习题4.4

1. 求均匀分布$U(0,1)$的各阶原点矩μ_k和中心矩ν_k.

解. 设随机变量$X \sim U(0,1)$, 则X的概率密度函数为

$$p(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

由定义知,各阶原点矩μ_k和中心矩ν_k分别为

$$\mu_k = \mathrm{E}X^k = \int x^k p(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^k \cdot 1\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1},$$

$$\nu_k = \mathrm{E}(X-\mu_1)^k = \int \left(x - \frac{1}{2}\right)^k p(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^k \cdot 1\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & k\text{为奇数}, \\ \dfrac{1}{(k+1)2^k}, & k\text{为偶数}. \end{cases}$$

□

3. 设$0 < \alpha < 1$, 求均匀分布$U(0,1)$的α分位数.

解. 设随机变量$X \sim U(0,1)$, 则X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

故当$0 < \alpha < 1$时, 由$F(x) = \alpha$知, $U(0,1)$的α分位数$x_\alpha = \alpha$. □

4. 设$X \sim N(10,4)$, 求X的分位数$x_{0.975}$.

解. 由正态分布函数与标准正态分布函数之间的关系立得

$$x_{0.975} = \mu + \sigma \cdot u_{0.975} = 10 + 2 \cdot 1.96 = 13.92.$$

□

2. 独立抛掷100颗均匀的骰子, 记所得点数的平均值为$\overline{X}$, 利用中心极限定理求概率$P(3 \le \overline{X} \le 4)$.

解. 设掷得的点数依次为$X_1, \dots, X_{100}$, 则$X_1, \dots, X_{100}$独立同分布, 且

$$\mathrm{E}X_1 = \frac{7}{2}, \quad VarX_1 = \frac{35}{12}.$$

由中心极限定理, 所求概率

$$\begin{aligned} P(3 \le \overline{X} \le 4) =& P\left(300 \le \sum_{k=1}^{100} X_k \le 400\right) \\ =& \Phi\left(\frac{400 - 100 \cdot 7/2}{\sqrt{100 \cdot 35/12}}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 100 \cdot 7/2}{\sqrt{100 \cdot 35/12}}\right) \\ =& 2\Phi(2.93) - 1 = 0.9966 \end{aligned}$$

□

3. 掷一枚均匀的硬币900次, 试估计至少出现495次正面的概率.

解. 设X表示正面次数, 则$X \sim b(900, 1/2)$, 则由中心极限定理, 所求概率为

$$P(X \ge 495) = 1 - \Phi\left(\frac{495 - 0.5 - 900 \times 0.5}{\sqrt{900 \times 0.5 \times 0.5}}\right) = 0.0015$$

4. 某份试卷由100个题目构成, 学生至少答对60个方能通过考试. 假设某考生答对每一题的概率为1/2, 且回答各题是相互独立的, 试估计该生通过考试的概率.

解. 设X表示答对题数, 则$X \sim b(100, 1/2)$, 则由中心极限定理, 所求概率为

$$P(X \ge 60) = 1 - \Phi\left(\frac{60 - 0.5 - 100 \cdot 1/2}{\sqrt{100 \cdot 1/2 \cdot 1/2}}\right) = 1 - \Phi(1.9) = 0.0287.$$

□

7. 设随机变量序列$\{X_n, n \ge 1\}$同分布且方差存在. 若$i \ne j$时, $Cov(X_i, X_j) \le 0$. 证明$\{X_n, n \ge 1\}$服从大数定律.

证明. 记$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, 则

$$\mathrm{Var}S_n = \mathrm{Var}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}X_k + 2\sum_{i<j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j) \le \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}X_k = n\mathrm{Var}X_1.$$

于是马尔科夫条件成立, 由马尔科夫大数定律得证. □