Discrete Mathematics

2019~2020 (第一学期)

Department of Computer Science, East China Normal University

September 10, 2019

Motivation

苏格拉底三段论的正确性不能在命题逻辑中反映

苏格拉底三段论: 凡人都是要死的 (大前提 p), 苏格拉底是人 (小前提 q), 所以, 苏格拉底是要死的 (结论 r).
苏格拉底三段论是正确的推理.
在命题逻辑中, $p \wedge q \rightarrow r$ 不是重言式. 因此, 推理 $p, q \Rightarrow r$ 不成立.

Chapter 4 FIRST-ORDER LOGIC

4.1 谓词, 量词和谓词公式

4.2 谓词公式的等值演算和前束范式

4.3 一阶逻辑的推理理论

本章的教学重点和难点: 谓词和谓词公式的概念, 谓词公式的等值演算和前束范式, 形式证明.

讲授 8 课时.

Outline of §-1 Predicates, Quantifiers and Predicate Formulas

谓词

原子命题(陈述)分解为: 个体词、谓词、量词.

Definition

个体词: 命题中独立存在的个体—主语.
谓词(predicate): 刻画个体的性质或它们之间的关系—谓语.

Example

在命题“张三是学生”中, “张三”是个体词, “... 是学生”是谓词.
在命题“2小于3”中, “2”和“3”是个体词, “... 小于 ...”是谓词.

注: 这里的**谓语**实际上包括了除个体词以外的所有其他句子成分.

谓词

Definition

个体常量: 具体, 特定的个体词, 常用小写字母 $a, b, \ldots$ 表示.
个体变量: 抽象或泛指某个体的个体词, 常用小写字母 $x, y, \ldots$ 表示.
个体域: 单个个体变量的取值集合.
全总个体域: 所有个体变量的取值集合.
n 元谓词: 关于 n 个个体词的谓词, 谓词常用大写字母表示, n 元谓词记为 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

一元谓词表示个体的性质, 多元谓词表示个体之间的关系.

命题符号化

Example

命题“$2 < 3$”

个体常量 $a \to 2$, 个体常量 $b \to 3$.

谓词 $L(y,z) \to y < z$.

最终, $L(a,b) \to 2 < 3$.

量词

全称判断: 表示个体域中所有的元素都具有某个性质.
特称判断: 表示个体域中存在某个(些)元素具有某个性质.

Example

1. 所有的有理数都是实数.
2. 有的实数是有理数.

Definition

量词 (quantifier): 符号化短语“所有的”和“有些”.
全称量词 $\forall x$: 表示短语“对于任意的 x”.
存在量词 $\exists x$: 表示短语“存在 x”.

全称量词

$\forall x : P(x)$ 的含义

- 自然语言翻译
  对于任意的 x, $P(x)$ 都为真
  对每个 x, $P(x)$ 都为真
  对所有的 x, $P(x)$ 都为真
- 真值判断
  仅当不存在使 $P(x)$ 为假的 x 时, $\forall x : P(x)$ 才为真
  只要存在一个 x 使得 $P(x)$ 为假, 则 $\forall x : P(x)$ 就为假

注: $\forall x\ P(x)$, 其中的x 不再起变元的作用, 它被全程量词$\forall x$限制住了.

存在量词

$\exists x : P(x)$ 的含义

- 自然语言翻译
  存在 x, 使得 $P(x)$ 为真
  至少有一个 x, 使得 $P(x)$ 为真
- 真值判断
  只要存在一个 x 使得 $P(x)$ 为真, 则 $\exists x : P(x)$ 就为真
  仅当不存在使 $P(x)$ 为真的 x 时, $\exists x : P(x)$ 才为假

QUIZ: 若 $\forall x : P(x)$ 成立, 则 $\exists x : P(x)$ 成立?

命题符号化

全称判断和特称判断的符号化与个体域有关.

Example (将下列例子符号化)

(1) 凡人都要死.

(2) 有的人用左手写字.

其中:

(a) 个体域D_1 为人类集合

(b) 个体域D_2 为全总个体域

命题符号化

解: 令 P(x): x 是人;

Q(x): x 要死;

R(x): x 用左手写字.

(a) 个体域D_1 为人类集合, 则

(1) 可符号化为: $\forall x\ Q(x)$

(2) 可符号化为: $\exists x\ R(x)$

(b) 个体域D_2 为全总个体域, 则

(1) 可符号化为: $\forall x\ (P(x) \rightarrow Q(x))$

(2) 可符号化为: $\exists x\ (P(x) \wedge R(x))$

命题符号化

Example (符号化“所有的数都是有理数”和“有的数是有理数”)

- 个体域为实数域
  引入谓词 $Q(x)$: x 是有理数
  符号化结果: $\forall x : Q(x)$, $\exists x : Q(x)$
- 个体域为有理数域
  符号化结果: $\forall x : Q(x)$, $\exists x : Q(x)$.

命题符号化

全称判断常符号化为蕴含式,
特称判断常符号化为合取式.

Example

命题符号化默认使用全总个体域.

1. 计算机系有学生去过美国
   引入谓词 $P(x)$: x 是计算机系的学生; $Q(x)$: x 去过美国
   符号化结果: $\exists\, x : P(x) \wedge Q(x)$
2. 没有无知的教授
   引入谓词 $P(x)$: x 是教授; $Q(x)$: x 是无知的
   符号化结果: $\forall\, x : P(x) \rightarrow \neg Q(x)$

示例

Example (苏格拉底三段论的符号化)

苏格拉底三段论: 凡人都是要死的, 苏格拉底是人, 所以, 苏格拉底是要死的.

引入谓词 $P(x)$: x 是人; $D(x)$: x 都是要死的.

引入常量符号 a: 苏格拉底.

符号化结果:

前提 $\forall x : (P(x) \to D(x))$ 和 $P(a)$; 结论 $D(a)$.

示例

Example (符号化命题“每人恰有一个最好的朋友”)

个体域: 全体人的集合
引入谓词 $B(x,y)$: y 是 x 的最好朋友
符号化结果: $\forall\, x\, \exists\, y : B(x,y) \wedge \forall\, z : (z \neq y \rightarrow \neg B(x,z))$

Example (谓词公式的自然语言翻译)

谓词 $F(x,y)$: x 和 y 是朋友
个体域: ECNU 全体学生的集合
谓词公式

$$\exists\, x\, \forall\, y\, \forall\, z : ((F(x,y) \wedge F(x,z) \wedge y \neq z) \rightarrow \neg F(y,z))$$

的含义是?

项的递归定义

Definition

项 (term) 的递归定义:

- 个体词 (个体常量和个体变量) 是项;
- 若 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 是 $n\,(n \geq 1)$ 元函数, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是项, 则 $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是项;
- 所有的项都是通过有限次使用上述规则后得到的符号串.

谓词公式的递归定义—语法方面

Definition

谓词公式 (predicate formula) 的递归定义:

- 若 P 是 $n\,(n \geq 1)$ 元谓词符号, $t_1, t_2, \ldots, t_n$ 是项, 则 $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ 是谓词公式 (特别地, 原子谓词公式 atomic predicate formula);
- 若 A 和 B 是谓词公式, 则 $\neg A, A \wedge B, A \vee B, A \rightarrow B, A \leftrightarrow B$ 也是谓词公式;
- 若 A 是谓词公式, x 是个体变量, 则 $\forall\, x : A, \exists\, x : A$ 也是谓词公式;
- 所有的谓词公式都是通过有限次使用上述规则后得到的符号串.

谓词公式

谓词公式的简化

- 最外层的圆括号可以省略
- $\forall, \exists$ 和 $\neg$ 的优先级相同
- 联结词的优先次序依次为 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

例如: $((\forall\, x : A(x,y) \vee B(y)) \leftrightarrow \exists\, x : C(y))$ 可简化为 $\forall\, x : A(x,y) \vee B(y) \leftrightarrow \exists\, x : C(y)$.

Definition

在谓词公式 $\forall\, x : A$ 和 $\exists\, x : A$ 中, x 为称指导变量, 量词的辖域为 A. 辖域 A 中的变量 x 称为约束变量; A 中的非约束变量称为自由变量. 含 n 个自由变量 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的谓词公式 A 记为 $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

示例

指出下列公式中的指导变量, 量词的辖域, 约束变量, 自由变量.

1. $\forall\, x : P(x) \rightarrow P(x)$
2. $\forall\, x : (P(x) \wedge Q(x)) \wedge \exists\, x : S(x)$
3. $\exists\, x\, \exists\, y : (P(x, y) \wedge Q(z)) \vee \exists\, z : F(z)$

谓词公式的解释—语义方面

谓词公式是符号串, 并非命题.

当规定了个体域, 并对其中的**自由**变量、函数、谓词等符号指定了具体含义以后, 谓词公式表示一个具体的命题.

Definition (谓词公式解释)

谓词公式的解释 I (interpretation) 由下面 4 部分组成:

- 给定非空个体域集合 D;
- 分别指定公式中的自由变量和常量符号为 D 中的元素;
- 指定公式中的 n 元函数符号为 D^n 到 D 的函数;
- 指定公式中的 n 元谓词符号为 D^n 到 $\{0, 1\}$ 的函数.

关于解释和谓词公式取值的说明

谓词公式 $\forall x : P(x)$ 和 $\exists x : P(x)$, 其中 P 是一元谓词符号.

- 解释 I 给定个体域 D
  为一元谓词符号 P 指定的 D 到 $\{0, 1\}$ 的函数: P^I.
- 谓词公式 $\forall x : P(x)$ 在解释 I 下为真 当且仅当 对于任意 $x \in D$, 都有 $P^I(x) = 1$.
- 谓词公式 $\exists x : P(x)$ 在解释 I 下为真 当且仅当 存在 $x \in D$, 使得 $P^I(x) = 1$.
- 若 D 非空且有限, $D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, 则在解释 I 下:
  $\forall x : P(x)$ 为真 当且仅当 $P^I(a_1) \wedge P^I(a_2) \wedge \cdots \wedge P^I(a_n) = 1$,
  $\exists x : P(x)$ 为真 当且仅当 $P^I(a_1) \vee P^I(a_2) \vee \cdots \vee P^I(a_n) = 1$.

示例

Example

设$D = \{1, 2, 3\}$, $P(x) : x$ 是奇数, 则

$\forall x\, P(x) = P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) = 0$

$\exists x\, P(x) = P(1) \vee P(2) \vee P(3) = 1$

示例

求谓词公式 $\forall x : (F(x) \land G(x, a))$ 和 $\exists x : (F(f(x)) \land G(x, f(x)))$ 的真值.
解释 I:

- 个体域 $D = \{1, 2\}$;
- 常量符号 $a = 1$;
- 函数符号 f: $f(1) = 2$, $f(2) = 1$;
- 谓词符号 F: $F(1) = 1$, $F(2) = 0$; 谓词符号 G: 对于任意 $i, j \in D$, $G(i, j) = 1$.

示例

求谓词公式 $\forall x \forall y : (F(f(x,a),y) \to F(f(y,a),x))$ 的真值.

解释 I:

- 个体域 $D = \mathbb{R}$;
- 常量符号 $a = 1$;
- 函数符号 f: $\forall x, y \in D$, $f(x,y) = xy$;
- 谓词符号 F: $\forall x, y \in D$, $F(x,y) = 1 \leftrightarrow x = y$.

谓词公式的类型

Definition

有效公式: 关于一切解释的真值均为真;
矛盾公式: 关于一切解释的真值均为假;
可满足公式: 至少存在一种使其为真的解释.

示例

Example (说明下列各公式的类型)

(1) $\forall x \exists y\ P(x, y) \wedge Q$

(2) $\forall x \forall y\ (P(x, y) \wedge \neg P(x, y))$

(3) $(P(x, y) \vee \neg P(x, y)) \wedge (Q \vee \neg Q)$

(4) $P(x, y)$

其中Q 是命题变元.

QUIZ: $\forall x \exists y : F(x, y) \rightarrow \exists x \forall y : F(x, y)$ 是有效公式吗?

代换实例

给定命题公式$A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, 和谓词公式$A_1, A_2, \ldots, A_n$. 分别用$A_1, A_2, \ldots, A_n$替换A中的$p_1, p_2, \ldots, p_n$, 所得到的谓词公式称为A的一个代换实例.

永真公式的代换实例是有效公式;
永假公式的代换实例是矛盾公式;
可满足命题公式的代换实例是可满足谓词公式?

$\forall x\ P(x) \wedge \exists y Q(y) \Rightarrow \forall x\ P(x)$
$\forall x\ P(x) \Rightarrow \forall x\ P(x) \vee \exists y Q(y)$

代换实例

QUIZ: 判断

$$\forall x : F(x) \wedge \exists x : H(x) \rightarrow \forall xF(x) \vee \exists x : H(x)$$

是否是有效公式?

Example

$p \wedge q$

用 $\exists xF(x)$ 替换 p

用 $\forall x \neg F(x)$ 替换 q

$\exists xF(x) \wedge \forall x \neg F(x)$.

可满足命题公式的谓词公式代换实例不一定是可满足的谓词公式.

Homework

1. P. 59: Exercises 1(1), 3, 5.