkerson 算法的运行时间为：$O((V+E)|f|)$，$|f|$ 为最大流的值。

二、 简答题 (共 35 分)

1、 (5 分）带权无向连通图 G 有 n 个结点和 n 条边，请问如何在 $O(n)$ 时间内找到图 G 的一棵最小生成树？

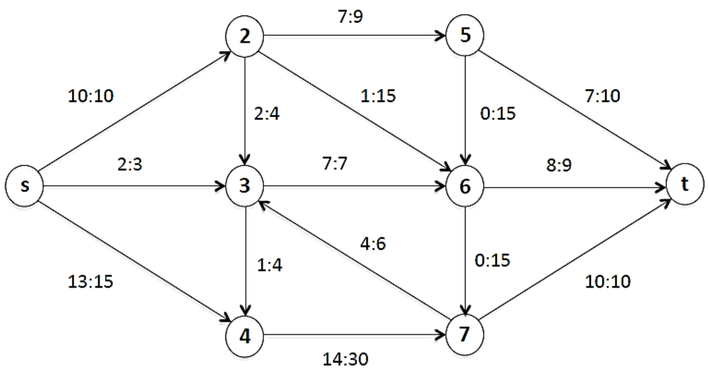
2、（5 分）问题 P 的输入规模 n，有一个分治算法 A 可求解问题 P。算法 A 将问题 P 分解为两个规模为 $n/2$ 的子问题，递归求解子问题，然后将子问题的解合并得到问题 P 的解。假设分解子问题以及合并子问题解需要花费时间 $\Theta(n^2)$，请计算算法 A 的时间复杂度（给出求解过程）。

3、（15 分）下图 G 为一个流网络，图中标出初始流 f，每条边上的第一个数为流量，第二个数为容量。执行 Edmonds-Karp 算法的一轮迭代：

（1）(8 分)、画出初始流f诱导的图 G 的残存网络为G_f。

（2）(4 分)、在残存网络G_f 找出从源结点 s 到汇点 t 的最短增广路径（边数最少的增广路径）。

（3）(3 分)、在图 G 上执行 Edmonds-Karp 算法的一轮迭代后，图 G 的流是多少？



4、（5 分）写出下列复杂性函数的偏序关系（即按照渐近阶从低到高排序）：

$$2^n \quad 3^n \quad \log_2 n \quad n! \quad n\log_2 n \quad n^2 \quad n^n \quad 10^3$$

5、（5 分）某体育馆有一羽毛球场出租，现在总共有 10 位客户申请租用此羽

毛球场，每个客户所租用的时间单元如下表所示，s(i)表示开始租用时刻，f(i)表示结束租用时刻，10 个客户的申请如下表所示：

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s(i)	0	3	1	5	3	5	11	8	8	6
f(i)	6	5	4	9	8	7	13	12	11	10

同一时刻，该羽毛球场只能租借给一位客户，请设计一个租用安排方案，在这 10 位客户里面，使得体育馆能尽可能满足多位客户的需求，并算出针对上表的 10 个客户申请，最多可以安排几位客户申请，给出求解过程。

三、算法设计题（共 55 分）

1、（20 分）

中位数定义：一个有序数组 $A\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$，它的中位数为 $a_{(n+1)/2}$ (n 为奇数) 或 （$a_{(n/2)}+a_{(n/2+1)}$) / 2（n 为偶数）。

现有两个有序数组 $A\{a_1,a_2,\ldots,a_m\}$ 和 $B\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$，数组 A 和数组 B 的元素都互不相同，查找数组 A 和数组 B 中所有元素的中位数。

（1）(5 分)、给出运行时间为 $\Theta(m+n)$ 的算法。

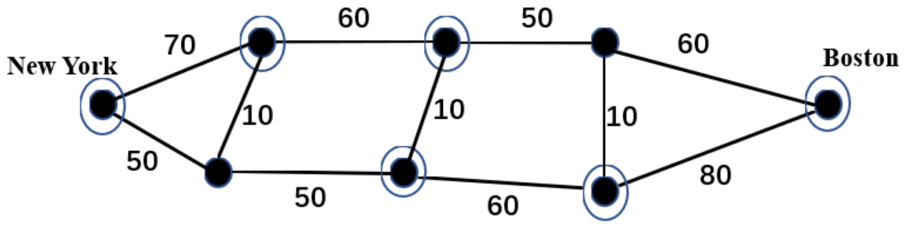
（2）(8 分)、假设 $m=n$，给出运行时间为 $\Theta(\log n)$的算法。

（3）(7 分) 对于任意的 m，n，给出运行时间为 $O(\log(\min\{m,n\}))$ 的算法。

2、（20分）

Mark驾驶特斯拉电动车从Boston去New York。他希望找一条最短驾驶路线，但是他的电动车充满一次电只能开m英里。令Mark欣慰的是从Boston到New York的路上有很多强力充电站，能够瞬间给电动车充满电。

带权无向连通图G=<V，E>表示从Boston到New York的道路交通图。图G中每条边上的数表示道路距离，圆圈标出的结点表示该城市有充电站。



（1）(3分)、假设 $m=\infty$，请在图G上画出从Boston到New York的最短路线。

（2）(3分)、假设 $m=100$，请在图G上画出从Boston到New York的最短路线。

（3）(14分)、任意m，请问如何在 $O(VE+V^2 logV)$ 时间内找到从Boston到New York的最短路线？详细描述算法思想并分析运行时间。

3、（15 分）

Mark 正在准备一道菜，所需食材从一个 $n \times m$ 的菜园采摘。菜园的每一格(i,j)（$1 \le i \le n$，$1 \le j \le m$）栽种了一种食材，食材的味道 $T_{i,j}$ （$T_{i,j} > 0$）。Mark 站在格子(i,j)，只能从格子关联的四个象限中各采摘一种食材。他采摘的四种食材的味道的乘积就是他做的菜的味道。

帮助 Mark 找到一个在 $O(nm)$ 的 DP 算法，使得他的菜味道值达到最大。

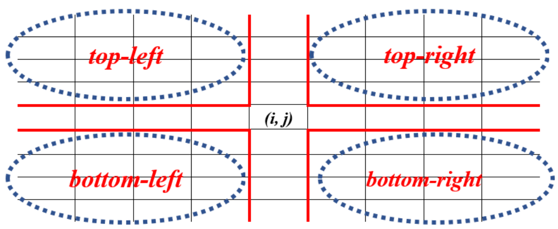
格子(i,j)关联的四个象限定义如下：

top-left = { all cells (a, b) | $a < i$, $b < j$ },

bottom-left = { all cells (a, b) | $a > i$, $b < j$ },

top-right = { all cells (a, b) | $a < i$, $b > j$ },

bottom-right = { all cells (a, b) | $a > i$, $b > j$ }.



说明： 因为 **Mark** 做菜需要四种食材，所以他采摘时只能站在格子(i, j)

（$1 < i < n$ 和 $1 < j < m$）。

（**1**）、（**8** 分）定义 $TL_{i,j}$： $TL_{i,j} = max\{T_{a,b} \mid 1 \le a \le i，1 \le b \le j\}$

给出一个 **DP** 算法在 $O(nm)$ 时间内计算的 $TL_{i,j}$ （$1 < i < n$ 和 $1 < j < m$）

（**2**）、（**7** 分）参考（**1**）中的思想，给出一个 **DP** 算法在 $O(nm)$ 时间内计算菜味道的最大值。