1. 设最长简单回路问题为 $LP$（LongestPath）

(1)对于一个图G，设顶点数为V，设判定问题 $LP_i$：图 G 中是否有长度为 $i$ 的简单回路($i \le V$)

对于每一个问题 $LP_i$，可以随机**猜想**任意长度为 $i+1$ 的顶点序列，然后**验证**：①第一个顶点是否等于最后一个顶点；②除了最后一个，每个顶点互不相同；③存在前一个点 指向 后一个点的边；若是这三个都正确，则输出为“Yes”, 否则输出为“No”, 由于猜想和验证都可以在多项式完成，则 $LP_i \in NP$

要求原问题 $LP$，即求 $LP_i$

(2)可以设函数 $f$ 从 HC 映射到 LP ，对于HC的任意实例 $I = G(E, V)$，LP 中对应的实例为 $G(E, V)$，若对应的 $I$ 存在哈密顿回路，由于哈密顿回路是一条长度为E的简单回路， 则 $G(E, V) \in Y_{LP_E}$, 否则若不存在哈密顿回路，则不会存在长度为E的简单回路，则 $G(E, V) \notin Y_{LP_E}$, 于是 HC 可以多项式变换到 LP 问题

由上得到 LP 为 NPC 问题

2.

a. 可以采取bfs来进行涂色:

①若有未涂色顶点，取任意一个未涂色顶点为端点，放入队列中， 否则说明是二分图，退出，涂色完毕

②若是队列为空，回到①，否则取队列中第一个顶点，检查其所有相邻的顶点，若是没有颜色，则涂上与这个顶点不相同的颜色，入队，继续执行②，若是有颜色且与该顶点相同，则说明该图不是二分图，退出，涂色失败， 若是颜色不同，不做处理，继续执行②。

b. 可以描述为判定问题，给定无向图 $G(E, V)$, 是否可以用 $k(k \le V)$ 种颜色涂色

①若是图的着色问题是多项式内可解决，记最少需要颜色数为 $m$， 若 $m \le k$, 则判定问题为 "Yes"， 否则判定问题为 "False"， 即在多项式时间上加一个判断，所以判定问题多项式可以解决

②若是判定问题可以多项式时间内解决，那么可以通过多项式时间知道最小的 $k$ 输出为"Yes", 此时即为最小所需要的颜色数，则图的着色问题也可以多项式时间解决

c.①对于一个图 $G(E, V)$, 可以任意指定顶点分别为 $k$ 种颜色， 猜想多项式时间可以得出；而验证的话需要验证每条边相连的两个顶点是否同色， 所以验证也是多项式时间可以得出，得该判定问题是NP问题

②定义从三色问题到该判定问题的函数 $f$, 对于任意三色问题的实例 $G = (E, V)$， 再增加 $k-3$ 个顶点，每一个顶点都于原来的 $V$ 个顶点全连接且互相全连接，得到图 $G(E', V')$;

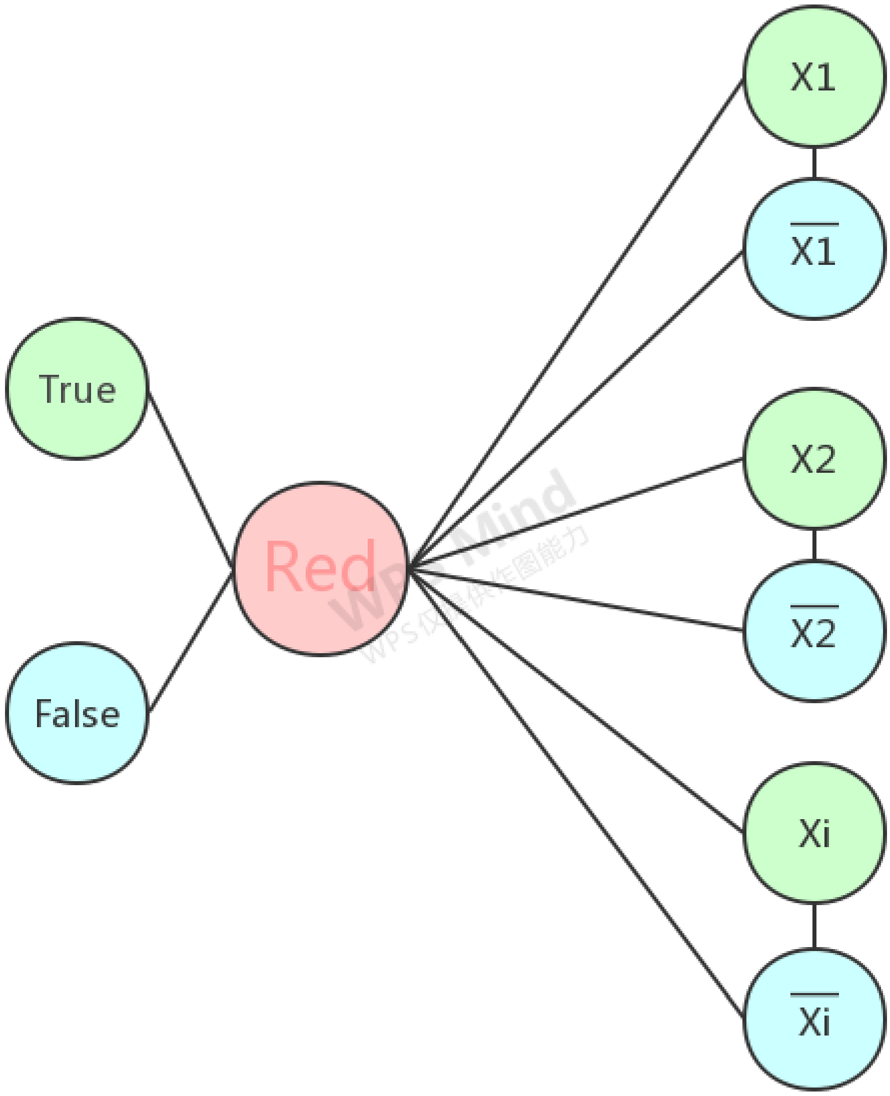
若是 $G \in Y$， 那么 $G$ 可以用3种颜色涂，$G'$ 则可以用 $k-3+3=k$ 种颜色来涂，$G'$ 是"Yes";

若 $G'$ 为“Yes”, 由于新加的 $k-3$ 个顶点的颜色互不相同且不与 $V$ 个顶点相同，则原图一定可以由三种颜色涂，$G \in Y$

所以若三着色问题为 NPC 问题，该判定也是 NPC 问题

d.①由于每一个变量 $x$ 和它的反 $\overline{x}$ 以及 $Red$ 顶点都构成了一个三角形，那么当 $x$ 为 $C(True)$, $\overline{x}$ 为 $C(False)$, 当 $x$ 为 $C(False)$, $\overline{x}$ 为 $C(True)$

② 可以如下图所示，将所有变量涂 为 $C(True)$，变量的反为 $C(False)$， 这样每一条文字边相连的两个顶点都不同色，则对于任何真值赋值，对仅含文字边的图都有3着色。

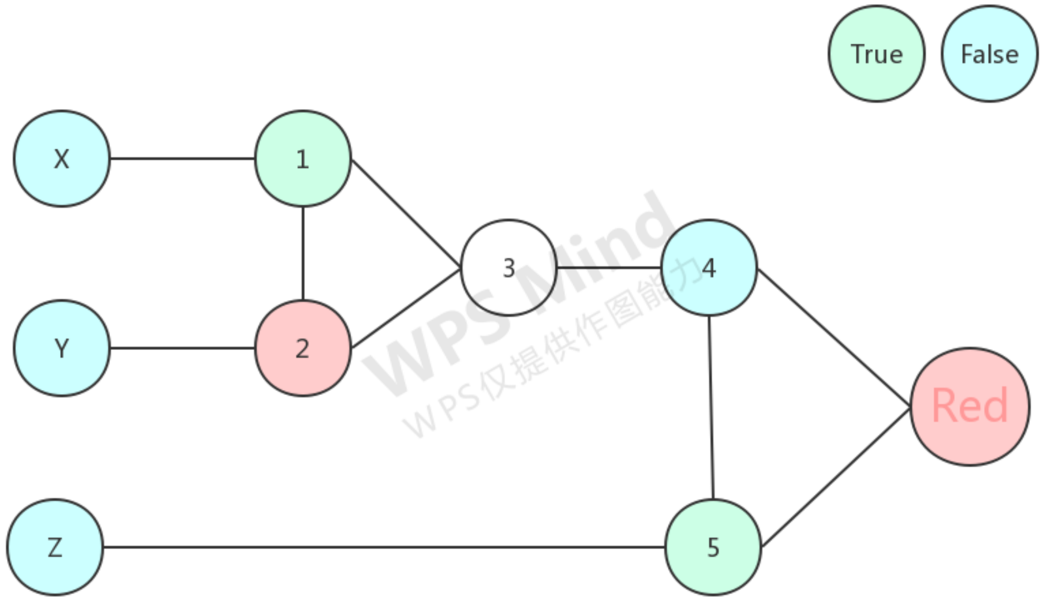



e.

若 $x, y, z$ 全为 $C(False)$时，由于 1， 2号顶点相连又不能为 $C(False)$，则只能一个为 $C(True)$, 一个为 $Red$,

5 号顶点只能为 $C(True)$, 则 4 号顶点只能为 $C(False)$, 于是3号顶点就和三种不同颜色的结点相连，如下图所示，则该图不可能为3着色图，故假设不成立。

所以 $x, y, z$ 至少有一个为 $C(True)$




f. ①对于任意图 $G(E,V)$, 可以随机让顶点为三种不同颜色，则猜测是多项式时间，验证时需要检查每条边相连的顶点是否为相同颜色，也只需要多项式时间，则三着色问题为 NP问题

②定义从 3-CNF-SAT 到 三着色问题的函数 $f$， 对于 m 个 clauses 和 n 个变量的实例，可以按照之前的描述建图:

1)每一个变量和其对应的反各一个顶点，还有三个特殊顶点：$Red, True, False$， 这三个顶点互相连接构成三角形，且$Red$ 和每个变量与其反也构成三角形；

2)对于每一个 clause， 新增5个顶点，按照上图建边；

若是对应的实例 $I \in Y$, 那么每个 clause 对应的 $x, y, z$ 至少有一个为 $C(True)$， 则对应的图可以三着色(可以如f一样画图推得)；

若是对应的图可以三着色，则 $x, y, z$ 至少有一个为 $C(True)$ (f结论)， 则每一个 clause 都为真，于是 $I \in Y$

所以三着色问题为NPC问题