《高等运筹学》第2 次作业 *

姓名：王章任　　学号：2024201050128

报童模型拓展

题目 1：假设报童模型中需求量的概率分布为 $F(x)$，成本参数为 c 和 p，订货量受到限制 $(Q \leq K)$, 试分析在需求量的概率分布为 $F(x)$ 的情况下，最优订货量 Q^* 的计算方法:

解：

$$\max_{Q} \ \pi\left(Q^*\right) = (P-S)\left(\int_0^Q xf(x)\,dx + \int_Q^{\infty} Qf(x)\,dx\right) - (W-S)\,Q \tag{1}$$

$$s.t. \ Q \leq K \tag{2}$$

由于约束条件为线性的，则判断其目标函数 π 为经典的报童模型的求解最大收益的函数，则可以判断其一节可导，因此可以使用拉格朗日乘子法求解其最优解，采用 KKT 条件求解其最优解，即：
拉格朗日乘子式：

$$L(Q,\lambda) = \pi(Q) + \lambda(K-Q) \tag{3}$$

对其 Q 求导，得到：

$$\frac{\partial L(Q,\lambda)}{\partial Q} = (P-S)\,F(Q) - (W-S) - \lambda = 0 \tag{4}$$

当 $\lambda > 0$ 时，有：

$$\lambda(K-Q) = 0 \tag{5}$$

联立式 (4) 和式 (5) 可得：

$$(P-S)\,F(K) - (W-S) = \lambda \tag{6}$$

对其进行验证原问题与 λ 是否满足条件，可以得到：原问题满足条件且 λ>0。

*缺货率处理为线性，因此在约束条件为线性的情况下才能求解。在单周期问题中，未查到缺货率相关概念。

当 λ=0 时，有：

$$Q < K \tag{7}$$

联立式 (4) 和式 (7) 可得：

$$F\left(Q\right) = \frac{S-W}{S-P} > 0 \tag{8}$$

对其进行验证原问题与 λ 是否满足条件，可以得到：原问题满足条件且 λ=0。

综上所述，可以得到最优解 Q^* 的计算方法为：

$$\begin{cases} F\left(Q\right) = \frac{S-W}{S-P} & \lambda = 0 \\ Q = K & \lambda > 0 \end{cases} \tag{9}$$

题目 2：假设报童模型中需求量的概率分布为 $F(x)$，成本参数为 c 和 p，缺货率满足 $(\Pr\left(D > Q\right) \leq \alpha)$, 试分析在需求量的概率分布为 $F(x)$ 的情况下，最优订货量 Q^* 的计算方法：

解：这里只需要对其约束条件 $Pr\left(D > Q\right) \leq \alpha$ 进行判定, 只有在约束条件为线性的条件下才能求解。

$$\max_{Q}\ \pi\left(Q^*\right) = \left(P-S\right)\left(\int_0^Q xf\left(x\right)dx + \int_Q^\infty Qf\left(x\right)dx\right) - \left(W-S\right)Q \tag{10}$$

$$s.t. \Pr\left(D > Q\right) \leq \alpha \tag{11}$$

这里对其缺货率在单周期问题中作如下假设，由于商品是否缺货会呈现一定的分布形式，其分布函数为 $F\left(Q\right)$, 则缺货率为 $1-F\left(Q\right)$。为了满足线性条件，这里定义为 $1-\frac{Q}{D}$ 约束条件即为：

$$1 - \frac{Q}{D} \leq \alpha \tag{12}$$

拉格朗日乘子式：

$$L\left(Q,\lambda\right) = \pi\left(Q\right) + \lambda\left(1 - \frac{Q}{D} - \alpha\right) \tag{13}$$

对其 Q 求导，得到：

$$\frac{\partial L\left(Q,\lambda\right)}{\partial Q} = \left(P-S\right)F(Q) - \left(W-S\right) - \frac{\lambda}{D} = 0 \tag{14}$$

当 $\lambda > 0$ 时，有：

$$\lambda\left(1 - \frac{Q}{D} - \alpha\right) = 0 \tag{15}$$

得出

$$Q = \left(1-\alpha\right)D$$

$$\lambda = \left(P-S\right)F\left(\left(1-\alpha\right)D\right) - \left(W-S\right) > 0$$

当 λ=0 时，有：

$$Q < D\left(1-\alpha\right) \tag{16}$$

则 $F\left(Q\right)$ 得出

$$F\left(Q\right) = \frac{S-W}{S-P} > 0 \tag{17}$$

综上所述，可以得到最优解 Q^* 的计算方法为：

$$\begin{cases} Q = \left(1-\alpha\right)D & \lambda > 0 \\ F\left(Q\right) = \frac{S-W}{S-P} & \lambda = 0 \end{cases} \tag{18}$$

题目 3：假设报童模型中需求量的概率分布为 $F(x)$，成本参数为 c 和 p，订货量受到限制 $(Q \le K)$, 缺货率满足 $(\Pr\left(D > Q\right) \le \alpha)$, 试分析在需求量的概率分布为 $F(x)$ 的情况下，最优订货量 Q^* 的计算方法。

解：

$$\max_{Q}\ \pi\left(Q^*\right) = \left(P-S\right)\left(\int_0^Q xf\left(x\right)dx + \int_Q^\infty Qf\left(x\right)dx\right) - \left(W-S\right)Q \tag{19}$$

$$s.t.\Pr\left(D > Q\right) \le \alpha \tag{20}$$

$$Q \le K \tag{21}$$

拉格朗日乘子式：

$$L\left(Q,\lambda\right) = \pi\left(Q\right) + \lambda_2\left(Q-K\right) + \lambda_2\left(1-\frac{Q}{D}-\alpha\right) \tag{22}$$

对其 Q 求导，得到：

$$\frac{\partial L\left(Q,\lambda_1,\lambda_2\right)}{\partial Q} = \left(P-S\right)F(Q) - \left(W-S\right) + \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{D} = 0 \tag{23}$$

当 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 时，有：

$$Q = K$$

$$Q = \left(1-\alpha\right)D$$

且满足：

$$W - S - \left(P-S\right)F\left(K\right) = \lambda_1 - \frac{\lambda_2(1-\alpha)}{K}$$

当 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ 时，有：

$$Q = K$$

$$Q < \left(1-\alpha\right)D$$

且验证：

$$\lambda_1 = W - S - (P - S)\,F\,(K) < 0$$

则判断其不成立，因此不考虑 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ 的情况。当 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ 时，有：

$$\begin{aligned} &Q < K \\ &Q = (1 - \alpha)\,D \end{aligned}$$

且验证：

$$\lambda_2 = D\,(W - S) - D\,(P - S)\,F\,(Q) > 0$$

则判断其成立。当 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ 时，有：

$$\begin{aligned} &Q < K \\ &Q < (1 - \alpha)\,D \end{aligned}$$

且验证：

$$F\,(Q) = \frac{S - W}{S - P} > 0$$

则判断其成立。

综上所述，可以得到最优解 Q^* 的计算方法为：

$$\begin{cases} Q = K = (1 - \alpha)\,D & \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \\ Q = (1 - \alpha)\,D & \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0 \\ F\,(Q) = \frac{S - W}{S - P} & \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \end{cases} \tag{24}$$