# 《高等运筹学》第 5 次作业

姓名：王章任　　学号：2024201050128

**题 1(1)**：For each of the following functions determine whether it is convex, concave quasiconvex, or quasiconcave.

(a) $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ on $\mathbf{R}^2_{++}$.

**解**：$f$ 的海塞矩阵为：

$$\bigtriangledown^2 f(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bigtriangledown^2 f$ 既不是正定也不是负定，因此函数 $f$ 不是凸函数也不是凹函数。它是准凹的，其超集为：

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2_{++} | x_1 x_2 \geq \alpha\}$$

**题 1(2)**： $f(x) = ||Ax - b||, A \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^n$.Hint:composition.

**解**：2 范数首先可知是凸的，函数 $f(x) = ||Ax - b||$ 可以看做凸函数 $g(y) = ||y||$ 与放射变化 $h(x) = Ax - b$ 的组合，其中放射变化的 $h(x)$ 为凸函数。有复合函数满足凸性的条件：

1. $h, g$ 是凸函数，$\hat{g}$ 是非减。
2. $h, g$ 是凸函数，$\hat{g}$ 是非增。

可知，$f(x)$ 是凸函数。

**题 2**：Suppose $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is convex with **dom** $f : \mathbb{R}$ , and bounded above on $\mathbb{R}$. Show that $f$ is a constant.

**解**：由于：$f$ 在 **dom** $f = \mathbb{R}^n$ 为凸函数，则对于任意的 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 和 $\theta \in [0, 1]$ 都有：

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta) f(y)$$

由于：在 $\mathbb{R}^n$ 中有界，则存在一个实数 $M$, 使得对于所有 $x \in \mathbb{R}^n$ 有：

$$f(x) \leq M$$

我们做出假设：$f$ 不是常数，那么存在 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ 使得 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 不失一般性，假设 $f(x_1) \leq f(x_2)$。给定一个凸组合 $z \in \textbf{dom}\, f$, 对于任意的 $\lambda \in (0,1)$, 满足：

$$z = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$$

根据 $f$ 的凸性

$$f(z) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

当 $\lambda \to 0$ 时，$z \to x_2$ 不等式变为：

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 0} f(z) &\leq \lim_{\lambda\to 0}(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))\\ f(z) &\leq f(x_2)\end{aligned}$$

当 $\lambda \to 1$ 时，$z \to x_1$ 不等式变为：

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to 1} f(z) &\leq \lim_{\lambda\to 1}(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))\\ f(z) &\leq f(x_1)\end{aligned}$$

若 $f(x_1) \neq f(x_2)$，则与有界性 $f(z) \leq M$ 矛盾。只有当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时上诉不等式成立。因此，我们假设 $f$ 不是常数的假设不成立。因此 $f$ 必须是常数函数。

**题 3**：Derive the conjugate of $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$

**解**：共轭函数的形式为：

$$f^*(y) = \sup_{x \in \textbf{dom} f}\{y^T x - f(x)\}$$

带入 $f(x) = \frac{1}{x}, x > 0$, 并对 $x$ 求偏导：

$$\begin{aligned}\frac{\partial(xy - \frac{1}{x})}{\partial x} &= 0\\ \Rightarrow y + \frac{1}{x^2} &= 0\end{aligned}$$

由此可知 $f^*(y)$ 的表达式：

$$f^*(y) = y\sqrt{-y^{-1}} - \frac{1}{\sqrt{-y^{-1}}} = -\sqrt{-4y}(y<0)$$