1. 用一阶原点矩进行估计. 几何分布期望为 $\frac{1}{p}$, 令 $A_1=EX$ 得 $p=\frac{1}{\bar{x}}$

3. 用一阶原点矩进行估计. 二项分布期望为 mp, 令 $A_1=EX$ 得 $p=\frac{\bar{x}}{m}$

4. 用一阶.二阶原点矩进行估计 $EX=mp$. $EX^2=(EX)^2+VarX=mp+mp(1-p)$

令 $\begin{cases} A_1=mp \\ A_2=mp+mp(1-p) \end{cases}$ 得 $\begin{cases} mp=\bar{x} \\ mp(1-p)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\bar{x}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=S_n^2 \end{cases}$

则 $\begin{cases} p=1-\frac{S_n^2}{\bar{x}} \\ m=[\frac{\bar{x}^2}{\bar{x}-S_n^2}] \end{cases}$ (m 为整数最后取整)

6. 用一阶原点矩进行估计. 由 $EX=\frac{\theta}{2}$. 令 $A_1=EX$ 解得 $\theta=2\bar{X}$

7. $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{1}{8}(74.001+74.005+74.003+74.001+74.000+73.998+74.006+74.002)$
$=74.002$

$S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2=\frac{1}{8}(0.001^2\times3+0.002^2\times1+0.003^2\times1+0.004^2\times2)=6\times10^{-6}$

用一阶原点矩进行估计 (二阶中心矩) $\begin{cases} A_1=EX=\mu \\ B_2=VarX=\sigma^2 \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} \mu=74.002 \\ \sigma^2=6\times10^{-6} \end{cases}$

6.2.

2. 似然函数 $L(\theta)=\begin{cases} (\sqrt{\theta})^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\sqrt{\theta}-1} & 0<x_1,x_2\dots x_n<1 \\ 0 \end{cases}$

$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+\sqrt{\theta}\cdot\sum_{k=1}^{n}\ln x_k+c$

$\ln' L(\theta)=\frac{n}{2\theta}+\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln x_k}{2\sqrt{\theta}}=\frac{1}{2\sqrt{\theta}}(\frac{n}{\sqrt{\theta}}-(-\sum_{k=1}^{n}\ln x_k))$

当 $\frac{1}{\sqrt{\theta}}>\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln x_k}{n}$ 即 $0<\theta<(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\ln x_k})^2$ 时 $\ln' L(\theta)>0$

$\therefore$ 当 $0<\frac{1}{\sqrt{\theta}}<\frac{\sum_{k=1}^{n}\ln x_k}{n}$ 即 $\theta>(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\ln x_k})^2$ 时 $\ln' L(\theta)<0$

$\therefore$ 当 $\theta=(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\ln x_k})^2$ 时 $L(\theta)$ 取得最大值. $\therefore \theta$ 极大似然估计为 $(\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\ln x_k})^2$

3. $L(p)=C_m^{x_1}p^{x_1}(1-p)^{m-x_1}C_m^{x_2}p^{x_2}(1-p)^{m-x_2}\cdots C_m^{x_n}p^{x_n}(1-p)^{m-x_n}$

于是 $\ln L(p)=C+\sum_{i=1}^{n}x_i\ln p+\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)\ln(1-p)$

$\ln' L(p)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\frac{\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)}{1-p}=\frac{(1-p)\sum_{i=1}^{n}x_i-p\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)}{p(1-p)}=\frac{n(\bar{x}-pm)}{p(1-p)}$

$\therefore$ 当 $0<p<\frac{\bar{x}}{m}$ $\ln' L(p)>0$ 当 $p>\frac{\bar{x}}{m}$ $\ln' L(p)<0$.

$\therefore$ 当 $p=\frac{\bar{x}}{m}$ 时. $L(p)$ 取得最大值 $\therefore p$ 的极大似然估计为 $\frac{\bar{x}}{m}$

4. 似然函数 $L(\theta)=\begin{cases} \dfrac{\prod_{i=1}^{n}x_i}{\theta^n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta}} & x_1,x_2\cdots x_n>0 \\ 0 & \text{其他情况} \end{cases}$

则 $\ln L(\theta)=C-n\ln\theta-\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta}$ $\quad \ln' L(\theta)=-\dfrac{n}{\theta}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta^2}=\dfrac{1}{\theta}\left(\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2\theta}-n\right)$

当 $\dfrac{1}{\theta}>\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ 即 $0<\theta<\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}$ $\ln' L(\theta)>0$; 当 $\theta>\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}$ 即 $0<\dfrac{1}{\theta}<\dfrac{2n}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ $\ln' L(\theta)<0$

∴当 $\theta=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}$ 时 $\ln L(\theta)$ 取得~~极~~最大值 ∴ θ 的极大似然估计为 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{2n}$

7. 设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ $x_1,x_2\cdots x_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本

似然函数 $L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}\right)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

则 $\ln L(\mu,\sigma^2)=-\dfrac{n}{2}\ln(2\pi)-\dfrac{n}{2}\ln(\sigma^2)-\dfrac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$

① $\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial \mu}=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)$ 而 $\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\mu\partial\mu}=-\dfrac{n}{\sigma^2}\leq 0$

∴当 $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$ 即 $\mu=\bar{x}$ 取得极大值

② $\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=-\dfrac{n}{2\sigma^2}+\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4}$ 令 $\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2}=0$ 解得 $\sigma^2=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{n}=S_n^2$

此时 $\dfrac{\partial \ln L(\mu,\sigma^2)}{\partial\sigma^2\partial\sigma^2}=\dfrac{1}{\sigma^4}\left(\dfrac{n}{2}-n\right)\leq 0$. ∴当 $\sigma^2=S_n^2$. 取得最大值.

由上可得. $\begin{cases}\mu=\bar{x}=74.002\\ \sigma^2=S_n^2=6\times10^{-6}\end{cases}$

6.3.

1. (1). 由 X_1 是 $b(1,p)$ 一个样本. 则 $EX_1=p$ X_1 为无偏估计.

(2). $EX_1^2=VarX_1+(EX_1)^2=p(1-p)+p^2=p$ $\quad X_1^2$ 不是 p^2 无偏估计

(3). 由于 X_1,X_2 独立 $EX_1X_2=EX_1EX_2=p^2$ $\quad X_1X_2$ 是 p^2 无偏估计.

3. 由泊松分布 $E\bar{X}=\lambda$ $Var\bar{X}=\dfrac{\lambda}{n}$

要想有 λ^2. 可以使 $(E\bar{X})^2=\lambda^2$ 而 $(E\bar{X})^2=E\bar{X}^2-Var\bar{X}=E\bar{X}^2-\dfrac{\lambda}{n}=E\bar{X}^2-\dfrac{E\bar{X}}{n}=E\left(\bar{X}^2-\dfrac{\bar{X}}{n}\right)$

∴ $\bar{X}^2-\dfrac{\bar{X}}{n}$ 是参数 λ^2 无偏估计.

6. $MSE(\hat\theta_1)=Var\hat\theta_1+(E\hat\theta_1-\theta)^2=6$ $\quad MSE(\hat\theta_2)=Var\hat\theta_2+(E\hat\theta_2-\theta)^2=3$

以均方误差准则. $\hat\theta_2$ 更好.