第三章 线性代数方程组的迭代解法

/* Iterative Techniques for Solving Linear Systems */

如何快速求解系数为大型稀疏矩阵的方程组

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

思路：与解方程 $f(x)=0$ 的不动点迭代相似。

研究 内容：

- 如何建立迭代格式？
- 向量序列的收敛条件？
- 收敛速度？
- 误差估计？

迭代法思想:

$$\vec{x} = B\,\vec{x} + \vec{f}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = B\,\vec{x}^{(k)} + \vec{f}$$

- **如何建立迭代格式？**

分裂 $A=M-N$,　$(M-N)x=b$ ，

构造　　　$Mx^{k+1}=Nx^{k}+b$

若M可逆，　　$x^{k+1}=M^{-1}Nx^{k}+M^{-1}b$

$B=M^{-1}N$被称为迭代法的迭代矩阵

目标：

精度可控，迭代收敛。

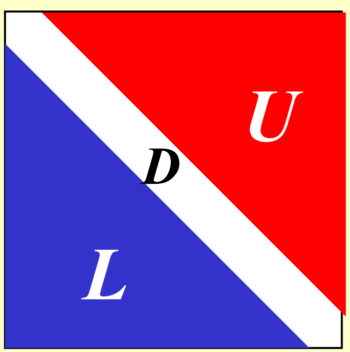
§1 三种迭代法

/* Jacobi，Gauss-Seidel and SOR Iterative Methods */

➤ **Jacobi Iterative Method**

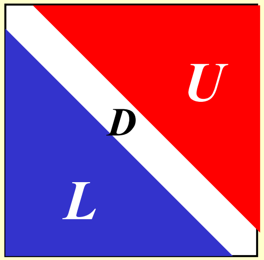
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \xrightarrow{a_{ii} \neq 0} \begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n + b_1) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n + b_2) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1} + b_n) \end{cases}$$

写成矩阵形式：

$A =$ 

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff (D + L + U)\vec{x} = \vec{b}$$
$$\iff D\vec{x} = -(L + U)\vec{x} + \vec{b}$$
$$\iff \vec{x} = -D^{-1}(L + U)\vec{x} + D^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{-D^{-1}(L + U)}_{B}\vec{x}^{(k)} + \underbrace{D^{-1}\vec{b}}_{\vec{f}}$$

$A =$ 

Jacobi 迭代法：

$$A\vec{x}=\vec{b} \Leftrightarrow (D+L+U)\vec{x}=\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow D\vec{x}=-(L+U)\vec{x}+\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \vec{x}=-D^{-1}(L+U)\vec{x}+D^{-1}\vec{b}$$

$$\vec{x}^{(k+1)}=\underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{B}\vec{x}^{(k)}+\underbrace{D^{-1}\vec{b}}_{\vec{f}}$$

Jacobi 迭代阵

➢ Gauss - Seidel Iterative Method

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}}(-a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - a_{14}x_4^{(k)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(k)} + b_1)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}}(-a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - a_{24}x_4^{(k)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(k)} + b_2)$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{1}{a_{33}}(-a_{31}x_1^{(k+1)} - a_{32}x_2^{(k+1)} - a_{34}x_4^{(k)} - \cdots - a_{3n}x_n^{(k)} + b_3)$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(-a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_2^{(k+1)} - a_{n3}x_3^{(k+1)} - \cdots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)} + b_n)$$

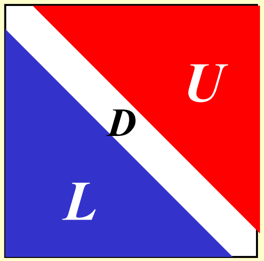
写成矩阵形式：

$$\vec{x}^{(k+1)} = -D^{-1}(L\vec{x}^{(k+1)} + U\vec{x}^{(k)}) + D^{-1}\vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \ (D+L)\vec{x}^{(k+1)} = -U\vec{x}^{(k)} + \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \ \vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{B}\vec{x}^{(k)} + \underbrace{(D+L)^{-1}\vec{b}}_{\vec{f}}$$

Gauss-Seidel
迭代阵

$A =$ 

$$Ax = b \Leftrightarrow (D+L)x^{k+1} = -U\,x^{k} + b$$

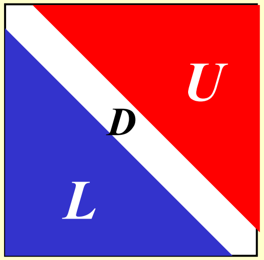
Gauss-Seidel 迭代法：

$$\Leftrightarrow (D+L)\vec{x}^{(k+1)} = -U\vec{x}^{(k)} + \vec{b}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{-(D+L)^{-1}U}_{B}\vec{x}^{(k)} + \underbrace{(D+L)^{-1}\vec{b}}_{\vec{f}}}$$

Gauss-Seidel
迭代阵

➢ Successive Over-relaxation (SOR) Iterative Method

$A =$ 

$$\omega Ax = \omega b \overset{\omega\neq 0}{\Longleftrightarrow} M = D + \omega L,$$

$$N = (1-\omega)D - \omega U$$

$$\omega A = M - N$$

$$(D+\omega L)x^{k+1} = [(1-\omega)D - \omega U]x^k + \omega b$$

超松弛(SOR)迭代法：

$$x^{k+1} = \underbrace{(D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]}_{B}x^k + \underbrace{\omega(D+\omega L)^{-1}b}_{\vec{f}}$$

SOR 迭代阵

问题：$\omega<1$时称为低松弛, $\omega>1$时称为超松弛，那么$\omega=1$时，SOR迭代法是什么迭代法？

§2 迭代法收敛性

/* Convergence of the three Iterative Methods */

- 迭代序列的收敛条件

一般迭代法的收敛性 /* Convergence of Iterative methods */

$$\vec{x}^{(k+1)} = B\vec{x}^{(k)} + \vec{f}$$ 的收敛条件推导

$$\vec{e}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^* = (B\vec{x}^{(k)} + \vec{f}) - (B\vec{x}^* + \vec{f}) = B(\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*) = B\vec{e}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{e}^{(k)} = B^k \vec{e}^{(0)}}$$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{e}^{(k)}\| \le \|B\| \cdot \|\vec{e}^{(k-1)}\| \le \ldots \le \|B\|^k \cdot \|\vec{e}^{(0)}\|$$

充分条件: $\|B\| < 1$ $\quad \Rightarrow \quad \|B\|^k \to 0 \quad \text{as} \quad k \to \infty$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{e}^{(k)}\| \to 0$$

必要条件: $\vec{e}^{(k)} \to \vec{0} \quad \text{as} \quad k \to \infty \quad \Rightarrow \quad B^k$?

定理 设 $\vec{x}=B\vec{x}+\vec{f}$ 存在唯一解，则从任意 $\vec{x}^{(0)}$ 出发，迭代 $\vec{x}^{(k+1)}=B\vec{x}^{(k)}+\vec{f}$ 收敛 $\Leftrightarrow \quad B^k \to 0$

证明： $B^k \to 0 \Leftrightarrow \|B^k\| \to 0 \Leftrightarrow \max\limits_{\vec{x}\neq\vec{0}} \dfrac{\|B^k\vec{x}\|}{\|\vec{x}\|} \to 0$

$\Leftrightarrow \|B^k\vec{x}\| \to 0$ 对任意非零向量 $\vec{x}$ 成立

$\Leftrightarrow \; B^k\vec{x} \to \vec{0}$ 对任意非零向量 $\vec{x}$ 成立

$\Leftrightarrow$ 从任意 $\vec{x}^{(0)}$ 出发，记 $\vec{e}^{(0)}=\vec{x}^{(0)}-\vec{x}^*$，则

$$\vec{e}^{(k)}=B^k\vec{e}^{(0)} \to \vec{0} \quad \text{as } k\to\infty$$

$\Leftrightarrow \{\vec{x}^{(k)}\}$ 收敛 ▮

回顾：向量范数 /* vector norms */

常用向量范数：

$$\|\vec{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

$$\|\vec{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

$$\|\vec{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

$$\|\vec{x}\|_\infty = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

注： $\lim\limits_{p\to\infty} \|\vec{x}\|_p = \|\vec{x}\|_\infty$

定义 向量序列 $\{\vec{x}^{(k)}\}$ **收敛**于向量 $\vec{x}^*$ 是指对每一个 $1 \le i \le n$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{(k)} = x_i^*$。可以理解为 $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^*\|_\infty \to 0$

矩阵范数：$\| A \|_\infty = \max\limits_{1\le i\le n} \sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} |$（行和范数）

$\| A \|_1 = \max\limits_{1\le j\le n} \sum\limits_{i=1}^{n} | a_{ij} |$（列和范数）

$\| A \|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^T A)}$（谱范数 /* spectral norm */ ）

Frobenius 范数 $\| A \|_F = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} | a_{ij} |^2}$ — 向量$\|\cdot\|_2$的直接推广

引理： 设$||x||$是在R^n 上一个范数，则$||x||$是x的分量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的连续函数.

定理： R^n 上任意两种范数都等价.

定理： 设$A \in R^{n\times n}$,

（1）对任意从属范数 $||\cdot||$，有

$$\rho(A) \leq ||\mathrm{A}||$$

（2）任给$\varepsilon > 0$，存在一种A的从属范数$\|\cdot\|_\varepsilon$，使得

$$\|A\|_\varepsilon \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

定义 矩阵序列$A^{(k)}=(a_{ij}^{(k)})\in R^{n\times n}$ **收敛**于矩阵 A 是指对每一个 $1\le i,j\le n$ 都有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^{(k)}=a_{ij}$。此时称 A 为矩阵序列$A^{(k)}$的极限，记为 $A=\lim\limits_{k\to\infty} A^{(k)}$

类似向量序列收敛性结论：$A^{(k)}\to A \Leftrightarrow \|A^{(k)}-A\|\to 0$

定理 设$A\in R^{n\times n}$，当 $k\to\infty$ 时，$A^k\to 0$的充要条件是 $\rho(A)<1$ 。

证明：若 $\rho(A)<1$ ，则由上述定理可以选择一种范数，使得

$\|A\|<1$ ，因此由矩阵的相容性得

$$\|A^k\|\le\|A\|^k\to 0$$

于是**充分性**得证。

定理 设$A\in R^{n\times n}$，当 $k\to\infty$ 时，$A^k\to 0$ 的充要条件是$\rho(A)<1$。

必要性证明：

设 $\rho(A)\geq 1$，令λ为某一使$|\lambda|\geq 1$的特征值，设x为对应特征向量，则

$$\|A^k\|\|x\|\geq\|A^kx\|=\|\lambda^kx\|\geq\|x\|.$$

意味着对所有的k, $\|A^k\|\geq 1$，矛盾。于是必要性得证。

从一般非奇异矩阵判定

例设$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & -2 & 1\end{pmatrix}$，讨论Jacobi迭代，$\mathrm{G-S}$迭代法的敛散性。

- $B_1=-D^{-1}(L+U)=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{pmatrix}$,

$\rho(B_1)=0<1$， Jacobi收敛.

- $B_2=-(D+L)^{-1}U=\begin{pmatrix}0 & 2 & -2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 8 & -6\end{pmatrix}$,

$\rho(B_2)=2+2\sqrt{2}>1$， $\mathrm{G-S}$发散.

➢ 迭代法的收敛性判别

对任何初始向量x^0，上述迭代法

$$\vec{x}^{(k+1)} = B\,\vec{x}^{(k)} + \vec{f}$$

收敛的充要条件是 $\rho(B) < 1.$

Matlab主程序：谱半径判断敛散性

```
function H=testspect(B)
          H=eig(B);
          Sp=norm(H, inf); %按模取最大特征值
if Sp>=1
          disp('迭代序列发散，谱半径Sp和特征值H如下：')
else
          disp('迭代序列收敛，谱半径Sp和特征值H如下：')
end
Sp
```

Neumann引理 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛的充要条件是 $\rho(A)<1$，且当 $\rho(A)<1$ 时有

$$I+A+\cdots+A^k\cdots=(I-A)^{-1}$$

证明：若 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛，则 $A^k \to 0$ ，从而 $\rho(A)<1$

反之，若 $\rho(A)<1$ ，则 $I-A$ 的特征值为 $1-\lambda_i, i=1,2,\cdots,n$

由于 $(I-A)(I+A+\cdots+A^k)=(I-A^{k+1})$

得 $(I+A+\cdots+A^k)=(I-A)^{-1}(I-A^{k+1})$

当 $k\to\infty$ 时，有 $A^k \to 0$ 故

$$I+A+\cdots+A^k+\cdots=(I-A)^{-1}$$

Banach引理 若矩阵 $A\in R^{n\times n}$ 非奇异，对任何 $E\in R^{n\times n}$ 且当 $\|A^{-1}\|\cdot\|E\|<1$ 时，则有 $A+E$ 非奇异，并且

$$\|(A+E)^{-1}\|\le\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|E\|}$$

证明：设 $B=-A^{-1}E$，则 $\|B\|<1$，由上一定理可知 I-B 非奇异，且

$$I+B+\cdots+B^k\cdots=(I-B)^{-1}$$

因此

$$\|(I-B)^{-1}\|\le\frac{1}{1-\|B\|}\le\frac{1}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|E\|}$$

但是

$$A+E=A(I+A^{-1}E)=A(I-B)$$

所以 $A+E$ 是非奇异的，并

$$\|(A+E)^{-1}\|=\|(I-B)^{-1}A^{-1}\|\le\frac{\|A^{-1}\|}{1-\|A^{-1}\|\cdot\|E\|}$$

∎

定理 设$A \in R^{n\times n}$, 当$k\to\infty$时，$A^k \to 0$的充要条件是$\rho(A)<1$.

定理(Neumann引理) 矩阵幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 收敛的充要条件是 $\rho(A)<1$ 且当$\rho(A)<1$时有

$$I + A + \cdots + A^k \cdots = (I - A)^{-1}$$

定理 若矩阵 B 对某个从属范数满足 $\|B\|<1$，则必有

(1) $I \pm B$可逆； (2) $\left\|(I \pm B)^{-1}\right\| \le \dfrac{1}{1-\|B\|}$

定理 若A对称，则有 $\|A\|_2 = \rho(A)$

$\rho(B)$一般难以计算，故而考虑迭代法收敛的充分条件$||B|| < 1$.

§ 3 迭代法的收敛速度

/* Convergence of the three Iterative Methods */

$$\vec{x}^{(k+1)} = B\,\vec{x}^{(k)} + \vec{f}$$

- 迭代序列的收敛速度
- 误差估计

- 迭代$\boldsymbol{k}$次后，相对误差$\frac{\|e^{(k)}\|}{\|e^{(0)}\|} \le \|\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{k}}\|$,

平均每次迭代误差范数的压缩率看成$\|\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{k}}\|^{\frac{1}{k}}$

。

让相对误差小于$\varepsilon \ll 1$, 只要$\|\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{k}}\| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \|\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{k}}\|^{\frac{1}{k}} \le \boldsymbol{\varepsilon}^{\frac{1}{k}} \Leftrightarrow \ln\|\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{k}}\|^{\frac{1}{k}} \le \frac{1}{\boldsymbol{k}} \ln \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{k} \ge \frac{-\ln \boldsymbol{\varepsilon}}{-\ln\|\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{k}}\|^{\frac{1}{k}}}$$

定义为平均收敛率$R_k(B)$

定理. 设$B \in R^{n\times n}$，$\|\cdot\|$为任意一种矩阵范数，则

$$\lim_{k\to\infty}\|B^k\|^{\frac{1}{k}} = \rho(B)$$

定义：迭代法渐近收敛率(收敛速度)

$$R(B) = -\ln\rho(B)$$

注：$\rho(B)$越小，$-\ln\rho(B)$越大，迭代法收敛速度越快。

取$\varepsilon = 10^{-s}$, 相应迭代次数

$$k \geq \frac{-\ln\varepsilon}{R(B)} = \frac{s\ln(10)}{-\ln\rho(B)}$$

定理（充分条件）若存在一个矩阵范数使得 $\| B \| = q < 1$，则迭代收敛，且有下列误差估计：

① $\| \vec{x}^* - \vec{x}^{(k)} \| \le \dfrac{q}{1-q} \| \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)} \|$

② $\| \vec{x}^* - \vec{x}^{(k)} \| \le \dfrac{q^k}{1-q} \| \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)} \|$

证明：① $\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)} = B(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k-1)})$

$$= B(\vec{x}^* - \vec{x}^{(k)} + \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)})$$

$$\Rightarrow \| \vec{x}^* - \vec{x}^{(k)} \| \le q(\| \vec{x}^* - \vec{x}^{(k)} \| + \| \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)} \|) \quad ✓$$

② $\vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)} = B(\vec{x}^{(k-1)} - \vec{x}^{(k-2)}) = \dots = B^{k-1}(\vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)})$

$$\Rightarrow \| \vec{x}^{(k)} - \vec{x}^{(k-1)} \| \le q^{k-1} \| \vec{x}^{(1)} - \vec{x}^{(0)} \|$$

∎

定理 （充分条件）若A 为严格对角占优阵(SDD) /* strictly diagonally dominant matrix */ 则解 $A\vec{x}=\vec{b}$ 的Jacobi 和 Gauss - Seidel 迭代均收敛。

证明：首先需要一个引理 /* Lemma */

若A 为SDD阵，则$\det(A)\neq 0$，且所有的 $a_{ii}\neq 0$。 显然

我们需要对 Jacobi 迭代和 Gauss-Seidel迭代分别证明：任何一个$|\lambda|\geq 1$ 都不可能是对应迭代阵的特征根，即 $|\lambda I-B|\neq 0$ 。

Jacobi: $B_J=-D^{-1}(L+U)$

$$|\lambda I-B|=|\lambda I+D^{-1}(L+U)|$$

$$=|D^{-1}||\lambda D+L+U|$$

$$\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ a_{ij} & & \lambda a_{nn} \end{pmatrix}$$

如果 $|\lambda|\geq 1$ 则 $|\lambda a_{ii}|\geq|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ 是SDD阵

$\Rightarrow$ $|\lambda I-B|\neq 0$ ✓

关于Gauss-Seidel迭代的证明与此类似。

另一种证明引理的方法利用 Geršgorin Disc Theorem。

从严格对角占优或对称正定矩阵判定

$$例.\ A_1 = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -2 \\ -1 & 10 & -2 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

- 解： A_1 严格对角占优阵， 故 Jacobi 和 Gauss-Seidel迭代均收敛。

定理： 设A为实对称正定矩阵，则

（1）若$2D-A$正定，则Jacobi迭代法收敛；

（2）当$0<\omega<2$时，SOR迭代法收敛.

（3）Gauss-Seidel迭代法（ω=1）收敛.

注：对于一般的矩阵，有可能Jacobi迭代收敛，G-S迭代却发散.

(1) 证明：设λ是Jacobi方法迭代矩阵B的任一特征值，y是对应的特征向量，则

$$-(L+U)y = \lambda D y$$

于是 $$-(Ly,y)-(Uy,y)=\lambda(Dy,y)$$

若记$(Ly,y)=\alpha+i\beta, (Dy,y)=\sigma>0,$

$$(Uy,y)=(y,Ly)=\alpha-i\beta, \quad \text{则} \quad \lambda = -2\alpha/\sigma$$

当A对称正定时，即$-2\alpha-\sigma<0 \Leftrightarrow 2\alpha+\sigma>0$时，$\lambda<1$.

而 $$\big((2D-A)y,y\big)=(Dy,y)-(Ly,y)-(Uy,y)$$
$$=\sigma-2\alpha>0 \Longrightarrow \lambda>-1$$
$$\Rightarrow |\lambda|<1$$

即A对称正定时，Jacobi迭代法收敛$\Leftrightarrow$2D-A正定.

SOR迭代法写成矩阵形式：

$$\Rightarrow \vec{x}^{(k+1)} = \underbrace{(D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D-\omega U]}_{H_\omega}\vec{x}^{(k)} + \underbrace{(D+\omega L)^{-1}\omega\vec{b}}_{\vec{f}}$$

松弛迭代阵

设 A 可逆，且 $a_{ii}\neq 0$，松弛法从任意 $\vec{x}^{(0)}$ 出发对某个 ω 收敛 $\Leftrightarrow \rho(H_\omega)<1$。

（2）（Ostrowski-Reich 充分条件）若A 对称正定，且有 $0<\omega<2$，则松弛法从任意 $\vec{x}^{(0)}$出发收敛。

证明：设λ是H_ω的任一特征值, y是对应的特征向量, 则

$$[(1-\omega)D-\omega U]y=\lambda(D+\omega L)y$$

于是

$$(1-\omega)(Dy,y)-\omega(Uy,y)=\lambda[(Dy,y)+\omega(Ly,y)]$$

$$\lambda=\frac{(1-\omega)(\mathrm{Dy},\mathrm{y})-\omega(\mathrm{Uy},\mathrm{y})}{(\mathrm{Dy},\mathrm{y})+\omega(\mathrm{Ly},\mathrm{y})}$$

由于$A = D + L + U$是对称正定的，所以D是正定矩阵，且$L = U^T$. 若记$(Ly, y) = \alpha + i\beta$，则有

$$(Dy, y) = \sigma > 0$$

$$(Uy, y) = (y, Ly) = \alpha - i\beta$$

$$0 < (Ay, y) = (Dy, y) + (Ly, y) + (Uy, y) = \sigma + 2\alpha$$

所以

$$\lambda = \frac{(1-\omega)\sigma - \omega(\alpha - i\beta)}{\sigma + \omega(\alpha + i\beta)}$$

$$|\lambda|^2 = \frac{(\sigma - \sigma\omega - \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}{(\sigma + \omega\alpha)^2 + \omega^2\beta^2}$$

当$0<\omega<2$时,有

$$
\begin{aligned}
&(\sigma-\sigma\omega-\omega\alpha)^2-(\sigma+\omega\alpha)^2 \\
&=\omega\sigma(\omega\sigma-4\alpha+2\alpha\,\omega-2\sigma) \\
&=\omega\sigma\left[2\alpha(\omega-2)+\sigma(\omega-2)\right] \\
&=\sigma\omega(\omega-2)\,(2\alpha+\sigma) \\
&<0
\end{aligned}
$$

因为$\sigma>-2\alpha$，所以$|\lambda|^2<1$, 即

$$\rho(\boldsymbol{H}_\omega)<1,$$

故SOR方法收敛.

从对称正定矩阵判定

$$例.\quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

解：A_2为非严格对角占优阵，但为对称正定阵，采用定理进行判别，Gauss-Seidel迭代收敛。

又由于$(2D - A_2)$不是正定，所以Jacobi 迭代收敛性无法判断，需要用谱半径$\rho(B) < 1$判断Jacobi 迭代法收敛。

那么SOR迭代法何时收敛？ $0 < \omega < 2$

定理（Kahan 必要条件）设 A 可逆，且 $a_{ii} \neq 0$，松弛法从任意 $\vec{x}^{(0)}$ 出发收敛 $\Rightarrow$ $0 < \omega < 2$。

证明： 从 $H_\omega = (D+\omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]$ 出发

利用 $\det(H_\omega) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$，而且收敛 $\Leftrightarrow$ $|\lambda_i| < 1$ 总成立

可知收敛 $\Rightarrow |\det(H_\omega)| < 1$

$$\det((D+\omega L)^{-1}) = \frac{1}{\det(D+\omega L)} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{a_{ii}}$$

$$\det((1-\omega)D - \omega U) = (1-\omega)^n \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

$$\longrightarrow \quad \det(H_\omega) = (1-\omega)^n$$

$$\Rightarrow |\det(H_\omega)| = |1-\omega|^n < 1 \quad \Rightarrow 0 < \omega < 2$$

∎

问题1：SOR迭代法收敛时，是否都可以给出最佳松弛因子表达式？

定理 若 A 为对称正定三对角阵，则 $\rho(B_{G-S}) = [\rho(B_J)]^2 < 1$ 且SOR的最佳松弛因子 /* optimal choice of ω for SOR method */ 为

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(B_J)]^2}}$$

，此时

$$\rho(H_\omega) = \omega - 1$$

。

例：$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$，考虑迭代格式 $\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} + \omega(A\vec{x}^{(k)} - \vec{b})$

问：① ω 取何值可使迭代收敛？

② ω 取何值时迭代收敛最快？

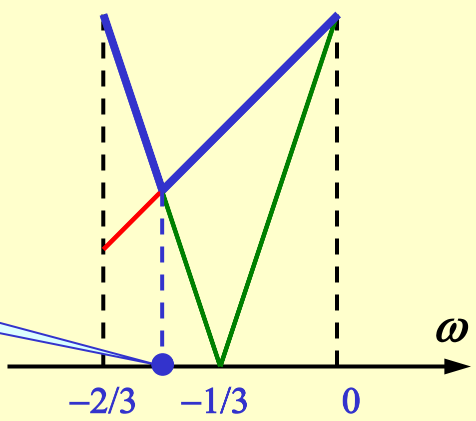
解：考察 $B = I + \omega A$ 的特征根 ➡ $\lambda_1 = 1 + \omega$，$\lambda_2 = 1 + 3\omega$

① 收敛要求 $\rho(B) < 1$ ➡ $-2/3 < \omega < 0$

② $\rho(B) = \max\{\,|1+\omega|, |1+3\omega|\,\}$

当 ω 取何值时最小？

$\omega = -1/2$



问题2：是否存在其他的迭代方法计算线性代数方程组？（最速下降法、共轭梯度法）