《高等运筹学》第3 次作业

姓名：王章任　　学号：2024201050128

古诺模型拓展

题目：假设在古诺模型的基础上引入订货与产量限制 K,s 使用 KKT 条件对其进行求解

解：古诺模型的两寡头支付函数为：

$$\max_{z_b} \pi(z_b, z_s) = (B - z_b - z_s)z_b - w * q$$
$$s.t.\ 0 \leq z_b \leq q$$

$$\max_{z_s} \pi(z_b, z_s) = (S - z_b - z_s)z_s + w * q$$
$$s.t.\ 0 \leq z_s \leq K - q$$

采用 KKT 条件求解其最优解，即：
拉格朗日乘子式：

$$L\left(z_b, z_s, \lambda\right) = (B - z_b - z_s)z_b - w * q + \lambda_1\left(q - z_b - z_s\right)$$
$$L\left(z_b, z_s, \lambda\right) = (S - z_b - z_s)z_s + w * q + \lambda_2\left(K - q - z_b - z_s\right)$$

根据 KKT 条件，可以得到：

$$\begin{cases} \frac{\partial L(z_b,z_s,\lambda)}{\partial z_b} = -2z_b + B - z_s + \lambda_1 = 0 \\ \frac{\partial L(z_b,z_s,\lambda)}{\partial z_s} = -2z_s + S - z_b + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1\left(q - z_b - z_s\right) = 0 \\ \lambda_2\left(K - q - z_b - z_s\right) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0, \quad q - z_b - z_s \leq 0 \\ \lambda_2 \geq 0, \quad K - q - z_b - z_s \leq 0 \end{cases}$$

若 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 0$，根据 KKT 条件，可以得到：

$$(z_b^*, z_s^*) = \left(\frac{2B - S}{3}, \frac{2S - B}{3}\right)$$

由 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$，可以得到：

$$\begin{cases} q \geq \frac{2B-S}{3} \\ K \geq \frac{2S-B}{3} + q \end{cases}$$

若 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 > 0$，根据 KKT 条件，可以得到：

$$(z_b^*, z_s^*) = \left(\frac{B - K + q}{2}, K - q\right)$$

由 $g_b \leq 0, \lambda_2 > 0$，可以得到：

$$\begin{cases} K \geq B - K \\ K \leq \frac{2S-B}{3} + q \end{cases}$$

若 $\lambda_1 > 0$，$\lambda_2 = 0$，根据 KKT 条件，可以得到：

$$(z_b^*, z_s^*) = \left(q, \frac{S-q}{2}\right)$$

由 $g_s \leq 0, \lambda_1 > 0$，可以得到：

$$\begin{cases} q \leq \frac{2B-S}{3} \\ K \geq \frac{S+q}{2} \end{cases}$$

若 $\lambda_1 > 0$，$\lambda_2 > 0$，根据 KKT 条件，可以得到：

$$(z_b^*, z_s^*) = (q, K-q)$$

由 $g_b \leq 0, g_s \leq 0$，可以得到：

$$\begin{cases} K \leq B - q \\ K \leq \frac{S+q}{2} \end{cases}$$

综上所述，可以得到最优解 z_b^*, z_s^* 的计算方法为：

$$\begin{cases} (z_b^*, z_s^*) = \left(\frac{2B-S}{3}, \frac{2S-B}{3}\right) & if \quad q \geq \frac{2B-S}{3} \quad K \geq \frac{2S-B}{3} + q \\ (z_b^*, z_s^*) = \left(\frac{B-K+q}{2}, K-q\right) & if \quad q \geq K - B \quad K \leq \frac{2S-B}{3} + q \\ (z_b^*, z_s^*) = \left(q, \frac{S-q}{2}\right) & if \quad q \leq \frac{2B-S}{3} \quad K \geq \frac{S+q}{2} \\ (z_b^*, z_s^*) = (q, K-q) & if \quad K \leq B - q \quad K \leq \frac{S+q}{2} \end{cases}$$