数学分析作业

2025 年 4 月 18 日

目录

1　第八章作业

1.1　简答题

1.1.1　1

1. 求下列不定积分[1]:

   1). $\int (x - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \,\mathrm{d}x$

   2). $\int (2^x + 3^x)^2 \,\mathrm{d}x$

   3). $\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} \,\mathrm{d}x$

   证明.

$$\begin{aligned} &\int (x - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 \,\mathrm{d}x \\ =& \int (x^2 - 2\sqrt{x} + \frac{1}{x}) \,\mathrm{d}x \\ =& \frac{x^3}{3} - \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \ln(|x|) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int (2^x + 3^x)^2 \,\mathrm{d}x \\ =& \int (4^x + 9^x + 2\cdot 6^x) \,\mathrm{d}x \\ =& \frac{4^x}{\ln(4)} + \frac{9^x}{\ln(9)} + \frac{2\cdot 6^x}{\ln(6)} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{3}{\sqrt{4-4x^2}} \,\mathrm{d}x \\ =& \int (\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}) \,\mathrm{d}x \\ =& \frac{3}{2}\arcsin(x) + C \end{aligned}$$

□

2. 1). $\int \frac{x^2}{3(1+x^2)} \,\mathrm{d}x$

   2). $\int \tan^2(x) \,\mathrm{d}x$

   3). $\int \sin^2(x) \,\mathrm{d}x$

   4). $\int \frac{\cos(2x)}{\cos(x) - \sin(x)} \,\mathrm{d}x$

   证明.

$$\begin{aligned} &\int \frac{x^2}{3(1+x^2)} \,\mathrm{d}x \\ =& \int \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{1+x^2}) \,\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{3}x - \arctan(x) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \tan^2(x) \,\mathrm{d}x \\ =& \int \sec^2(x) - 1 \,\mathrm{d}x \\ =& \tan(x) - x + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \frac{\cos(2x)}{\cos(x) - \sin(x)} \,\mathrm{d}x \\ =& \int \cos(x) + \sin(x) \,\mathrm{d}x \\ =& \sin(x) - \cos(x) + C \end{aligned}$$

□

3. 证明.

$$\begin{aligned} &\int \frac{\cos(2x)}{\cos^2(x)\sin^2(x)} \,\mathrm{d}x \\ =& 2x - \frac{1}{2}\sin(2x) - \tan(x) + C \\ &\int \cos(2x)\cos(x) \,\mathrm{d}x \\ =& \frac{1}{2}(\sin(x) + \frac{\sin(3x)}{3}) + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int \sqrt{x\sqrt{x}\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x \\ =& \frac{8x^{15/8}}{15} + C \\ &\int \frac{\sqrt{x^4 + x^{-4} + 2}}{x^3} \,\mathrm{d}x \\ =& \ln(x) + \frac{1}{-4x^4} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\int (\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{1-x}{1+c}) \,\mathrm{d}x \\ =& 2\arcsin(x) + C \end{aligned}$$

[1]以上所以题目均可在 mathematica 或者https://www.wolframalpha.com/找到答案

$\square$

4. 证明.

$$\int e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$$
$$= -sgn(x)\cdot e^{|x|}+C$$

$\square$

5. $f'(\arctan(x))=x^2$，求 $f(x)$：

证明. $f'=\tan^2(x)\to f'=\sec^2(x)-1\to f=\tan(x)-x+C$ $\square$

6. 证明.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+2x}$$
$$=\frac{\ln(2x+1)}{2}+C$$
$$\int(\frac{1}{3-x^2}+\frac{1}{1-3x^2})\,\mathrm{d}x$$
$$=\arcsin(\frac{x}{\sqrt{3}})+\frac{\arcsin(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}+C$$
$$\int 2^(2x+3)\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2^{2x+2}}{\ln(2)}+C$$
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{7-5x}}$$
$$=-\frac{3\cdot(7-5x)^{\frac{2}{3}}}{10}+C$$

$\square$

7. 证明.

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2(2x+\frac{\pi}{4})}$$
$$=-\frac{\cot(2x+\frac{\pi}{4})}{2}+C$$
$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$$
$$=\tan(\frac{x}{2})+C$$
$$\int\csc x\,\mathrm{d}x$$
$$=-\tanh^{-1}(\cos(x))+C$$
$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=-\sqrt{1-x^2}+C$$

$\square$

2 第 9 章作业

2.1 1

$$\begin{aligned}\int_0^1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x&=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}\\&=\frac{1-\mathrm{e}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1}{n}\\&=\mathrm{e}-1\end{aligned}$$

2.2　2

1.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{2}{1+x^2} - 1\,\mathrm{d}x \\ &= 2\arctan(1) - 1 \\ &= \frac{\pi}{2} - 1\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x &= \ frac\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}2\big|_0^1 \\ &= \frac{\mathrm{e} + \frac{1}{\mathrm{e}} - 2}{2}\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_4^9 (\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}})\,\mathrm{d}x &= \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{x}\Big|_4^9 \\ &= \frac{77}{2}\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \frac{1}{x}(\ln(x))^2\,\mathrm{d}x &= \frac{\ln(x)^3}{3}\Big|_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{8}{3}\end{aligned}$$

2.3　3

1.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4} &= \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2+n^2}) &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \arctan(x)\big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

2.4　4

证明. 证明: 若 T' 是 T 增加若干分点后所得的分割，则 $\sum_{T'} \omega_i' \Delta x_i' \le \sum_T \omega_i' \Delta x_i$.
我们不妨设 T' 增加的点在 x_i, x_{i+1} 之间，如果取到边界相当于没增加分点，不妨设这个点为 y_i, 先假设

只增加这一个点，后面我们会证明，增加一个点，那么这个 doubour 和会下降，因此我们可以先假定为一个点, 那么与原先不同的 doubour 和只有 x_i, y_i, x_{i+1} 这三点, 我们只需要证明:

$$w_i'(y_i - x_i) + w_{i+1}'(x_{i+1} - y_i) \le \omega_i(x_{i+1} - x_i)$$

然后我们又有 $w_i', w_{i+1}' \le \omega_i$, 以及 $(y_i - x_i) + (x_{i+1} - y_i) = (x_{i+1} - x_i)$, 所以这就证明完了。因此每增加一个分点这个 doubour 和会缩小，因此增加若干分点后，会比增加一个分点还小。这就是我们的证明。 □

2.5 5

证明. 任取 $\varepsilon > 0$，由于 f 在 $[a, b]$ 可积，存在一个分割 T，使得 $\sum_T \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$，如果这个分割点形成的区间包含了 α 或者 β，我们根据上一个命题，我们可以选取 α 以及 β 为分点。就有分割 T':

$$\sum_{[\alpha,\beta]} \omega_i \Delta x_i \le \sum_{T'} \omega_i \Delta x_i \le \sum_{T} \omega_i \Delta x_i \le \varepsilon$$

□

2.6 6

证明. 我们不妨设 $h = f - g$，根据题意 h 在 $[a, b]$ 只有有限个点 (不妨设为 N) 不为 0，但是有界 (不妨设为 M), 对任意 $\varepsilon > 0$，取等距分割 $T = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$，使得 $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$，那么我们有

$$\sum_T \omega_i \Delta x_i \le \frac{b-a}{n} NM$$

对于 $n \to \infty$ 时右侧是为 0 的，所以对于 $\varepsilon > 0$，存在一个 N' 当 $n > N'$ 就小于 ε. □

2.7 7

1. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\frac{\pi^2}{4}) = \frac{\pi^2}{8}$
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \,\mathrm{d}x = 1$
3. 我们又有在 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上,$x \ge \sin(x)$, 所以我们有 $\frac{\pi^2}{8} > 1$

2.8 8

1. e^{x^2} 在 $[0, 1]$ 是单调的，取两边就得到答案
2. $g(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$，我们有 $g'(x) = \frac{1-\frac{1}{2}\ln(x)}{x^{\frac{3}{2}}}$。所以 $g \le g(e^2) = \frac{2}{\mathrm{e}}$, 右侧就完成了。左侧的话，求出 g 在这个区间的最小值 (端点 e)$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$，然后完成。

2.9 9

我们先给出一个结论:

$$\frac{\mathrm{d} \int_0^{h(x)} g(x, t) \,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \int_0^{h(x)} g_x'(x, t) \,\mathrm{d}t + g(x, h(x))h'(x)$$

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \\
F''(x) &= f(x)
\end{aligned}
$$

所以完成了。

2.10 10

1. 求导，1
2. 求导，0

2.11 11

1. 把 $\sin(2x)$ 拆出来，然后把 $\sin(x)$ 放到 d 里面，答案是 $\frac{2}{7}$
2. 换元 $x = 2\sin(t), \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. $\frac{2}{3}\left(\sqrt{3} - 1\right)$
4. $\arctan(\mathrm{e}) - \frac{\pi}{4}$
5. $\frac{1}{2}(\pi - 2)$
6. $\frac{1}{2}\left(1 + \mathrm{e}^{\pi/2}\right)$
7. e
8. 2
9. $\frac{\pi}{4}$