

清华大学深圳国际研究生院

数值实验

宋伦继 编

SIGS

2021 年

目 录

前 言

实验报告内容要求

实验一 Hamming级数求和

实验二 函数插值方法

实验三 函数逼近与曲线拟合

实验四 数值积分与数值微分

实验五 线方程组的直接解法

实验六 解线性方程组的迭代法

实验七 非线性方程求根

实验八 矩阵特征值问题计算

实验九 常微分方程初值问题数值解法

附录：部分程序示例

前 言

结合课程教学，配备适当的上机实验以便加深课堂教学的实践性，同时通过实验可以加强对数学模型的总体分析，算法选取，程序结构，上机调试和结果分析等环节的训练。实验内容共包含 9 个实验，要求学生在 36 个实验课时内完成。为使实验更为有成效，需要写出符合格式要求的实验报告，以此可作为《数值分析》课程成绩评定的参考。

实验报告内容要求

一、实验题目名称

二、专业、班级、姓名

三、目的和意义

方法的理论意义和实用价值，如 Neville 插值算法利用逐次线性插值产生一个从低到高次的 Langrange 插值多项式序列，避免了当增加新节点时从头开始计算的问题。又如改进牛顿法，它适用于任意连续函数在大范围中求解，并且避免计算导数值，使其更具有实用性。

四、计算公式（算法）

五、结构程序设计

六、结果讨论和分析

如初值对结果的影响；不同方法的比较；该方法的特点和改进；整个实验过程中（包括程序编写，上机调试等）出现的问题及其处理等广泛的问题，以此扩大知识面对实验环节的认识。

实验一 Hamming 级数求和

一、问题提出

Hamming 于 1962 年提出了一个级数求和问题：

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+x)}$$

取 3001 个 x 值，即 $x = 0.0, 0.1, 0.2, \dots, 300.00$ ，计算所有关于 x 的级数，并要求误差控制在 $1.0e-10$ 精度范围。

二、要求

- 1、给出合适的级数求和误差控制算法，考虑如何减少计算步骤和时间；
- 2、输出形式为：

0.10 1.644934066848

...

1.00 1.000000000000

...

2.00 0.750000000000

...

300.00 0.0187195572

- 3、考虑直接计算为什么会导计算机计算速度很慢？

三、目的和意义

- 1、了解误差产生的原因；
- 2、明确合理算法构造的优点；
- 3、大致熟悉 C 语言程序编写过程。

实验二 函数插值方法

一、问题提出

对于给定的一元函数 $y = f(x)$ 的 $n+1$ 个节点值 $y_j = f(x_j)$ $j = (0, 1, \dots, n)$ 。

试用 Lagrange 公式求其插值多项式或分段二次 Lagrange 插值多项式。

数据如下：

(1)

x_j	0.4	0.55	0.65	0.80	0.95	1.05
y_j	0.41075	0.57815	0.69675	0.90	1.00	1.25382

求五次 Lagrange 多项式 $L_5(x)$ ，和分段三次插值多项式，计算 $f(0.596)$, $f(0.99)$ 的值。

(2)

x_j	1	2	3	4	5	6	7
y_j	0.368	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001

试构造 Lagrange 多项式 $L_6(x)$ ，计算 $f(1.8)$ 的值。

结果 $f(1.8) \approx 0.165299$ $f(6.15) \approx 0.00213348$

*也可以考虑书上 P82 习题 6，用 Neville 算法构造插值多项式。

二、要求

4、利用 Lagrange 插值公式

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i} \right) y_k \quad \text{编写出插值多项式程序；}$$

5、给出插值多项式或分段三次插值多项式的表达式；

6、根据节点选取原则，对问题（2）用三点插值或二点插值，其结果如何；

7、对此插值问题用 Neville 插值多项式其结果如何。

三、目的和意义

4、学会常用的插值方法，求函数的近似表达式，以解决其它实际问题；

5、明确插值多项式和分段插值多项式各自的优缺点；

6、熟悉插值方法的程序编制；

7、如果绘出插值函数的曲线，观察其光滑性。

实验三 函数逼近与曲线拟合

一、问题提出

从随机的数据中找出其规律性，给出其近似表达式的问题，在生产实践和科学实验中大量存在，通常利用数据的最小二乘法求得拟合曲线。

在某冶炼过程中，根据统计数据的含碳量与时间关系，试求含碳量 y 与时间 t 的拟合曲线。

$t(\text{分})$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55
$y(\times 10^{-4})$	0	1.27	2.16	2.86	3.44	3.87	4.15	4.37	4.51	4.58	4.02	4.64

二、要求

- 1、用最小二乘法进行曲线拟合；
- 2、近似解析表达式为 $\varphi(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ ；
- 3、打印出拟合函数 $\varphi(t)$ ，并打印出 $\varphi(t_j)$ 与 $y(t_j)$ 的误差， $j = 1, 2, \dots, 12$ ；
- 4、另外选取一个近似表达式，尝试拟合效果的比较；
- 5、* 绘制出曲线拟合图。

三、目的和意义

- 1、掌握曲线拟合的最小二乘法；
- 2、最小二乘法亦可用于解超定线性代数方程组；
- 3、探索拟合函数的选择与拟合精度间的关系

实验四 数值积分与数值微分

一、问题提出

选用复合梯形公式，复合 Simpson 公式，Romberg 算法，计算

$$(1) \quad I = \int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{4 - \sin^2 x} dx \quad (I \approx 1.5343916)$$

$$(2) \quad I = \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad (f(0) = 1, I \approx 0.9460831)$$

$$(3) \quad I = \int_0^1 \frac{e^x}{4 + x^2} dx$$

$$(4) \quad I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx$$

二、要求

- 1、编制数值积分算法的程序；
- 2、分别用两种算法计算同一个积分，并比较其结果；
- 3、分别取不同步长 $h = (b - a) / n$ ，试比较计算结果（如 $n = 10, 20$ 等）；
- 4、给定精度要求 ε ，试用变步长算法，确定最佳步长。

三、目的和意义

- 1、深刻认识数值积分法的意义；
- 2、明确数值积分精度与步长的关系；
- 3、根据定积分的计算方法，可以考虑二重积分的计算问题。

实验五 线性方程组的直接解法

一、问题提出

给出下列几个不同类型的线性方程组，请用适当算法计算其解。

1、设线性方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & -5 & -3 & 6 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 & -1 & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 & -1 & 3 & -1 & 1 & 9 & 4 \\ -4 & 2 & 6 & -1 & 6 & 7 & -3 & 3 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -8 & 5 & 7 & 17 & 2 & 6 & -3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & -4 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ 16 & 10 & -11 & -9 & 17 & 34 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & -7 & 13 & 9 & 2 & 0 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & -3 & -24 & -8 & 6 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \\ x_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \\ 46 \\ 13 \\ 38 \\ 19 \\ -21 \end{bmatrix}$$

$$x^* = (1, -1, 0, 1, 2, 0, 3, 1, -1, 2)^T$$

2、设对称正定阵系数阵线方程组

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 & 0 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 14 & 1 & -8 & -3 & 5 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 6 & -1 & -4 & -3 & 3 \\ 2 & 1 & -8 & -1 & 22 & 4 & -10 & -3 \\ 4 & 3 & -3 & -4 & 4 & 11 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 5 & -3 & -10 & 1 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -3 & -4 & 2 & 19 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 20 \\ 23 \\ 9 \\ -22 \\ -15 \\ 45 \end{bmatrix}$$

$$x^* = (1, -1, 0, 2, 1, -1, 0, 2)^T$$

3、三对角形线性方程组

$$\begin{bmatrix}
 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 x_1 \\
 x_2 \\
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_6 \\
 x_7 \\
 x_8 \\
 x_9 \\
 x_{10}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 7 \\
 5 \\
 -13 \\
 2 \\
 6 \\
 -12 \\
 14 \\
 -4 \\
 5 \\
 -5
 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^* = (2, 1, -3, 0, 1, -2, 3, 0, 1, -1)^T$$

二、要求

- 1、对上述三个方程组分别利用 Gauss 顺序消去法与 Gauss 列主元消去法；平方根法与改进平方根法；追赶法求解（选择其一）；
- 2、应用结构程序设计编出通用程序；
- 3、比较计算结果，分析数值解误差的原因；
- 4、尽可能利用相应模块输出系数矩阵的三角分解式。

三、目的和意义

- 1、通过该课题的实验，体会模块化结构程序设计方法的优点；
- 2、运用所学的计算方法，解决各类线性方程组的直接算法；
- 3、提高分析和解决问题的能力，做到学以致用；
- 4、通过三对角形线性方程组的解法，体会稀疏线性方程组解法的特点。

实验六 解线性方程组的迭代法

一、问题提出

对实验四所列目的和意义的线性方程组，试分别选用 Jacobi 迭代法，Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 方法计算其解。

二、要求

- 1、体会迭代法求解线性方程组，并能与消去法做以比较；
- 2、分别对不同精度要求，如 $\varepsilon = 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5}$ 由迭代次数体会该迭代法的收敛快慢；
- 3、对方程组 2, 3 使用 SOR 方法时，选取松弛因子 $\omega = 0.8, 0.9, 1, 1.1, 1.2$ 等，试看对算法收敛性的影响，并能找出你所选用的松弛因子的最佳者；
- 4、给出各种算法的设计程序和计算结果。

三、目的和意义

- 1、通过上机计算体会迭代法求解线性方程组的特点，并能和消去法比较；
- 2、运用所学的迭代法算法，解决各类线性方程组，编出算法程序；
- 3、体会上机计算时，终止步骤 $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_{\infty} < \varepsilon$ 或 $k > (\text{予给的迭代次数})$ ，对迭代法敛散性的意义；
- 4、体会初始解 $x^{(0)}$ ，松弛因子的选取，对计算结果的影响。

实验七 非线性方程求根

一、问题提出

设方程 $f(x)=x^3-3x-1=0$ 有三个实根 $x_1^*=1.8793$, $x_2^*=-0.34727$, $x_3^*=-1.53209$

现采用下面六种不同计算格式，求 $f(x)=0$ 的根 x_1^* 或 x_2^*

$$1、x = \frac{3x+1}{x^2}$$

$$2、x = \frac{x^3-1}{3}$$

$$3、x = \sqrt[3]{3x+1}$$

$$4、x = \frac{1}{x^2-3}$$

$$5、x = \sqrt{3+\frac{1}{x}}$$

$$6、x = x - \frac{1}{3} \left(\frac{x^3-3x-1}{x^2-1} \right)$$

二、要求

- 1、编制一个程序进行运算，最后打印出每种迭代格式的敛散情况；
- 2、用事后误差估计 $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$ 来控制迭代次数，并且打印出迭代的次数；
- 3、初始值的选取对迭代收敛有何影响；
- 4、分析迭代收敛和发散的原因。

三、目的和意义

- 1、通过实验进一步了解方程求根的算法；
- 2、认识选择计算格式的重要性；
- 3、掌握迭代算法和精度控制；
- 4、明确迭代收敛性与初值选取的关系。

实验八 矩阵特征值问题计算

一、问题提出

利用幂法或反幂法，求方阵 $A=(a_{ij})_{n \times n}$ 的按模最大或按模最小特征值及其对应的特征向量。

设矩阵 A 的特征分布为：

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots |\lambda_{n-1}| \geq |\lambda_n| \quad \text{且} \quad Ax_j = \lambda_j x_j$$

试求下列矩阵之一

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix} \quad \text{求 } \lambda_1, \text{ 及 } x_1$$

$$\text{取 } v^{(0)} = (1, 1, 1)^T, \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

$$\text{结果 } \lambda_1 \approx -6.42106, \quad x_1 \approx (-0.046152, -0.374908, 1)^T$$

$$(2) \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 7 & 3 & -1 & 8 \\ -2 & 5 & 1 & 1 & 4 & 7 \\ 7 & 1 & 7 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 3 & 5 & 3 & 2 \\ 8 & 7 & 5 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{求 } \lambda_1, \lambda_6 \text{ 及 } x_1$$

$$\text{取 } v^{(0)} \approx (1, 0, 1, 0, 0, 1)^T \quad \varepsilon = 10^{-5}$$

结果：

$$\lambda_1 \approx 21.30525 \quad \lambda_6 \approx 1.62139 \quad x_1 \approx (0.8724, 0.5401, 0.9973, 0.5644, 0.4972, 1.0)^T$$

$$(3) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{求 } \lambda_1 \text{ 及 } x_1$$

$$\text{取 } v^{(0)} = (1, 1, 1, 1, 1)^T \quad \varepsilon = 10^{-4}$$

$$\text{结果 } \lambda \approx 3.7321$$

$$(4) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & -2 \\ 4 & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

取 $\nu^{(0)} = (1, 1, 1, 1)^T$ $\varepsilon = 10^{-2}$

这是一个收敛很慢的例子，迭代 1200 次才达到 10^{-5}

结果 $\lambda_1 \approx -8.02857835$ $x_1 \approx (1, 2.501460, -0.757730, -2.564212)^T$

$$(5) \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{bmatrix}$$

有一个近似特征值 -6.42 ，试用反幂法求对应的特征向量，并改进特征值（原点平移法）。

取 $\nu^{(0)} = (1, 1, 1)^T$ $\varepsilon = 10^{-4}$

结果 $\lambda \approx -6.42107$ $x \approx (-0.0461465, -0.37918, 1)^T$

二、要求

- 1、掌握幂法或反幂法求矩阵部分特征值的算法与程序设计；
- 2、会用原点平移法改进算法，加速收敛；对矩阵 $B=A-P$ 取不同的 P 值，试求其效果；
- 3、试取不同的初始向量 $\nu^{(0)}$ ，观察对结果的影响；
- 4、对矩阵特征值的其它分布，如 $\lambda_1 = \lambda_2$ 且 $|\lambda_1| = |\lambda_2| \geq |\lambda_3|$ 如何计算。

三、目的和意义

- 1、求矩阵的部分特征值问题具有重要实际意义，如求矩阵谱半径 $\rho(A) = \max |\lambda_i|$ ，稳定性问题往往归于求矩阵按模最小特征值；
- 2、进一步掌握幂法、反幂法及原点平移加速法的程序设计技巧；
- 3、问题中的题（5），反应了利用原点平移的反幂法可求矩阵的任何特征值及其特征向量。