1. 由联合分布列的正则性

$$\sum_{\substack{i\in[-2,2]\\ j\in[-2,2]}} c|i+j| = 40c = 1 \quad 解得\ c=\frac{1}{40}$$

$$P(X=-2)=\sum_{j=-2}^{2}P_{-2j}=10c=\frac{1}{4} \quad P(X=-1)=\sum_{j=-2}^{2}P_{-1j}=7c=\frac{7}{40}$$

$$P(X=0)=\sum_{j=-2}^{2}P_{0j}=6c=\frac{3}{20} \quad P(X=1)=\sum_{j=-2}^{2}P_{1j}=7c=\frac{7}{40} \quad P(X=2)=\sum_{j=-2}^{2}P_{2j}=\frac{1}{4}$$

可得到X的分布列为:

X	-2	-1	0	1	2
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{4}$

3. 当 $x<0$ 或 $x>1$ 时 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}0\,dy=0$

当 $0\le x\le 1$ 时 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,dy+\int_{0}^{2}\frac{1}{2}dy+\int_{2}^{+\infty}0\,dy=1$

$$\therefore p_X(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le 1\\ 0 & x<0 或 x>1\end{cases}$$

当 $y<0$ 或 $y>2$ 时 $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}0\,dx=0$

当 $0\le y\le 2$ 时 $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{0}0\,dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{2}dx+\int_{1}^{+\infty}0\,dx=\frac{1}{2}$

$$\therefore p_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2} & 0\le y\le 2\\ 0 & y<0 或 y>2\end{cases}$$

5. 当 $x>0$ 时 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\sqrt{8\pi}}e^{-x-\frac{x^2y^2}{2}}dy=\frac{1}{2}e^{-x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{x}}e^{-\frac{y^2}{2(\frac{1}{x})^2}}dy=\frac{1}{2}e^{-x}$

当 $x=0$ 时 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{0}{\sqrt{8\pi}}e^{0}dy=0$

当 $x<0$ 时 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-x}{\sqrt{8\pi}}e^{x-\frac{x^2y^2}{2}}dy=\frac{1}{2}e^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}(-\frac{1}{x})}e^{-\frac{y^2}{2(-\frac{1}{x})^2}}dy=\frac{1}{2}e^{x}$

$$\therefore p_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x} & x<0\\ 0 & x=0\\ \frac{1}{2}e^{-x} & x>0\end{cases}$$

6. $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\pi}e^{2xy-x^2-2y^2}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-y)^2}{2\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}})^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}$

∴ Y的边际概率密度函数 $p_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}$

$P(Y>\sqrt{2})=\int_{\sqrt{2}}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}dy=\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}d\frac{t}{\sqrt{2}}$ （记 $y=\frac{t}{\sqrt{2}}$ $t=\sqrt{2}y$）

$=\int_{2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=1-\Phi(2)=1-0.9772=0.0228$

3.3.

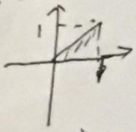
1. 由随机变量的正则性 $a+b+c+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}=1$ ①

$P(X=0)=a+b+\frac{1}{9}$ $P(Y=0)=\frac{1}{9}+c$ 则 $(a+b+\frac{1}{9})(\frac{1}{9}+c)=P(X=0,Y=0)=\frac{1}{9}$ ②

$P(X=1)=\frac{1}{9}+c+\frac{1}{3}$ $P(Y=1)=\frac{1}{3}+b$ 则 $(\frac{1}{9}+c+\frac{1}{3})(\frac{1}{3}+b)=P(X=1,Y=1)=\frac{1}{3}$ ③

解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{18}\\ b=\frac{1}{6}\\ c=\frac{2}{9}\end{cases}$

3. 当 $x\le 0$ 或 $x\ge 1$ 时 $p_X(x)=0$ 当 $0<x<1$ 时 $p_X(x)=\int_{-\infty}^{0}0dy+\int_{0}^{x}12y^2dy+\int_{x}^{+\infty}0dy$
$=4y^3$



∴ $p_X(x)=\begin{cases}0 & x\le 0 \text{或} x\ge 1\\ 4x^3 & 0<x<1\end{cases}$

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 0$ 时 $p_Y(y)=0$ 当 $0<y<1$ 时. $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}0dx+\int_{y}^{1}12y^2dx+\int_{1}^{+\infty}0dx$
$=12y^2(1-y)$

∴ $p_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le 0 \text{或} y\ge 0\\ 12y^2(1-y) & 0<y<1\end{cases}$

$p_X(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ $p_Y(\frac{1}{2})=\frac{1}{6}$ $p(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=12\cdot(\frac{1}{2})^2=3$

∴ $p_X(\frac{1}{2})\,p_Y(\frac{1}{2})\neq p(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ ∴ X与Y不独立.

6. 当 $0<x<1$ 时. $p_X(x)=\int_{-\infty}^{-1}0dy+\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy+\int_{1}^{+\infty}0dy=\frac{1}{4}y+\frac{xy^2}{8}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}$ ~~当x时 p(x)=~~

当 $x\ge 1$ 或 $x\le -1$ 时 $p_X(x)=0$

当 $0<y<1$ 时 $p_Y(y)=\int_{-\infty}^{-1}0dx+\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dx+\int_{1}^{+\infty}0dx=\frac{1}{4}x+\frac{yx^2}{8}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}$

当 $y\ge 1$ 或 $y\le -1$ 时 $p_Y(y)=0$.

接6

由上可得 $p_X(x)=\begin{cases}0 & x\geq 1 \text{ 或 } x\leq -1\\ \frac{1}{2} & -1<x<1\end{cases}$

$p_Y(y)=\begin{cases}0 & y\geq 1 \text{ 或 } y\leq -1\\ \frac{1}{2} & -1<y<1\end{cases}$

$p_X(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ $p_Y(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$ $p(\frac{1}{2},\frac{1}{2})=\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}{4}=\frac{5}{16}$

$\therefore p_X(\frac{1}{2})p_Y(\frac{1}{2})\neq p(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

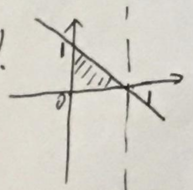
$\therefore$ X与Y不独立。

7. (1). $p_X(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x\leq 0 \text{ 或 } x\geq 1\end{cases}$ $p_Y(y)=\begin{cases}e^{-y} & y>0\\ 0 & y\leq 0\end{cases}$

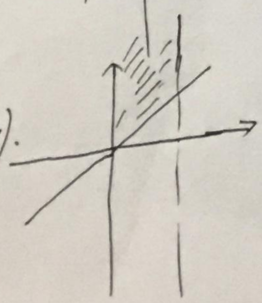
当$y\leq 0$时 $p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)=p_X(x)\cdot 0=0$

当$y>0$时. 若$x\leq 0$或$x\geq 1$时. $p_X(x)=0$ 则 $p(x,y)=0$ 若$0<x<1$ $p(x,y)=p_Y(y)p_X(x)=e^{-y}$

$\therefore p(x,y)=\begin{cases}0 & y\leq 0 \text{ 或 } x\leq 0 \text{ 或 } x\geq 1\\ e^{-y} & y>0\ \ 0<x<1\end{cases}$

(2). 

$P(X+Y\leq 1)=\iint e^{-y}dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}e^{-y}dy$
$=\int_0^1(1-e^{x-1})dx$
$=1-(e^0-e^{-1})=\frac{1}{e}$

(3). 

$P(X\leq Y)=\iint e^{-y}dxdy=\int_0^1 dx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy$
$=\int_0^1 e^{-x}dx$
$=1-\frac{1}{e}$