3. 由题意 $X_1,\cdots X_m$ 独立同分布 且 $P(X_i=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $(k=0,1,\cdots n \quad i=1,2\cdots m)$

则 $P(X_1=k_1, X_2=k_2, \cdots X_m=k_m)=\prod_{i=1}^{m} C_n^{k_i} p^{k_i}(1-p)^{n-k_i}$

$$=p^{\sum_{i=1}^{m}k_i}(1-p)^{mn-\sum_{i=1}^{m}k_i}\prod_{i=1}^{m}C_n^{k_i}$$

$(0\le k_1, k_2\cdots k_m\le n)$

6. 由题意 $X_1\cdots X_n$ 独立同分布. $F_{X_i}(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

若存在 $X_i\le 0$, 则 $F(X_1,X_2,\cdots X_n)=0$

若任意 $X_i>0$ 则 $F(X_1,X_2\cdots X_n)=\prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\lambda X_i})$

$\therefore$ 该样本的联合分布函数为 $F(X_1,X_2\cdots X_n)=\begin{cases}0 & \exists i\in[1,n]\ X_i\le 0\\ \prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\lambda X_i}) & \text{其它}\end{cases}$

7. 从小到大排序:

$-0.5, -0.2, 0.2, 0.2, 0.5, 0.5, 0.5, 0.7, 0.7, 1.5$

则其经验分布函数 $F_{10}(x)=\begin{cases}0 & x<-0.5\\ 0.1 & -0.5\le x<-0.2\\ 0.2 & -0.2\le x<0.2\\ 0.4 & 0.2\le x<0.5\\ 0.7 & 0.5\le x<0.7\\ 0.9 & 0.7\le x<1.5\\ 1 & x\ge 1.5\end{cases}$

3. (1). 由题意 $X_1,\cdots X_n$ 独立同分布、且 $P(X_i=0)=1-p \quad P(X_i=1)=p \quad (i=1,2\cdots n)$

则 $P(k_1,k_2\cdots k_n)=p^{\sum_{i=1}^{n}k_i}(1-p)^{n-\sum_{i=1}^{n}k_i} \quad (k_i\in[0,1])$

(2). 由于 $X_i\sim b(1,p)$ $(i=1,2\cdots n)$ 则 $\sum_{k=1}^{n}X_k\sim b(n,p)$

$$P(\sum_{k=1}^{n}X_k=i)=C_n^i p^i(1-p)^{n-i} \quad (i=0,1,\cdots n)$$

(3). 由于 $EX_i=p$ $\quad VarX_i=(0-p)^2(1-p)+(1-p)^2\cdot p=p(1-p)$

由定理 5.2.6 $\quad E\overline{X}=EX_i=p$

$Var\overline{X}=\frac{p(1-p)}{n}$

$ES^2=p(1-p)$

6. 记样本 $X_1,\dots X_n, X_{n+1}$ 的样本均值为 $\overline{X'}$，样本方差为 S'^2

则 $\overline{X'}=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}X_i=\frac{1}{n+1}(n\overline{X}+X_{n+1})=\frac{n}{n+1}\overline{X}+\frac{1}{n+1}X_{n+1}$

$$S'^2=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n+1}X_i^2-(n+1)\overline{X'}^2\right)=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+X_{n+1}^2-(n+1)\left(\frac{n}{n+1}\overline{X}+\frac{1}{n+1}X_{n+1}\right)^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2+X_{n+1}^2-\frac{n^2}{n+1}\overline{X}^2-\frac{2n}{n+1}\overline{X}X_{n+1}-\frac{1}{n+1}X_{n+1}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\overline{X}^2+X_{n+1}^2+\frac{n}{n+1}\overline{X}^2-\frac{2n}{n+1}\overline{X}X_{n+1}-\frac{1}{n+1}X_{n+1}^2\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left((n-1)S^2+\frac{n}{n+1}X_{n+1}^2-\frac{2n}{n+1}\overline{X}X_{n+1}+\frac{n}{n+1}\overline{X}^2\right)$$

$$=\frac{n-1}{n}S^2+\frac{1}{n+1}(X_{n+1}-\overline{X})^2$$

5.3. $X\sim N(0,6^2)$ $Y\sim N(0,6^2)$ 则 $X+Y\sim(0,2\cdot6^2)$ $\frac{1}{\sqrt{2\cdot6^2}}(X+Y)\sim(0,1)$

同理 $X-Y\sim(0,2\cdot6^2)$ $\frac{1}{\sqrt{2\cdot6^2}}(X-Y)\sim(0,1)$

记 $Z_1=\frac{1}{\sqrt{2\cdot6^2}}(X+Y)$ $Z_2=\frac{1}{\sqrt{2\cdot6^2}}(X-Y)$

则 $\frac{(X+Y)^2}{(X-Y)^2}=\frac{(\frac{1}{\sqrt{2\cdot6^2}}(X+Y))^2}{(\frac{1}{\sqrt{2\cdot6^2}}(X-Y))^2}=\frac{Z_1^2}{Z_2^2}\sim F(1,1)$

记 $P(\frac{(X+Y)^2}{(X-Y)^2}\le4)=\alpha$ 则 $F_\alpha(1,1)=4$ 可得 $\alpha=0.705$

7. $X_2+X_4\sim N(0,2)$ 则 $\frac{1}{\sqrt2}(X_2+X_4)\sim N(0,1)$

$X_1^2+X_3^2+X_5^2\sim\chi^2(3)$

则 $\frac{C(X_2+X_4)}{\sqrt{X_1^2+X_3^2+X_5^2}}=C\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\frac{1}{\sqrt2}(X_2+X_4)}{\sqrt{\frac{X_1^2+X_3^2+X_5^2}{3}}}$ 而 $\frac{\frac{1}{\sqrt2}(X_2+X_4)}{\sqrt{\frac{X_1^2+X_3^2+X_5^2}{3}}}\sim t(3)$

则 $C\sqrt{\frac{2}{3}}=1$ 解得 $C=\frac{\sqrt6}{2}$

5.19 由 $X_{n+1}\sim N(\mu,6^2)$ $\overline{X}\sim N(\mu,\frac{6^2}{n})$ 得 $X_{n+1}-\overline{X}\sim(\mu,\frac{n+1}{n}6^2)$

记 $Z_1=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{n}{n+1}}(X_{n+1}-\overline{X})$ 则 $Z_1\sim N(0,1)$

由 $\frac{(n-1)S^2}{6^2}\sim\chi^2(n-1)$ 可记 $Z_2=\frac{(n-1)S^2}{6^2}$ $Z_2\sim\chi^2(n-1)$

原统计量 $T=\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{S}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=\frac{6\cdot\frac{1}{6}\sqrt{\frac{n}{n+1}}(X_{n+1}-\overline{X})}{6\sqrt{\frac{\frac{(n-1)S^2}{6^2}}{n-1}}}=\frac{Z_1}{\sqrt{\frac{Z_2}{n-1}}}$

$\therefore T\sim t(n-1)$

5.20. ① $\overline{X}\sim(0,\frac{1}{n})$ 则 $\sqrt n\,\overline{X}\sim(0,1)$ $n\overline{X}^2\sim\chi^2(1)$

又 $(n-1)S^2\sim\chi^2(n-1)$

$\therefore EY=E(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)=\frac{1}{n}En\overline{X}^2-\frac{1}{n(n-1)}E(n-1)S^2=\frac{1}{n}\cdot1-\frac{n-1}{n(n-1)}=0$

② $VarY=Var(\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2)$ （$\overline{X}$ 与 S^2 相互独立）

$=\frac{1}{n^2}Var\,n\overline{X}^2+\frac{1}{n^2(n-1)^2}Var(n-1)S^2$

$=\frac{2n}{n^2}+\frac{2}{n^2(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}$