第五章 插值法 /* Interpolation Methods*/

- 科学背景和应用

1. Lagrange插值多项式
2. Newton插值多项式
3. Hermite插值
4. 分段低次插值方法
5. 三次样条插值函数

科学背景和应用

曲线形状的数学描述

很久以前数学家们就已经注意到某些植物的叶、花形状与一些封闭曲线非常相似。

17世纪法国数学家给出“茉莉花瓣”的方程是笛卡尔曲线

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

“玫瑰形线”的方程

$$\rho = a\sin k\varphi$$

又如睡莲、三叶草、常春藤等植物叶子形状的方程

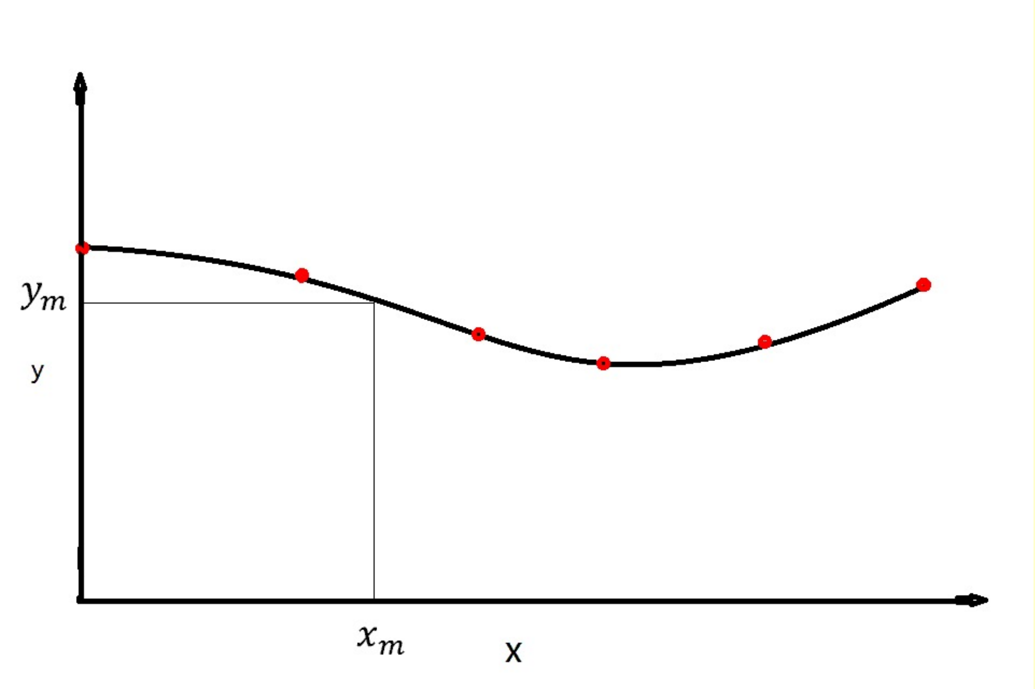
植物名称	数学方程
三叶草	$\rho=4(1+cos3\varphi+sin^3 3\varphi)$
睡莲	$(x^2+y^2)^3-2ax^3(x^2+y^2)+(a^2+r^2)\ x^4=0$
常春藤	$\rho=3(1+cos^2\varphi)+2\cos\varphi+sin^2\varphi-2sin^2 3\varphi cos^4\dfrac{\varphi}{2}$



如图中华樱桃树叶片边缘呈锯齿状，但是似乎没有更好的光滑初等函数来表示。

问题：如果给出一组数据点(x_i, y_i), i=1,2,3,…,n,问利用这些数据如何计算x_0处的y_0值。

取点后用平滑的曲线把这些点连接起来。写成一个多项式方程，就有了曲线的表达式。

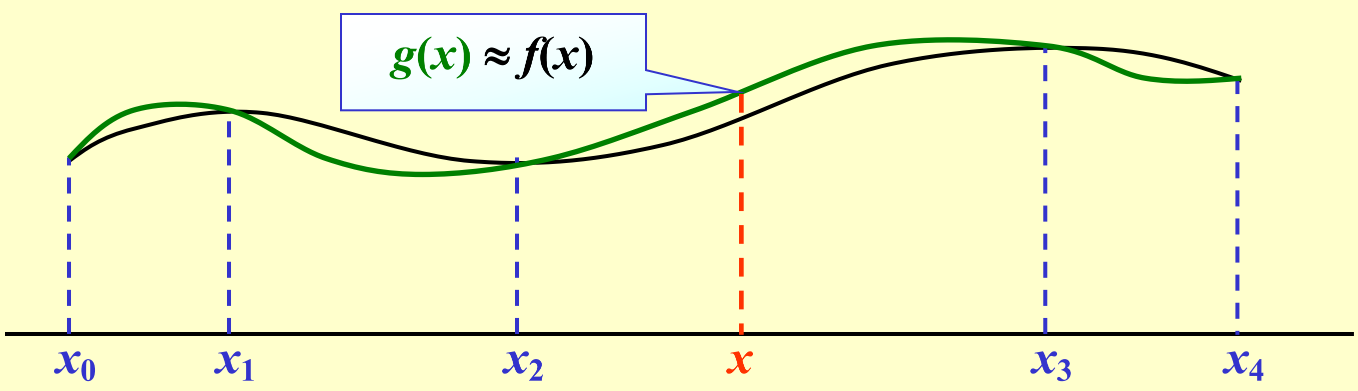


如果有横坐标x_m，需要知道它的纵坐标y_m，那么只需要把x_m代入给出的方程表达式计算，函数值就是y_m，这就是插值过程。

问题：当精确函数 $y = f(x)$ 非常复杂或未知时，在一系列节点 $x_0 \ldots x_n$ 处测得函数值

$$y_0 = f(x_0), \ldots y_n = f(x_n),$$

由此构造一个简单易算的近似函数 $g(x) \approx f(x)$，满足条件 $g(x_i) = f(x_i)\ \ (i = 0, \ldots n)$。这里的 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 的**插值函数**。最常用的插值函数是 …? 多项式



§1 拉格朗日多项式 /* Lagrange Polynomial */

求 n 次多项式 $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$ 使得

$$P_n(x_i)=y_i\,,\qquad i=0,\ldots,n$$

条件：无重合节点，即 $i\neq j \Longrightarrow x_i\neq x_j$

$n=1$ 已知 $x_0\,,x_1\,;\;y_0\,,y_1$ ，求 $P_1(x)=a_0+a_1x$ 使得

$$P_1(x_0)=y_0\,,\quad P_1(x_1)=y_1$$

可见 $P_1(x)$ 是过 $(x_0\,,y_0)$ 和 (x_1,y_1) 两点的直线。

$$\Rightarrow\quad P_1(x)=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$$

$$=\underbrace{\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)}_{l_0(x)}y_0+\underbrace{\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)}_{l_1(x)}y_1=\sum_{i=0}^{1}l_i(x)y_i$$

称拉格朗日基函数

满足条件 $l_i(x_j)=\delta_{ij}$

$n \geq 1$

希望找到$l_i(x)$，$i = 0, \ldots, n$ 使得 $l_i(x_j)=\delta_{ij}$ ；令

$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, y_i$ ，则显然有$P_n(x_i) = y_i$ 。

$l_i(x)$

每个 l_i 有 n 个根 $x_0 \ldots x_{i-1}\ \cancel{x_i}\ x_{i+1} \ldots x_n$

$$\Rightarrow l_i(x) = C_i(x-x_0)\ldots\cancel{(x-x_i)}\ldots(x-x_n) = C_i\prod_{\substack{j\neq i\\ j=0}}^{n}(x-x_j)$$

$$l_i(x_i) = 1 \Rightarrow C_i = \prod_{j\neq i}\frac{1}{(x_i-x_j)}$$

$$l_i(x) = \prod_{\substack{j\neq i\\ j=0}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \Longrightarrow L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} l_i(x)\, y_i$$

与 节点 有关，而与 f 无关

Lagrange Polynomial

定理 (唯一性) 满足 $P(x_i)=y_i\,,\ i=0,\dots,n$ 的 n 阶插值多项式是唯一存在的。

证明： (利用*Vandermonde* 行列式论证)

反证：若不唯一，则除了$L_n(x)$ 外有另一 n 阶多项式 $P_n(x)$ 满足 $P_n(x_i)=y_i$。

考察 $Q_n(x)=P_n(x)-L_n(x)$，则 Q_n 的阶数 $\le n$

而 Q_n 有 $n+1$ 个不同的根 $x_0\ \dots\ x_n$ ∎

注：若不将多项式次数限制为 n ，则插值多项式不唯一。

例如 $P(x)=L_n(x)+p(x)\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$ 也是一个插值多项式，其中$p(x)$可以是任意多项式或常数，但是次数超过n。

拉格朗日插值函数数值程序：

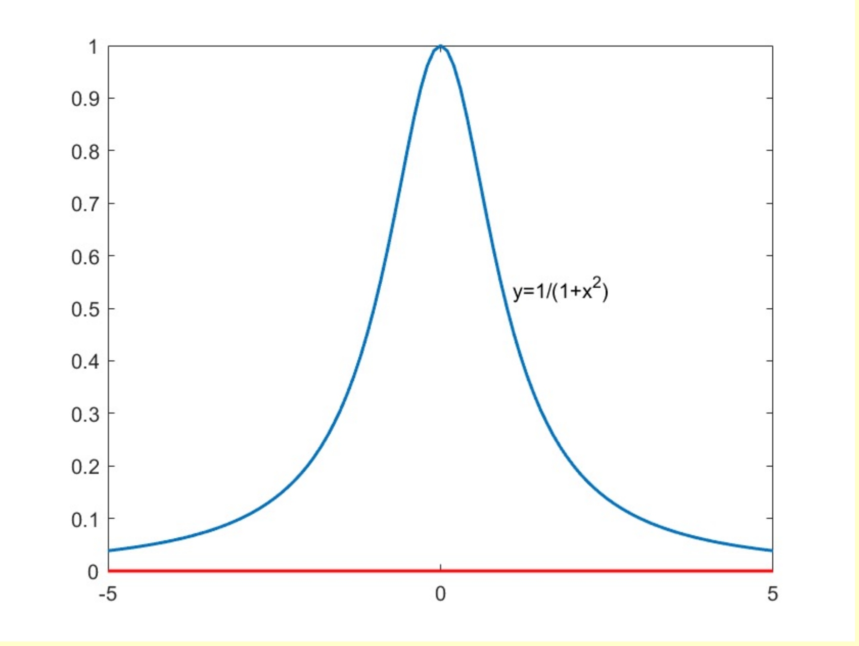
```
function y=Lagrange(x0,y0,x)
n=length(x0); m=length(x);
for i=1:m
            z=x(i);
            s=0.0;
  for k=1:n
             p=1.0;
    for j=1:n
         if j~=k
          p=p*(z-x0(j))/(x0(k)-x0(j));
        end
    end
           s=p*y0(k)+s;
  end
           y(i)=s;
end
```

数值算例:计算下面函数的二次、三次、四次、五次、六次拉格朗日插值，并作图

$$y=\frac{1}{x^2+1}$$

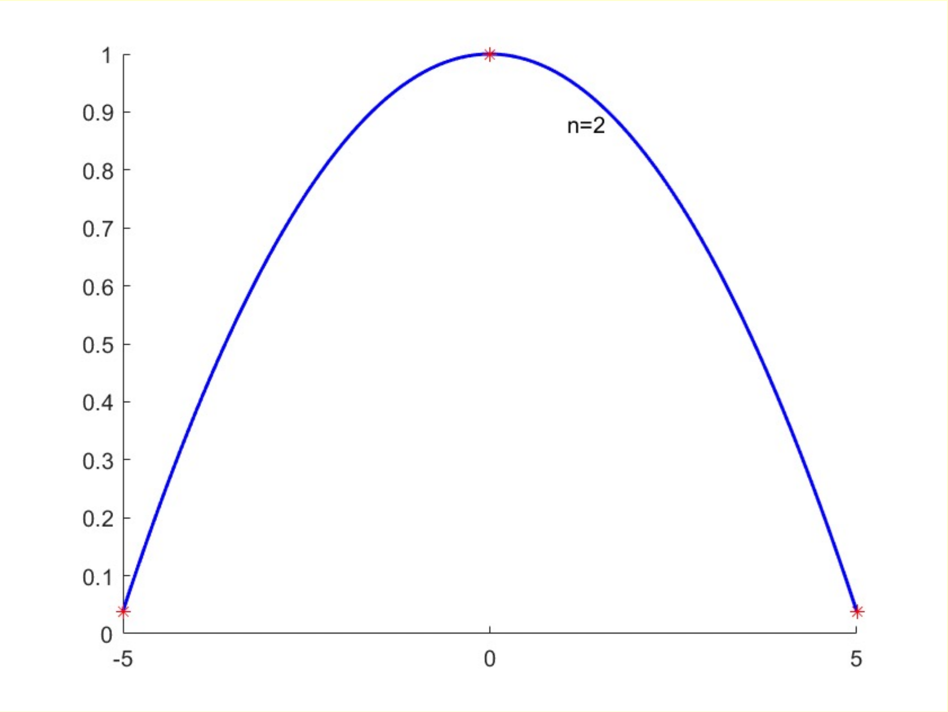
（1）我们先画出函数y在[−5, 5]上的原始图像。

```
m=101;
x=-5:10/(m-1):5;
y=1./(1+x.^2);z=0*x;
plot(x,z,'r',x,y,'LineWidth',1.5)；
gtext('y=1/(1+x^2)')
```



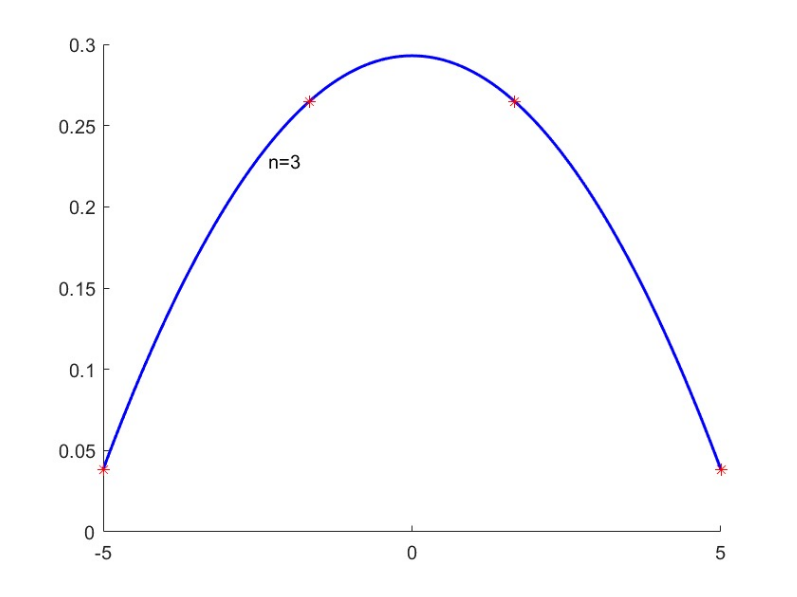
(2) 取定3个不同节点，计算各节点的函数值，再调用Lagrange函数，画出函数y在[-5,5]上的二次插值图像。

```
n=3; %取3个不同节点
x0=-5:10/(n-1):5;
y0=1./(1+x0.^2);
y1=Lagrange(x0,y0,x);
hold on；
plot(x,y1,'b','LineWidth',1.5)；
plot(x0,y0,‘r*’)；
gtext(‘n=2’)；
```

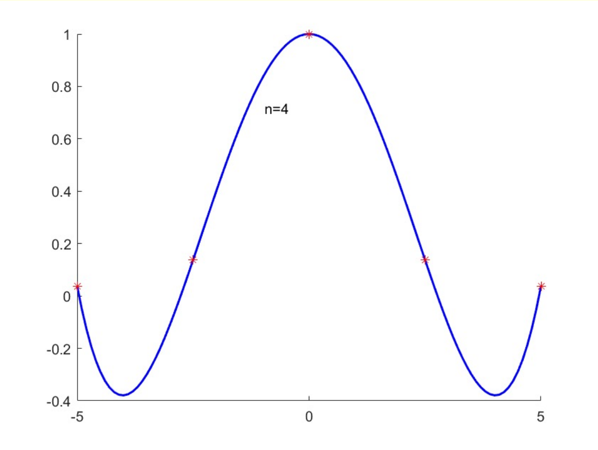


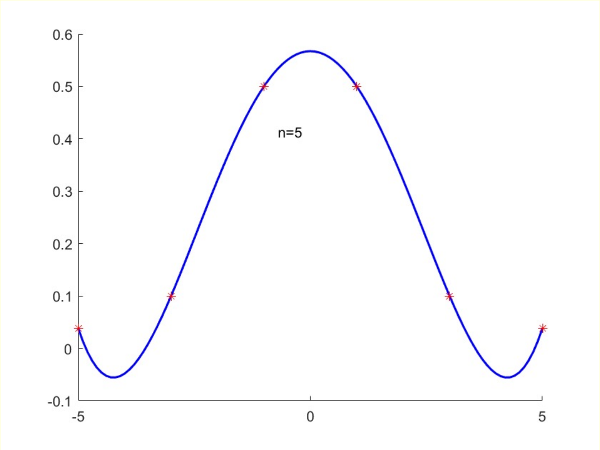
(3) 取定4个节点，计算各节点的函数值，再调用Lagrange函数，画出函数y在[-5,5]上的三次插值图像。

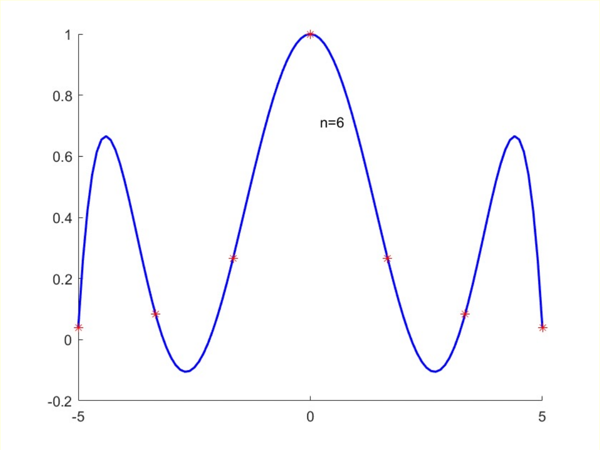
```
n=3; %取3个不同节点
x0=-5:10/(n-1):5;
y0=1./(1+x0.^2);
y1=Lagrange(x0,y0,x);
hold on；
plot(x,y1,'b','LineWidth',1.5);
plot(x0,y0,‘r*’)；
gtext(‘n=2’)；
```



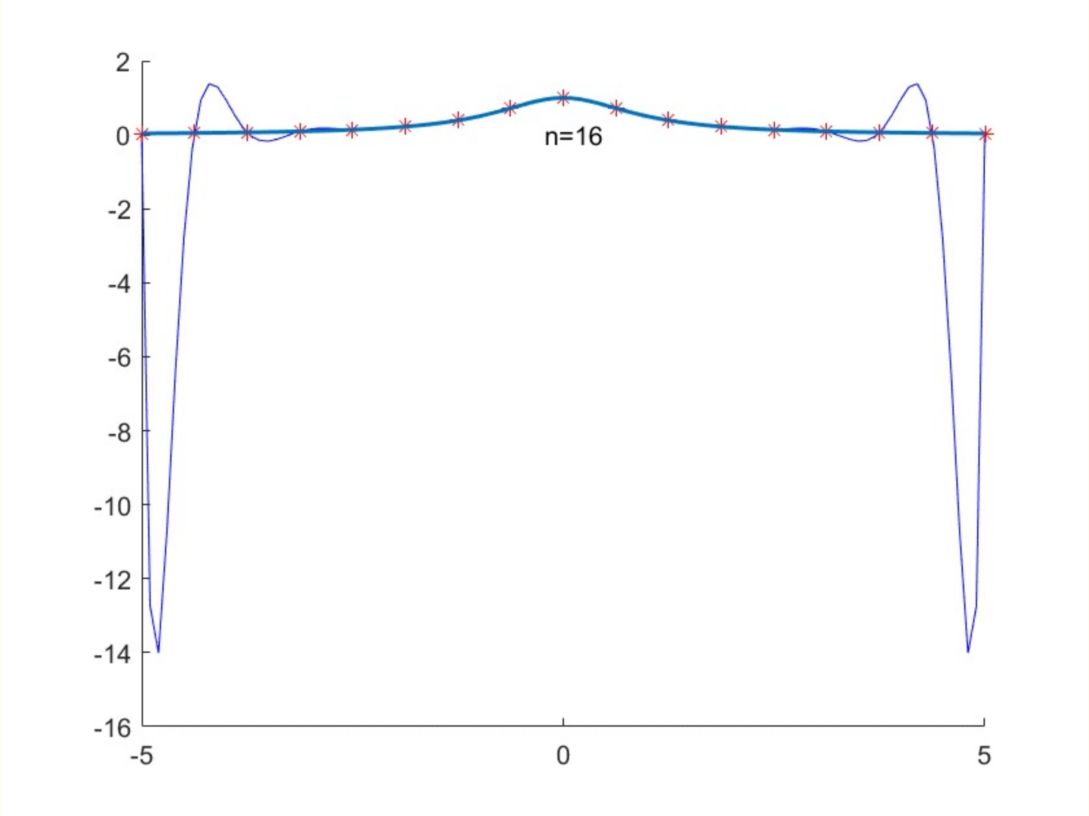
同理，画出函数y在[−5, 5]上的四次、五次、六次插值图像。





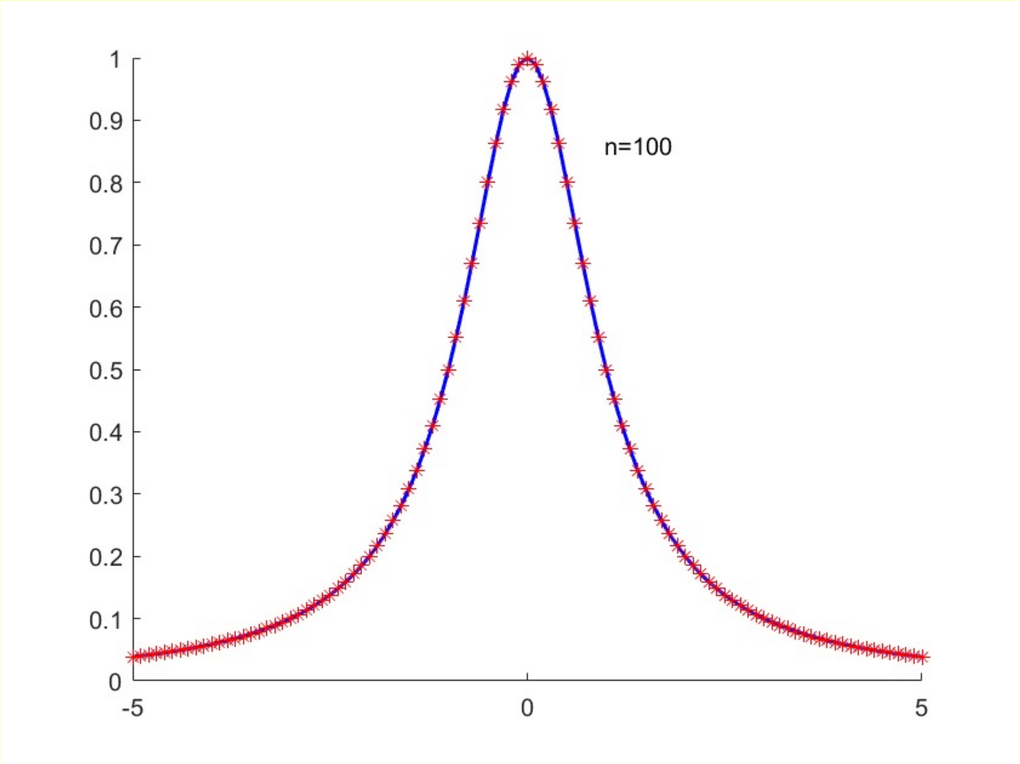


但是当取多少个不同节点，才能画出函数y在[-5,5]上的16次插值图像？那么从图中能看到什么奇怪的现象呢？

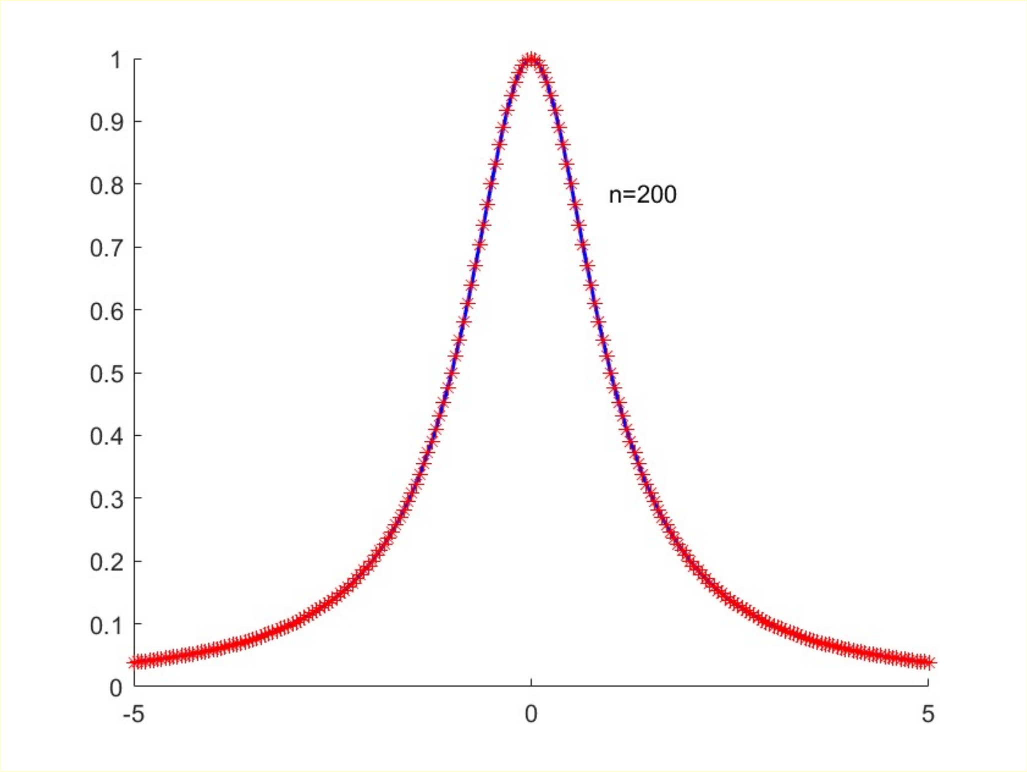


两端出现很大的“跳跃”扰动，我们称之为**龙格(Runge)现象**。

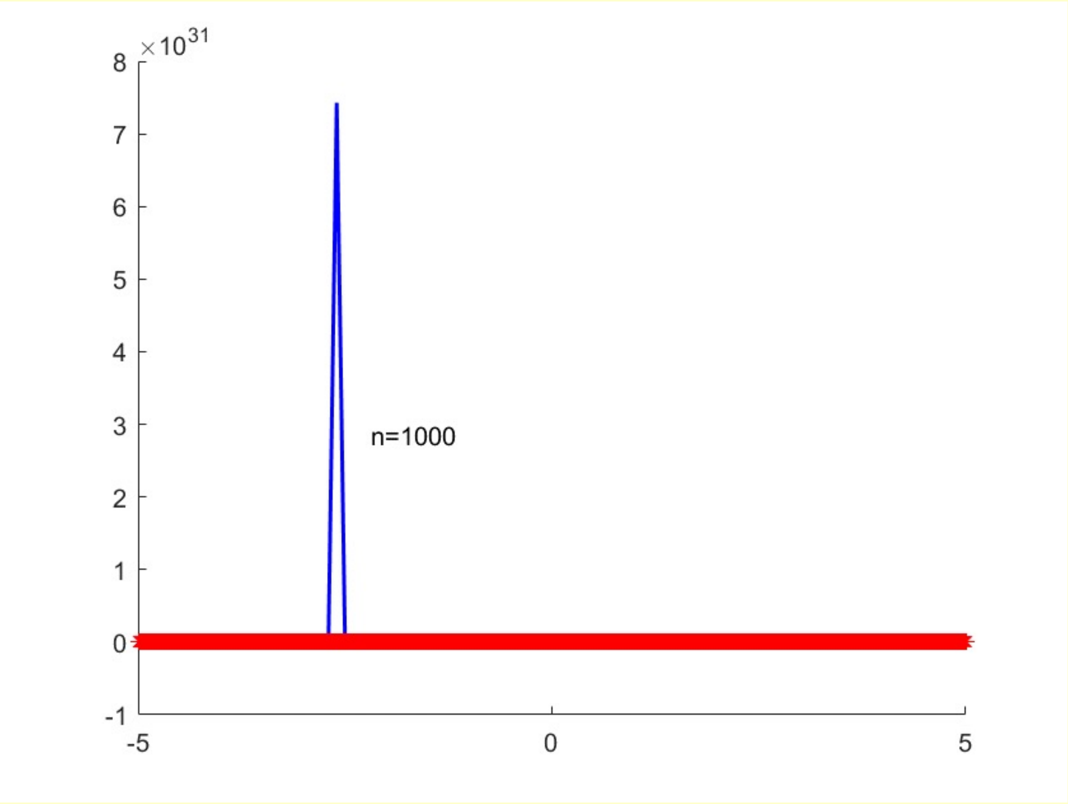
100次Lagrange插值函数的图像是什么样？
计算结果非常的贴近原来的函数。



200次插值图像是什么样的？计算结果仍然逼近原来的函数。



问题：1000次插值图像是什么样的？会有逼近效果？



显然没有很好逼近，在局部产生非常大的扰动。所以我们并不建议使用特别高次的插值多项式逼近函数。

➤ 插值余项 /* Remainder */

设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ ，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$，$f^{(n+1)}$在$[a\ ,\ b]$内存在, 考察截断误差 $R_n(x) = f(x) - L_n(x)$

Rolle's Theorem: 若$\varphi(x)$充分光滑，$\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = 0$ ，则存在 $\xi \in (x_0, x_1)$ 使得 $\varphi'(\xi) = 0$。

推广： 若 $\varphi(x_0) = \varphi(x_1) = \varphi(x_2) = 0 \Rightarrow \xi_0 \in (x_0, x_1),\ \xi_1 \in (x_1, x_2)$

使得 $\varphi'(\xi_0) = \varphi'(\xi_1) = 0 \Rightarrow \xi \in (\xi_0, \xi_1)$ 使得 $\varphi''(\xi) = 0$

$$\varphi(x_0) = \cdots = \varphi(x_n) = 0$$

$\Rightarrow$ 存在$\xi \in (a,b)$ 使得 $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$

➢ 插值余项 /* Remainder */

设节点 $a \le x_0 < x_1 < \cdots < x_n \le b$ ，且 f 满足条件 $f \in C^n[a,b]$, $f^{(n+1)}$ 在 $[a\,,\,b]$ 内存在, 考察截断误差 $\boxed{R_n(x) = f(x) - L_n(x)}$

$R_n(x)$ 至少有 $n+1$ 个根 $\longrightarrow$ $R_n(x) = K(x)\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)$

任意固定 $x \ne x_i \ (i = 0, \ldots, n)$, 考察 $\varphi(t) = R_n(t) - K(x)\prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$

$\varphi(t)$ 有 $n+2$ 个不同的根 $x_0 \ldots x_n \ x$ $\longrightarrow$ $\varphi^{(n+1)}(\xi_x) = 0, \quad \xi_x \in (a, b)$

$$f^{(n+1)}(\xi_x) - \cancel{L_n^{(n+1)}(\xi_x)} - K(x)(n+1)! = R_n^{(n+1)}(\xi_x) - K(x)\ (n+1)!$$

$\longrightarrow$ $K(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$

$$\boxed{R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x - x_i)}$$

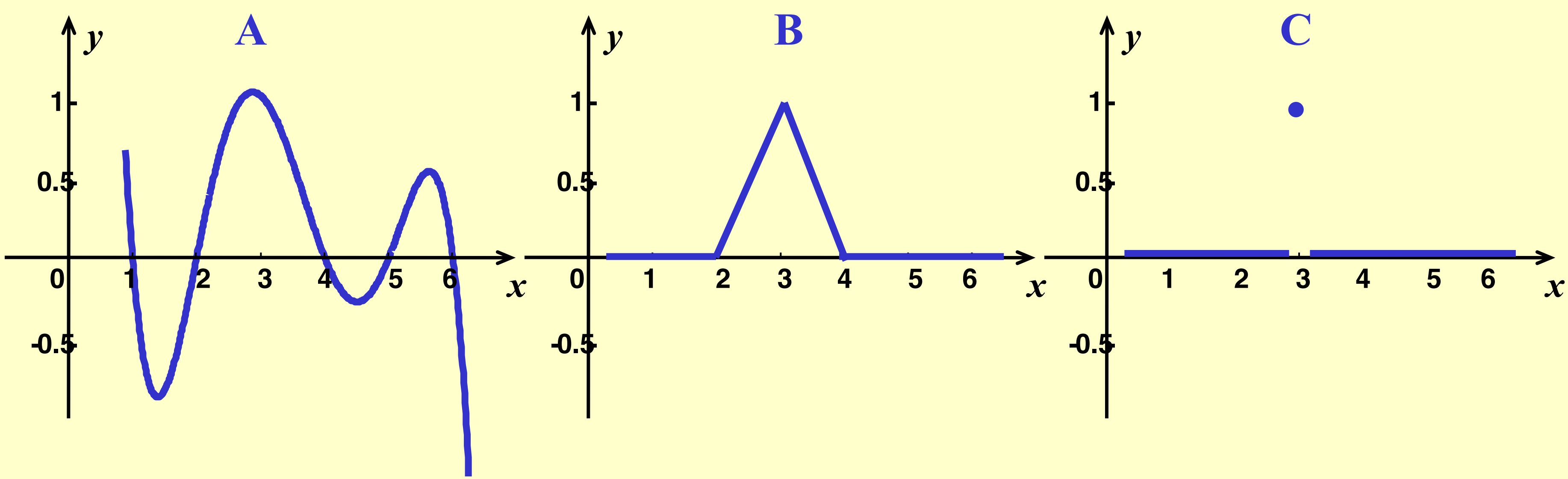
注意这里是对 t 求导

注： 通常不能确定 ξ_x，而是估计 $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \le M_{n+1}$, $\forall x\in(a,b)$

将 $\dfrac{M_{n+1}}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}|x-x_i|$ 作为误差估计上限。

当 $f(x)$ 为任一个次数$\le n$ 的多项式时，$f^{(n+1)}(x)\equiv 0$，可知 $R_n(x)\equiv 0$，即插值多项式对于次数$\le n$ 的多项式是**精确**的。

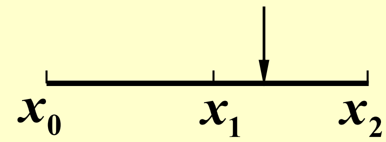
Quiz: 给定 $x_i = i+1,\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$ 下面哪个是 $l_2(x)$的图像？



例：已知 $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

分别利用 $\sin x$ **的1次、2次 Lagrange 插值计算 sin 50°并估计误差。**

$50^0=\frac{5\pi}{18}$



解： $n=1$ **分别利用** x_0, x_1 **以及** x_1, x_2 **计算**

⌖**利用** $x_0=\frac{\pi}{6}$, $x_1=\frac{\pi}{4}$ ➡ $L_1(x)=\frac{x-\pi/4}{\pi/6-\pi/4}\times\frac{1}{2}+\frac{x-\pi/6}{\pi/4-\pi/6}\times\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin 50^0\approx L_1(\frac{5\pi}{18})\approx$ 0.77614 **这里** $f(x)=\sin x$, $f^{(2)}(\xi_x)=-\sin\xi_x$, $\xi_x\in(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$

而 $\frac{1}{2}<\sin\xi_x<\frac{\sqrt{3}}{2}$, $R_1(x)=\frac{f^{(2)}(\xi_x)}{2!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})$

➡ $-0.01319<R_1(\frac{5\pi}{18})<-0.00762$ sin 50° = 0.7660444…

外推 /* extrapolation */ **的实际误差** ≈ -0.01001

⌖**利用** $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{\pi}{3}$ ➡ $\sin 50°\approx$ 0.76008, $0.00538<\tilde{R}_1\left(\frac{5\pi}{18}\right)<0.00660$

内插 /* interpolation */ **的实际误差** ≈ 0.00596

内插通常优于外推。

$n=2$

$$L_2(x)=\frac{(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{2}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})}{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})}{(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})}\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 50^0 \approx L_2(\frac{5\pi}{18}) \approx 0.76543$$

$$R_2(x)=\frac{-\cos\xi_x}{3\,!}(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{4})(x-\frac{\pi}{3}); \qquad \frac{1}{2}<\cos\xi_x<\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad 0.00044 < R_2\left(\frac{5\pi}{18}\right) < 0.00077 \qquad \sin 50^\circ = 0.7660444\ldots$$

2次插值的实际误差 ≈ 0.00061

高次插值通常优于低次插值