
3 高速铁路动车组运用优化模型研究

高速铁路动车组运用优化模型的建立，是编制动车组运用计划的核心。本章首先对动车组运用优化问题进行分析，然后在动车组运用理论的基础上，将动车组运用问题转换为多旅行商（MTSP）问题，通过对动车组运用的多旅行商问题与一般多旅行商问题作比较分析，为后文动车组不固定运用条件下的运用优化数学模型的建立奠定理论基础。

3.1 动车组运用优化问题分析

综合分析动车组的运用问题，首先对动车组的运用的相关属性以及组成因素进行理论分析，可以在一定程度上降低问题的复杂度。本小节将分别对优化主体、优化目标以及约束条件进行分析，为后续的研究提供理论支持。

3.1.1 优化主体分析

动车组相当于一种特殊形式的车底，其主要是通过把列车的牵引动力装置和载客的装置固定为一体，列车上带有两个司机室，方便操作。与既有铁路的机车运用相比，动车组运用的复杂性较大，增加了求解难度。根据前一章所述，动车组运用优化问题就是在确定动车组检修基地布局和规模、动车组修程修制的条件下，通过选择合理地动车组运用模式、动车组运用计划的编制方式和编制方法对其优化做出调整，完成列车运行图规定运输任务下使得动车组的使用数量最少、检修次数最少、运用效率达到最高，从而达到节省运输成本的目的。因此，动车组运用的优化主体即为动车组和运输任务。

（1）动车组

高速铁路路网上运行的动车组型号不同，其内部结构、运营速度、性能等皆大不相同，对检修规则也有不同的要求。在实际情况下，为保证行车安全，不同类型和编组的动车组不可随意混用。动车组可承担运输任务保证了列车运行图的实现，与此同时，动车组的造价昂贵限制了动车组的使用数量。因此，合理地运用动车组具有十分重要的意义。

（2）运输任务

动车组的运行就是为了完成运输任务。在这里提到的运输任务并非狭义上的运行图上的列车运行线，同时也包含动车组的在站整备、检修任务等。

因此，若要合理地运用动车组就必须提供适宜的动车组车底，同时也要合理安排运输任务的时间和地点。

3.1.2 优化目标分析

动车组运用优化最主要的目的就是提高动车组的运用效率。为了实现该优化目标，目前，大多数专家、学者在动车组运用优化的研究中，通常把优化目标分为以下几个方面：

（1）减少动车组车底使用数量

动车组造价昂贵，在铁路基础设施的投资中占较大比重，车底数量与运输效益呈负相关。因此，减少动车组车底的使用数量可以节省运输成本，有利于提高铁路运输效益。由动车组的使用数量计算公式可知，在已知列车运行图的条件下，动车组运用数量最少的问题等同于动车组间车底接续时间总和最小，优化目标可转化为动车组车底接续时间总和最少。在编制动车组运用计划时，通常把减少动车组使用的数量作为主要优化目标。

（2）减少检修次数

动车组运行一定的里程或时间而满足检修要求时，为保证行车安全，必须及时送入检修基地进行检修作业。然而，动车组的检修会耗费大量的人力、物力以及财力，因此在满足动车组检修规定的条件下应当尽量较少动车组检修次数。减少动车组检修次数也是优化的目标之一。

（3）动车组使用均衡

动车组的运行里程均衡、运用时间均衡以及接续时间均衡统称为动车组使用均衡。但通常情况下，运行里程最能直观的反映动车组使用的均衡程度，因此这里所说的动车组使用均衡指的是走行里程均衡。动车组使用均衡是指一定运用周期内，动车组的走行里程大致相当，这样就可以避免某些动车组使用时间过长进行检修，而某些动车组等待时间过长等出现的运用不合理的现象。动车组使用均衡也是优化目标之一，目的是提高动车组的利用率。

（4）空车回送频率低、距离小

空车回送不能输送旅客，从而不能带来直接地经济效益。而且，在回送过程中需要人力、电力等资源，应尽量减少回送列车的频率与距离。

随着高速铁路路网的不断完善、运输需求不断增加，运输相关部门应注重提高动车组的利用率，缓解动车组车底的供需矛盾。在动车组造价昂贵且数量有限的实际情况下，本文的主要优化目标为动车组使用数量最少、均衡性最高，以提高动车组的使用效率，节省运输成本。

3.1.3 约束条件分析

若要合理地安排动车组担当运输任务，需要满足列车运行图约束、各种作业约束以及资源约束，并在完成运输任务的前提下使用最少的动车组。因此，若想深入研究动车组的运用优化需要对列车运行图约束、各种作业约束以及资源约束进行分析。

（1）列车运行图约束

动车组必须完成列车运行图中规定的运输任务，严格按照列车运行图上规定的始发、终到时刻运行。为了保证行车安全，动车组的型号、数量须满足列车运行线对列车速度、运能等方面的要求。

（2）各种作业约束

一是列车接续作业约束。同一动车组在某一时间段内只能承担一项运输任务。若某列动车组连续担当两次运输任务间的相关作业，则须满足动车组在后续列车始发前到达始发站。而且，前后接续的两项运输任务的到达时刻与始发时刻的时间间隔须满足最小接续时间。

二是检修作业约束。我国针对不同动车组车型将检修统一划分为五级修程，其中一级检修和二级检修为动车组运用检修，三级、四级、五级检修为定期检修。本文在后续的研究中只考虑动车组运用检修（一级、二级检修）作业对动车组运用的影响。约束内容可描述为：“当动车组的走行里程或时间达到检修标准时，需及时送入动车组运用所或者检修基地进行检修作业，且检修时间须满足最小检修时间标准。”在这里应注意，不同等级的检修需要送入不同的检修场所。如一级检修可以送入动车组运用所或检修基地，而二级检修只能送入检修基地。同时，检修基地有一定的检修能力限制，动车组数量不应超过检修能力范围。

（3）资源约束

动车组在车站、动车组运用所、存车场进行相关作业时需占用到发线、检修线、存车线等各种固定设施资源；而动车组配属地必须配备足够数量的动车组，并配置少量的备用动车组，所用的动车组数量为交路段数量，即各种车型动车组的可用数量约束。

动车组运用的约束较为复杂，满足列车运行图约束、各种作业约束以及资源约束，是编制动车组运用计划的关键因素。动车组运用优化的本质就是在完成列车运行图的前提下，使用的动车组最少，其利用率最高。。依据铁路总公司对动车组检修周期的规定，三级及以上级别检修周期过长。当动车组进行三级以上检修时，考虑到列车运行图也会随着客流的季节波动变化而进行相应调整，所以一般都要同样类型的动车组进行替换。不固定区段运用方式下，动车组可以在不同客运专线间

接续完成运输任务，综合考虑一定区域的路网。故本文重点研究的动车组运用计划是综合考虑动车组一级、二级检修以及多车种、多基地等多项约束条件下的动车组运用内容安排。

3.2 动车组运用的数学描述

依据前文所述内容，动车组运用优化是在列车运行图的基础上，安排动车组进行接续任务。通过参考已有研究文献发现，国内专家通常把动车组的运用问题与多旅行商问题结合起来。本章节首先对多旅行商问题进行简要的介绍，之后将动车组运用问题转换为基于 MTSP 的运用优化问题，为下文构建动车组运用网络奠定了基础。

3.2.1 经典的旅行商问题

旅行商问题 (Traveling Salesman Problem, TSP)，又称为货郎担问题或推销员问题，是一种典型的组合优化问题，目前在众多领域中得到了广泛的应用与扩展。旅行商问题是指一个货物推销员要到 N 座城市去推销自己的货物，从初始城市出发，依次经过每一个城市并保证每个城市只访问一次，完成任务后再回到起点城市，各个城市间的距离已知，该推销员如何选择线路使得走行总距离最短问题。多旅行商 (MTSP) 问题是旅行商问题的一种扩展形式，它是指多个推销员从同一城市出发去推销自己的货物，分别选择一条走行路线，并要求每个城市节点都被且仅被某一个推销员访问一次，所有的推销员走行总距离最短的问题。MTSP 问题在交通运输、线路的选择、网络拓扑等领域的研究具有重要的现实意义^[58]。

多旅行商问题 (MTSP) 用数学语言描述如下所示：

假设以 0 点表示推销员出发的起始城市节点， M 位推销员需要访问的城市节点分别用点 $1, 2, \dots, l$ 表示，将这些城市节点生成一个有权网络图 $G = (V, E)$ ，其中 $V = \{1, 2, 3, \dots, l\}$ 是顶点集合， $E = \{e_{ij} = (v_i, v_j), i, j \in V, i \neq j\}$ 是加权图的边集合。 $c_{ij} (i, j \in V, i \neq j)$ 代表顶点 i 到顶点 j 的距离，实际表示推销员经过对应的弧段 (i, j) 所花的费用，可代指时间、里程等花费。

定义变量：

$$x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{旅行商 } k \text{ 经过 } (i, j) \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (3-1)$$

$$y_i^k = \begin{cases} 1 & \text{旅行商 } k \text{ 访问城市 } i \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (3-2)$$

那么 MTSP 问题的数学模型如下：

目标函数：

$$Z = \min \sum_{k=1}^m z_k \quad (3-3)$$

约束条件：

$$z_k = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l c_{ij} x_{ij}^k \quad k = 1, 2, \dots, m \quad (3-4)$$

$$\sum_{k=1}^m y_i^k = \begin{cases} m & i = 0 \\ i & i = 1, 2, \dots, l \end{cases} \quad (3-5)$$

$$\sum_{i=0}^l x_{ij}^k = y_j^k \quad j = 0, 1, 2, \dots, l; k = 1, 2, \dots, m \quad (3-6)$$

$$\sum_{j=0}^l x_{ij}^k = y_i^k \quad i = 0, 1, 2, \dots, l; k = 1, 2, \dots, m \quad (3-7)$$

$$X = (x_{ij}^k) \in S \quad (3-8)$$

其中，S 表示消去支路约束，对不能构成完整线路的解做出相应处理。

上式(3-3)表示 M 位推销员完成访问任务需要走行的最小总里程数；式(3-4)表示每个推销员走行的最小里程数；式(3-5)表示从起点城市出发，所有的城市节点有且仅被推销员访问一次；式(3-6)表示有向图中任意一条边的终到城市有且仅有唯一的起点城市与之连通；式(3-7)表示有向图中任意一条边的起点城市有且仅有唯一的终到城市与之连通；式(3-8)表示消去构成不完整线路的路径。

3.2.2 动车组运用问题的转换

多旅行商 (MTSP) 问题是指 M 位推销员从同一城市出发去推销自己的货物，分别选择一条走行路线，并要求每个城市节点都被且仅被某一个推销员访问一次，所有的推销员走行总距离最短优化问题。动车组运用问题是 M 列动车组完成运行图中的每一条列车运行线，依据时间的要求对运行线进行合理地接续，并要求每一条运行线只能由一列动车组承担运行任务，在完成运行图中所有规定的运输任务

后,使得动车组的使用数量最少的优化问题。通过仔细分析可以发现,动车组运用优化问题与多旅行商问题存在着许多相似之处。因此,可将动车组运用问题转换为基于 MTSP 的运用优化问题,具体的转换如下所示:

(1) 将图中的列车运行线视为有向网络图的城市节点。每一个城市节点的属性包括:列车车次、列车运行里程、列车运行时间、始发终到车站、始发终到时刻、终到车站是否配有检修基地等信息。

(2) 将检修基地站的检修能力视为有向网络图的城市节点的通过能力。动车组进入检修基地进行检修作业,动车组数量不能超过检修基地的最大检修数量。而有向网络图的城市节点的通过能力不能超过节点的限制能力,且各点的通过能力均衡。

(3) 将动车组运行线间的接续时间视为推销员在两个城市间的走行里程,在有向图中以城市间的弧段来表示,弧段的权值表示列车接续时间费用的多少。列车接续时间在这里包括在站整备作业时间、检修作业时间、取送车作业时间、等待作业时间以及因维修天窗而在站停留时间。最后,通过优化得到的动车组运用计划应该是多个动车组完成运输任务的最优路径,总的接续时间费用最小或动车组使用数量达到最少。

(4) 若两条列车运行线间满足接续要求,那么两个城市节点间可以用有向弧段连接;否则,不能连接。

(5) 在全路路网中,多个动车组从基地站出发,承担运行图中规定的接续任务,在列车走行里程或走行时间达到检修要求时,为了保证行车安全,最后一条承担运输任务的运行线的终到车站附近必须配有具有检修功能的基地站。这样以便对动车组进行检修作业,如此一来便形成了多个动车组从基地站出发,承担一系列运输任务后返回基地站的线路。由于列车在不固定区段运用方式下运行,最后动车组不一定要返回始发的基地站。因此,每个动车组走行线路不一定是一个封闭的环线。

通过以上转换,可以根据多旅行商问题构造动车组运用网络,具体的构建过程在后续章节中详细讨论。

3.2.3 基于动车组运用的 MTSP 与一般 MTSP 的区别

按照以上动车组运用问题的转换思路,可以看出基于动车组运用的 MTSP 与一般的 MTSP 还是存在着差异的,其具体差别如下:

(1) 网络图的有向性。

一般的 MTSP 中,多个推销员从相同起点城市出发,其走行路径不受时间条

件的限制,可以选择拜访任意的城市节点,所以推销员的走行路径网络是无向图;而基于动车组运用的 MTSP,多个动车组其始发车站是不同的,带有时间等初始状态属性,且不要求回到出发的起始点。由于时间具有不可逆性,在选择是否可接续时首先满足时间的先后顺序要求,所以动车组的走行路径网络图是带有方向的。

(2) 城市节点的可访问性

一般的 MTSP 中,城市节点间可以任意用弧段连接,形成一个完全连通的网络图;而基于动车组运用的 MTSP 中,并不是任意两个运输任务间都可以进行接续,只有满足上一列车的终到车站与后续列车的始发车站是同一车站,且后续列车的出发时刻与前续列车的到达时刻间的时间间隔满足接续要求时,节点间才可用弧段连接。因此,基于动车组运用的 MTSP 中弧段的数量较一般 MTSP 少许多,减小了搜索范围,降低了求解的复杂性。

以上分析了 MTSP 与动车组运用问题的异同点,可以从分析中看出基于 MTSP 的动车组运用问题可以视为多个动车组从不同的车站出发,完成所有的运输任务,并不要求回到始发地。

3.3 动车组运用优化模型的建立

本小节基于多旅行商问题,构造了动车组运用网络,动车组使用数量最少和均衡度达到最高为目标函数,以列车运行图约束、各种作业约束、资源约束为条件,将列车运行图上所有的列车运行线抽象为节点,各条运行线间的接续抽象成路径,建立了不固定区段运用条件下的动车组运用优化数学模型。

3.3.1 动车组运用网络的构建

根据上节思路,基于 MTSP 构造动车组运用的有向网络图 $G = (V, E)$ 。具体参数设定如下:

在研究范围内,多条客运专线的列车运行图的所有信息已知,每条客运专线都有多个始发、终到车站,那么研究范围内共有 N 个具有始发终到作业的车站。 M 表示有向网络图中所有始发终到车站的集合,表示为 $M = \{m_1, m_2, \dots, m_N\}$ 。 m^q 表示具有检修能力的车站,称为基地站,有 $\forall m_i^{sf}, m_i^{zd}, m^q \in M$ 。用 K 表示运用网络中所有担当运输任务的动车组型号集合, $K = \{k | k = 1, 2, 3, 4\}$ 表示四种型号的动车组集合, $k = 1, 2, 3, 4$ 分别表示 CRH₁、CRH₂、CRH₃ 和 CRH₅ 等四种型号的动车组。研究范围内的客运专线每天共开行 n 列动车组列车,由于各区段列车成对运行,则对应应在列车运行图中就有 n 条列车运行线。将图中所有运行线任务按照始发时

间先后顺序进行编号，运行线集合表示为 $LC = \{LC_1, LC_2, \dots, LC_n\}$ ，设 L^q 表示终到站为基地站的运行线。

有向网络图中所有节点的参数集合可描述为 $V = \{v_i | i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ ，对应着列车运行图中每天开行的列车运行线集合 LC ， v_i 对应列车运行线 LC_i 。其中，列车运行线 v_i 内含的信息有：动车组担当第 i 条运行线的列车车次 G_i 、始发时刻 t_i^{sf} 、始发车站 m_i^{sf} 、终到时刻 t_i^{zd} 、终到车站 m_i^{zd} 、走行时间 t_i 、走行里程数 h_i 等，那么 $t_i^{zd} - t_i^{sf}$ 表示动车组在运行线的走行时间，则 $v_i = \{G_i, t_i^{sf}, m_i^{sf}, t_i^{zd}, m_i^{zd}, t_i, h_i\}$ 。

针对每一条列车运行线，按照终到时间 t_i^{zd} 、终到车站 m_i^{zd} 、所需车型 k 等约束条件筛选后接续运行线 j 。 $E = \{e_{ij} = (v_i, v_j), v_i, v_j \in V, i, j = 1, 2, 3, \dots, n\}$ 表示网络图中有向弧的集合， $e_{ij} = (v_i, v_j)$ 表示列车运行线 i 与 j 间的接续关系，即当列车运行线 i 与 j 间满足接续条件时，产生接续路径 e_{ij} 。若列车运行线 i 与 j 满足接续要求时，两者接续时间的集合用 ω_{ij} 表示，为有向弧 e_{ij} 的权值，包含在站整备时间、检修时间、等待时间等，若列车运行线 i 与 j 不满足接续要求时，则 e_{ij} 的权值无穷大， ω_{ij} 的取值如下：

$$\omega_{ij} = \begin{cases} t_j^{sf} - t_i^{zd} & m_i^{zd} = m_j^{sf}, t_j^{sf} - t_i^{zd} \geq T_b^k(1 - y_i) + T_x^k y_i \\ t_j^{sf} - t_i^{zd} + 1440 & m_i^{zd} = m_j^{sf}, t_j^{sf} - t_i^{zd} \leq T_b^k(1 - y_i) + T_x^k y_i \\ \infty & m_i^{zd} \neq m_j^{sf} \end{cases} \quad (3-9)$$

动车组在实际运用中，运行线间的接续受众多因素的影响。构造的动车组运用网络能够将运行线接续的可能形成复杂的网络。因此，建立的动车组运用优化模型是在动车组运用网络 $G = (V, E)$ 上，以多目标和多约束的条件下寻找最优的接续方案。

3.3.2 基本假设条件

为了方便动车组的运用优化问题的研究，需要对动车组的研究条件进行一些必要的假设，具体如下：

(1) 假设列车运行图已知，即确定了列车的始发、终到时刻以及车站、经由路径等相关信息。而且，在列车运行过程中完全按照运行图上规定的始发、终到时刻运行，对列车运行图实施过程中的日常调整不做考虑。

(2) 假设运行图上的列车成对开行。实际运行情况下，我国的动车组多是在车站间成对开行，即车站的始发和终到的列车数量一致。为方便优化问题，故假设列车成对开行。

(3) 假设在列车运行过程中不考虑动车组重联的情况。即列车运行图上规定

的运行任务只能由一列动车组车底完成。

(4) 假设不存在空车调拨的形式。由于空车调拨只能通过图定的运行线来实现, 所以本文中暂不考虑空车调拨的问题。即动车组承担某条运行线到达车站后, 又要承担下一条列车运行线。该条运行线的终到车站与下一条运行线的始发车站必须相同, 否则两条运行线不能进行接续。

(5) 假设动车组在不固定运用方式下进行优化。经过前文 2.2 不同运用方式的详细分析, 不固定运用方式下动车组运用较为灵活, 其运用方式明显优于其他运用方式, 比较适合本文的研究。

(6) 假设已知动车组检修基地的布局情况且不可更改, 各种型号的动车组皆有对应等级的检修基地进行检修作业, 但每个基地站不一定能够检修所有不同型号的动车组且认为每个检修基地的检修能力有限, 不一定均能满足所有动车组的检修要求。

(7) 由于动车组进入检修基地检修时, 三级及以上级别检修作业时间过长, 一般都要同样类型的动车组进行替换。同时, 为方便研究, 简化模型, 本文只考虑动车组运用检修(一级、二级检修)作业对动车组运用的影响, 且已知检修作业时间标准。

(8) 假设不同车型的动车组不能互相代替。高速铁路路网上运行的动车组型号不同, 其内部结构、运营速度、性能等皆大不相同。为保证行车安全, 所以不同车型的动车组不能互相代替。

(9) 假设模型研究的时间范围为列车运行图的一个周期 T (取值通常为 0-1440 分钟)。为方便描述问题, 把文中涉及到的时间都转换为分钟, 以当天的零点为起点, 按时间顺序依次累加。例如: 运行图中某一动车组列车 7:00 始发, 则可以把始发时刻看作 $7 \times 60 = 420$, 那么该次列车第二天的始发时刻应为 $1440 + 420 = 1860$;

3.3.3 相关参数描述

ω_{ij} 表示动车组在完成运行线 i 的运输任务后继续承担运行线 j 的接续时间, 包含在站整备时间、检修时间、等待时间、取送车时间等等, $\forall i < j$;

t_i^{sf} 、 t_i^{zd} 分别表示动车组承担运行线 i 的始发、终到时刻;

m_i^{sf} 、 m_i^{zd} 分别表示动车组承担运行线 i 的始发、终到车站;

K 表示四种型号的动车组集合;

T_b^k 表示 k 型号的动车组在站整备的时间标准;

T_x^k 表示 k 型号的动车组检修作业的时间标准, 其中 T_x^{1k} 、 T_x^{2k} 分别表示 k 型号的动车组在进行一级、二级检修作业时的检修时间标准;

b_q^k 表示检修基地 m^q 对 k 型号动车组的检修能力；
 H_b^{1k} 、 H_b^{2k} 分别表示 k 型号的动车组一级、二级检修的里程标准；
 ΔH^{1k} 、 ΔH^{2k} 分别表示 k 型号的动车组一级、二级检修的里程变动量，其大小为检修里程标准的10%；

H_0^{1k} 、 H_0^{2k} 分别表示 k 型号的动车组承担运输任务前一级、二级走行里程的初始值；

T_0^{1k} 表示 k 型号的动车组承担运输任务前一级走行时间初始值；

H_x^{2k} 、 H_x^{1k} 分别表示 k 型号的动车组承担运输任务后的走行里程；

T_x^{1k} 表示 k 型号的动车组承担运输任务后的走行时间；

T_1^k 表示 k 型号的动车组一级时间修的检修标准；

ΔT_1^k 表示 k 型号的动车组一级时间修的变动量，其大小为检修时间标准的10%；

Z_1 表示所有型号的动车组担当运输任务需要的总周转接续时间；

Z_2 表示所有型号的动车组担当运输任务需要的总的运行时间；

T 表示列车运行图的周期；

$C_{\text{车}}$ 表示完成列车运行图需要的总的动车组数量；

定义变量 $x_{ij} \in \{0,1\}$ 表示动车组在完成运行线 i 的运输任务后是否可以承担运行线 j 继续运行。其中，当动车组在完成运行线 i 的运输任务后继续承担运行线 j 时，则 $x_{ij} = 1$ ；否则 $x_{ij} = 0$ 。可表示为：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{动车组承担第}i\text{条运行线后接续第}j\text{条运行线} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (3-10)$$

定义变量 $\varphi_i^k \in \{0,1\}$ ，表示担当运行线 i 的动车组车型是否与要求的 k 型动车组相匹配。其中，若动车组型号相匹配，则 $\varphi_i^k = 1$ ；否则 $\varphi_i^k = 0$ 。可表示为：

$$\varphi_i^k = \begin{cases} 1 & k\text{型号的动车组与运行线}i\text{匹配} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (3-11)$$

定义变量 $y_i \in \{0,1\}$ 表示动车组在完成运行线 i 的运输任务后是否进行相应的检修作业。其中，当动车组在完成运行线 i 的运输任务后进行相应级别的检修时， $y_i = 1$ ；否则 $y_i = 0$ 。可表示为：

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{动车组承担第}i\text{条运行线后检修} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (3-12)$$

定义变量 $\beta_q^k \in \{0,1\}$ 表示基地站 m^q 是否具有检修 k 型动车组的能力。其中，当基地站 m^q 具有检修 k 型动车组的能力，则 $\beta_q^k = 1$ ；否则 $\beta_q^k = 0$ ；可表示为：

$$\beta_q^k = \begin{cases} 1 & \text{基地站}m^q\text{的检修功能与}k\text{型动车组匹配} \\ 0 & \text{否则} \end{cases} \quad (3-13)$$

3.3.4 目标函数

动车组运用优化最主要的目的就是尽可能的提高动车组的运用效率。由 3.1.2 所述可知, 为了实现该优化目标, 大多数专家、学者在动车组运用优化的研究中, 通常把动车组的使用数量最少、检修次数最少、均衡度最高以及空车回送距离最短作为优化目标。以此为基础, 本文的模型构造中将从动车组的使用数量和走行均衡程度两个方面展开研究工作。

(1) 目标函数 1: 动车组的使用数量最少。

由于维修和备用动车组的数量一般按照运用动车组数量的一定比例来确定, 在目标函数中不会影响最优解, 因此不予考虑。则研究范围内, 所有动车组的使用总数量为:

$$\min C_{\text{车}} = \frac{Z_1 + Z_2}{T} \quad (3-14)$$

在列车运行图已知的前提下, 那么上式中所有型号的动车组担当运输任务需要的总运行时间 Z_2 与列车运行图的周期 T 可视为定值, 只需考虑所有型号的动车组担当运输任务需要的总周转接续时间 Z_1 。因此, 在此种情形下, 动车组使用数量最少的问题可以等价于所有型号的动车组总周转接续时间最少(包含检修作业时间、整备时间、出入段时间等), 优化目标可以转换为所有型号的动车组总周转接续时间最少, 即目标函数 1 可以表示为:

$$\min Z_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i^k \varphi_j^k \omega_{ij} x_{ij} \quad (3-15)$$

在考虑检修条件下, 通过寻找动车组总周转接续时间最小化方案, 可以使得动车组交路中列车接续更加紧凑, 进而减少动车组的使用数量, 以达到提高动车组运用效率的目的。

(2) 目标函数 2: 动车组的运用均衡。

动车组运用计划就是安排动车组完成列车运行图上规定的运输任务并及时进行检修工作。在实际情况中, 担当不同交路段的动车组走行距离与运行时间不尽相同, 往往出现某些动车组使用时间过长进行检修, 而某些动车组等待时间过长而检修等出现的运用不合理的现象, 这也直接影响了动车组的运用效率。因此, 动车组的运用均衡也作为本文的优化目标之一。

动车组的运行里程均衡、运用时间均衡以及接续时间均衡统称为动车组使用均衡。但通常情况下, 运行里程最能直观的反映动车组使用的均衡程度, 这里所说的动车组使用均衡指的是运行里程均衡。因此, 本文考虑动车组运行里程均衡作为目标函数。具体体现在动车组交路中, 即不同交路内的动车组日走行里程大致相当, 以提高动车组的运用效率。

为了方便引入动车组均衡度，定义以下参数及变量：

D 表示在研究范围内，形成的动车组交路总数量；

$d(d \in (1,2,3,\dots,D))$ 表示研究范围内循环运用的任意一条动车组交路；

L_d 表示动车组交路 d 内的列车运行线集合；

n_d 表示动车组交路 d 内的交路段数量；

L_D 表示所有动车组交路的列车运行线集合，即已知列车运行图上规定完成的运输任务的所有列车运行线的集合；

s_i 表示列车运行线 v_i 的运行公里数；

s_{n_d} 表示一个动车组交路 d 内动车组 p 一天走行的公里数；

$\overline{s_D}$ 表示研究范围内所有动车组日均走行公里数，则：

$$\overline{s_D} = \frac{\sum_{i=1}^{L_D} s_i}{\sum_d n_d} \quad (3-16)$$

则一个动车组交路中各动车组运用均衡程度的方差表示为：

$$\alpha_d = \sqrt{\sum_{d=1}^D (s_{n_d} - \overline{s_D})^2} \quad (3-17)$$

因此，动车组运用优化目标函数 2 就是动车组日走行里程均衡度最高，可以表示为：

$$\min \alpha_d = \sqrt{\sum_{d=1}^D (s_{n_d} - \overline{s_D})^2} \quad (3-18)$$

3.3.5 约束条件

不固定区段运用方式下，动车组运用优化问题需要考虑众多的约束条件，其主要包含：列车运行图的约束、接续的时空约束、动车组类别约束、双修制约束以及基地站的检修能力约束等。具体讨论如下：

1. 列车运行图约束

动车组必须完成列车运行图中所有规定的运输任务，且图中的每条运行线只能由一列相应型号的动车组承担，每列动车组在同一时间只能承担一条运行线的运输任务。在时空、车型等条件的约束下，不断地选择满足接续条件的列车运行线，则约束条件如下：

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i^k \varphi_j^k x_{ij} = 1 \quad \forall i, j \& i < j \& k \in K \quad (3-19)$$

$$\sum_{j=1}^n \varphi_i^k \varphi_j^k x_{ij} = 1 \quad \forall i, j \& i < j \& k \in K \quad (3-20)$$

2. 空间约束

动车组运用优化的空间约束，就是要保证完成运输任务的前续列车的终到车站与后续列车的始发车站相同，即：

$$m_j^{sf} = m_i^{zd} \quad \forall i, j \& i < j \quad (3-21)$$

3. 时间约束

动车组运用优化的时间约束，就是动车组在运用过程中，需要满足接续时间的要求。此时，出现两种动车组接续的情况。

若动车组达到检修要求时，列车的终到站须为具有检修功能的车站。检修完毕后，动车组从基地站出发，接续下一列车运行线，两条列车运行线间的接续时间应不小于检修作业时间标准，即：

$$t_j^{sf} - t_i^{zd} \geq T_x^k \quad (3-22)$$

若动车组没有达到检修要求，动车组不进行检修作业而接续下一列车运行线，两条列车运行线间的接续时间应不小于列车在站整备作业时间标准，即：

$$t_j^{sf} - t_i^{zd} \geq T_b^k \quad (3-23)$$

综合以上两种接续情况，可得：

$$t_j^{sf} - t_i^{zd} \geq T_b^k (1 - y_i) + T_x^k y_i \quad (3-24)$$

4. 动车组的类别约束

在动车组运用的过程中，完成运行线*i*后接续运行线*j*，为保证行车安全，应确保动车组的型号保持一致，从而良好的完成运输任务，其约束条件如下：

$$k_i = k_j \quad \forall i, j \& i < j \& k \in K \quad (3-25)$$

5. 动车组的双修制约束

首先明确，本文考虑动车组的双修制约束仅包含一级、二级检修的里程修和一级检修的时间修等约束条件。在此双修制约束条件下，为保证行车安全，动车组的累计走行里程和时间有其一达到检修要求就必须进行检修，即使某一列动车组自上次检修完毕后一直处于备用状态，其运行里程为零。当它达到检修时间要求时，也要对其进行检修。这种情况下，极大地浪费了动车组资源，因而降低了动车组的运用效率。因此，随着*k*型号的动车组不断承担列车运行线的运输任务，其累计里程不断增加，每承担一条列车运行线*i*后，需要检验是否进行检修作业，以便后续

列车运行线*j*的接续，具体讨论如下：

(1) 一级检修限制里程的波动范围为 $(H_b^{1k} - \Delta H^{1k}, H_b^{1k} + \Delta H^{1k})$ 。若动车组承担列车运行线*i*后，走行里程为 $H_i^{1k} = \varphi_i^k \beta_i^k h_i + H_0^{1k}$ ，其运行线*i*的终到站为基地站且进行了一级检修作业，则须满足一级检修累计走行里程的要求，即：

$$\begin{cases} H_i^{1k} \in (H_b^{1k} - \Delta H^{1k}, H_b^{1k} + \Delta H^{1k}) \\ \varphi_i^k \beta_i^k = 1 \\ y_i = 1 \end{cases} \quad (3-26)$$

(2) 一级检修的限制时间的波动范围为 $(T_1^k - \Delta T_1^k, T_1^k + \Delta T_1^k)$ 。若动车组承担列车运行线*i*后，走行时间为 $T_i^{1k} = \varphi_i^k \beta_i^k (t_i^{zd} - t_i^{sf}) + T_0^{1k}$ ，其运行线*i*的终到站为基地站且进行了一级检修作业，则须满足一级检修累计走行时间的要求，即：

$$\begin{cases} T_i^{1k} \in (T_1^k - \Delta T_1^k, T_1^k + \Delta T_1^k) \\ \varphi_i^k \beta_i^k = 1 \\ y_i = 1 \end{cases} \quad (3-27)$$

(3) 二级检修的限制里程的波动范围为 $(H_b^{2k} - \Delta H^{2k}, H_b^{2k} + \Delta H^{2k})$ 。若动车组承担列车运行线*i*后，走行里程为 $H_i^{2k} = \varphi_i^k \beta_i^k h_i + H_0^{2k}$ ，其运行线*i*的终到站为基地站且进行了二级检修作业，则须满足二级检修累计走行里程的要求，即：

$$\begin{cases} H_i^{2k} \in (H_b^{2k} - \Delta H^{2k}, H_b^{2k} + \Delta H^{2k}) \\ \varphi_i^k \beta_i^k = 1 \\ y_i = 1 \end{cases} \quad (3-28)$$

当出现以上任意一种情况时，动车组承担列车运行线*i*后，进行相应级别的检修作业，则 $y_i = 1$ ；否则， $y_i = 0$ 。

本文认为动车组较高级别的检修作业内容能够包含较低级别的检修作业内容。因此，当动车组同时达到一级修和二级修的检修要求时，此时进行二级检修。而且，动车组的累计走行状态可依据检修等级由高到低进行覆盖，即当动车组完成二级检修作业后，不仅二级修的走行初始里程、初始时间以及累计走行里程均被清零，一级修的走行初始里程、初始时间以及累计走行里程、时间也被清零；当动车组完成一级检修作业后，只有一级修的走行初始里程、走行初始时间以及累计走行里程被清零，其二级修的累计走行里程则继续累加至下一次的二级检修。因此，应明确动车组在运行线*i*与*j*间进行接续时的累加状态变化，具体如下：

(1) 若动车组在承担运行线*i*后进行了二级检修作业，并与运行线*j*接续，那么须满足 $\varphi_i^k \varphi_j^k x_{ij} = 1 \& y_i = 1$ ，则动车组走行累计里程与累计时间如下：

$$\begin{cases} H_j^{2k} = 0 + h_j \\ H_j^{1k} = 0 + h_j \\ T_j^{1k} = 0 + (t_j^{zd} - t_j^{sf}) \end{cases} \quad (3-29)$$

(2) 若动车组在承担运行线*i*后进行了一级检修作业，并与运行线*j*接续，那么须满足 $\varphi_i^k \varphi_j^k x_{ij} = 1 \& y_i = 1$ ，则动车组走行累计里程与累计时间如下：

$$\begin{cases} H_j^{2k} = H_i^{2k} + h_j \\ H_j^{1k} = 0 + h_j \\ T_j^{1k} = 0 + (t_j^{zd} - t_j^{sf}) \end{cases} \quad (3-30)$$

(3) 若动车组在承担运行线*i*后并没有进行任何检修作业，并与运行线*j*接续，那么须满足 $\varphi_i^k \varphi_j^k x_{ij} = 1 \& y_i = 0$ ，则动车组走行累计里程与累计时间如下：

$$\begin{cases} H_j^{2k} = H_i^{2k} + h_j \\ H_j^{1k} = H_i^{1k} + h_j \\ T_j^{1k} = T_i^{1k} + (t_j^{zd} - t_j^{sf}) \end{cases} \quad (3-31)$$

6. 动车组的检修能力约束

在研究的路网范围内，存在多个检修基地。每个检修基地对不同车型的动车组有不同的检修能力，每种型号的动车组都可以找到相应的检修基地进行检修作业且每个检修基地至少能够为一种型号的动车组提高接续作业，即：

$$\sum_k b_q^k > 0 \quad \forall m^q \quad (3-32)$$

在多基地、多车型约束下，当某种型号的动车组满足检修要求时，只有当该动车组的终到站为基地站 $m_i^{zd} = m^q$ 且具备该型号动车组的检修能力时，才可以确保动车组得到及时检修。由于本文采用的是不固定区段运用方式，可能会出现某种型号的动车组集中到某个基地站进行检修作业而造成该基地站进行能力不足的情形，则动车组在进入检修基地前应该确定该基地站是否还有足够的检修能力，即进入基地站的某型号动车组的数量不能超过基地站对该型号动车组的检修能力（包含一级、二级检修），即：

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i^k \beta_q^k y_i \leq b_q^k \quad m_i^{zd} = m^q \& k \in K \quad (3-33)$$

3.3.6 优化模型建立及分析

综合上述目标函数及约束条件，可以得到不固定区段运用方式下的多基地、多车种运用优化模型，具体如下所示：

目标函数：

$$\min C_{\text{车}} = \frac{Z_1 + Z_2}{T} \quad (3-34)$$

等同于：

$$\min Z_1 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi_i^k \varphi_j^k \omega_{ij} x_{ij} \quad (3-35)$$

$$\min \alpha_d = \sqrt{\sum_{d=1}^D (s_{nd} - \bar{s}_D)^2} \quad (3-36)$$

约束条件：

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=0}^n \varphi_i^k \varphi_j^k x_{ij} = 1 & \forall i, j \& i < j \& k \in K \\ \sum_{j=0}^n \varphi_i^k \varphi_j^k x_{ij} = 1 & \forall i, j \& i < j \& k \in K \\ m_j^{sf} = m_i^{zd} & \forall i, j \& i < j \\ k_i = k_j & \forall i, j \& i < j \& k \in K \\ t_j^{sf} - t_i^{zd} \geq T_b^k (1 - y_i) + T_x^k y_i \\ \sum_k^K b_q^k > 0 & \forall m^q \\ \sum_{i=0}^n \varphi_i^k \beta_q^k y_i \leq b_q^k & m_i^{zd} = m^q \& k \in K \\ x_{ij}, \beta_q^k, y_i, \varphi_i^k \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (3-37)$$

不难看出，不固定区段运用方式下动车组运用优化问题的数学模型是多目标的非线性规划问题（multiple objective program）。目前，对此类问题直接求解方法的研究较少，其求解过程较为困难，需要对其进行一定的简化处理。通常情况下，简化思路大致分为两类：一类是将多目标转化为单目标的方法，主要包含主要目标法、效用最优法、理想点法等；另一类是分层序列法，即将多个目标按照重要程度给出顺序序列，首先求解重要目标函数，然后在目标最优解集合中求解下一目标函数，直至求解出共同的最优解。

本文采用主要目标法将上述模型中的多目标函数转化为单目标函数，考虑主要目标进行优化，其余目标满足一定的条件即可。本文中的数学模型包含两个目标，

把动车组周转接续时间最少作为主要目标，而对动车组的均衡度给出一个允许界限，将动车组的均衡度作为主要目标的约束条件^[55]。动车组运用均衡度体现的是每个动车组的走行距离与所有动车组平均走行距离的偏差程度。在本文的研究中，假设把每个动车组的走行距离与所有动车组平均走行距离的偏差程度控制在 12% 以内，则目标函数 2 的允许界限为：

$$\sqrt{\sum_{d=1}^D (s_{n_d} - \overline{s_D})^2} < 12\% \quad (3-38)$$

本章建立的多基地、多型号的动车组运用优化数学模型变量较多，规模较大，属于典型的组合优化问题。为了更好地求解该问题，将采用启发式算法，其具体过程将在下一章详细描述。

3.4 本章小结

本章首先从动车组优化主体、优化目标以及约束条件等三方面着手进行分析，指出动车组运用优化问题的本质，为后续的研究提供理论支持。然后在动车组运用理论的基础上，将动车组运用问题转换为多旅行商（MTSP）问题，通过对动车组运用的多旅行商问题与一般多旅行商问题作比较分析，建立基于 MTSP 动车组运用优网络。本文以动车组使用数量最少和均衡度达到最高为目标函数，以列车运行图约束、动车组接续的时空约束、双修制约束以及检修站的检修能力约束为条件，将列车运行图上所有的列车运行线抽象为节点，各条运行线间的接续抽象成路径，建立了不固定区段运用条件下的动车组运用优化数学模型。与既有研究不同的是，数学模型中的目标函数不仅仅考虑动车组使用数量，同时还考虑了动车组运用的均衡度，极大地提高了动车组利用率。

4 算法设计及案例应用

由于蚁群算法在已有的很多 TSP 问题的实际应用中取得了相对不错的效果，故本次研究也决定使用蚁群算法作为模型的求解算法，并在其中做了一些特殊的设计，以便取得更好的求解效果。

4.1 蚁群算法的简介

蚂蚁从巢穴出发去寻找食物，在寻找食物的过程中，会在经过的路径上遗留一定量的挥发性分泌物费洛蒙，并能感受到其他蚂蚁释放的费洛蒙。随着时间的推移，费洛蒙会逐渐挥发消失，费洛蒙浓度的高低体现了路径的远近，费洛蒙浓度越高，表示距离越短。一般情况下费洛蒙浓度越高的路径越容易吸引蚂蚁从该路径上经过，并在该路径上释放一定量的费洛蒙，以增强该路径上费洛蒙的浓度，就形成了一个正反馈，这样被吸引过来的蚂蚁就越来越多，找到食物的蚂蚁也会越来越多。有的蚂蚁不会重复同样的路，而会另寻径路，如果另寻的径路比现有的其他道路更短，那么，这条较短的径路将会吸引更多的蚂蚁。随着走行蚂蚁的增多，最终将选择出从食物源到巢穴的最佳路径。

蚁群算法解决优化问题的基本思路为：用蚂蚁行走的路径表示待优化问题的一个可行解，整个蚁群的所有行走路径构成了可行解的集合蚂蚁经过较短的路径时释放的费洛蒙较多，随着时间的推移，路径上积累的费洛蒙量逐渐增多，选择该路径的蚂蚁的数量也不断增多，最终，在正反馈的作用下，所有蚂蚁都集中到最优路径上，此时待优化问题便得到了最优解。

根据蚁群算法的基本思想，并与其他算法相比可知，蚁群算法具有以下优点：

（1）算法采用正反馈机制，较优路径上信息素的含量相对较高，吸引更多的蚂蚁选择该路径，使得较差的方案被放弃，较优的方案被选择，逐步逼近最优解。

（2）每只蚂蚁的初始环境不完全相同，在寻找食物的过程中，在周围的环境中释放了一定量的费洛蒙，费洛蒙在空气中逐渐挥发并有部分残留，其他蚂蚁通过遗留的费洛蒙进行间接通讯，感知周围环境的实时变化。

（3）每只蚂蚁都是一个单独的个体，在搜索寻优的过程中，多只蚂蚁同时进行寻优，是一种并行的计算方式，很大程度上提高了算法的计算能力和运行效率。

（4）带有概率搜索方式的启发式算法陷入局部最优的可能性较小，便于找到问题的全局最优解。

基于以上优点，成网条件下的动车组运用优化数学模型采用蚁群算法进行求

解。

4.2 算法的设计与求解

[鼠标左键单击选择该段落，输入替换之。内容为小四号宋体。]

4.3 案例应用

4.3.1 案例背景及数据

京沪高速铁路作为中国“四纵四横”客运专线网的其中“一纵”从 2008 年 4 月 18 日正式开工建设，到 2011 年 6 月 30 日通车，基础设施设计速度达到 380 公里/小时，目前运营速度降低为 300 公里/小时。线路始与北京南站，历经北京、天津、河北、山东、江苏、安徽、上海共计四省三市，最终到达上海虹桥站，整条线路全程为 1318 公里，沿线共设了 23 个车站，其中始发终到站有北京南、廊坊（新增的一对列车）、天津西、济南西、徐州东（预留始发车站）、南京南、上海虹桥共计 7 个。

沪杭高速铁路作为我国“四纵四横”客运专线中沪昆客运专线的重要组成部分之一，全线最高设计时速为 350 公里。线路由上海虹桥站引出，最终到达杭州东站，正线还通过联络线与上海站、杭州站相接，正线全长 169 公里，全线设车站 9 座，始发终到车站为上海虹桥和杭州东两个。

宁杭客运专线经江宁、余杭等引入杭州枢纽杭州东站，线路全长 249 公里，设计时速 300 公里，始发终到车站为南京和杭州东两个。

考虑到两条线路上均存在不同速度等级的动车组混跑的情况，由于本文研究中假设不同车型间不允许替代，所以为了方便计算，本文只选取了两条线路上最高等级列车（时速 300 公里/小时的 G 字头高铁列车）的运行数据进行计算，其采用的动车组均为最新的国产化 CRH380 系列动车组。

现通过中国铁路总公司的官方网站 12306 的客户服务中心查得 2018 年 12 月京沪、沪杭和宁杭三条客运专线上开行的高铁列车时刻表数据。从中可以发现，两条客运专线上中多个城市存在同一城多车站的情况，如上海站和上海虹桥站、天津南和天津西等，为方便数据的计算，本文将同城的不同车站假设为同一个车站来考虑，运行里程上也不区别考虑，因此两条线路的始发终到车站共有北京、廊坊、天津、济南、徐州、南京、上海、杭州等八个车站。

此外，本文为了便于计算还省略了动车组到站后前往检修段所的走行路程，即假设动车组到站就可进行检修，那么由于具有二级检修能力只有北京和上海的动车段，所以动车组可以在北京和上海两个车站进行检修，同理拥有一级检修能力的车站有天津、济南、徐州、南京、杭州。

综上所述，京沪、沪杭、宁杭客运专线上的列车运行信息、车站信息、动车组检修信息都已知，先准备安排动车组运用计划：假设初始时刻所有动车组都从有检修能力的车站出发，那么所有动车组的初始检修累计里程和时间均为 0，此后动车组按照接续条件的要求，在依次担当列车运行任务直至达到检修规程，此时其担当的最后一个运输任务的所到达车站必须具有检修能力的车站，以便安排检修。由此可以形成多个动车组从完成检修的不同车站出发，完成一系列运输任务后又到达某检修站进行检修的路径，得到的所有将这样的路径集合就是优化所得的动车组运用计划。

4.3.2 MATLAB 程序求解

本小节采用 MATLAB 程序设计的方法来求解京沪、沪杭、宁杭三条客运专线上的动车组运用优化实例计算。

4.3.3 案例结果分析