《高等运筹学》第4 次作业

姓名：王章任　　学号：2024201050128

题 1(a)：Which of the following sets are convex?

(a) A $slab, i.e.$, a set of the form$\{x \in \mathbf{R}^n | \alpha \leq a^T \leq \beta\}$

解：这是两个半空间的形成的交集，所以构造成其凸集。因此该集合是凸集。

题 1(b)： The set.$x + S_2 \subseteq S_1$,where $S_1, S_2 \subseteq \mathbf{R}^n$ with S_1 convex.

解：如果 $x + y \subseteq S_1$, 对于所有的 $y \in S_2$,$x + S_2 \subseteq S_1$ 是一个凸集. 因此：

$$\{x | x + S_2 \subseteq S_1\} = \bigcap_{y \in S_2} \{x | x + y \subseteq S_1\} = \bigcap_{y \in S_2} (S_1 - y)$$

$S_1 - y$ 为凸集的交集也为凸集.

题 2：Let $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ be convex sets. Show that $S = \theta_1 C_1 + \theta_2 C_2$,where

$$C_1 + C_2 := \{z \in \mathbb{R}^n | z = z_1 + z_2, z_1 \in C_1, z_2 \in C_2\},$$

is convex for any $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

解：要证明 $S = \theta_1 C_1 + \theta_2 C_2$ 是凸集，我们需要证明任意两个点 $x, y \in S$ 和对任意的 $\lambda \in (0, 1)$, 的点 $\lambda x + (1 - \lambda) y \in S$ 使用 C_1 和 C_2 的元素表示 x 和 y:

$$x = \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 \quad y = \theta_1 y_1 + \theta_2 y_2$$

其中 $x_1, y_1 \in C_1$ 和 $x_2, y_2 \in C_2$

由 $z = \lambda x + (1 - \lambda) y$ 带入得到：

$$z = \lambda(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2) + (1 - \lambda)(\theta_1 y_1 + \theta_2 y_2) = \theta_1(\lambda x_1 + (1 - \lambda) y_1) + \theta_2(\lambda x_2 + (1 - \lambda) y_2)$$

由于 C_1 和 C_2 属于凸集，

$$z_1 = \lambda x_1 + (1 - \lambda) y_1 \in C_1 \quad z_2 = \lambda x_2 + (1 - \lambda) y_2 \in C_2$$

所以 $z \in S$，所以 S 是凸集。

题 3：Show that if S_1 and S_2 are convex sets in $\mathbf{R}^{m\times n}$,then so is their partial sum

$$S = \{(x, y_1 + y_2) | x \in \mathbf{R}^m, y_1, y_2 \in \mathbf{R}^n, (x, y_1) \in S_1, (x, y_2) \in S_2\}$$

解：列举出两个点 $(\bar{x}, \bar{y_1} + \bar{y_2})$,$(\tilde{x}, \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) \in S_1, i.e.$, 这个点同时满足：

$$(\bar{x}, \bar{y}_1) \in S_1, \quad (\bar{x}, \bar{y}_2) \in S_2, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}_1) \in S_1, \quad (\tilde{x}, \tilde{y}_2) \in S_2.$$

构造出一个凸组合, 令 $(0 \leq \theta \leq 1)$

$\theta(\bar{x}, \bar{y}_1 + \bar{y}_2) + (1-\theta)(\tilde{x}, \tilde{y}_1 + \tilde{y}_2) = (\theta\bar{x} + (1-\theta)\tilde{x}, (\theta\bar{y}_1 + (1-\theta)\tilde{y}_1) + (\theta\bar{y}_2 + (1-\theta)\tilde{y}_2))$

由于：

$$(\theta\bar{x} + (1-\theta)\tilde{x}, \theta\bar{y}_1 + (1-\theta)\tilde{y}_1) \in S_1, \quad (\theta\bar{x} + (1-\theta)\tilde{x}, \theta\bar{y}_2 + (1-\theta)\tilde{y}_2) \in S_2$$

我们可知，S_1, S_2 是凸集, 由凸集相加得到的是凸集的定理可知，S 是凸集。