华东师范大学计算机科学与技术学院
School of Computer Science and Technology

2020年春季学期

《人工智能》

第十六讲：归结原理

课程大纲

AI

- AI理论
- AI算法
  - 搜索方法
  - 机器学习
  - 知识计算
- AI硬件
- AI应用
- ……

机器学习大纲

AI

- ❖ AI理论
- ❖ AI算法
  - ➢ 搜索方法
  - ➢ 机器学习
  - ➢ 知识计算
    - ○ 知识工程概况
    - ○ 知识表示
    - ○ 知识图谱
    - ○ 贝叶斯推理
    - ○ 归结推理
- ❖ AI硬件
- ❖ AI应用
- ❖ ……

本节大纲

- 16.1 命题逻辑归结法
- 16.2 谓词归结子句形
- 16.3 归结原理

16.1 命题逻辑归结法

命题

- 命题：能判断真假(不是既真又假）的陈述句。

简单陈述句描述事实、事物的状态、关系等性质。

例如： 1. 1+1=2

2. 雪是黑色的。

3. 北京是中国的首都。

4. 我上个月到冥王星去渡假。

判断一个句子是否是命题，有先要看它是否是陈述句，而后看它的真值是否唯一。以上的例子都是陈述句，第4句的真值现在是假，随着人类科学的发展，有可能变成真，但不管怎样，真值是唯一的。因此，以上4个例子都是命题。

例如： 1. 快点走吧！

2. 到那去？

3. x+y>10

等等句子，都不是命题。

- 复合命题：简单命题使用联结词而成的命题

例如： 1. 3不是偶数

2. 如果天下雨，出门带伞

3. 他会英语和日语

命题公式

- 定义
  - 合式公式：常量或变量的命题称作合式公式，联结词联结的合式公式还是合式公式。
  - 命题公式：合式公式的有限次组合所构成的字符串称作命题公式，命题公式的联结词组合还是命题公式。
  - 基本联结词：
    - ～
    - ∧
    - ∨
    - →
    - <=>
  - 合取式：A∧B
  - 析取式：A∨B
  - 蕴含式：A→B
  - 等价式：A <=> B

例子1：将陈述句转化成命题公式。

如：设“下雨”为p，“骑车上班”为q，，

1. “只要不下雨，我骑自行车上班”。$\sim p$ 是 q的充分条件，

   因而，可得命题公式： $\sim p \rightarrow q$

2. “只有不下雨，我才骑自行车上班”。$\sim p$ 是 q的必要条件，因而，

   可得命题公式：$q \rightarrow \sim p$

例子2：将陈述句转化成命题公式。

- 1. “如果我进城我就去看你，除非我很累。”

  设：p，我进城，q，去看你，r，我很累。

  则有命题公式：$\sim r \rightarrow (p \rightarrow q)$。

- 2. “应届高中生，得过数学或物理竞赛的一等奖，保送上北京大学。”

  设：p，应届高中生，q，保送上北京大学上学，

  r，是得过数学一等奖，t，是得过物理一等奖。

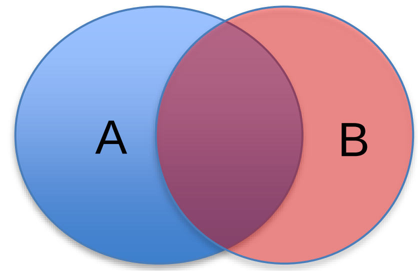
  则有命题公式公式：$p \land (r \lor t) \rightarrow q$。

解释

- A是命题公式，p1, p2, …, pn是A中的全部命题变量，给p1, p2, …, pn各指定一个真值(0或1），称对A的一个赋值或解释。
- 真值表：将公式A在2^n个取值下的取值情况列成表格。
- 公式的分类：
  - 若A无成假赋值，则称A为重言式或永真式；
  - 若A无成真赋值，则称A为矛盾式或永假式；
  - 若A至少有一个成真赋值，则称A为可满足的；
  - 非重言式的可满足式：A至少有一个成真赋值，至少有一个成假赋值。

等值演算

- 基本等值式



- 交换率： $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$

  $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$

- 结合率： $(A \vee B) \vee r \Leftrightarrow A \vee (B \vee r)$

  $(A \wedge B) \wedge r \Leftrightarrow A \wedge (B \wedge r)$

- 分配率： $A \vee (B \wedge r) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee r)$

  $A \wedge (B \vee r) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge r)$

- 摩根率： $\sim (A \vee B) \Leftrightarrow \sim A \wedge \sim B$；

  $\sim (A \wedge B) \Leftrightarrow \sim A \vee \sim B$

等值演算

- 基本等值式
  - 吸收率：　$A \lor (A \land B) \Leftrightarrow A$
    $A \land (A \lor B) \Leftrightarrow A$
  - 同一律：　$A \lor 0 \Leftrightarrow A$　$A \land 1 \Leftrightarrow A$
  - 零律：　$A \lor 1 \Leftrightarrow 1$　$A \land 0 \Leftrightarrow 0$
  - 排中律：　$A \lor \sim A \Leftrightarrow 1$
  - 矛盾律：　$A \land \sim A \Leftrightarrow 0$
  - 蕴含等值式：$A \rightarrow B \Leftrightarrow \sim A \lor B$

范式

- 定义：公式的标准形式。
- 简单合取式：
  - A，～A，A∧B，A∧～B
- 简单析取式：
  - A，～A，A∨B，A∨～B
- 合取范式：有限个简单析取式构成的合取式
  - A∧(B∨C)∧(～A∨C)
- 析取范式：有限个简单合取式构成的析取式
  - A∨(B∧C) ∨(～A∧C)
- 范式存在定理：任意命题公式都存在与之等价的析取范式和合取范式

- 例子1：

求$p \land (q \to r) \to s$的合取范式

$p \land (q \to r) \to s$

$= \sim(p \land (\sim q \lor r)) \lor s$

$= \sim p \lor \sim(\sim q \lor r) \lor s$

$= \sim p \lor (\sim\sim q \land \sim r) \lor s$

$= \sim p \lor (q \land \sim r) \lor s$

$= \sim p \lor s \lor (q \land \sim r)$

$= (\sim p \lor s \lor q) \land (\sim p \lor s \lor \sim r)$

- 例子2：

求 $((p \vee q) \to r) \to p$ 的析取范式

$((p \vee q) \to r) \to p$

$= (\sim(p \vee q) \vee r) \to p$

$= \sim(\sim(p \vee q) \vee r) \vee p$

$= \sim((\sim p \wedge \sim q) \vee r) \vee p$

$= ((\sim\sim p \vee \sim\sim q) \wedge \sim r) \vee p$

$= ((p \vee q) \wedge \sim r) \vee p$

$= (p \wedge \sim r) \vee (q \wedge \sim r) \vee p$

命题逻辑的推理规则

- 附加： $A \Rightarrow (A \vee B)$
- 简化： $(A \wedge B) \Rightarrow A$
- 假言推理： $(A \rightarrow B) \wedge A \Rightarrow B$
- 据取式： $(A \rightarrow B) \wedge \sim B \Rightarrow \sim A$
- 析取三段论： $(A \vee B) \wedge \sim A \Rightarrow B$
- 假言三段论： $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow C) \Rightarrow A \rightarrow C$
- 等价三段论： $(A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C) \Rightarrow A \Leftrightarrow C$
- 构造性二难： $(A \rightarrow B) \wedge (C \rightarrow D) \wedge (A \vee C) \Rightarrow B \vee D$

- **例子1，构造下列推理的证明。**

前提：$p \vee q$，$p \to \sim r$，$s \to t$，$\sim s \to r$，$\sim t$

结论：q

证明：

(1)	$s \to t$	前提引入
(2)	$\sim t$	前提引入
(3)	$\sim s$	(1)(2)据取规则
(4)	$\sim s \to r$	前提引入
(5)	r	(3)(4)假言推理
(6)	$p \to \sim r$	前提引入
(7)	$\sim p$	(5)(6)据取规则
(8)	$p \vee q$	前提引入
(9)	q	(7)(8)析取三段论

- 例子2，构造下列推理的证明。

前提： $p \rightarrow q$，$q \rightarrow \sim r$，r

结论： $\sim p$

证明：（1） $p \rightarrow q$　　前提引入

（2） $q \rightarrow \sim r$　　前提引入

（3） $p \rightarrow \sim r$　　(1)(2)假言三段论

（4） r　　前提引入

（5） $\sim p$　　假言易位式

命题逻辑归结方法

- 归谬法基本原理

命题： A_1、A_2、A_3 和 B

求证： $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3$成立，则B成立，

即： $A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \rightarrow B \Leftrightarrow \sim(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee B$

$\Leftrightarrow \sim(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \sim B)$

反证法：证明$A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \wedge \sim B$ 是矛盾式(永假式)

- 建立子句集

  - 子句：被析取分隔的变量，如：

    P， P∨Q，∼P∨Q∨R

  - 子句集S：合取范式形式下的子命题(元素)的集合

  例：命题公式：P∧(P∨Q）∧(∼P∨Q)

  子句集 S：S = {P，P∨Q，∼P∨Q}

- 归结式

  消除互补对，求新子句→得到归结式。

  如子句：C_1=P ∨ D，C_2=∼P ∨ E

  归结式：C_{12}=D ∨ E

  注意：C_{12}是C_1 ∧C_2的逻辑结论，反之<u>不一定</u>成立。

归结证明过程

- 将命题写成合取范式
- 求出子句集
- 对子句集使用归结推理规则
- 归结式作为新子句参加归结
- 归结式为空子句□ ，S是不可满足的(矛盾)，原命题成立。

□(证明完毕)

- 例题，证明公式：$(P \rightarrow Q) \rightarrow (\sim Q \rightarrow \sim P)$
- 证明：

（1）根据归结原理，将待证明公式转化成待归结命题公式：

$$(P \rightarrow Q) \wedge \sim(\sim Q \rightarrow \sim P)$$

（2）分别将公式前项化为合取范式：

$$P \rightarrow Q = \sim P \vee Q$$

结论求～后的后项化为合取范式：

$$\sim(\sim Q \rightarrow \sim P) = \sim(Q \vee \sim P) = \sim Q \wedge P$$

两项合并后化为合取范式：

$$(\sim P \vee Q) \wedge \sim Q \wedge P$$

（3）则子句集为：

$$\{\sim P \vee Q, \sim Q, P\}$$

子句集为：{ ~P∨Q，~Q，P}

(4）对子句集中的子句进行归结可得：

1. ~P∨Q
2. ~Q
3. P
4. Q，（1，3归结）
5. 空集（2，4归结）

由上可得原公式成立。

- 命题逻辑主要问题？

表示能力有限，如张三、李四、王五选修《人工智能》课，转换为命题逻辑为：

P ：张三选修《人工智能》课

Q ：李四选修《人工智能》课

R ：王五选修《人工智能》课

……

如果人数众多，描述不方便

=>谓词逻辑描述

16.2 谓词逻辑基础

基本定义

- **个体词**：表示独立存在的客体
  - 如小王、太阳花、思想、定理等
- **谓词**：刻画个体性质或个体之间关系的词
  - 小王是个工程师。
  - 8是个自然数。
  - 我去买花。
  - 小丽和小华是朋友。

基本定义

- **任意量词**：表示“一切”、“所有的”等
  - $\forall x\ P(x)$
- **存在量词**：表示“存在着”、“有一个”等
  - $\exists\ x\ \ P(x)$
- **个体词扩充**
  - 个体常量：*a*，*b*，*c*，*d*　;具体或特定的个体
  - 个体变量：*x*，*y*，*z*　;抽象或泛指的个体
  - 个体域：D={…}　;变量个体的取值范围

基本概念

例如：(1) 所有的学生都要读小学。

(2) 有的人读到博士。

在个体域D为学生集合时，可符号化为：

(1) $\forall x\ P(x)$，其中$P(x)$表示x是要读小学。

(2) $\exists x\ Q(x)$，其中$Q(x)$表示x读博士。

在个体域D是全总个体域时，引入特殊谓词$R(x)$表示x是学生，可符号化为：

(1) $\forall x(R(x) \rightarrow P(x))$，

其中，$R(x)$表示x是学生；$P(x)$表示x是要读小学。

(2) $\exists x(R(x) \wedge Q(x))$，

其中，$R(x)$表示x是学生；$Q(x)$表示x读博士

注意：

- 在不同的个体域中，符号化的形式可能不一样；
- 个体域有限时，如D={a1, a2, …, an}，有

  $\forall x\ P(x) \Leftrightarrow P(a1) \wedge P(a2) \wedge \cdots \wedge P(an)$

  $\exists x\ P(x) \Leftrightarrow P(a1) \vee P(a2) \vee \cdots \vee P(an)$
- 多个量词出现时，一般不能改变其顺序。如：

  "对于任意x,存在y,使得x + y = 5" => $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$

  P(x, y)表示 x + y = 5

  $\exists y\ \forall x\ P(x, y)$ => "存在y,对于任意x,使得x + y = 5"

  若P(x, y)表示x*y=0,则$\forall x\ \exists y\ P(x, y)$与$\exists y\ \forall x\ P(x, y)$等价。

谓词公式

- 指导变量： $\forall x\ A$，$\exists x\ A$中的变量x。
- 辖域： $\forall x\ A$，$\exists x\ A$中的A。
- 约束出现：辖域A中，x的所有出现为约束出现。
- 自由出现：辖域A中，非约束出现的其它变量。

例子： $\forall x(P(x)\rightarrow\exists yQ(x,y))$

- 换名规则：辖域中的约束出现变量换名

例子： $\forall xP(x,y)\land R(x,y) \Rightarrow \forall zP(z,y)\land R(x,y)$

$\forall x(P(x,y)\land R(x,y)) \Rightarrow \forall z(P(z,y)\land R(z,y))$

- 替代规则：自由出现变量换名

例子： $\forall xP(x,y)\land R(x,y) \Rightarrow \forall xP(x,y)\land R(z,y)$

谓词公式的解释(1)

- 定义：对谓词公式中的各种变量定制特殊的常量去替代。

例子：给定解释 I

个体域：D={2，3}， f(x)的解释 是f(2),f（3）

- 谓词公式在特定解释下为真，称解释满足该公式。
- 两个谓词公式等价，当且仅当两个公式在所有的解释下均有相同的值。
- 永真谓词公式：在所有解释下均为真。
- 不可满足谓词公式：在所有解释下均为假。

谓词公式的解释(2)

例子：给定解释 I

个体域：D={2, 3}

函数 f(x)： f(2)=3, f(3)=2

谓词 P(x)： P(2)=0, P(3)=1

Q(x,y)：Q(i,j)=1, i,j = 2,3

R(x,y)：R(2,2)=R(3,3)=1, R(2,3)=R(3,2)=0。

求 (1)在 I 下，$\exists x(P(f(x))\wedge Q(x,f(x)))$的真值；

(2)在 I 下，$\forall x\exists y\ R(x,y)$的真值。

解:(1) $\exists x(P(f(x))\wedge Q(x,f(x)))$

$\Rightarrow (P(f(2))\wedge Q(2,f(2)))\vee(P(f(3))\wedge Q(3,f(3)))$

$\Rightarrow (P(3)\wedge Q(2,3))\vee(P(2)\wedge Q(3,2))$

$\Rightarrow (1\wedge 1)\vee(0\wedge 1)=1$

(2) $\forall x\exists y\ R(x,y)$

$\Rightarrow (R(2,2)\vee R(2,3))\wedge(R(3,2)\vee R(3,3))$

$\Rightarrow (1\wedge 1)=1$

∀与的关系 => ∧

∃或的关系 => ∨

谓词演算

- 约束变量换名规则：
  - $Qx\ P(x) \Leftrightarrow Qy\ P(y)$
  - $Qx\ P(x, z) \Leftrightarrow Qy\ P(y, z)$
- 量词否定等值式：
  - $\sim(\exists x)\ M(x) \Leftrightarrow (\forall y) \sim M(y)$
  - $\sim(\forall x)\ M(x) \Leftrightarrow (\exists y) \sim M(y)$
- 量词分配等值式：
  - $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\ P(x) \wedge (\forall x)\ Q(x)$
  - $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\ P(x) \vee (\exists x)\ Q(x)$
- 消去量词等值式：设个体域为有穷集合$(a_1, a_2, \cdots a_n)$
  - $(\forall x)\ P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \cdots \wedge P(a_n)$
  - $(\exists x)\ P(x) \Leftrightarrow P(a_1) \vee P(a_2) \vee \cdots \vee P(a_n)$

谓词演算

- 量词辖域收缩与扩张等值式：
  - $(\forall x)(P(x) \lor Q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \lor Q$
  - $(\forall x)(P(x) \land Q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \land Q$
  - $(\forall x)(P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \rightarrow Q$
  - $(\forall x)(Q \rightarrow P(x)) \Leftrightarrow Q \rightarrow (\forall x)P(x)$
  - $(\exists x)(P(x) \lor Q) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \lor Q$
  - $(\exists x)(P(x) \land Q) \Leftrightarrow (\exists x)P(x) \land Q$
  - $(\exists x)(P(x) \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\forall x)P(x) \rightarrow Q$
  - $(\exists x)(Q \rightarrow P(x)) \Leftrightarrow Q \rightarrow (\exists x)P(x)$
- 前束范式：所有量词都提到最左边。

  例子： $(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q)$
$\Leftrightarrow (\forall x)(\sim P(x) \vee Q)$
$\Leftrightarrow (\forall x) \sim P(x) \vee Q$
$\Leftrightarrow \sim(\exists x) P(x) \vee Q$
$\Leftrightarrow (\exists x) P(x) \rightarrow Q$

$(\forall x)(Q \rightarrow P(x))$
$\Leftrightarrow (\forall x)(\sim Q \vee P(x))$
$\Leftrightarrow (\forall x) \sim Q \vee P(x)$
$\Leftrightarrow Q \rightarrow (\forall x) P(x)$

谓词推理（1）

量词的消去和引入：

- 任意量词用变量或常量表示
  - $\forall x\ P(x) \Rightarrow P(y)$
  - $\forall x\ P(x) \Rightarrow P(c)$
- 存在量词用常量表示
  - $\exists x\ P(x) \Rightarrow P(c)$
- 变量引入任意量词
  - $P(y) \Rightarrow \forall x\ P(x)$，y在P(y)中自由出现，y任何取值均为真
- 常量引入存在量词
  - $P(c) \Rightarrow \exists x\ P(x)$，c不能出现过

谓词推理（2）

例子：20世纪70年代的漫画都由日本作家创作，这幅漫画是20世纪70年代的，因此这幅漫画是日本作家的作品。

解：设P(x):20世纪70年的的漫画

Q(y):日本漫画家作品

a:一幅漫画。

前提：$\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x)), P(a)$

结论：$Q(a)$

证明：1. $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$　引入前提

2. $P(a)$　引入前提

3. $P(a) \rightarrow Q(a)$　消去任意量词

4. $Q(a)$　2、3假言推理

16.3 归结原理

归结原理的几个基本概念

- Skolem标准型
- 子句集
- 置换与合一
- 归结式

谓词归结子句形(Skolem 标准形)

SKOLEM标准形

- 前束范式

定义：说公式A是一个前束范式，如果A中的一切量词都位于该公式的最左边(不含否定词)，且这些量词的辖域都延伸到公式的末端

即： 把所有的量词都提到前面去，然后消掉所有量词

$(Q_1x_1)(Q_2x_2)\cdots(Q_nx_n)M(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

约束变项换名规则：

- $(Qx)\ M(x) \Leftrightarrow (Qy)\ M(y)$
- $(Qx)\ M(x,z) \Leftrightarrow (Qy)\ M(y,z)$

- 量词消去原则：

消去存在量词“∃”，略去全称量词“∀”。

注意：左边有全称量词的存在量词，消去时该变量改写成为全称量词的函数；如没有，改写成为常量。

例：将下式化为Skolem标准形：

$\sim(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \rightarrow (\exists x)(\sim(\forall y)Q(y, b) \rightarrow R(x))$

- 解：第一步，消去→号，得：

  $\sim(\sim(\forall x)(\exists y)P(a, x, y)) \vee (\exists x)(\sim\sim(\forall y)Q(y, b) \vee R(x))$

- 第二步，～深入到量词内部，得：

  $(\forall x)(\exists y)P(a, x, y) \vee (\exists x)((\forall y)Q(y, b) \vee R(x))$

- 第三步，变元易名，得

  $(\forall x)((\exists y)P(a, x, y) \vee (\exists u)(\forall z)(Q(z, b) \vee R(u))$

- 第四步，存在量词左移，直至所有的量词移到前面，得：

  $(\forall x)(\exists y)(\exists u)(\forall z)P(a, x, y) \vee (Q(z, b) \vee R(u))$

由此得到前述范式

- 第五步，消去“∃”（存在量词），略去“∀”全称量词消去(∃y)，因为它左边只有(∀x)，所以使用x的函数f(x)代替之，这样得到：

$(\forall x)(\exists z)(P(a, x, f(x)) \wedge \sim Q(z, b) \wedge \sim R(x))$

- 消去(∃z)，同理使用g(x)代替之，这样得到：

$(\forall x)(P(a, x, f(x)) \wedge \sim Q(g(x), b) \wedge \sim R(x))$

- 则，略去全称变量，原式的Skolem标准形为：

$P(a, x, f(x)) \wedge \sim Q(g(x), b) \wedge \sim R(x)$

- Skolem标准型
- 子句集
- 置换与合一
- 归结式

子句集

- 子句集S的求取：

G ➞ SKOLEM标准形

➞ 消去存在变量

➞ 以“，”取代“∧”，并表示为集合形式

求取子句集示例

例：对所有的x,y,z来说，如果y是x的父亲，z又是y的父亲，则z是x的祖父。又知每个人都有父亲，试问对某个人来说谁是它的祖父?

求：用一阶逻辑表示这个问题，并建立子句集。

解：这里我们首先引入谓词:

- P(x, y) 表示x是y的父亲
- Q(x, y) 表示x是y的祖父
- ANS(x) 表示问题的解答

对于第一个条件，“如果x是y 的父亲， y又是z 的父亲，则x是z 的祖父”，一阶逻辑表达式如下：

A_1：$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(P(x, y)\wedge P(y, z)\rightarrow Q(x, z))$

S_{A1}：$\sim P(x, y)\vee\sim P(y, z)\vee Q(x, z)$

对于第二个条件：“每个人都有父亲”，一阶逻辑表达式：

A_2：$(\forall y)(\exists x)P(x, y)$

S_{A2}：$P(f(y), y)$

对于结论：某个人是它的祖父

B：$(\exists x)(\exists y)Q(x, y)$

否定后得到子句： $\sim((\exists x)(\exists y)Q(x, y)\vee ANS(x)$

$S_{\sim B}$：$\sim Q(x, y)\vee ANS(x)$

则得到的相应的子句集为：{ S_{A1}，S_{A2}，$S_{\sim B}$ }

- Skolem标准型
- 子句集
- 置换与合一
- 归结式

归结原理

- 归结原理正确性的根本在于，找到矛盾可以肯定不真。
- 方法：
  - 和命题逻辑一样。
  - 但由于有函数，所以要考虑合一和置换。

置换和合一

- 置换：可以简单的理解为是在一个谓词公式中用置换项去置换变量。
- t/x 用t置换x
- 合一：合一可以简单地理解为“寻找相对变量的置换，使两个谓词公式一致”。
- 例：设有公式集F＝{P(x，y，f(y))，P(a,g(x),z)}，则λ＝{a/x，g(a)/y，f(g(a))/z}是它的一个合一。
- P(a，g(a)，f(g(a)))，P(a，g(a)，f(g(a)))

注意：一般说来，一个公式集的合一不是唯一的。

归结过程

- 归结的过程
  - 写出谓词关系公式 ➞
  - 用反演法写出谓词表达式➞
  - SKOLEM标准形 ➞
  - 子句集S ➞
  - 对S中可归结的子句做归结 ➞
  - 归结式仍放入S中，反复归结过程 ➞
  - 得到空子句
  - □得证

例题“快乐学生”问题

- 假设任何通过计算机考试并获奖的人都是快乐的，任何肯学习或幸运的人都可以通过所有的考试，张不肯学习但他是幸运的，任何幸运的人都能获奖。求证：张是快乐的。

解：先将问题用谓词表示如下：

R1：“任何通过计算机考试并获奖的人都是快乐的”

$(\forall x)((Pass(x, computer) \wedge Win(x, prize)) \rightarrow Happy(x))$

R2：“任何肯学习或幸运的人都可以通过所有考试”

$(\forall x)(\forall y)(Study(x) \vee Lucky(x) \rightarrow Pass(x, y))$

R3：“张不肯学习但他是幸运的”

$\sim Study(zhang) \wedge Lucky(zhang)$

R4：“任何幸运的人都能获奖”

$(\forall x)(Lucky(x) \rightarrow Win(x, prize))$

结论：“张是快乐的”的否定

$\sim Happy(zhang)$

例题“快乐学生”问题

由R1及逻辑转换公式:$P \wedge W \rightarrow H = \sim(P \wedge W) \vee H$，可得:

(1)～Pass(x, computer)∨～Win(x, prize)∨Happy(x)

由R2:(2)～Study(y)∨Pass(y,z)

(3)～Lucky(u)∨Pass(u,V)

由R3:(4)～Study(zhang)

(5)Lucky(zhang)

由R4:(6)～Lucky(w)∨Win(w, prize)

由结论:(7)～Happy(zhang)（结论的否定）

(8)～Pass(w, computer)∨Happy(w)∨～Lucky(w) (1)(6),{w/x}

(9)～Pass(zhang, computer)∨～Lucky(zhang) (8)(7), {zhang/w}

(10) ～Pass(zhang, computer) (9)(5)

(11) ～Lucky(zhang) (10)(3), {zhang/u, computer/V}

(12) 空集 (11)(5)