

# 最优化第一次大作业

王志宏  
SY1606220

## 1 原始问题重述

定义一个有向网络  $G=(N, \varepsilon)$ ，其中  $N$  是节点集， $\varepsilon$  是弧集, 对于每条弧  $l=(i, j) \in E$ , 其容量为  $c_l$  代表弧  $l$  的容量（即承受负载的上界）。源-目的对  $(s_m, t_m), m=1, \dots, M$ ，且  $(s_m, t_m)$  的流量需求是  $d_m$ ，表示流量在节点  $s_m$  流入网络，然后在节点  $t_m$  流出网络的平均密度。设沿弧  $l$  的商品流  $m$  是  $f_{ml}$ ，假设网络有  $s$  个节点， $t$  条边，令  $A(=A_{N \times E})$  为网络  $G$  的弧关联矩阵，即  $A$  的每一列对应  $\varepsilon$  中的一条弧，第  $l$  列的第  $i$  行元素为 1，第  $j$  行元素为 -1，其余元素为 0，与弧  $l=(i, j)$  对应。再令  $b_m=(b_{m1}, \dots, b_{ms})^T$ ， $f_m=(f_{m1}, \dots, f_{mt})^T$ ，则可将等式约束表示成：

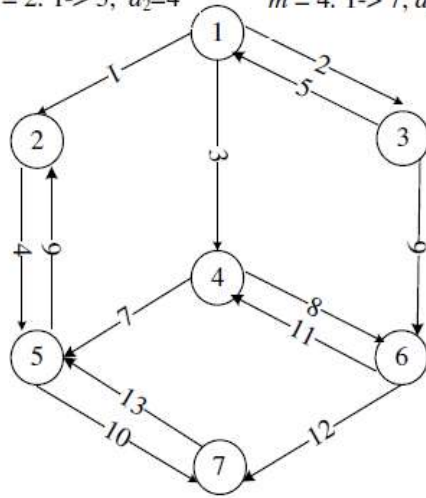
$$f_l = \sum_{m=1}^M f_{ml} \leq c_l, \forall l \in \varepsilon \quad (1)$$

$$A \times f_m = b_m \quad (2)$$

$$f_{ml} \geq 0, m=1, \dots, M, \forall l \in \varepsilon \quad (3)$$

如下图所示，网络  $G$  有 7 个节点，13 条弧，每条弧的容量均为 5 个单位，节点和弧的编号均在图中给出。有 4 个需求量均为 4 个单位的源-目的对也在图中标出。分别求极小化最大弧利用率  $MLU$  和极小化  $FT$  成本函数时各个商品  $m$  沿着弧  $l$  的流量  $f_{ml}$  和最优值。

$m = 1: 1 \rightarrow 2, d_1 = 4$        $m = 3: 3 \rightarrow 2, d_3 = 4$   
 $m = 2: 1 \rightarrow 3, d_2 = 4$        $m = 4: 1 \rightarrow 7, d_4 = 4$



## 2.问题的重新表述

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & & -1 & & & & & & & & \\ -1 & & & & 1 & & & & & & -1 & & \\ & -1 & & & & 1 & 1 & & & & & & \\ & & -1 & & & & & 1 & 1 & & & -1 & \\ & & & -1 & & & -1 & & 1 & 1 & & & -1 \\ & & & & -1 & & & -1 & & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & -1 & & 1 & 1 & \\ & & & & & & & & & -1 & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_1 = [f_{1,1} \quad f_{1,2} \quad \cdots \quad f_{1,13}]^T, \cdots, f_4 = [f_{4,1} \quad f_{4,2} \quad \cdots \quad f_{4,13}]^T$$

$$b_1 = [4 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, b_1 = [4 \quad 0 \quad -4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T,$$

$$b_1 = [0 \quad -4 \quad 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, b_1 = [4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -4]^T,$$

以上定义在两个问题中均有效

### 2.1 最大弧利用率 MLU

MLU 的问题可以表述为：

minimize  $z$

subject to  $\sum_{m=1}^M \frac{1}{c_l} f_{ml} - z \leq 0, \quad \forall l \in \mathcal{E}$

$$Af_m = b_m,$$

$$f_m \geq 0, m = 1, \cdots, M.$$

其中第一个不等式可以变化为：

$$\begin{vmatrix} \frac{f_{1,1}}{c_1} & \dots & 0 & \frac{f_{2,1}}{c_1} & \dots & 0 & \frac{f_{3,1}}{c_1} & \dots & 0 & \frac{f_{4,1}}{c_1} & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{f_{1,13}}{c_{13}} & 0 & \dots & \frac{f_{2,13}}{c_{13}} & 0 & \dots & \frac{f_{3,13}}{c_{13}} & 0 & \dots & \frac{f_{4,13}}{c_{13}} & -1 \end{vmatrix} \leq 0$$

第二个不等式可以变化为：

$$\begin{bmatrix} A & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & A & 0 \\ & & & A & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

令

$$A_{28 \times 53}^* = \begin{bmatrix} A & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & A & 0 \\ & & & A & 0 \end{bmatrix}, f_{53 \times 1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ z \end{bmatrix}, b_{28 \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$B_{13 \times 53} = \begin{vmatrix} \frac{1}{c_1} & \dots & 0 & \frac{1}{c_1} & \dots & 0 & \frac{1}{c_1} & \dots & 0 & \frac{1}{c_1} & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{c_{13}} & 0 & \dots & \frac{1}{c_{13}} & 0 & \dots & \frac{1}{c_{13}} & 0 & \dots & \frac{1}{c_{13}} & -1 \end{vmatrix}$$

$$c_{53 \times 1} = [0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T$$

则原问题可以表述为

$$\text{mimimize } c^T f$$

$$\text{subject to } Bf \leq 0$$

$$A^* f = b$$

$$f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0$$

## 2.2 极小化 FT 成本函数

极小化 FT 成本函数可以表述为

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \sum_{l \in \mathcal{E}} z_l \\ & \text{subject to} && \sum_m f_{ml} - z_l \leq 0, \forall l \in \mathcal{E} \\ & && 3 \sum_m f_{ml} - z_l \leq \frac{2}{3} c_l, \forall l \in \mathcal{E} \\ & && 10 \sum_m f_{ml} - z_l \leq \frac{16}{3} c_l, \forall l \in \mathcal{E} \\ & && 70 \sum_m f_{ml} - z_l \leq \frac{178}{3} c_l, \forall l \in \mathcal{E} \\ & && 500 \sum_m f_{ml} - z_l \leq \frac{1468}{3} c_l, \forall l \in \mathcal{E} \\ & && 5000 \sum_m f_{ml} - z_l \leq \frac{16318}{3} c_l, \forall l \in \mathcal{E} \\ & && A f_m = b_m, f_m \geq 0, m = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

$$\text{令 } F_{13 \times 52} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & \mathbf{0} & 1 & \cdots & \mathbf{0} & 1 & \cdots & \mathbf{0} & 1 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \cdots & 1 & \mathbf{0} & \cdots & 1 & \mathbf{0} & \cdots & 1 & \mathbf{0} & \cdots & 1 \end{bmatrix}, I = I_{13 \times 13}$$

$$f_{65 \times 1} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ z \end{bmatrix}, z_{13 \times 1} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{13} \end{bmatrix}, A_{28 \times 65}^* = \begin{bmatrix} A & & & 0 \\ & A & & 0 \\ & & A & 0 \\ & & & A & 0 \end{bmatrix}, b_{28 \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

$$B_{78 \times 65} = \begin{bmatrix} F & -I \\ 3F & -I \\ 10F & -I \\ 70F & -I \\ 500F & -I \\ 5000F & -I \end{bmatrix} D_{78 \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{3} c^* \\ \frac{16}{3} c^* \\ \frac{178}{3} c^* \\ \frac{1468}{3} c^* \\ \frac{16318}{3} c^* \end{bmatrix}$$

$$c_{65 \times 1} = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T \quad (52 \text{ 个 } 0, 13 \text{ 个 } 1)$$

$$c_{13 \times 1}^* = [5 \quad 5 \quad \cdots \quad 5 \quad 5 \quad 5 \quad 5]^T$$

则原问题可以表述为

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && c^T f \\ & \text{subject to} && Bf \leq D \end{aligned}$$

$$A^* f = b$$

$$f_1, f_2, f_3, f_4 \geq 0$$

### 3.问题的求解及结果的说明

#### 3.1 最大弧利用率 MLU

Matlab 程序见 case1.m, 程序执行的结果是

```
result=
4.0000          0          0          0
      0      4.0000          0          0
      0          0          0      4.0000
      0          0          0          0
      0          0          0          0
      0          0      4.0000          0
      0          0          0      4.0000
      0          0          0          0
      0          0      4.0000          0
      0          0          0      4.0000
      0          0          0          0
      0          0      4.0000          0
      0          0          0          0
      0          0      4.0000          0
      0          0      4.0000          0

opt =
      0.8000
```

| f \ m | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| 1     | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 2     | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 3     | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 4 | 0  | 0  | 4  | 4  |
| 4     | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 0 | 4 | 0 | 0 | 4  | 0  | 0  | 0  |

解释：第一个商品沿弧 1 运送 4 个单位；

第二个商品沿弧 2 运送 4 个单位；

第三个商品沿弧 6,9,12,13 运送 4 个单位；

第四个商品沿弧 3,7,10 运送 4 个单位

最大弧利用率为 0.8

## 3.2 极小化 FT 成本函数

Matlab 程序见 case2.m，程序执行的结果是

```
>> case2

Optimal solution found.

reslut =

    4.0000         0    0.5000         0
         0    4.0000         0         0
         0         0    0.1667    4.0000
         0         0         0         0
         0         0    0.6667         0
         0         0    3.3333         0
         0         0    1.8333    2.3333
         0         0         0    1.6667
         0         0    3.5000         0
         0         0         0    2.3333
         0         0    1.6667         0
         0         0    1.6667    1.6667
         0         0    1.6667         0

opt =

    92.6667
```

| f \ m | 1 | 2 | 3      | 4      | 总计     |
|-------|---|---|--------|--------|--------|
| 1     | 4 | 0 | 0.5    | 0      | 4.5    |
| 2     | 0 | 4 | 0      | 0      | 4      |
| 3     | 0 | 0 | 0.1667 | 4      | 4.1667 |
| 4     | 0 | 0 | 0      | 0      | 0      |
| 5     | 0 | 0 | 0.6777 | 0      | 0.6777 |
| 6     | 0 | 0 | 3.3333 | 0      | 3.3333 |
| 7     | 0 | 0 | 1.8333 | 2.3333 | 4.1666 |
| 8     | 0 | 0 | 0      | 1.6667 | 1.6667 |
| 9     | 0 | 0 | 3.6    | 0      | 3.6    |
| 10    | 0 | 0 | 0      | 2.3333 | 2.3333 |
| 11    | 0 | 0 | 1.6667 | 0      | 1.6667 |
| 12    | 0 | 0 | 1.6667 | 1.6667 | 3.3334 |
| 13    | 0 | 0 | 1.6667 | 0      | 1.6667 |

解释：第  $i$  列代表商品  $i(1,2,3,4)$  第  $j$  行代表弧  $j(1,2,\dots,13)$ ,  $(j,i)$  表示商品  $i$  沿着弧  $j$

的运输量，总计表示弧  $j$  的总运输量。最小的 FT 成本函数是 92.6667