Discrete Mathematics

2019~2020 (第一学期)

Department of Computer Science, East China Normal University

September 10, 2019

Chapter 4 FIRST-ORDER LOGIC

Outline of §-2 Calculus and Normal Form

谓词公式的等值

Definition

谓词公式 A 和 B 等值 ($A = B$): A 和 B 对任意解释都取相同的真值.
$A = B$ 当且仅当 $A \leftrightarrow B$ 是有效公式.

QUIZ: 如何证明 $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$ 与 $\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x)$ 不等值?

SOLUTION: 找一个解释, 使之在 2 个公式下真值不同.

谓词公式的基本恒等式

1. 有关联结词: 与命题公式的基本恒等式相同
2. 有关量词

有关联结词的等值演算

设 A, B, C 是任意的命题公式.

1. 等幂律: $A \wedge A = A$, $A \vee A = A$.
2. 零律: $A \wedge 0 = 0$, $A \vee 1 = 1$.
3. 同一律: $A \vee 0 = A$, $A \wedge 1 = A$.
4. 排中律: $A \vee \neg A = 1$.
5. 矛盾律: $A \wedge \neg A = 0$.
6. 双重否定: $\neg\neg A = A$.
7. 交换律: $A \wedge B = B \wedge A$, $A \vee B = B \vee A$.
8. 结合律: $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$, $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$.

有关联结词的等值演算

设 A, B, C 是任意的命题公式.

9. 分配律: $(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$,
   $(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.
10. 吸收律: $A \wedge (A \vee B) = A$, $A \vee (A \wedge B) = A$.
11. 德·摩根律: $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.
12. 蕴涵恒等式: $A \to B = \neg A \vee B$.
13. 假言易位: $A \to B = \neg B \to \neg A$.
14. 等价恒等式: $A \leftrightarrow B = (A \to B) \wedge (B \to A)$.

有关量词的等值演算

A, B, C, D 是任意的谓词公式, $A(x, y)$ 含自由变量 x 和 y, $B(x)$ 和 $C(x)$ 含自由变量 x, D 不含自由变量 x. (若 x 的个体域不为空)

1. 量词否定:

$$\neg\forall\, x : B(x) = \exists\, x : \neg B(x),$$
$$\neg\exists\, x : B(x) = \forall\, x : \neg B(x).$$

2. 量词交换:

$$\forall\, x\, \forall\, y : A(x, y) = \forall\, y\, \forall\, x : A(x, y),$$
$$\exists\, x\, \exists\, y : A(x, y) = \exists\, y\, \exists\, x : A(x, y).$$

3. 量词消去:

$$\forall\, x : D = D,$$
$$\exists\, x : D = D.$$

有关量词的等值演算

A, B, C, D 是任意的谓词公式, $A(x, y)$ 含自由变量 x 和 y, $B(x)$ 和 $C(x)$ 含自由变量 x, D 不含自由变量 x. (若 x 的个体域不为空)

4. 换名: $B(x)$ 中不含个体变量 y, 则

$$\forall x : B(x) = \forall y : B(y),$$
$$\exists x : B(x) = \exists y : B(y).$$

5. 量词分配:

$$\forall x : (B(x) \wedge C(x)) = \forall x : B(x) \wedge \forall x : C(x),$$
$$\exists x : (B(x) \vee C(x)) = \exists x : B(x) \vee \exists x : C(x).$$

有关量词的等值演算

A, B, C, D 是任意的谓词公式, $A(x, y)$ 含自由变量 x 和 y, $B(x)$ 和 $C(x)$ 含自由变量 x, D 不含自由变量 x. (若 x 的个体域不为空)

6. 量词辖域收缩与扩张:

$$\forall x : (B(x) \wedge D) = \forall x : B(x) \wedge D,$$
$$\forall x : (B(x) \vee D) = \forall x : B(x) \vee D,$$
$$\exists x : (B(x) \wedge D) = \exists x : B(x) \wedge D$$
$$\exists x : (B(x) \vee D) = \exists x : B(x) \vee D.$$

前束范式

Definition

前束范式: 谓词公式, 形如 $\mathrm{Q}_1\ x_1\ \mathrm{Q}_2\ x_2\ \cdots \mathrm{Q}_n\ x_n : B$, 其中

- Q_i 是量词 $\forall$ 或 $\exists$,
- $x_1, \ldots, x_n$ 是个体变量,
- B 是不含量词的谓词公式.

前缀: $\mathrm{Q}_1\ x_1\ \mathrm{Q}_2\ x_2\ \cdots \mathrm{Q}_n\ x_n$, 主式: B.

Example

$\exists\, x\ \forall\, y\ \forall\, z : (P(x) \to Q(x, y, z))$,
$\forall\, y\ \exists\, x : (\neg P(x, y) \wedge Q(x))$.

Theorem

任何谓词公式都存在与之等值的前束范式.

求前束范式的方法

求 $\forall x:(A(x)\wedge\forall z:B(z,y)\to\forall z\forall y:C(x,y))$ 的前束范式.

$$
\begin{aligned}
&\forall x:(A(x)\wedge\forall z:B(z,y)\to\forall z\forall y:C(x,y)) &\\
=&\forall x:(A(x)\wedge\forall z:B(z,y)\to\forall y:C(x,y)) & \text{(消去无用量词)}\\
=&\forall x:(A(x)\wedge\forall z:B(z,y)\to\forall u:C(x,u)) & \text{(消去重名个体变量)}\\
=&\forall x:(\neg(A(x)\wedge\forall z:B(z,y))\vee\forall u:C(x,u)) & \text{(消去}\to\text{和}\leftrightarrow\text{)}\\
=&\forall x:(\neg A(x)\vee\exists z:\neg B(z,y)\vee\forall u:C(x,u)) & \text{(内移}\neg\text{至谓词前面)}\\
=&\forall x\exists z\forall u:(\neg A(x)\vee\neg B(z,y)\vee C(x,u)) & \text{(量词前移)}
\end{aligned}
$$

Homework

1. P. 60: Exercises 9(2), 10(1).

推理框架

一阶逻辑的推理理论与命题逻辑相似

- 推理理论的框架, 术语, 记号基本相同, 但内涵有差异;
    - 有效推理, 前提, 结论, 形式证明, 推理规则,
    - 命题公式替换为谓词公式,
    - 永真公式替换为有效公式等;
- 增加涉及量词的推理规则.

涉及全称量词的推理规则

1. 全称量词消去规则 (US规则)
   1. 对于任意个体常量 e, $\forall x : A(x)$ 推出 $A(e)$
   2. 对于任意个体变量 y, $\forall x : A(x)$ 推出 $A(y)$
      在 A 中, x 不在任何 $\forall y$ 和 $\exists y$ 的辖域内自由出现
2. 全称量词引入规则 (UG规则)
   1. $A(x)$ 推出 $\forall x : A(x)$
      A 不含额外个体常量, 前提中没有任何自由的个体变量 x

涉及存在量词的推理规则

1. 存在量词消去规则 (ES规则)
   1. $\exists x : A(x)$ 推出 $A(e)$
      e 是在证明中未出现过的新的额外个体常量
2. 存在量词引入规则 (EG规则)
   1. 对于任意个体常量 e, $A(e)$ 推出 $\exists x : A(x)$
      在 A 中, e 不在任何 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域内出现
   2. 对于任意个体变量 y, $A(y)$ 推出 $\exists x : A(x)$
      在 A 中, y 不在任何 $\forall x$ 和 $\exists x$ 的辖域内自由出现

示例

证明苏格拉底三段论的正确性.

命题符号化:
个体域为全总个体域
引入谓词 $H(x)$: x 是人; $D(x)$: x 是要死的
引入个体常量 a: 苏格拉底
前提: $\forall x : (H(x) \rightarrow D(x)), H(a)$
结论: $D(a)$

构造形式证明:

1. $\forall x : (H(x) \rightarrow D(x))$ (前提引入)
2. $H(a) \rightarrow D(a)$ (US 规则)
3. $H(a)$ (前提引入)
4. $D(a)$ ((2), (3) 假言推理)

示例

构造 $\forall x:(F(x)\rightarrow\neg H(x)),\forall x:(H(x)\vee G(x)),\exists x:\neg G(x)\Rightarrow\neg\forall x:F(x)$ 的形式证明.

1. $\exists x:\neg G(x)$ (前提引入)
2. $\neg G(e)$ ((1) ES 规则)
3. $\forall x:(H(x)\vee G(x))$ (前提引入)
4. $H(e)\vee G(e)$ ((3) US 规则)
5. $H(e)$ ((2), (4) 析取三段论)
6. $\forall x:(F(x)\rightarrow\neg H(x))$ (前提引入)
7. $F(e)\rightarrow\neg H(e)$ ((6) US 规则)
8. $\neg F(e)$ ((5), (7) 拒取式)
9. $\exists x:\neg F(x)$ ((8) EG 规则)
10. $\neg\forall x:F(x)$ ((9)置换规则)

小结

一阶逻辑形式证明的基本步骤:

1. 消去量词,
2. 利用不涉及量词的推理规则进行推理,
3. 引入量词(若结论中有量词).

注意推理规则中的限制条件.

Example

UG规则要求x不是前提中的自由变元的条件不能少,
否则会误证 $P(x) \Rightarrow \forall x : P(x)$.

Homework

1. PP. 60–61: Exercises 11(3), 15.