

# 基于最小二乘法模型的 FAST 反射面形状调节问题研究

罗忠旭, 秦小华, 陈 旭

(新疆农业大学, 新疆 乌鲁木齐 830000)

**摘要:**文章针对中国天眼(FAST)主动反射面在工作状态下确定理想抛物面的问题,建立最小二乘法的优化模型。首先,利用空间直角坐标系下旋转抛物面的方程,求得 FAST 工作抛物面的理想方程。其次,结合反射面板调节因素,即促动器顶端径向伸缩量为参数,基于最小二乘法,利用“FAST 基准态的 2 226 个主索节点空间位置坐标”进行拟合优化,使 FAST 主动反射面在调节范围内最大程度接近理想抛物面。问题中,当待观测天体位于基准球面正上方时,进行 3 种情况下的分析,最后通过建立方程模型与最小二乘法优化模型得到 FAST 工作状态下的理想抛物面方程。

**关键词:**FAST;最小二乘法;理想抛物面;方程模型

**中图分类号:**TH751

**文献标志码:**A

**文章编号:**2095-2945(2022)05-0057-03

**Abstract:** In this paper, aiming at the problem of determining the ideal paraboloid of the active reflector of Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope (FAST) under working condition, the optimization model of least square method is established. Firstly, the ideal equation of FAST working paraboloid is obtained by using the equation of rotating paraboloid in spatial Cartesian coordinate system. Secondly, according to the adjustment factor of the reflection panel, i.e. with the radial expansion of the top of the actuator as a parameter, based on the least square method, the fitting optimization is carried out by using the spatial position coordinates of 2 226 main cable nodes of the FAST reference state, so that the FAST active reflector is close to the ideal paraboloid in the adjustment range. In the problem, when the celestial body to be observed is directly above the reference sphere, the analysis is carried out in three cases. Finally, the ideal paraboloid equation in the working state of FAST is obtained by establishing the equation model and the least square optimization model.

**Keywords:** FAST; least square; ideal paraboloid; equation model

## 1 问题重述

射电天文学对天体物理研究的多个领域做出了巨大贡献,引起越来越多天文学家的重视,世界各国都在努力突破毫米波射电望远镜的技术困难,以建造更大的高精度的天线和实现对较短波段的观测<sup>[1]</sup>。“中国天眼”是一架 500 m 口径球面射电望远镜(Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope,缩写 FAST),是目前世界上最大、最灵敏的单口径射电望远镜<sup>[2]</sup>。主动变形反射面是 FAST 主要创新点之一,中国天文界公认整体索网支撑是作为大射电望远镜(FAST)主动反射面的最佳支撑结构<sup>[3]</sup>。其工作原理是通过下拉索与促动器的配合来完成基准球面到工作抛物面的转换,使被观测体发出的电磁波经反射后聚集在馈源舱处。工作抛物面随着物体的移动而不断变化,形成一个动态的“照明区域”,实现动态接收。天线对于射电望远镜来说,主要是把微弱的宇宙射电辐射信号收集起来,传送到接收机中去。收集到的信号越强烈,得到的讯息也就越丰富<sup>[4]</sup>。因此,调节成抛物面是主动反射面技术的关键。

根据主动反射面技术建立数学模型和算法解决如下问题。

问题:关于反映观测天体  $S$  的方位角度  $\alpha$ ,仰角  $\beta$  分别等于  $0^\circ$  和  $90^\circ$ ,即被观测天体位于基准球面正上方时,确定理想抛物面。如图 1 所示。

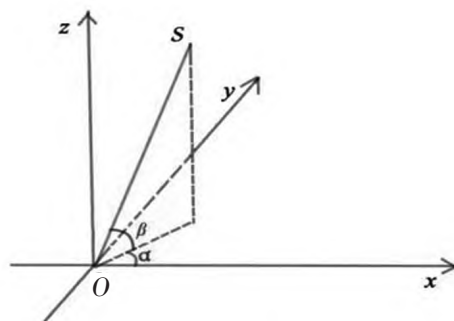


图 1 天体  $S$  方位角与仰角示意图

## 2 问题分析

对于问题,当方位角  $\alpha$ 、仰角  $\beta$  分别等于  $0^\circ$  和  $90^\circ$  时,确定理想的抛物面,建立了以下 3 种模型。模型 1:理想抛物面的顶点与基准态球面的最低点重合;模型 2:理想

抛物面的顶点与基准态球面的最低点不重合时,但是理想抛物面的口径端点在基准态球面上;模型 3,理想抛物面的一般情况。

### 3 模型假设

- (1)基准态下,所有主索节点均位于基准球面上。
- (2)认为反射面板是无孔的。
- (3)电磁波信号及反射信号均视为直线传播。
- (4)三角形反射面板面积相等且是均质的。

### 4 符号说明

表 1 符号说明

符号	说明	单位
$\alpha$	方位角	°
$\beta$	仰角	°
$R$	球的半径	m
$F$	两同心球面的半径差	m
$d_i$	各个主索节点的径向伸缩量	m
$h_i$	第 $i$ 个主索节点对应的单位径向向量(并规定指向球心的为正方向)	

## 5 模型的建立与求解

### 5.1 问题模型的建立与求解

模型 1:

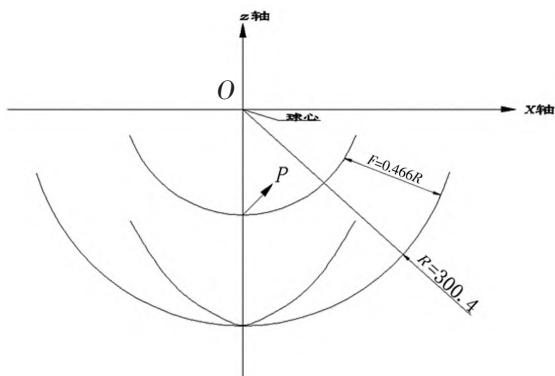


图 2 模型 1 示意图

由图 2 可知, $F=0.466R=139.986\ 4\ \text{m}$ , $p=2F=279.6\ \text{m}$ , $R$  为基准态球面的半径。

可以确定一个理想抛物面,其母线方程,即  $zOx$  坐标面的抛物线方程:

$$z=\frac{x^2}{2p}-R. \quad (1)$$

将抛物线(1)绕  $z$  轴旋转,得理想抛物面方程:

$$z=\frac{x^2+y^2}{2p}-R. \quad (2)$$

将数据代入方程(2),可得理想抛物面方程:



图 4 模型 2 计算流程图

$$z-\frac{x^2+y^2}{559.2}-300.4=0. \quad (3)$$

模型 2:当理想抛物面的顶点与基准态球面的最低点不重合,但口径端点落在基准态球面上时,如图 3 所示。

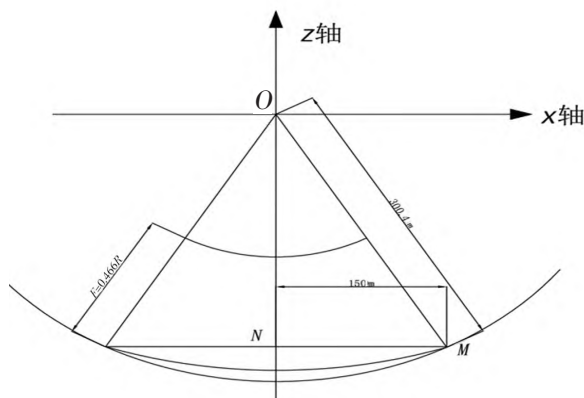


图 3 模型 2 示意图

设理想抛物面的母线,即  $zOx$  坐标面的抛物线的方程:

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{p}{2}-(R-F), \quad (4)$$

由几何关系可求得该抛物线与基准态球面的一个交点,将这点坐标,和已知条件  $R$ 、 $F$  代入抛物线方程中,可求解  $p$ ,从而求出此抛物线方程,将该抛物线绕  $z$  轴旋转得理想抛物面。流程图如图 4 所示。

如图 3 所示,在  $\triangle CMN$  中,

$$CM=300.4\ \text{m}, MN=150\ \text{m},$$

$$CN=\sqrt{CM^2-MN^2}=259.808\ \text{m},$$

所以  $M$  点坐标为  $(150,-259.808)$ 。代入方程(4)可求解  $p=279.668$ 。

此抛物线绕  $z$  轴旋转,可得理想抛物面的方程:

$$z=\frac{x^2+y^2}{559.336}-300.082. \quad (5)$$

模型 3:无法确定理想抛物面与基础球面是否相交时。

首先设一般情况下,理想抛物面的母线,即  $zOx$  坐标面的抛物线的方程:

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{p}{2}-(R-F), \quad (6)$$

其中: $\frac{p}{2}$  为抛物线的焦距, $p$  为待定参数。再将抛物线关

于  $z$  轴旋转,得理想抛物面方程:

$$z=\frac{x^2+y^2}{2p}-\frac{p}{2}-(R-F). \quad (7)$$

由图 3 可知,  $F = \frac{p}{2} + d_1$ , 其中  $d_1$  是指基准球面最低点的主索节点的径向伸缩量。由此表达式可推出  $p = 2(F - d_1)$ , 其中  $F = 0.466R$ 。将  $p = 2(F - d_1)$  代入到抛物面方程(7)中, 得代换参数后的最终理想抛物面方程:

$$f(x, y) = z = \frac{x^2 + y^2}{4(F - d_1)} - d_1 - R \quad (8)$$

下面将利用“FAST 基准态的 2 226 个主索节点空间位置坐标”, 基于最小二乘法原理, 通过建立和求解优化模型, 计算得出方程(8)中的参数  $d_1$ , 从而确定最终的理想抛物面方程。

通过分析照明区域的口径长度范围, 在照明范围内的主索节点满足  $x^2 + y^2 \leq 150^2$  条件。通过 Excel 设置条件语句, 筛选出满足的 706 个节点, 即照明范围内共有 706 个主索节点。但是由于 python 软件的技术限制, 无法同时对 706 个节点进行数据分析, 通过系统抽样法, 按照 5:1 比例, 简化程序的运算量, 筛选得到 118 个最有代表性的节点, 进行分析计算参数。

首先做如下假设:

设  $(x_i, y_i, z_i)$  来表示初始状态第  $i$  个主索节点坐标, 其中  $i$  表示“附件 1”的从上往下第  $i$  个节点。用  $(x'_i, y'_i, z'_i)$  来表示  $(x_i, y_i, z_i)$  对应的 FAST 在工作状态的各个主索节点坐标。 $d_i$  为由点  $(x_i, y_i, z_i)$  变化到点  $(x'_i, y'_i, z'_i)$  时, 对应的径向伸缩量, 即基准态主索节点到最终的工作态主索节点之间的距离, 且伸缩范围为  $-0.6 \sim 0.6$  m。

现在, 对基准态第  $i$  个主索节点, 其坐标为  $(x_i, y_i, z_i)$ , 将其单位化为

$$\left( \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}, \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}, \frac{z_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}} \right), \quad (9)$$

则末态第  $i$  个主索节点坐标:

$$\begin{aligned} (x'_i, y'_i, z'_i) = & \left( x_i + \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}} d_i, y_i + \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}} d_i, \right. \\ & \left. z_i + \frac{z_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}} d_i \right). \end{aligned} \quad (10)$$

设  $p_i$  表示第  $i$  个主索节点对应的单位径向向量, 令  $h_i = (h_{xi}, h_{yi}, h_{zi})$ , 则  $h_i = (h_{xi}, h_{yi}, h_{zi}) = \left( \frac{x_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}, \frac{y_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}, \frac{z_i}{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}} \right)$ ,  $(11)$

所以  $(x'_i, y'_i, z'_i)$  与  $(x_i, y_i, z_i)$  的坐标关系:

$$\begin{aligned} x'_i &= x_i + h_{xi} d_i \\ y'_i &= y_i + h_{yi} d_i \\ z'_i &= z_i + h_{zi} d_i \end{aligned} \quad (12)$$

再根据所筛选出来的 118 个主索节点, 定义 118 个径向伸缩变量  $d_i (i=1, 2, \dots, 118)$ , 基于最小二乘法原理, 设目标方程:

$$Drt = (f(x'_i, y'_i) - z'_i)^2. \quad (13)$$

当  $|d_i| \leq 0.6$  时, 在这个约束条件下, 联立所有方程组, 从而就得到了目标函数  $Drt$ , 其自变量为  $d_i$  (经筛选存于“照明区域主索节点坐标.xlsx”,  $i$  为 1 到 118)。然后, 用 python 求这个多元函数最小值, 从而找到最优的工作抛物面。

经过编写 python 程序语言, 程序运行结果:

$$\begin{aligned} d_i &= 0.078 \quad 7, \\ p &= 615 \quad 666 \quad 698 \quad 122 \quad 009/2 \quad 199 \quad 023 \quad 255 \quad 552 - 2 * d_1 \\ \text{从而就可以计算出: } p &= 279.815 \quad 4 \\ \text{因此, 模型 3 理想抛物面方程:} \\ z &= \frac{x^2 + y^2}{559.630 \quad 8} - 300.478 \quad 7. \end{aligned} \quad (14)$$

## 5.2 模型的优点

模型的优点在于, 问题中的模型 3 里考虑了 706 个变量的影响, 把抛物面全部的点都考虑进去了, 让求出的理想抛物面更加精确。基于这些节点坐标数据, 建立了基于最小二乘法的优化模型, 得到了相对于模型 1 和模型 2, 更加精确的理想抛物面方程。

## 参考文献:

- [1] 李爱华, 周国华, 李国平, 等. 射电望远镜主动反射面系统的控制[J]. 光学精密工程, 2016, 24(7): 1711-1718.
- [2] 郭红锋. 中国“天眼”——500 米口径球面射电望远镜[J]. 军事文摘, 2021(16): 52-55.
- [3] 邹国利. FAST 主动反射面随动关节的研究[D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007.
- [4] 简幼锋. 索网结构的力学分析与网面调整研究[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2011.