

《高等运筹学》第2次作业*

姓名：王章任 学号：2024201050128

报童模型拓展

题目 1：假设报童模型中需求量的概率分布为 $F(x)$ ，成本参数为 c 和 p ，订货量受到限制 ($Q \leq K$)，试分析在需求量的概率分布为 $F(x)$ 的情况下，最优订货量 Q^* 的计算方法。

解：

$$\max_Q \pi(Q^*) = (P - S) \left(\int_0^Q x f(x) dx + \int_Q^\infty Q f(x) dx \right) - (W - S) Q \quad (1)$$

$$s.t. Q \leq K \quad (2)$$

由于约束条件为线性的，则判断其目标函数 π 为经典的报童模型的求解最大收益的函数，则可以判断其一阶可导，因此可以使用拉格朗日乘子法求解其最优解，采用 KKT 条件求解其最优解，即：

拉格朗日乘子式：

$$L(Q, \lambda) = \pi(Q) + \lambda(K - Q) \quad (3)$$

对其 Q 求导，得到：

$$\frac{\partial L(Q, \lambda)}{\partial Q} = (P - S) F(Q) - (W - S) - \lambda = 0 \quad (4)$$

当 $\lambda > 0$ 时，有：

$$\lambda(K - Q) = 0 \quad (5)$$

联立式 (4) 和式 (5) 可得：

$$(P - S) F(K) - (W - S) = \lambda \quad (6)$$

对其进行验证原问题与 λ 是否满足条件，可以得到：原问题满足条件且 $\lambda > 0$ 。

*缺货率处理为线性，因此在约束条件为线性的情况下才能求解。在单周期问题中，未查到缺货率相关概念。

当 $\lambda=0$ 时, 有:

$$Q < K \quad (7)$$

联立式 (4) 和式 (7) 可得:

$$F(Q) = \frac{S-W}{S-P} > 0 \quad (8)$$

对其进行验证原问题与 λ 是否满足条件, 可以得到: 原问题满足条件且 $\lambda=0$ 。

综上所述, 可以得到最优解 Q^* 的计算方法为:

$$\begin{cases} F(Q) = \frac{S-W}{S-P} & \lambda = 0 \\ Q = K & \lambda > 0 \end{cases} \quad (9)$$

题目 2: 假设报童模型中需求量的概率分布为 $F(x)$, 成本参数为 c 和 p , 缺货率满足 $(\Pr(D > Q) \leq \alpha)$, 试分析在需求量的概率分布为 $F(x)$ 的情况下, 最优订货量 Q^* 的计算方法。

解: 这里只需要对其约束条件 $\Pr(D > Q) \leq \alpha$ 进行判定, 只有在约束条件为线性的条件下才能求解。

$$\max_Q \pi(Q^*) = (P-S) \left(\int_0^Q xf(x)dx + \int_Q^\infty Qf(x)dx \right) - (W-S)Q \quad (10)$$

$$s.t. \Pr(D > Q) \leq \alpha \quad (11)$$

这里对其缺货率在单周期问题中作如下假设, 由于商品是否缺货会呈现一定的分布形式, 其分布函数为 $F(Q)$, 则缺货率为 $1 - F(Q)$ 。为了满足线性条件, 这里定义为 $1 - \frac{Q}{D}$ 约束条件即为:

$$1 - \frac{Q}{D} \leq \alpha \quad (12)$$

拉格朗日乘子式:

$$L(Q, \lambda) = \pi(Q) + \lambda \left(1 - \frac{Q}{D} - \alpha \right) \quad (13)$$

对其 Q 求导, 得到:

$$\frac{\partial L(Q, \lambda)}{\partial Q} = (P-S)F(Q) - (W-S) - \frac{\lambda}{D} = 0 \quad (14)$$

当 $\lambda > 0$ 时, 有:

$$\lambda \left(1 - \frac{Q}{D} - \alpha \right) = 0 \quad (15)$$

得出

$$Q = (1 - \alpha)D$$

$$\lambda = (P-S)F((1-\alpha)D) - (W-S) > 0$$

当 $\lambda=0$ 时, 有:

$$Q < D(1 - \alpha) \quad (16)$$

则 $F(Q)$ 得出

$$F(Q) = \frac{S - W}{S - P} > 0 \quad (17)$$

综上所述, 可以得到最优解 Q^* 的计算方法为:

$$\begin{cases} Q = (1 - \alpha) D & \lambda > 0 \\ F(Q) = \frac{S - W}{S - P} & \lambda = 0 \end{cases} \quad (18)$$

题目 3: 假设报童模型中需求量的概率分布为 $F(x)$, 成本参数为 c 和 p , 订货量受到限制 ($Q \leq K$), 缺货率满足 ($\Pr(D > Q) \leq \alpha$), 试分析在需求量的概率分布为 $F(x)$ 的情况下, 最优订货量 Q^* 的计算方法。

解:

$$\max_Q \pi(Q^*) = (P - S) \left(\int_0^Q x f(x) dx + \int_Q^\infty Q f(x) dx \right) - (W - S) Q \quad (19)$$

$$s.t. \Pr(D > Q) \leq \alpha \quad (20)$$

$$Q \leq K \quad (21)$$

拉格朗日乘子式:

$$L(Q, \lambda) = \pi(Q) + \lambda_1 (Q - K) + \lambda_2 \left(1 - \frac{Q}{D} - \alpha \right) \quad (22)$$

对其 Q 求导, 得到:

$$\frac{\partial L(Q, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial Q} = (P - S) F(Q) - (W - S) + \lambda_1 - \frac{\lambda_2}{D} = 0 \quad (23)$$

当 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ 时, 有:

$$Q = K$$

$$Q = (1 - \alpha) D$$

且满足:

$$W - S - (P - S) F(K) = \lambda_1 - \frac{\lambda_2(1 - \alpha)}{K}$$

当 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ 时, 有:

$$Q = K$$

$$Q < (1 - \alpha) D$$

且验证：

$$\lambda_1 = W - S - (P - S) F(K) < 0$$

则判断其不成立，因此不考虑 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 = 0$ 的情况。当 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$ 时，有：

$$Q < K$$

$$Q = (1 - \alpha) D$$

且验证：

$$\lambda_2 = D(W - S) - D(P - S) F(Q) > 0$$

则判断其成立。当 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$ 时，有：

$$Q < K$$

$$Q < (1 - \alpha) D$$

且验证：

$$F(Q) = \frac{S - W}{S - P} > 0$$

则判断其成立。

综上所述，可以得到最优解 Q^* 的计算方法为：

$$\begin{cases} Q = K = (1 - \alpha) D & \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \\ Q = (1 - \alpha) D & \lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0 \\ F(Q) = \frac{S - W}{S - P} & \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0 \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix} \quad (25)$$