1-4

1. $P(\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}) = P(\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}) = P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$= a+b-c$

2. 由题意 $A\supset B$

则 $P(B)=P(A)-P(A-B)=0.4$

而 $P(AB)=P(B)=0.4$

$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6$

3. ① 由概率的性质 $P(A\backslash B)=P(A)-P(AB)$

而 $P(A\backslash B)=P(A\overline{B})$. 则 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$

∴ $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$

② 由① $P(A)+P(B)-2P(AB)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(AB)+P(B\overline{A})-2P(AB)$

$=P(A\overline{B})+P(B\overline{A})=P(A\backslash B)+P(B\backslash A)=P(A\Delta B)$

4. ① 由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

得 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=1.1-P(A\cup B)$

~~而P(AB)≥0.可知当P~~

由 $P(A\cup B)\le 1$ 可知 $P(AB)\ge 0.1$.(当且仅当 $P(A\cup B)=1$ 取"=")

∴当 $P(A\cup B)=1$ 时. $P(AB)$ 取得最小值 0.1

② 由 $P(AB)\le P(A)$ 且 $P(AB)\le P(B)$ 可知 $P(AB)\le 0.4$

(当且仅当 $P(AB)=P(A)$ 取"="号. 即 $B\supset A$)

∴当 $B\supset A$. $P(AB)$ 取得最大值 0.4

5-7

5. 当 $k>n$ 时，令 $A_k=\phi$，则 $\{A_k, k\ge 1\}$ 是 $\mathcal{F}$ 中互不相容的事件列

由概率的可列可加性：

$$P(\sum_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)$$

即 $$P(\sum_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+\sum_{k=n+1}^{n}P(\phi)$$

又 $P(\phi)=0$ 则 $P(\sum_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)$

7. ① 当 $n=1$ $P(A_1)=P(A_1)$；当 $n=2$ $P(A_1\cup A_2)=P(A_1)+P(A_2)-P(A_1\cap A_2)$

等式成立

② 假设当 $n=m$ 时 $(m\ge 2)$ 等式成立. 当 $n=m+1$ 时：

$$P(\bigcup_{k=1}^{m+1}A_k)=P(A_1\cup A_2\cdots\cup(A_m\cup A_{m+1}))$$

$$=\Big(\sum_{k=1}^{m-1}P(A_k)+P(A_m\cup A_{m+1})\Big)-\Big(\sum_{i<j<m}P(A_iA_j)+\sum_{i<m}P(A_i(A_m\cup A_{m+1}))\Big)$$

$$+\Big(\sum_{i<j<k<m}P(A_iA_jA_k)+\sum_{i<j<m}P(A_iA_j(A_m\cup A_{m+1}))\Big)+\cdots(-1)^nP(A_1A_2\cdots(A_m\cup A_{m+1}))$$

$$=\Big(\sum_{k=1}^{m-1}P(A_k)+P(A_m)+P(A_{m+1})\Big)-\Big(P(A_mA_{m+1})+\sum_{i<j<m}P(A_iA_j)+\sum_{i<m}P(A_iA_m)+\sum_{i<m}P(A_iA_{m+1})\Big)$$

$$+\Big(\sum_{i<m}P(A_iA_mA_{m+1})+\sum_{i<j<k<m}P(A_iA_jA_k)+\sum_{i<j<m}P(A_iA_jA_m)+\sum_{i<j<m}P(A_iA_jA_{m+1})\Big)+\cdots$$

$$+(-1)^m\Big(\sum_{k_1<k_2<\cdots<k_{m-2}}P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_{m-2}}A_mA_{m+1})+P(A_1A_2\cdots A_m)+P(A_1A_2\cdots A_{m-1})\Big)$$

$$-(-1)^mP(A_1A_2\cdots A_mA_{m+1})$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}P(A_k)-\sum_{i<j}P(A_iA_j)+\sum_{i<j<k}P(A_iA_jA_k)+(-1)^{m+1}P(A_1A_2\cdots A_mA_{m+1})$$

∴ 当 $n=m+1$ 时等式也成立.

综上 对 $\forall n\ge 1$，等式都成立

1. 由不返回抽样模型可知概率为 $\frac{C_{15}^{3}C_{30}^{7}}{C_{45}^{10}}=\frac{3958500}{13633279}$

2. 设每人恰有1张A为事件A_1

由发牌顺序共有 A_{52}^{52} 种情况. 每人恰有1张A的情况有 $C_{13}^{1}C_{13}^{1}C_{13}^{1}C_{13}^{1}A_{4}^{4}A_{48}^{48}$ 种(每种概率相同)

$\therefore P(A_1)=\frac{C_{13}^{1}C_{13}^{1}C_{13}^{1}C_{13}^{1}A_{4}^{4}A_{48}^{48}}{A_{52}^{52}}=\frac{2197}{20825}$

3. 设4张A恰好全一人所得为事件A_2

由发牌顺序共有 A_{52}^{52} 种情况. ~~每~~ A_2的情况有 $A_{4}^{1}A_{13}^{4}A_{48}^{48}$ 种(每一种概率相同)

$\therefore P(A_2)=\frac{A_{4}^{1}A_{13}^{4}A_{48}^{48}}{A_{52}^{52}}=\frac{44}{4165}$

6. 设所求事件为A_3

由发牌顺序共有 A_{52}^{52} 种情况. A_3的情况有 $C_{13}^{6}C_{13}^{4}C_{13}^{2}C_{13}^{1}A_{13}^{13}A_{39}^{39}$ (每一种概率相同)

$\therefore P(A_3)=\frac{C_{13}^{6}C_{13}^{4}C_{13}^{2}C_{13}^{1}A_{13}^{13}A_{39}^{39}}{A_{52}^{52}}=\frac{2827539}{15875338990}$

7. 掷6颗骰子(若给骰子标号). 共有 6^6 情况.

而6颗骰子各不相同有 A_{6}^{6} 种情况(每种情况相同)

所求概率为 $\frac{A_{6}^{6}}{6^{6}}=\frac{5}{324}$

8. 掷6颗骰子(若给骰子标号). 共有 7^7 种情况.

若每种点数至少出现1次. 则有一个数字出现了2次 其他各数字出现了1次

则共有 $C_{6}^{1}C_{7}^{2}A_{5}^{5}$ 种.

所求概率为 $\frac{C_{6}^{1}C_{7}^{2}A_{5}^{5}}{7^{7}}=\frac{2160}{117649}$