习题1.2

1. 设$P(A) = a, P(B) = b, P(A \cup B) = c$, 求概率$P(\overline{\bar{A} \cup \bar{B}})$.

2. 设$P(A) = 0.7$, $P(A - B) = 0.3$, 求概率$P(\overline{AB})$.

3. 设$A, B \in \mathcal{F}$, 证明
$$P(A) = P(AB) + P(A\overline{B}), \quad P(A \triangle B) = P(A) + P(B) - 2P(AB).$$

4. 设$P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.7$, 求$P(AB)$的最大值和最小值, 并分别给出取到最大值和最小值时的条件.

5. 设$A_1, \cdots, A_n$是$\mathcal{F}$中互不相容的事件, 证明
$$P\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

6. 设$\{A_n, n \geq 1\}$是$\mathcal{F}$中的事件列, 定义$B_1 = A_1$,
$$B_n = \bigcap_{k=1}^{n-1} \overline{A}_k \cap A_n, \quad n = 2, 3, \cdots$$
证明事件列$\{B_n, n \geq 1\}$两两互不相容, 且
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k), \quad n = 1, 2, \cdots$$
和
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n).$$

7. 证明多个事件的加法公式:若$n \geq 1$, $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$, 则
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{i<j} P(A_iA_j) + \sum_{i<j<k} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2 \cdots A_n).$$

8. 设$A_1, \cdots, A_n$是$\mathcal{F}$中的事件, 证明Bonferroni 不等式
$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(\overline{A}_k).$$

9. 设$A_1, A_2, \cdots$是一列事件, 且对任意的$k \geq 1$, $P(A_k) = 1$, 求概率$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right)$.

习题1.3

1. 现从有15名男生和30名女生的班级中随机挑选10名同学参加某项课外活动, 求在被挑选的同学中恰好有3名男生的概率.
2. 一副标准的扑克牌52张, 一张一张地轮流分给4名游戏者, 每人13张, 求每人恰好有一张A的概率.
3. 一副标准的扑克牌52张, 一张一张地轮流分给4名游戏者, 每人13张, 求4张A恰好全被一人得到的概率.
4. 从装有10双不同尺码或不同样式的皮鞋的箱子中, 任取4只, 求其中能成$k(0 \le k \le 2)$双的概率.
5. 求一个有20人的班级中有且仅有2人生日相同的概率.
6. 一副标准的扑克牌52张, 一张一张地轮流分给4名游戏者甲乙丙丁, 每人13张, 求事件"甲得到6张红桃, 乙得到4张红桃, 丙得到2 张红桃, 丁得到1张红桃"的概率.
7. 同时掷6颗骰子, 求每个骰子的点数各不相同的概率.
8. 同时掷7颗骰子, 求每种点数至少都出现一次的概率.