2. $X\sim P(\lambda)$ 则X的分布列为 $P(X=i)=\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$ $i=0,1,2\cdots$

则 $EX^{k+1}=\sum_{i=0}^{\infty}i^{k+1}\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}=\sum_{i=1}^{\infty}i^k\frac{\lambda^i}{(i-1)!}e^{-\lambda}=\sum_{i=1}^{\infty}(i-1+1)^k\frac{\lambda^i}{(i-1)!}e^{-\lambda}$

$=\lambda\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^k\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}=\lambda E(X+1)^k$

(记 $j=i-1$) $=\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)^k\frac{\lambda^{j+1}}{j!}e^{-\lambda}$

$EX^3=\lambda E(X+1)^2=\lambda E(X^2+2X+1)=\lambda^2E(X+1)+2\lambda EX+\lambda=(\lambda^2+2\lambda)EX+\lambda^2+\lambda$

由于 $EX=\lambda$

可得 $EX^3=(\lambda^2+2\lambda)\lambda+\lambda^2+\lambda=\lambda^3+2\lambda^2+\lambda$

4. 由题意 $X\sim U(0,1)$. 则其概率密度函数 $p(x)=\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & x\le 0 \text{或} x\ge 1\end{cases}$

$EX^3=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3p(x)dx=\int_0^1x^3dx=\frac{1}{4}x^4\Big|_0^1=\frac{1}{4}$

$Ee^X=\int_{-\infty}^{+\infty}e^xp(x)dx=\int_0^1e^xdx=e^x\Big|_0^1=e-1$

$E(X-\frac{1}{2})^2=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\frac{1}{2})^2p(x)dx=\int_0^1(x^2-x+\frac{1}{4})dx=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x\Big|_0^1=\frac{1}{12}$

6. 由题意 $X\sim Exp(1)$. 其概率密度函数 $p(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

则 $Ee^{\frac{X}{2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{x}{2}}p(x)=\int_0^{+\infty}e^{\frac{x}{2}}\cdot e^{-x}dx=-2e^{-\frac{x}{2}}\Big|_0^{+\infty}=2$

同理 $Ee^{\frac{Y}{2}}=2$

由于X与Y相互独立 $E(e^{\frac{X+Y}{2}})=E(e^{\frac{X}{2}}e^{\frac{Y}{2}})=E(e^{\frac{X}{2}})E(e^{\frac{Y}{2}})=4$

$\frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$

$(1-e^{-\lambda})$

8. 由题意Y可取0,1,2,3…: Y的分布列:

$P(Y=k)=P(k\le X<k+1)=\int_k^{k+1}p(x)dx=\int_k^{k+1}\lambda e^{-\lambda x}=e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda})$

则 $EY=\sum_{i=0}^{\infty}e^{-\lambda i}(1-e^{-\lambda})\cdot i=(1-e^{-\lambda})\sum_{i=0}^{\infty}i\cdot e^{-\lambda i}$

记 $A=\sum_{i=0}^{m}ie^{-\lambda i}$ 则 $A=0e^{-0}+1\cdot e^{-\lambda}+2\cdot e^{-2\lambda}+\cdots m\cdot e^{-m\lambda}$

$e^{-\lambda}A=\quad 0\cdot e^{-\lambda}+1\cdot e^{-2\lambda}+\cdots(m-1)e^{-m\lambda}+me^{-(m+1)\lambda}$

则 $(1-e^{-\lambda})A=e^{-\lambda}+e^{-2\lambda}+\cdots e^{-m\lambda}-me^{-(m+1)\lambda}$

$A=\frac{e^{-\lambda}(1-e^{-m\lambda})}{(1-e^{-\lambda})^2}-me^{-(m+1)\lambda}$

当 $m\to\infty$ $1-e^{-m\lambda}\to 1$ $m\cdot e^{-(m+1)\lambda}\to 0$ $A\to\frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}$

$\therefore EY=(1-e^{-\lambda})\cdot\frac{e^{-\lambda}}{(1-e^{-\lambda})^2}=\frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}$

4. $X \sim U(0,1)$ 其概率密度函数 $p(x)=\begin{cases} 1 & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \text{或} x\geq 1 \end{cases}$

则 $EX=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}$

$VarX=E(X-\frac{1}{2})^2=\int_0^1 (x-\frac{1}{2})^2 dx=\frac{1}{3}(x-\frac{1}{2})^3\Big|_0^1=\frac{1}{24}-(-\frac{1}{24})=\frac{1}{12}$

5. 由题意 $X \sim N(0,1)$ 其概率密度函数 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$Ee^x=\int_{-\infty}^{+\infty} e^x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}}dx=e^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$

同理 $Ee^{2x}=e^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2}}\cdot dx=e^2$

则 $Vare^x=E(e^x-e^{\frac{1}{2}})^2=E(e^{2x}-2e^{\frac{1}{2}}e^x+e)=Ee^{2x}-2e^{\frac{1}{2}}Ex+e=e^2-2e+e$

$=e^2-e$

6. 当 $-1<x<1$ 时 $p(x)=\int_{-1}^{1}\frac{1+xy}{4}dy=\frac{1}{2}$ 则 $p(x)$ (X的概率密度函数) $=\begin{cases} \frac{1}{2} & -1<x<1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$

由于X与Y对称.可知二者同分布.

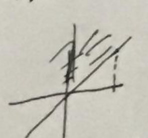
$Ex=\int_{-\infty}^{+\infty}xp(x)=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{2}dx=0$ $VarX=EX^2=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{3}$

$EXY=\iint xy\frac{1+xy}{4}dxdy=\int_{-1}^{1}\frac{x}{4}dx\int_{-1}^{1}(y+xy^2)dy=\int_{-1}^{1}\frac{x}{2}dx\int_0^1 xy^2dy=\int_{-1}^{1}\frac{1}{6}x^2dx$

$=\frac{1}{18}x^3\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{9}$

$\therefore Var(X+Y)=VarX+VarY+2E[(X-Ex)(Y-EY)]=VarX+VarY+2E(XY)-2E(X)E(Y)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{2}{9}-0=\frac{8}{9}$



8. $D=\{(x,y),0<x<y\}$

$EX=\iint xp(x,y)dxdy=\iint_D xe^{-y}dxdy=\int_0^{+\infty}xdx\int_x^{+\infty}e^{-y}dy=\int_0^{+\infty}xe^{-x}dx=-(1+x)e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$

$=1$

$EY=\iint xp(x,y)dxdy=\iint_D ye^{-y}dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^y ye^{-y}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx$

$=-(x^2+2x+2)e^{-x}\Big|_0^{+\infty}$

$=2$

$EXY=\iint xyP(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^y xye^{-y}dx=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}y^3e^{-y}dy=-(y^3+3y^2+6y+6)\Big|_0^{+\infty}\cdot\frac{1}{2}=3$

$EX^2=\iint_D x^2e^{-y}dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^y x^2e^{-y}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{3}y^3e^{-y}dy=-(y^3+3y^2+6y+6)\Big|_0^{+\infty}\cdot\frac{1}{3}=2$

$EY^2=\iint_D y^2e^{-y}dxdy=\int_0^{+\infty}dy\int_0^y y^2e^{-y}dx=\int_0^{+\infty}y^3e^{-y}dy=6$

则 $VarX=EX^2-(EX)^2=2-1=1$ $VarY=EY^2-(EY)^2=6-4=2$

$Var(X+Y)=VarX+VarY+2E[(X-EX)(Y-EY)]=VarX+VarY+2(EXY-EXEY)=1+2+2(3-2)$

$=5$

$\therefore EX=1$ $EY=2$ $EXY=3$ $VarX=1$ $VarY=2$ $Var(X+Y)=5$