

1.1

	1 second	1 minute	1 hour	1 day	1 month	1 year	1 century
$\lg n$	2^{10^6}	$2^{6 \times 10^7}$	$2^{3.6 \times 10^9}$	$2^{8.64 \times 10^{10}}$	$2^{2.592 \times 10^{12}}$	$2^{9.4608 \times 10^{14}}$	$2^{9.4608 \times 10^{16}}$
\sqrt{n}	10^{12}	3.6×10^{15}	1.3×10^{19}	7.5×10^{21}	6.7×10^{24}	9.0×10^{29}	9.0×10^{33}
n	10^6	6×10^7	3.6×10^9	8.6×10^{10}	2.6×10^{12}	9.5×10^{14}	9.5×10^{16}
$n \log n$	62746	2.8×10^6	1.3×10^8	2.8×10^9	7.2×10^{10}	8.7×10^{10}	7.9×10^{12}
n^2	1000	7746	6×10^4	2.9×10^5	1.6×10^6	5.6×10^6	5.6×10^7
n^3	100	391	1532	4421	13737	31594	146646
2^n	20	26	32	36	41	45	51
$n!$	9	11	12	13	15	16	17

2. (1) c 为任意正常量, 定义 $a_0 = 1, a_i = 2 (i > 1), b_0 = \frac{1}{c}, b_i = i (i > 1)$

原问题等价于证明对于任意的整数 c , 存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, $\prod_{i=0}^n a_i < \prod_{i=0}^n b_i$

对于任意的整数 c , 设 $n_0 = \max(4, c)$, 设 $k = \text{ceil}(c)$, 则 $b_0 * b_k \geq 1$

当 $k = 1$ 时, $a_0 * a_1 * a_4 = 4, b_0 * b_1 * b_4 \geq 4$, 而 $a_i \leq b_i$ (当 $i > 1$ 时) 恒成立, 且等号当且仅当 $n = 2$ 成立, 则当 $n > n_0$ 时, $\prod_{i=0}^n a_i < \prod_{i=0}^n b_i$ 成立

当 $k = 8$ 时, $a_0 * a_1 * a_8 * a_{16} = 8, b_0 * b_1 * b_8 * b_{16} \geq 16$, 而 $a_i \leq b_i$ (当 $i > 1$ 时) 恒成立, 且等号当且仅当 $n = 2$ 成立, 则当 $n > n_0$ 时, $\prod_{i=0}^n a_i < \prod_{i=0}^n b_i$ 成立

其他情况时, $a_0 * a_1 * a_8 * a_k = 8, b_0 * b_1 * b_8 * b_k \geq 8$, 而 $a_i \leq b_i$ (当 $i > 1$ 时) 恒成立, 且等号当且仅当 $n = 2$ 成立, 则当 $n > n_0$ 时, $\prod_{i=0}^n a_i < \prod_{i=0}^n b_i$ 成立

综上, 原命题得证, 则 $n! = \omega(2^n)$

(2) 原命题等价于对于任意的正常数 c , 存在 n_0 , 当 $n > n_0$ 时, $c * n^n > n!$

令 $n_0 = \max(2, \text{ceil}(\frac{1}{c}))$, 则当 $n > n_0$ 时, $c * n \geq 1$

而 $n > 2, n > 3, n > 4, \dots, n \geq n$ 对任意 $n > n_0$ 恒成立, 与 $c * n \geq 1$ 连乘, 得到 $c * n^n > n!$

原命题得证, 则 $n! = o(n^n)$

3. 从上往下阶数从大到小排序, 阶数一样的放在一行:

$$2^{2^{n+1}}$$

$$2^{2^n}$$

$$(n+1)!$$

$$n!$$

$$e^n$$

$$n * 2^n$$

$$2^n$$

$$(\frac{2}{3})^n$$

$$(lgn)^{lgn}, \quad n^{lg lgn}$$

$$(lgn)!$$

$$n^3$$

$$n^2, \quad 4^{lgn}$$

$$nlgn, \quad lg(n!)$$

$$n, \quad 2^{lgn}$$

$$(\sqrt{2})^{lgn}, \quad \sqrt{n}$$

$$2^{\sqrt{2lgn}}$$

$$lg^2 n$$

$$lnn$$

$$\sqrt{lg n}$$

$$ln lnn$$

$$2^{lg^* n}$$

$$lg^* n, \quad lg^*(lgn)$$

$$lg(lg^* n)$$

$$n^{1/lgn}, \quad 1$$

由题意，f(n)无界且没有极限，一直在震荡，震荡最低值小于最小阶 1，震荡最大值大于最大阶 $2^{2^{n+1}}$

则可以构造函数:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{x为 奇 数} \\ 2^{2^{n+2}} & \text{x为 偶 数} \end{cases}$$