图论

赵晟昊

浙江金华第一中学

June 30th, 2025

边双连通分量

相信大家都会。

实际上，就是建立 DFS 生成树，把树边定向为上到下，非树边定向为下到上，然后跑强连通分量。

把每个边双缩起来，可以得到一棵树。

点双连通分量 / 圆方树

相信大家都会。

（广义）圆方树：任意两个点双只会有不超过 1 个公共点。对每个点双建立一个方点，和在点双里的点连边，可以形成一棵树。

CF555E Case of Computer Network

给定一张简单无向连通图，以及若干对 (s,t) ，问是否存在一种定向方案，使得所有 s 都能到 t 。

$n,m,q \le 2\times 10^5$ 。

Solution

一个边双显然可以定向为强连通分量，方法是建立 DFS 生成树，树边往下，其他往上。

缩边双，则问题转化为树。一对 (s,t) 会确定所有 $s \rightsquigarrow t$ 上的所有边，判断一下有没有矛盾即可。

QOJ 5437 Graph Completing

给定一张简单无向连通图，求有多少种加边的方案能使图没有重边且边双连通。对大质数取模。

$n \leq 5 \times 10^3$ 。

Solution

先缩边双，则边双内部的无所谓怎么连。

容斥。钦定一些割边在新图还是割边，每钦定一个带 -1 的系数。

直接 DP ，记 $f_{u,i}$ 表示 u 子树当前钦定的边双大小为 i 的方案数，每次加入新割边的时候统计一下内部连边方案数即可。

P8456 「SWTR-8」地地铁铁

给定一张无向连通图，每条边都被染成了黑色或白色。

求无序点对 (x,y) 的个数，满足 $x \neq y$ ，且 x,y 之间存在有两种颜色的简单路径。

$n,m \leq 10^6$ 。无自环，可能有重边。

Solution

x, y 之间所有简单路径都是白色，显然等价于圆方树上 x 到 y 的路径所有点都是白色。黑色同理。

对于剩下的情况，可以发现不在同一个点双就必定合法，这是因为：对于任意一个点双，从中任意选两个点 $x, y(x \neq y)$ 和一条边，都存在 x 到 y 的简单路径经过这条边。

则只要考虑同一个点双的情况。发现 (x, y) 不合法，只有可能是除了 x, y 不存在其他黑白分界点，判一下即可。

P7353 Tom & Jerry

给定一张简单无向连通图，Tom 和 Jerry 要在上面博弈。规则：

- 双方任何时候都知道自己和对方的位置。
- Jerry 和 Tom 交替行动，Jerry 先行动。
- Jerry 每次可以通过任意多条边（可以不动），但是不能经过 Tom 所在结点。
- Tom 每次只能通过至多一条边（可以不动）。
- 任意时刻 Tom 和 Jerry 位置重合，则 Tom 获胜。

q 次询问，如果 Tom 和 Jerry 初始分别在 a_i, b_i ，Tom 能不能在有限次行动内获胜。

$n, m, q \le 10^5$ 。

Solution

建立圆方树。不妨假设 a 是根。

如果 a 是割点，考虑 b 最浅的方点祖先 x ，则 Jerry 可能出现在 x 子树的任意一个节点。想象一下 Tom 的策略，肯定是朝 Jerry 走，并且走到 x 的某个和 a 有边的儿子。

那么要求 Tom 获胜，就要求 x 能这么走能到达子树内所有点。直接换根 DP 即可。

特别的，如果 a 不是割点，则 Jerry 初始可能出现在任何地方，此时 Tom 想赢只有可能是走到某个割点 z ，然后从 z 能直接走到所有点。

复杂度可以做到 $O(n+m+q)$ 。

强连通分量

相信大家都会。

QOJ 8824 Slay the Spire

有 n 个状态，和 m 张卡牌，初始你的状态是 s 。

如果使用了一张卡牌 (a_i, b_i, c_i) ，若你的状态是 a_i 则会让分数加上 b_i ，（不管状态是不是 a_i ）然后把状态改为 c_i 。

每张卡牌只能用不超过一次，求最终分数最大值。

$n, m \le 10^6$ 。

Solution

先考虑图弱连通的情况。

记 d_i 表示 i 的入度减出度，其中起点额外加 1 ，则发现只要所有 $d_i \geq 0$ 就合法。

先假设所有边都有贡献，每次删一条边会让其终点的 d 加一，对于所有 d 为负的点统计贡献即可。

对于不连通的情况，可能会所有 $d \geq 0$ 但到不了。发现只有入度为 0 的强连通分量，且内部所有 d 都为 0 ，才会发生这种情况，额外删一条边即可。

QOJ 9160 树形图

给定一张简单有向图 G 。

定义一个点 u 是图 G 的根，当且仅当从 u 出发到图中每个点有恰好一条简单路径。

对于所有点 u ，判断 u 是下面中的哪一类：

一 u 是 G 的根。

二 u 不是根，但存在一个子图 $G' \subset G$ ，满足 G 的根在 G' 也是根，且 u 在 G' 上是根。

三 u 不是一类点也不是二类点。

$n, m \leq 10^6$ 。

Solution

见我的博客。

欧拉回路

相信大家都会。

合法条件：度数正确，且连通。

如果要求字典序最小/最大，只要把边排序即可。

CF2110E Melody

给定 n 个二元组 (a_i, b_i) ，重排使得：

- 对于 $1 \le i < n$ ，满足 $a_i = a_{i+1}$ 或者 $b_i = b_{i+1}$ 。
- 对于 $1 \le i < n-1$ ，不满足 $a_i = a_{i+1} = a_{i+2}$ 和 $b_i = b_{i+1} = b_{i+2}$ 。

需要判定无解。输出方案。

$n \le 2 \times 10^5$ 。

bonus：记 p_i 为重排后第 i 个二元组的编号，求 p_i 字典序最小的方案。

Solution

建立二分图，直接左边 a_i 向右边 b_i 连无向边，跑欧拉路径即可。

QOJ 5434 Binary Substrings

构造一个长度为 n 的 01 串，最大化本质不同子串个数。

$n \leq 2 \times 10^5$ 。

Solution

首先答案应该有一个上界，即记 k 为 $2^k + k - 1 \le n$ 的最大的 k ，则我们期待所有长度为 k 的串都出现过，所有长度为 $k+1$ 的子串互不相同。

对所有长度为 k 的 01 串都建一个点，令 $s_1 s_2 s_3 \dots s_k$ 连向 $s_2 s_3 \dots s_k 0$ 和 $s_2 s_3 \dots s_k 1$ ，则要求是找到一条路径，满足经过所有点且不经过重复边。

如果找到了一条哈密顿回路，把它的边去掉，则剩下每个连通块都是欧拉图。依次把每个连通块拼到回路上，如果长度超了就以当前点为端点断环为链，就得到了一组合法的方案。

现在问题在于哈密顿回路怎么求，类似对所有长度为 $k-1$ 的 01 串建图跑欧拉回路即可。

2-SAT

相信大家都会。

输出方案：dfn 序靠后的那个，或者说 tarjan 强连通分量编号小的那个。

QOJ 5689 喵了个喵 II

给定一个长度为 $4n$ 的序列，其中 $1 \sim n$ 每个数出现了 4 次。

判定能否把序列分成两个相同的子序列，并给出方案。

$n \leq 2 \times 10^5$ 。

Solution

考虑如果每个数出现两次该怎么做。记第 i 个数出现在 l_i, r_i ，则充要条件是 $[l_i, r_i]$ 互不包含，方案即为所有 l_i 和所有 r_i 。

把同样的 4 个数，当成两对不同的数来做，可以发现这样不会改变无解情况。对于一个数，有 $(1,1,2,2),(1,2,2,1),(1,2,1,2)$ 三种方案，发现 $(1,2,2,1)$ 已经有包含了，则肯定无解。

只要考虑每个数选哪种，发现这是一个 2-SAT 问题。主席树优化建图即可。

判定方法

对于一个图 G 和两个点 s,t ，以下四个命题等价：

1. 添加边 (s,t) 后，G 点双连通。
2. G 中圆方树的方点形成一条链，$s \rightsquigarrow t$ 是直径之一。
3. 存在一种对 G 定向的方法，满足 s 入度为零，t 出度为零，其余点出入度都不为零。
4. 存在一个点的排列 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ，使得 $p_1 = s, p_n = t$ ，且任意前缀以及任意后缀的导出子图都是连通的。

顺带一提，3 只要求拓扑序就能得到 4 。反过来也是差不多的。

求解方法

考虑初始全白色，每次把一个点染黑，要求所有黑点和白点分别连通。

建立 DFS 生成树，求出每个点子树最浅返祖边 $low(u)$ 。

考虑染完 $fa(u)$ 或者 $low(u)$ 的时候染 u ，即维护一个后继集合 $L(u)$ ，表示 $fa(x) = u$ 或 $low(x) = u$ 的点，每次染 u 时，就从深往浅加入每个 $L(u)$ 的点，做一个 DFS 。

为了保证 s 是第一个，t 是最后一个，可以先把 $s \rightsquigarrow t$ 保留，然后依次加入 $s \rightsquigarrow t$ 的每个点。

P9394 白鹭兰

给定一张简单无向连通图，求一个点集的划分 $V_1, \ldots, V_t$，使得：

- $\forall 1 \le x \le t$，$\bigcup_{i=1}^{x} V_i$ 的导出子图连通。
- $\forall 1 \le x \le t$，$\bigcup_{i=x}^{t} V_i$ 的导出子图连通
- $\max_{1 \le i \le t} |V_i|$ 最小。

$n, m \le 2 \times 10^5$ 。

Solution

如果 $k=1$ ，等价于找一个双极定向。

建立圆方树，发现一个方案形如圆方树上的一条链，每次把方点的不在链上的儿子整个子树加入。

最小化答案，可以直接树形 DP 。更简单的方法是注意到每次只会选 size 最大的儿子，可以直接维护。

构造方案直接双极定向即可。