

目录

目录.....	1
1 概要.....	2
2 SIMULINK 仿真实验	3
2.1 实验设计思路.....	3
2.2 导弹运动建模.....	4
2.2.1 大气模型.....	5
2.2.2 动力学和运动学.....	6
2.2.3 自动驾驶仪.....	8
2.3 导引头系统.....	9
2.4 制导系统.....	11
2.4.1 弹目相对位置关系.....	11
2.4.2 制导计算机.....	12
2.4.3 引战系统.....	13
2.5 比例导引实验.....	14
2.6 基于一般趋近律的滑模制导律.....	17
2.7 随机滑模变结构制导律.....	20
2.8 导弹拦截 H_∞ 制导律	25
参考文献.....	31

1 概要

本文基于 MATLAB Simulink Missile Guidance 模型，目的在于：

- 1、了解导航制导与控制的基本概念，以及 GNC 系统的作用和组成部分；
- 2、以导弹飞行力学为基础，完成 GNC 系统的建模；
- 3、了解半实物仿真的意义，工作原理，以及半实物仿真实验的实施过程；
- 4、学习使用 MATLAB/Simulink 软件搭建导弹弹体及制导控制回路模型，通过实验加深对课堂所学相关知识的理解；
- 5、设计一个制导系统，完成数字仿真实验。

虽然 Missile Guidance 模型比起实际导弹还是简单了很多，只在导弹纵向平面内讨论问题，被拦截目标也没有机动规避，但麻雀虽小五脏俱全，Missile Guidance 模型涉及动力学、运动学、自动驾驶仪设计、环境建模、导引头追踪算法、天线罩误差、弹载计算机程序更新、制导模式切换、引信和保险等多个方面，让我对导弹从发射到命中目标，过程中计算和完成的任务有了整体上的认知，对以往学习到的概念有了更加深入和系统的了解。

设计制导律并将其应用到整个系统中来，完全不是以往纸上谈兵的事情，需要考虑哪些量是可以测量和获得的，系统模型不能通过线性时不变非齐次方程组来表示时，哪些制导律的设计是可行的。90% of the real world applications are based on 10% of the existing control methods and theory，我认为在本次实验中我有深刻的体会，一方面在随机滑模变结构制导律的设计中，推导了导航系数为 3 的最优性，另一方面虽然滑模和 H_∞ 鲁棒的出发点不同，但最终设计出的制导律都包含了 PNG 的部分，对 PNG 的简单实用也是一种佐证。

2 Simulink 仿真实验

2.1 实验设计思路

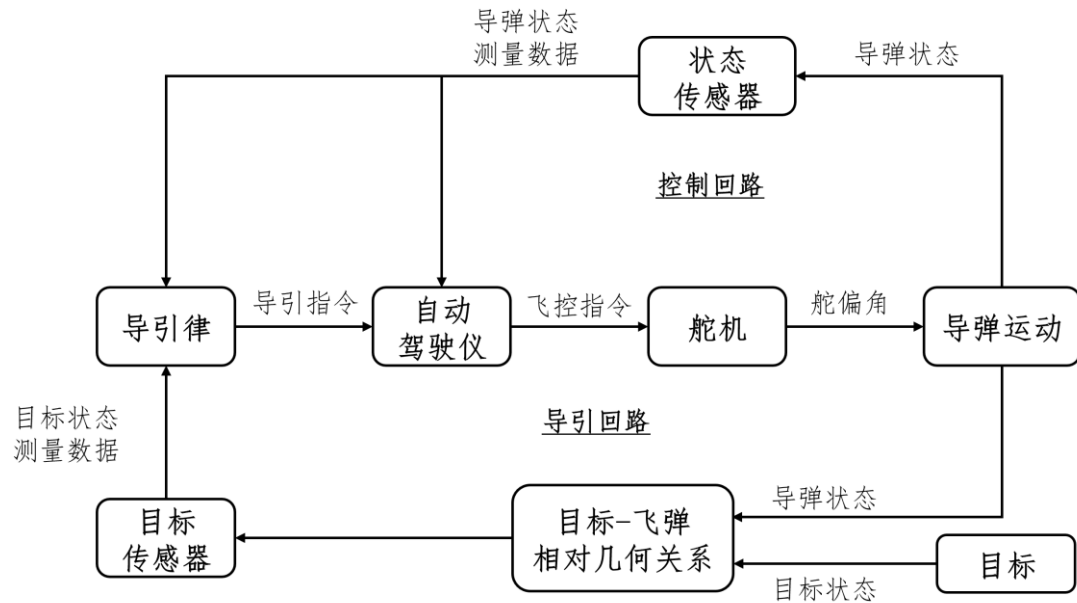


图2.1 导弹制导控制系统仿真框图

依据导弹制导控制系统仿真框图，在 Simulink 中搭建和分析仿真模型，进行数字仿真实验。

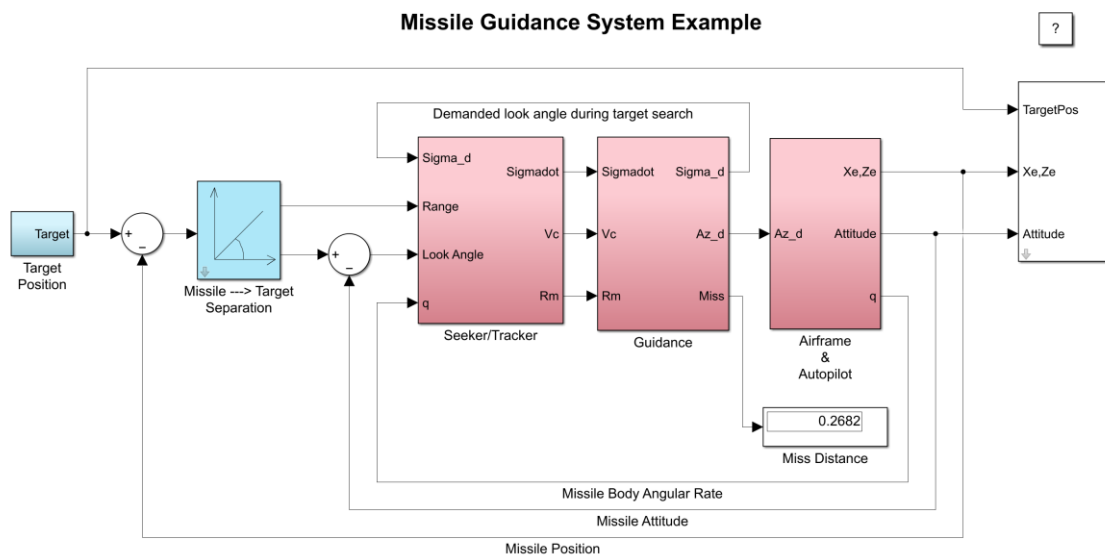


图2.2 导弹制导仿真 Simulink 模型

2.2 导弹运动建模

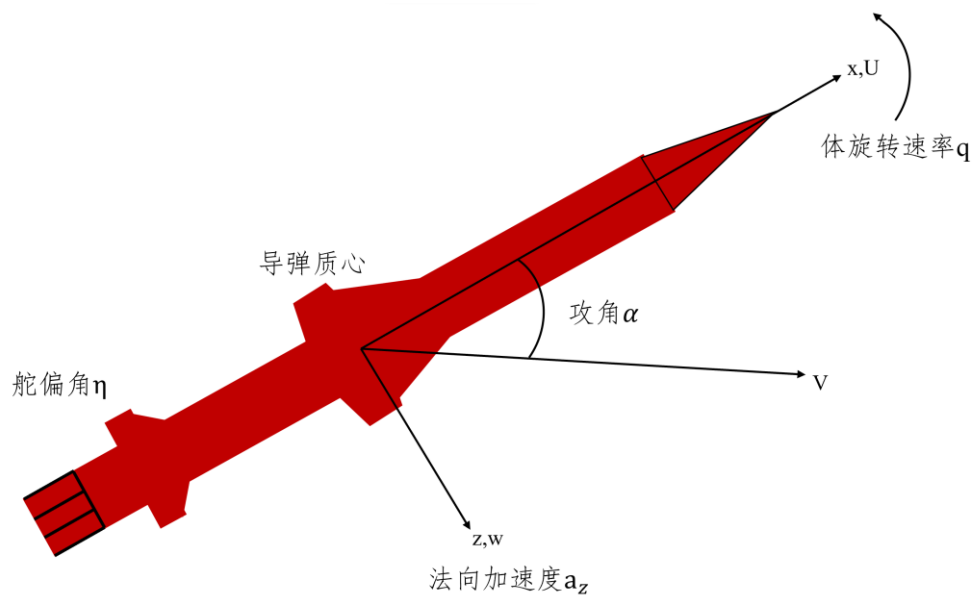


图2.3 导弹模型

该模型表示一种尾翼控制导弹，飞行速度在 2 马赫至 4 马赫之间，高度在 10000 英尺（3050 米）至 60000 英尺（18290 米）之间，典型迎角在 ± 20 度之间。许多讨论如何在导弹自动驾驶仪设计中应用高级控制方法的已发表论文（参考文献[1]、[2]和[3]）中都提到了该模型，模型的核心元素是弹体刚体动态的非线性表示，作用在导弹体上的空气动力和力矩是由入射角和马赫数的非线性函数的系数产生的。

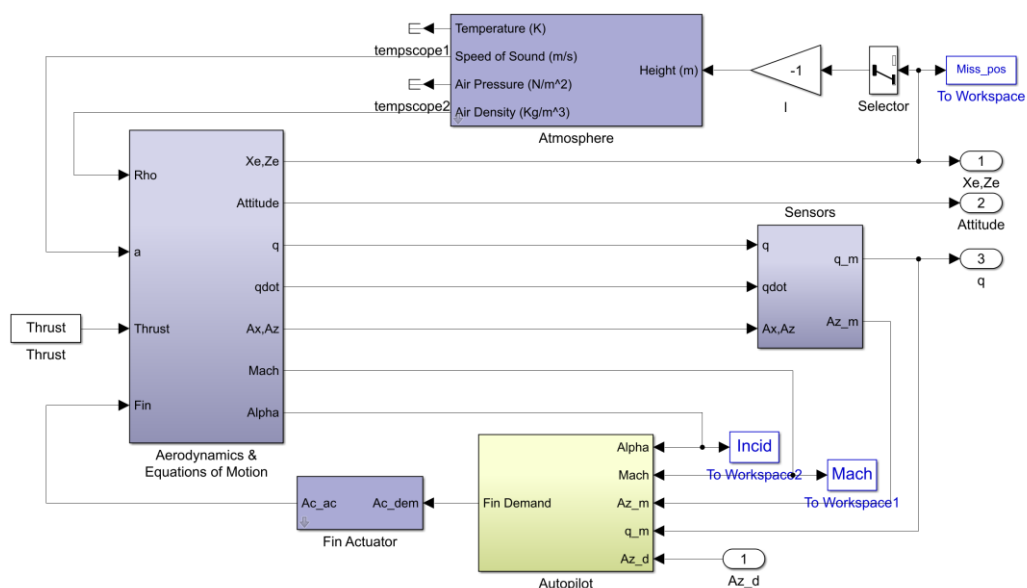


图2.4 Simulink 导弹模型

2.2.1 大气模型

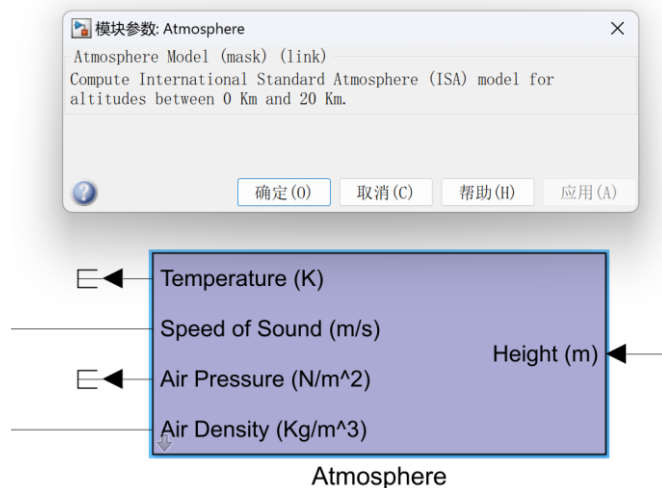


图2.5 大气模型

这里使用的 **Atmosphere** 子系统是国际标准大气的近似，包含两个独立区域。对流层区域位于海平面到 11 千米高度之间，在此区域，假设随着高度的增加，温度呈线性下降。对流层上方是平流层的下部区域，位于 11 千米到 20 千米高度之间。在此区域，假定温度保持不变。

对 **Atmosphere** 子系统给定高度，可以获得温度、声速、大气压力、大气密度的信息，按照如下公式进行计算：

$$T = T_0 - Lh$$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{(g/LR)-1}$$

$$P = P_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{(g/LR)}$$

$$a = \sqrt{\gamma RT}$$

其中， T_0 表示海平面绝对温度[K]， ρ_0 表示海平面大气密度[Kg/m³]， P_0 表示海平面大气静压[N/m²]， h 表示海拔高度[m]， T 表示温度， ρ 表示大气密度， P 表示大气静压， a 表示声速， L 表示气温直减率[K/m]， R 表示特征气体常数(characteristic gas constant)[J/Kg/K]， g 表示重力加速度[m/s²]。

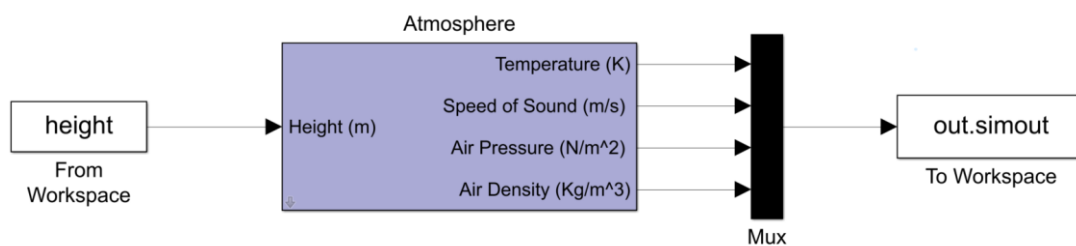


图2.6 Atmosphere 测试模块

通过搭建如图所示的测试模块，我们可以获得温度、声速、大气压力、大气密度随高度变化的信息，绘制如下。

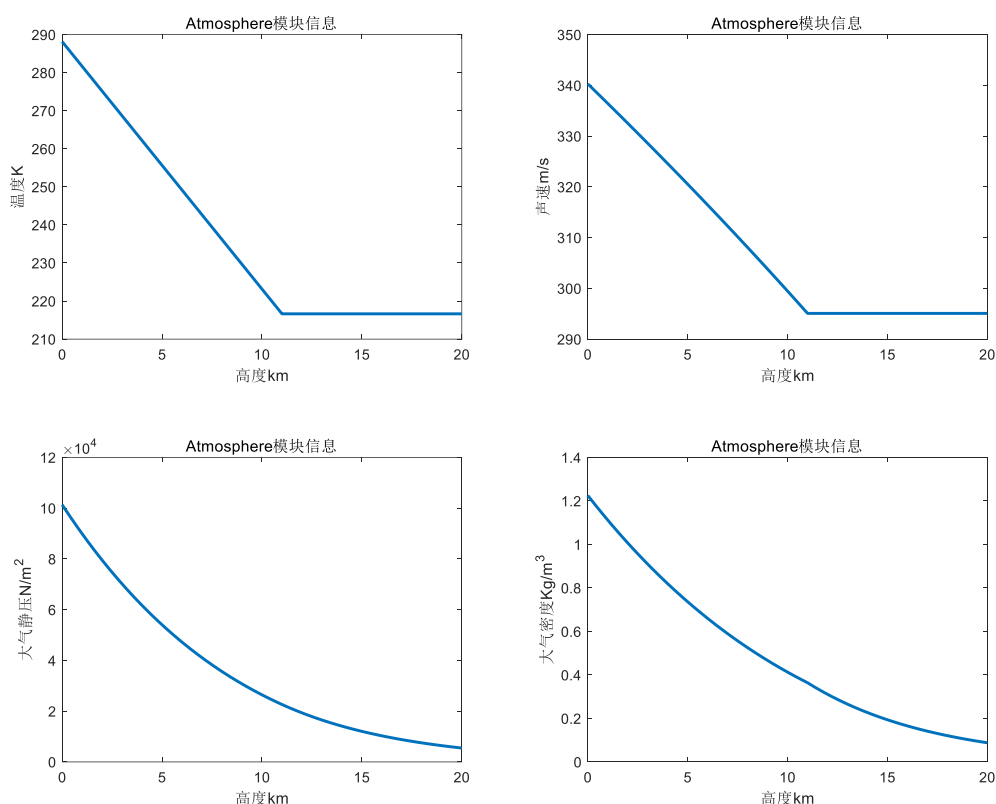


图2.7 Atmosphere 模块信息

2.2.2 动力学和运动学

参考文献[1]、[2]和[3]中都提到了该模型，本实验报告对导弹的动力学方程表述，主要参照文献[1]。

$$\dot{\alpha} = f_1(\alpha, q, \delta, M) = \frac{\cos(\alpha)^2}{mu} F_z(\alpha, \delta, M) + q$$

$$\dot{q} = f_2(\alpha, q, \delta, M) = \frac{M_y}{I_y}(\alpha, \delta, M)$$

其中： α 为攻角[rad]， q 为俯仰角速率[rad/s]。

$$F_z = C_n(\alpha, \delta, M) 0.7 p_0 M^2 S \text{ [lbs]}$$

$$M_y = C_m(\alpha, \delta, M) 0.7 p_0 M^2 S d \text{ [lbs]}$$

δ 为尾舵偏角[rad]， $p_0 = 973.3 \text{ [lb/ft}^2\text{]}$ 为 20000ft 处大气静压， $S = 0.44 \text{ [ft}^2\text{]}$ 为参考面积， $d = 0.75 \text{ [ft]}$ 为直径， $m = 13.98 \text{ [slugs]}$ 为导弹质量， $u = V \cos(\alpha) \text{ [ft/s]}$ 为导弹中心线速度， $V = Mss$ 为用马赫数表示的速度， $M = 2 \sim 4$ 为导弹马赫数， $ss = 1036.4 \text{ [ft/s}^2\text{]}$ 为 20000ft 处的声速， $I_y = 182.5 \text{ [slug}\cdot\text{ft}^2\text{]}$ 为俯仰轴转动惯量， $g = 32.2 \text{ [ft/m}^2\text{]}$ 为重力加速度， n_z 为法向加速度[g]。

$$C_n(\alpha, \delta, M) = a_n \alpha^3 + b_n \alpha^2 + c_n \left(2 + \frac{M}{3}\right) \alpha + d_n \delta$$

$$C_m(\alpha, \delta, M) = a_m \alpha^3 + b_m \alpha^2 - c_m \left(7 - \frac{8M}{3}\right) \alpha + d_m \delta$$

用来逼近非线性气动系数的多项式系数为：

$$\begin{aligned} a_n &= +0.000103 \text{ deg}^{-3} & a_m &= +0.000215 \text{ deg}^{-3} \\ b_n &= -0.009450 \text{ deg}^{-2} & b_m &= -0.019500 \text{ deg}^{-2} \\ c_n &= -0.169600 \text{ deg}^{-1} & c_m &= +0.051000 \text{ deg}^{-1} \\ d_n &= -0.034000 \text{ deg}^{-1} & d_m &= -0.206000 \text{ deg}^{-1} \end{aligned}$$

由于导弹典型机动的攻角处在-20 度到+20 度，所以对攻角变化率的表达式进行化简：

$$\dot{\alpha} = \frac{F_z(\alpha, \delta, M)}{mV} + q$$

由以上方程，可以在 Simulink 中搭建出导弹的垂直通道空气动力学模型。

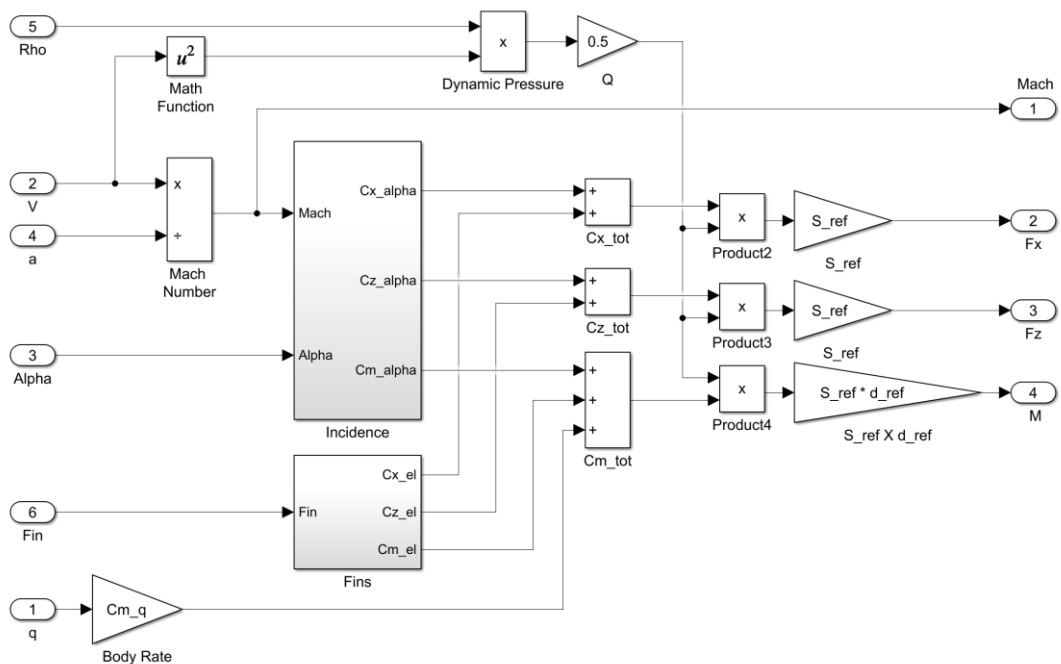


图2.8 导弹垂直通道空气动力学模型

空气动力学模型给出导弹受到的力和力矩信息，进一步通过坐标转换的运动学方程，得到陀螺仪和加速度计可测量的量。

2.2.3 自动驾驶仪

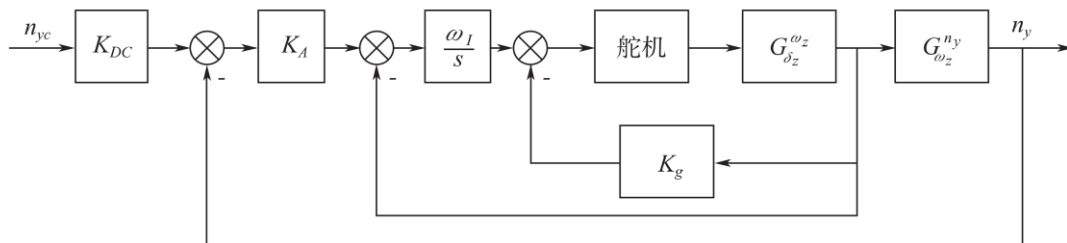


图2.9 经典三回路自动驾驶仪

导弹自动驾驶仪旨在控制导弹体的法向过载。本次实验中，自动驾驶仪的结构采用三回路设计，它使用位于重心前方的加速计的测量值，并使用一个速率陀螺仪以提供额外阻尼。控制器增益根据入射角和马赫数进行调度，并在 10000 英尺的高度进行调整以获得稳健的性能。使用传统方法设计自动驾驶仪时，必须根据大量配平飞行条件推导弹体俯仰动态的线性模型。MATLAB 可以确定配平条件，并直接从非线性 Simulink 模型中推导线性状态空间模型，从而既节省时间，又有助于验证所创建的模型。

自动驾驶仪的设计建立在大量线性弹体模型的基础上，这些模型根据整个预期飞行包线上的各种飞行条件推导而来。要在非线性模型中实现自动驾驶仪，需要将自动驾驶仪增益存储在二维查找表中，并结合抗饱和增益，以防止当弹翼指令超过最大限值时积分器饱和。当存在执行机构弹翼和速率限制等非线性、且增益随飞行条件变化而动态变化时，要获得令人满意的性能，最好的办法就是使用非线性 Simulink 模型测试自动驾驶仪。

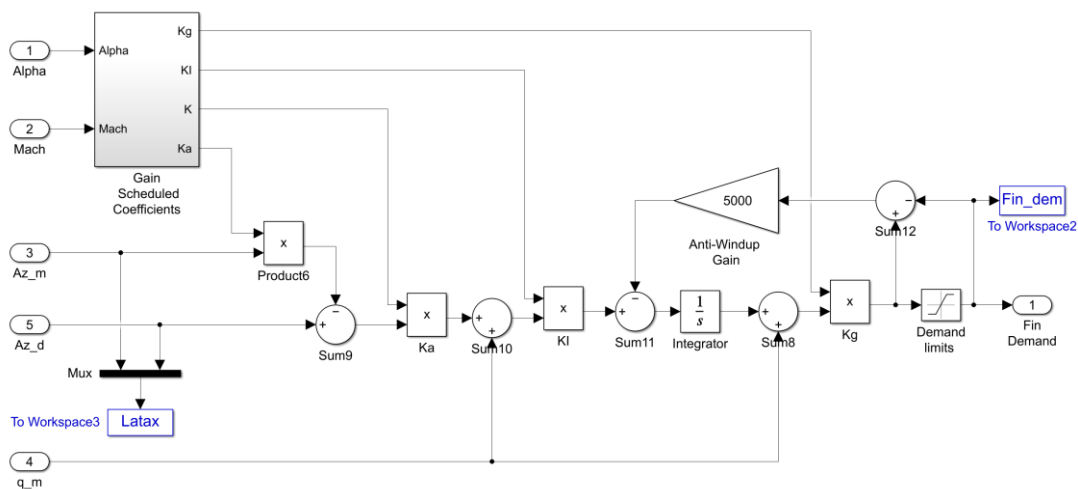


图2.10 Autopilot 模块

本例中使用的法向过载自动驾驶仪模块，实现了对不同的攻角和马赫数进行变系数，使用程序进行辅助设计，降低了难度和工作量，便于提升自动驾驶仪的性能。

2.3 导引头系统

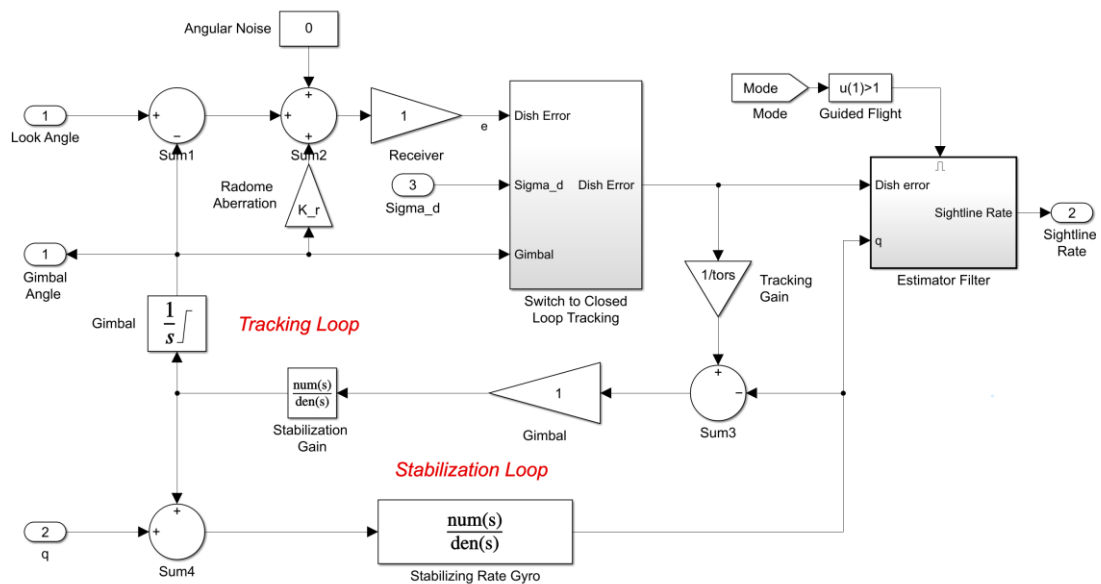


图2.11 某型导弹导引头

Seeker/Tracker 子系统用于驱动导引头万向节，使导引头碟形天线对准目标，并为导引律提供视线速率的估计值。跟踪器回路时间常量 $tors$ 设置为 0.05 秒，该值考虑了响应速度最大化，同时将噪声传输保持在可接受水平。稳定回路用于

补偿弹体滚转速率，增益 K_s （即回路交叉频率）则设置为在稳定速率陀螺仪带宽允许范围内的尽可能高的值。视线速率估计值是以下两个变化速率之和在滤波后的值：由稳定速率陀螺仪测量的碟形角变化速率，以及由接收器测量的角跟踪误差(e)变化速率。本实验中，估算器滤波器的带宽设置为自动驾驶仪带宽的一半。

图2.12 天线罩像差



在对天线罩像差进行修正后，导引头系统通过调整万向节的框架角，实现对目标的持续跟踪，给出目标捕获信号、视线角速率、弹目距离和弹目接近速度等信息，以供制导系统给出制导信号。

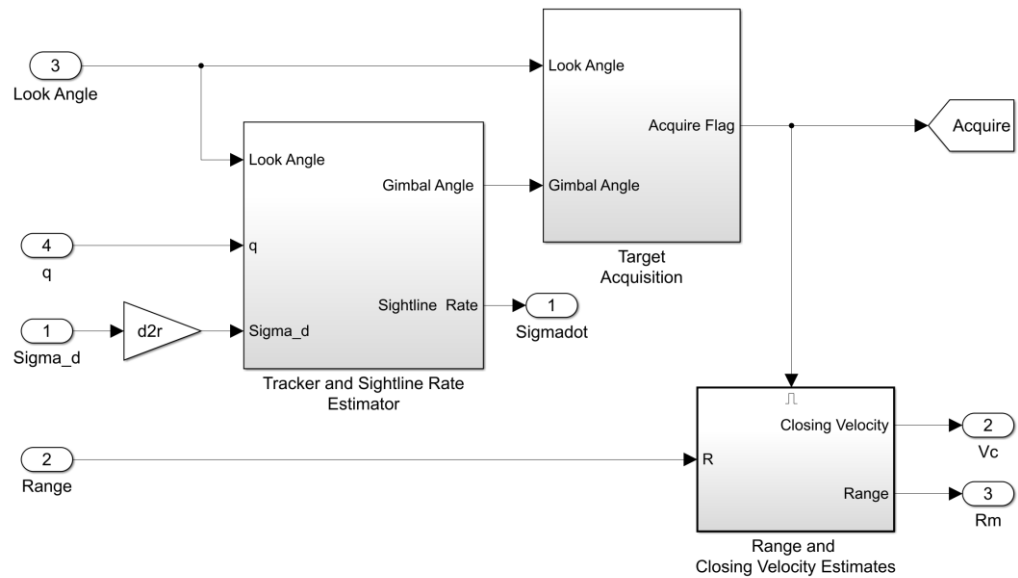


图2.14 导引头系统

2.4 制导系统

2.4.1 弹目相对位置关系

首先确定一个讨论问题的坐标系：

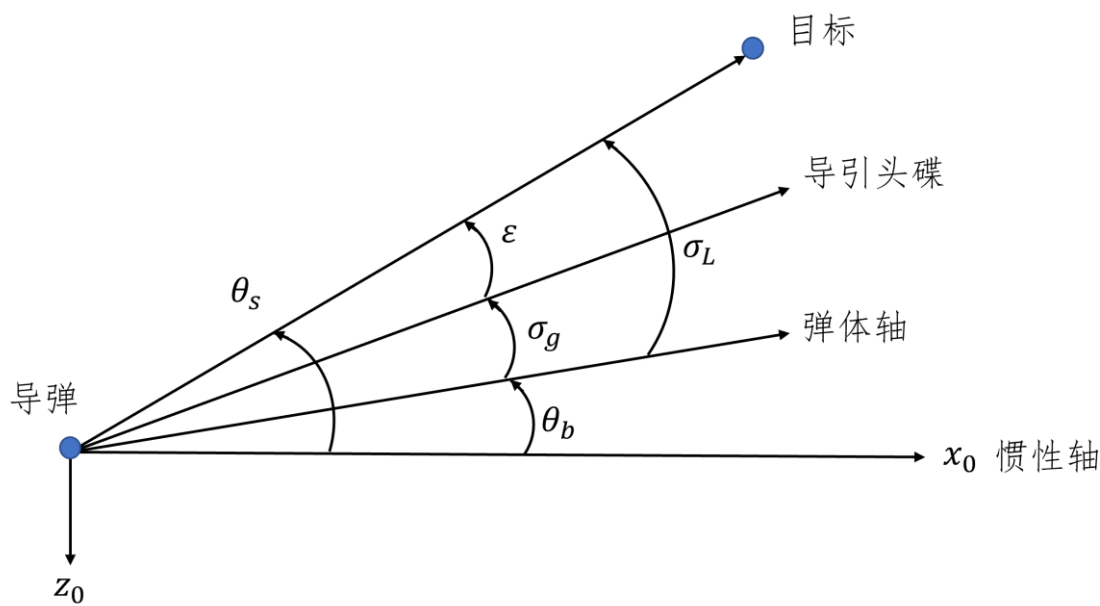


图2.15 弹目相对位置关系

在上图表示的弹目相对位置关系中，各角度的物理意义明确，在 Simulink 模型中， θ_b 用 Attitude 表示， σ_L 用 Look Angle 表示， σ_g 用 Gimbal Angle 表示， $\dot{\theta}_s$ 用 Sightline Rate 和 Sigmadot 表示。

2.4.2 制导计算机

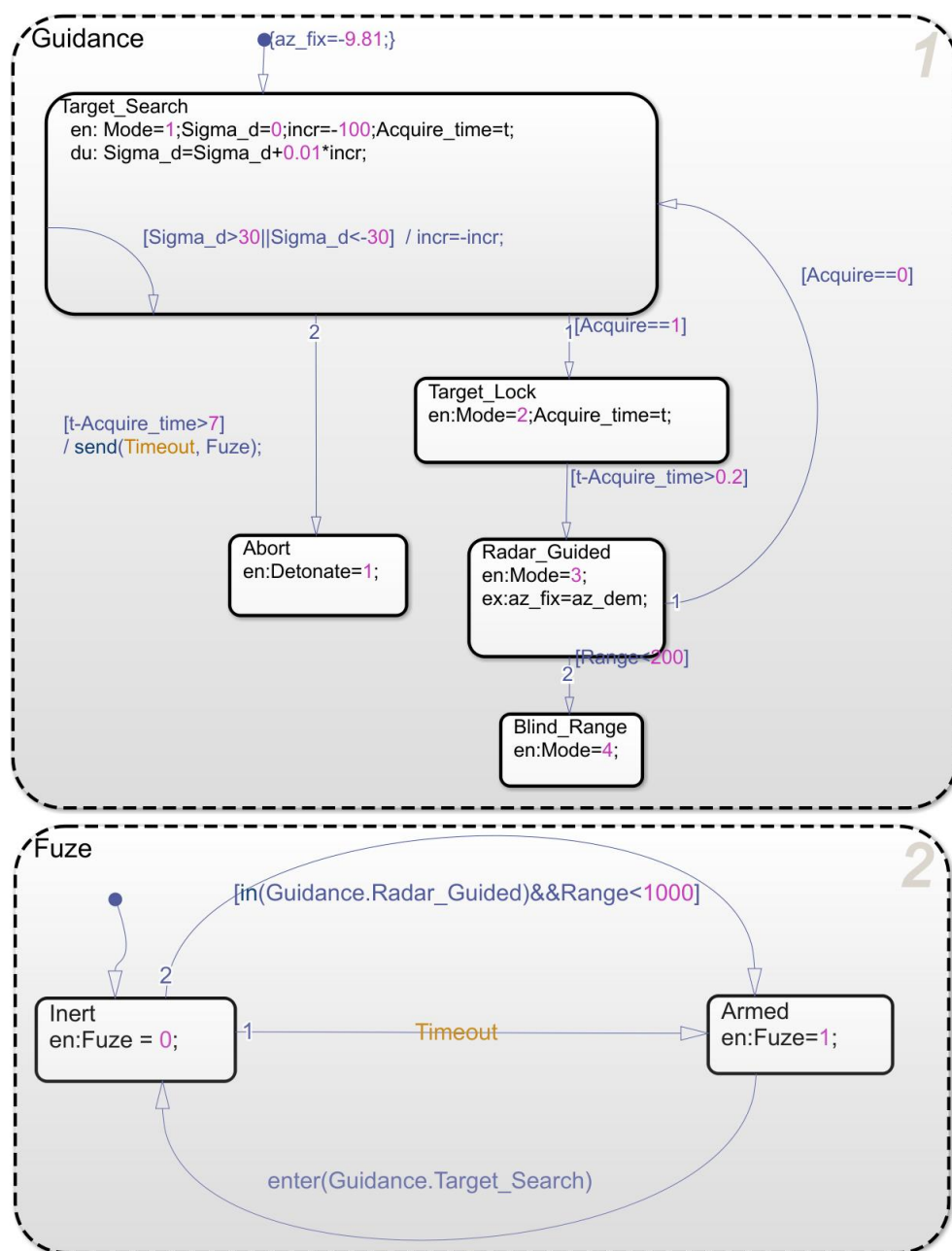


图2.16 制导计算机系统

Guidance 子系统的函数不仅用于在闭环跟踪过程中生成指令，还执行初始搜索以定位目标位置。此处使用一个 Stateflow 模型来控制这些不同操作模式之间的转换。模式之间的切换由在 Simulink 中或在 Stateflow 模型内部生成的事件触

发。通过更改传递给 Simulink 的变量模式的值来控制 Simulink 模型的行为方式。此变量用于在可生成的不同控制指令之间进行切换。在目标搜索过程中，Stateflow 模型通过将指令发送给导引头万向节(Sigma)来直接控制跟踪器。一旦目标落入导引头的波束宽度内(Acquire)，跟踪器将标记目标捕获，闭环制导将在一个很短的延迟后启动。Stateflow 是快速定义所有操作模式的理想工具，无论是正常操作还是异常情况。例如，此 Stateflow 图可提供在失去目标锁定或在目标搜索过程中未获得目标时要采取的操作。

该制导计算机系统使用 Stateflow 模型搭建，状态间的转移使用箭头表示，转移命令的书写格式为：“触发[条件]{条件动作}/{转换动作}”。制导 Guidance 状态有 4 个模式 Mode 和 5 个子状态，分别为目标搜索、目标锁定、雷达导引、盲区、任务中止；引信 Fuze 状态有 2 个子状态，分别为无效、武装。

该制导计算机系统的指令逻辑为：制导系统以 100Hz 的频率进行更新，默认进入目标搜索状态，执行导引头线性转动搜索目标的程序，并在导引头万向节框架角大于 30° 或小于 -30° 时反向转动，实现在空间中对目标的探测；若探测时间大于 7s，则进入任务中止状态，此时可能出现了误发射或者导弹故障的情况，为了减小更大的损失，导弹自毁；若导引头给出目标捕获成功的信号，则进入目标锁定状态，0.2s 后进入雷达导引状态，此时制导律开始给出法向过载指令信号；若此时丢失目标，则导弹重新进入目标搜索状态；若在制导律作用下，导弹接近目标，在距离小于 200m 时，进入盲区状态。

引信 Fuze 的状态配合制导系统的状态而发生改变：引信保险默认为关闭状态，当进入任务中止状态时，引信开启，立即执行导弹自毁程序；当处于雷达导引状态且弹目相对距离小于 1000m 时，引信开启，为摧毁目标做准备；若探测系统丢失目标重新进入目标搜索状态，则为了安全起见，引信保险关闭。

2.4.3 引战系统

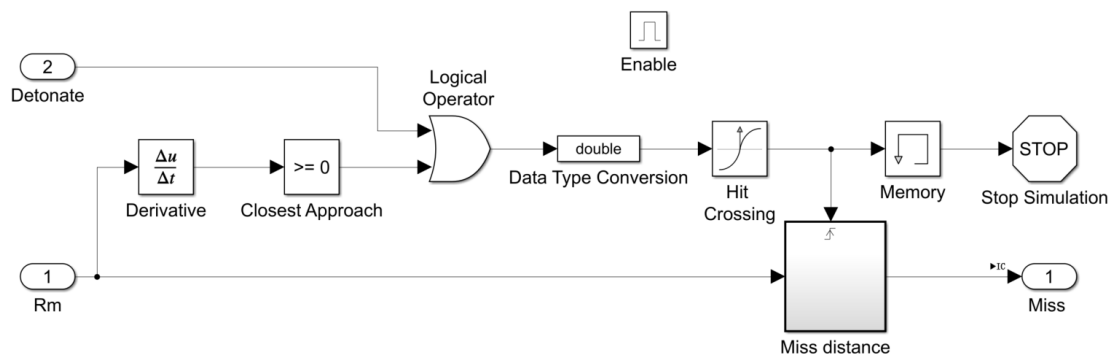


图2.17 引战系统 Simulink 模型

如果从弹道导弹的制导阶段来看，空空导弹的引战系统其实相当于末制导，其在提升打击精度和打击效果的方面，具有非常重要的作用，引战制导一体化和定向引战系统的发展，其实对引战系统的设计提出了更高的要求。

在本实验中，当引信保险开启时，引战系统开始工作，若自毁信号 **Detonate** 激活，则导弹立即自爆，否则根据导引头提供的弹目相对位置信息，检测弹目相距最近时，将导弹引爆。

2.5 比例导引实验

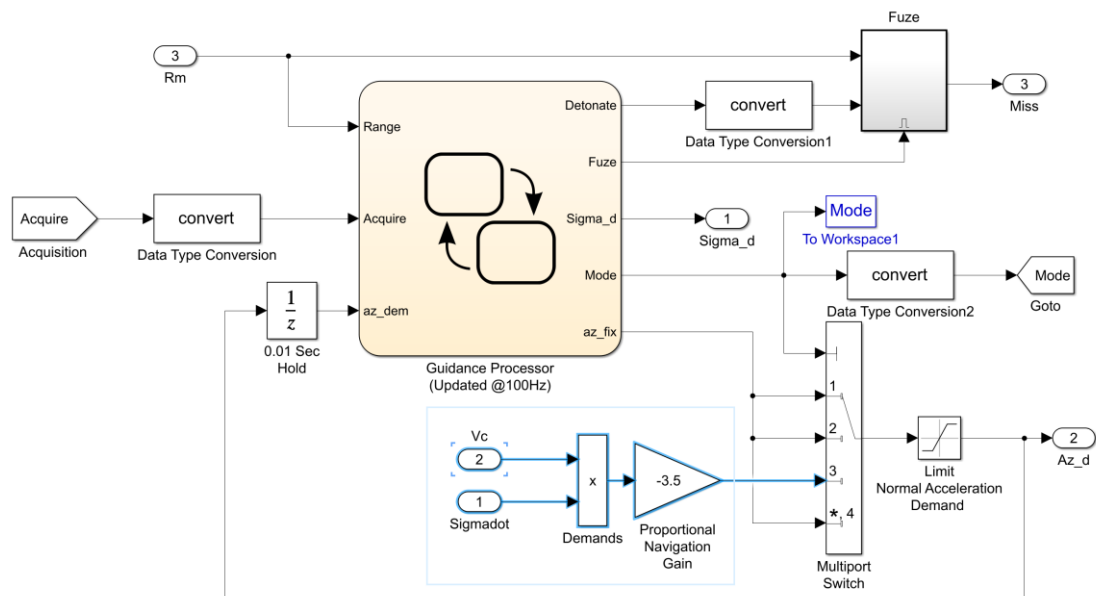


图2.18 比例导引

当我们对仿真实验进行分析讨论之后，制导律在其中发挥的作用就变得十分清晰了。当制导系统处于雷达导引状态时，给出法向过载指令，引导导弹飞向目标并摧毁，完成制导任务。

$$a_{z-dem} = \lambda V_c \dot{\theta}_s$$

一旦导引头获得目标，将使用比例导引(PNG)律对导弹进行制导，直到命中目标。这种形式的导引律自 20 世纪 50 年代以来就用于制导导弹，并可应用于雷达、红外或电视制导导弹。导引律要求测量导弹和目标之间的接近速度（对于雷达制导导弹来说，这可以使用多普勒跟踪设备获得），并且需要估计惯量视线角的变化率。

当采用比例系数 λ 为-3.5 时，可以得到如下结果：

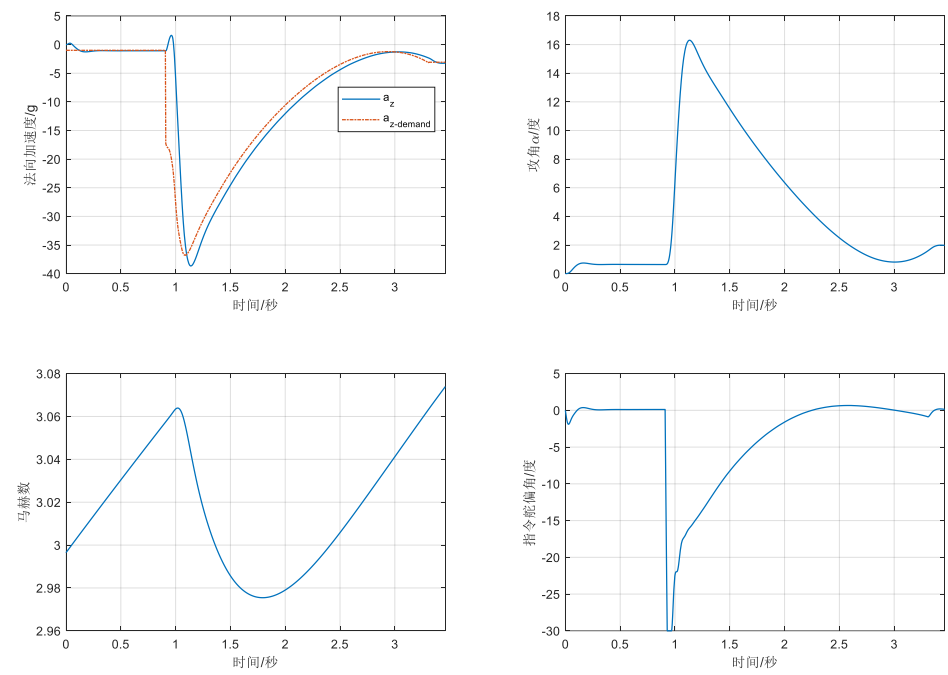


图2.19 飞行过程数据

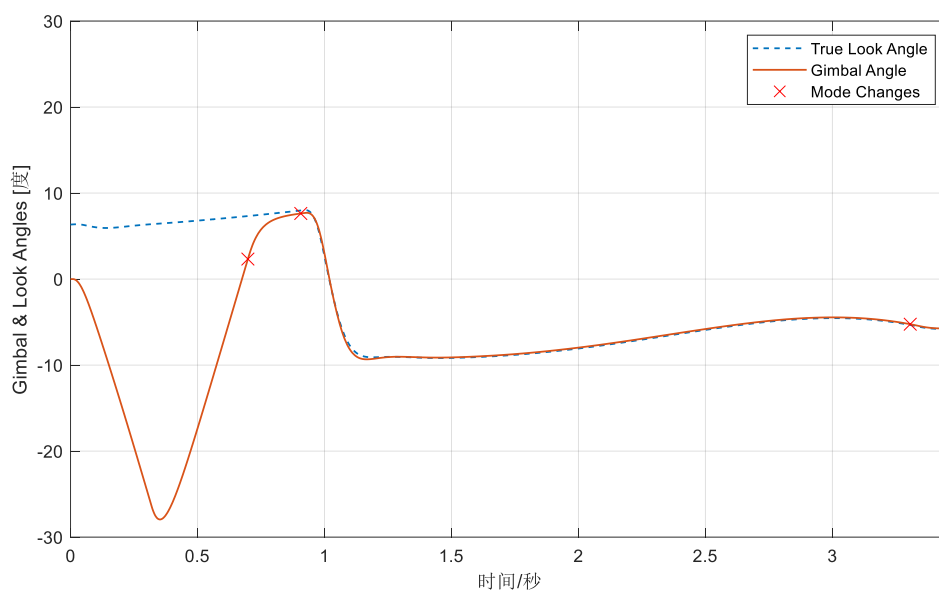


图2.20 导引头角度关系

为了和 Simulink 模型中的角度名称对应，使得其物理意义更明确，此处采用了英文命名方式。

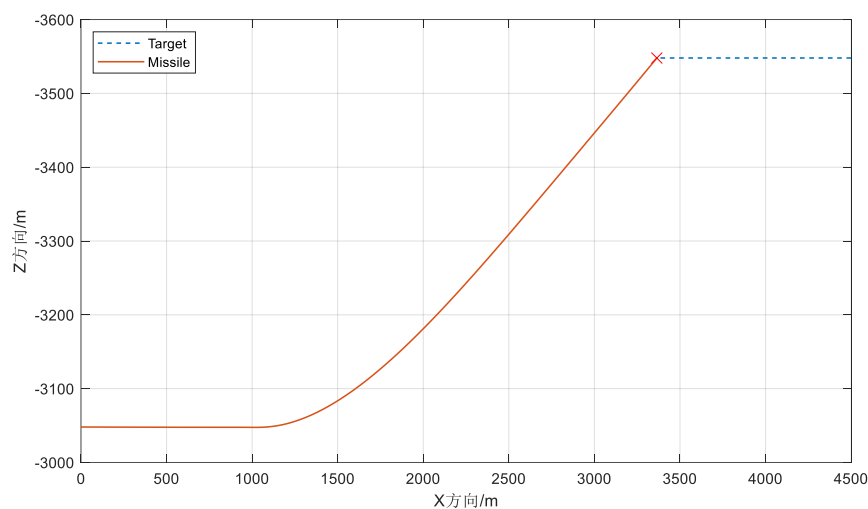


图2.21 导弹和目标相对位置信息

由于 Z 轴的正方向是指向下的，因此图中保留了 Z 方向数据的负号。

本次实验采用比例导引为制导律，导弹爆炸时距离目标仅 0.2682 米，目标处在导弹杀伤半径中，实验表明，比例导引作为一种简单实用的制导律，在仿真任务中具有较好的拦截效果和较高的拦截精度。

2.6 基于一般趋近律的滑模制导律

设计制导律首先要规定一个问题空间，文献[5]中对末制导拦截模型的表述较为清晰，但其基于二次型性能指标最小化建立滑模面的做法不可行，为了便于表述，本实验设计的制导律称为 NSMC: Normal Slide Mode Control。

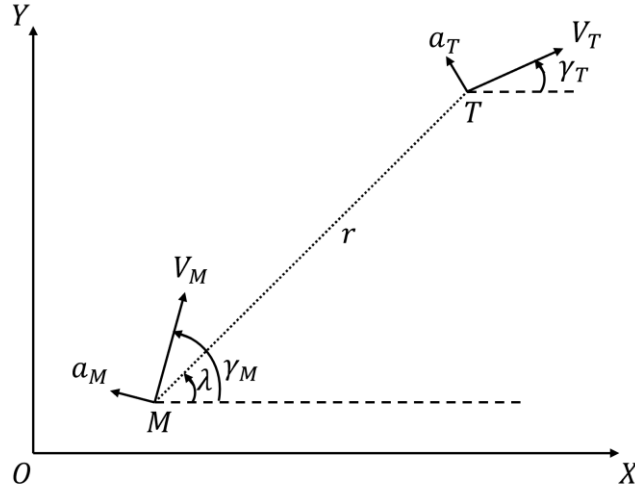


图2.22 SMC 弹目相对位置关系

对图中涉及到的物理量，有如下运动学方程：

$$\begin{aligned}\dot{r} &= V_T \cos(\gamma_T - \lambda) - V_M \cos(\gamma_M - \lambda) \\ \dot{\lambda} &= \frac{1}{r} [V_T \sin(\gamma_T - \lambda) - V_M \sin(\gamma_M - \lambda)] \\ \dot{\gamma}_M &= \frac{a_M}{V_M} \\ \dot{\gamma}_T &= \frac{a_T}{V_T}\end{aligned}$$

对上式求导，得到：

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= r\dot{\lambda}^2 + a_T \sin(\lambda - \gamma_T) - a_M \sin(\lambda - \gamma_M) \\ \ddot{\lambda} &= -\frac{2\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \frac{a_T \cos(\lambda - \gamma_T)}{r} - \frac{a_M \cos(\lambda - \gamma_M)}{r}\end{aligned}$$

在本实验中导弹采用常值推力，因此我们选取视线角速率为被控量，设计制导律。

取滑模面：

$$s = \dot{\lambda}$$

则有：

$$\dot{s} = -\frac{2\dot{r}\dot{\lambda}}{r} + \frac{a_T \cos(\lambda - \gamma_T)}{r} - \frac{a_M \cos(\lambda - \gamma_M)}{r}$$

考虑如下一般形式趋近律：

$$\dot{s} = -k \cdot \text{sign}(s) \quad (k > 0)$$

易构造 Lyapunov 函数证明其稳定性，本实验中制导系统的控制量 u 为 a_M ，目标匀速直线运动 $a_T = 0$ ，上式中 $(\lambda - \gamma_T)$ 在 Simulink 模型中对应的值为 Look Angle，因此化简可得：

$$a_M = \frac{1}{\cos(\lambda - \gamma_T)} \left[-2\dot{r}\dot{\lambda} + kr \cdot \text{sign}(s) \right]$$

实验中我们发现由于弹目相对距离 r 变化较大，若 k 为常数，则距离过远时指令加速度过大，距离接近时指令失效，我们令 k 为时变项，对 kr 进行耦合设计，得到了较好的制导效果，导弹爆炸时距离目标仅 0.063 米，Simulink 模型和实验结果如下：

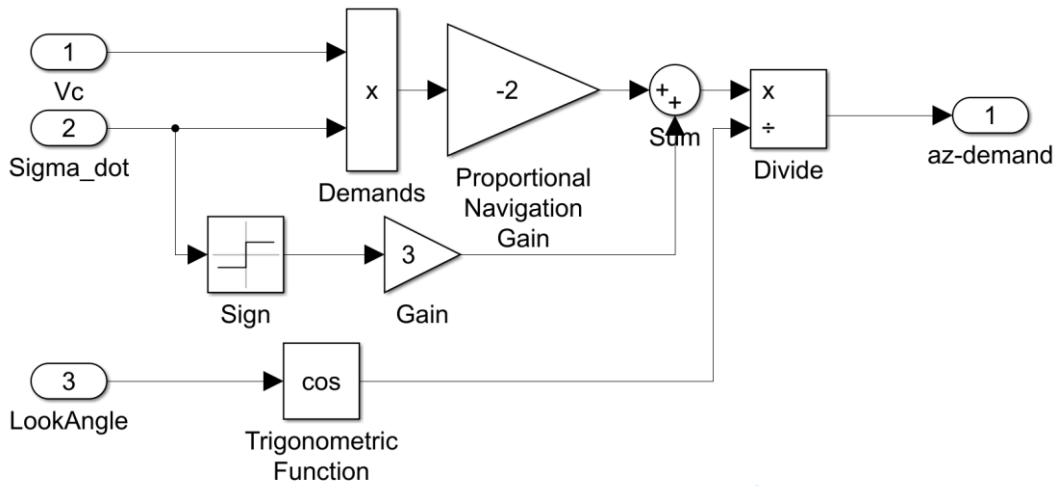


图2.23 NSMC 制导律设计

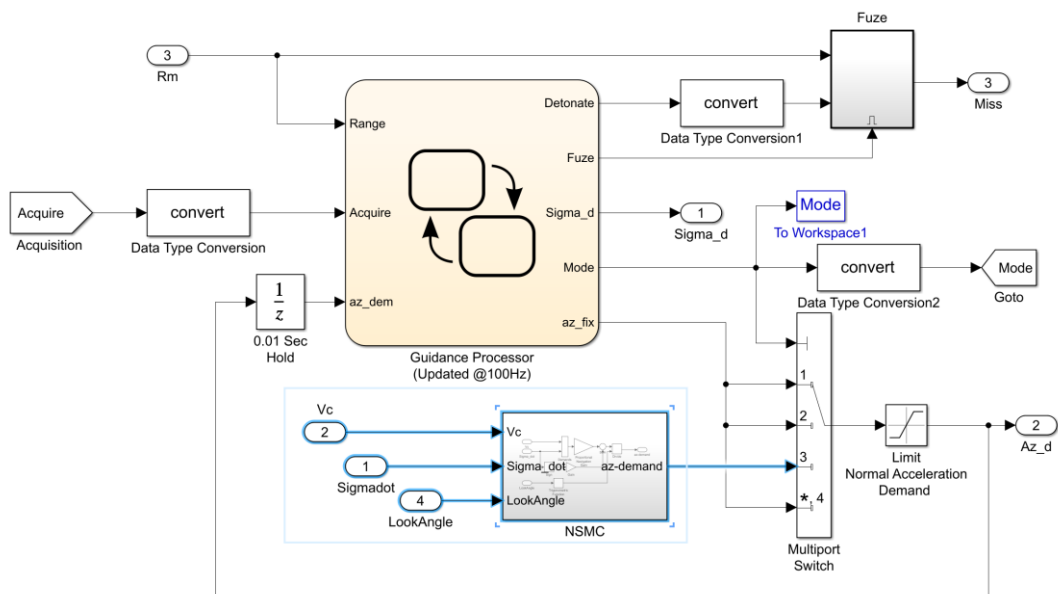


图2.24 制导律在 Guidance 模块中的位置

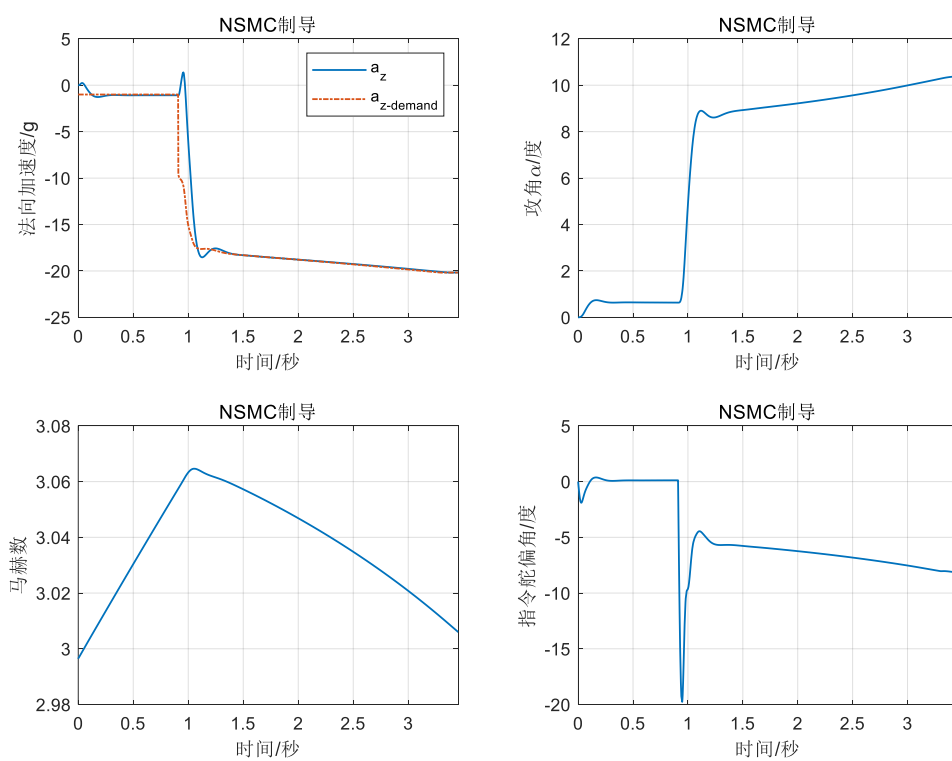


图2.25 NSMC 飞行过程数据

和 PNG 相比，指令舵偏角更小，法向加速度的跟踪精度更高，但攻角并不趋于零，整体来看 NSMC 比 PNG 调节速度更平缓。

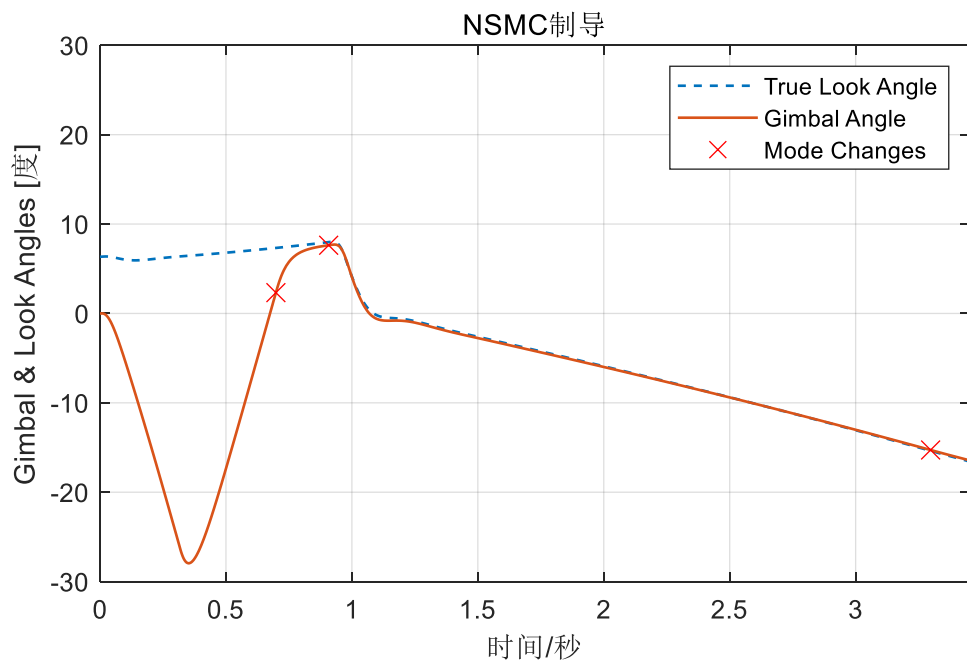


图2.26 NSMC 导引头角度关系

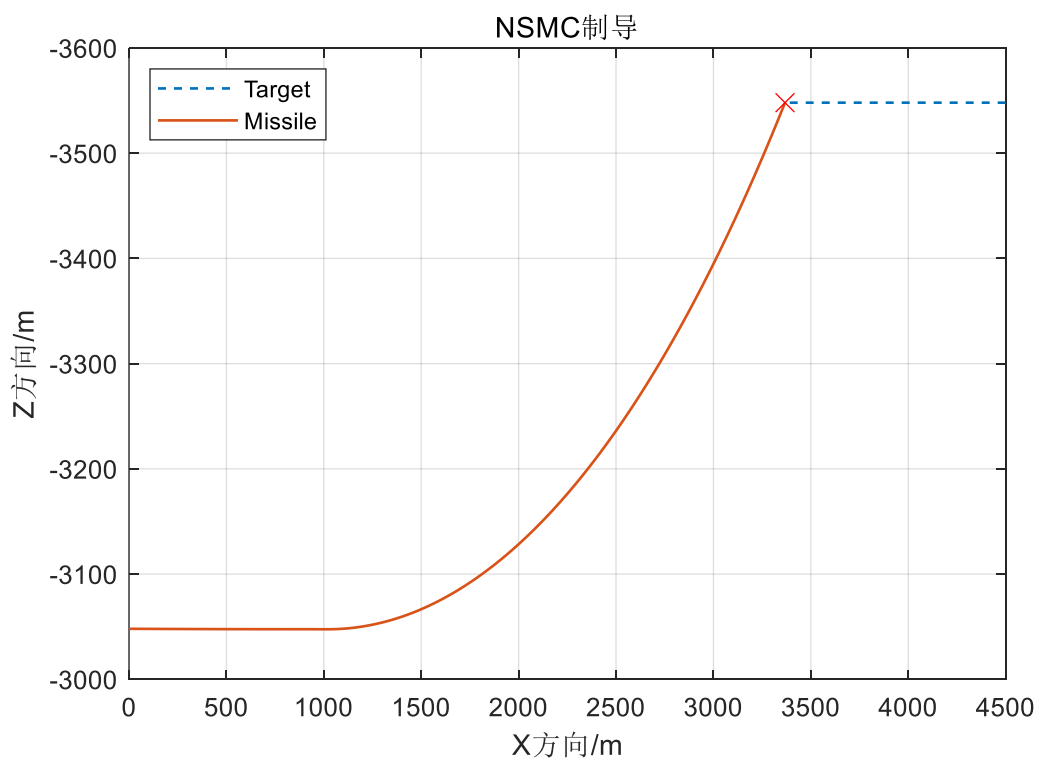


图2.27 NSMC 导弹和目标相对位置信息

2.7 随机滑模变结构制导律

传统比例导引律对无机动目标拦截时表现出较好的性能，但实际拦截中，控制系统受到不确定因素和随机因素的影响，基于随机滑模变结构的设计可以使导弹的制导控制量具有一定的鲁棒性，且其理论推导出的形式对比例导引导航系数

的设计，具有一定的指导意义，为了便于表述，本实验设计的制导律称为 RSMC：
Random Slide Mode Control。

对 5.6 节推导的弹目相对运动方程进行一定的变形，得到：

$$\ddot{q} = -2\frac{\dot{R}}{R}\dot{q} - \frac{1}{R}a_m + \frac{1}{R}a_t$$

考虑到系统参数不确定性和状态噪声的影响，得到系统的状态方程和系统观测方程：

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A + \Delta A)x + Bu + Df + \xi \\ y &= Cx + \zeta\end{aligned}$$

其中， $x = \dot{q}$ 为系统状态， $u = a_m$ 为系统控制量， $f = \hat{a}_t$ 为对目标加速度的估计值， ΔA 为不确定参数， ξ 为系统噪声， ζ 为观测噪声。

由最小误差协方差鲁棒滤波算法，设计时变不确定线性系统的鲁棒滤波器，状态估计方程设计为：

$$\dot{\hat{x}} = (A + \Delta \hat{A})\hat{x} + Bu + Df + K(y - C\hat{x})$$

应用随机最优制导理论求最优制导律，定义伪控制量：

$$\bar{u} = u_{opt} - \hat{a}_t$$

滤波之后不显示写出系统的不确定部分，则状态方程为：

$$\dot{x} = Ax + B\bar{u} + \xi$$

定义代价函数：

$$J = E \left[cx(t_f)^2 + \int_0^{t_f} r(t)\bar{u}^2(t)dt \right]$$

其中， c 、 $r(t)$ 为加权系数， c 充分大时可以保证导弹击中目标时刻视线角速度为 0。

根据最优控制算法，当取：

$$\bar{u}(t) = -r^{-1}(t)B(t)\bar{P}(t)\hat{x}$$

既保证了导弹命中率，又使追击过程中控制量最小。其中， $\bar{P}(t)$ 满足以下的 Riccati 等式：

$$\dot{\bar{P}}(t) + 2A(t)\bar{P}(t) - r^{-1}(t)B^2(t)\bar{P}^2(t) = 0$$

终端条件为：

$$\bar{P}(t_f) = c(t) \rightarrow \infty$$

求解过程中用到逆变换：

$$w(t) = \bar{P}^{-1}(t)$$

考虑 $\dot{R}(t) < 0$ ，选择 $r(t) = \frac{1}{\dot{R}(t)}$ ，解出最优控制量：

$$\bar{u} = N(t)\hat{x} = \frac{3R^3(t)\dot{R}(t)}{R^3(t_f) - R^3(t)}\hat{x}$$

当导弹击中目标时，相对距离为 0 是理想的终端条件，设定 $R(t_f) = 0$ ，则在估计目标加速度的条件下最优控制量为：

$$u_{opt} = -3\dot{R}(t)\dot{\hat{x}} + \dot{a}_t$$

对比 PNG 时我们采用的导引律：

$$a_{z-dem} = \lambda V_c \dot{\theta}_s$$

发现当导航系数 λ 取-3 时，PNG 其实具有最优控制的形式，但由于实验中没有估计目标的加速度，所以适当增大导航系数以提升导弹应对机动目标的拦截能力。

取滑模面：

$$s = \hat{x} = \dot{q}$$

考虑如下一般形式趋近律：

$$\dot{s} = -k \cdot \text{sign}(s) \quad (k > 0)$$

本实验中制导系统的控制量 u 为 a_M ，目标匀速直线运动 $a_T = 0$ ，式中 $(\lambda - \gamma_T)$ 在 Simulink 模型中对应的值为 Look Angle，因此化简可得：

$$u_{opt} = a_M = \frac{1}{\cos(\lambda - \gamma_T)} \left[-3\dot{r}\dot{\lambda} + k \cdot \text{sign}(s) \right]$$

仿真实验中我们发现采用弹目视线角速率 Sigmadot 代替其滤波估计值 \hat{x} ，对实验结果影响有限，因为我们没有对系统主动添加随机噪声，只存在可以忽略

的计算误差，当设置 $k = 50$ 时，导弹爆炸距离目标仅 0.7675 米，Simulink 模型和实验结果如下：

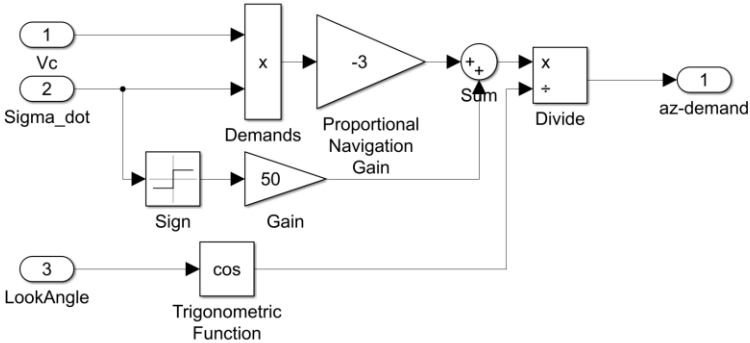


图2.28 RSMC 制导律设计

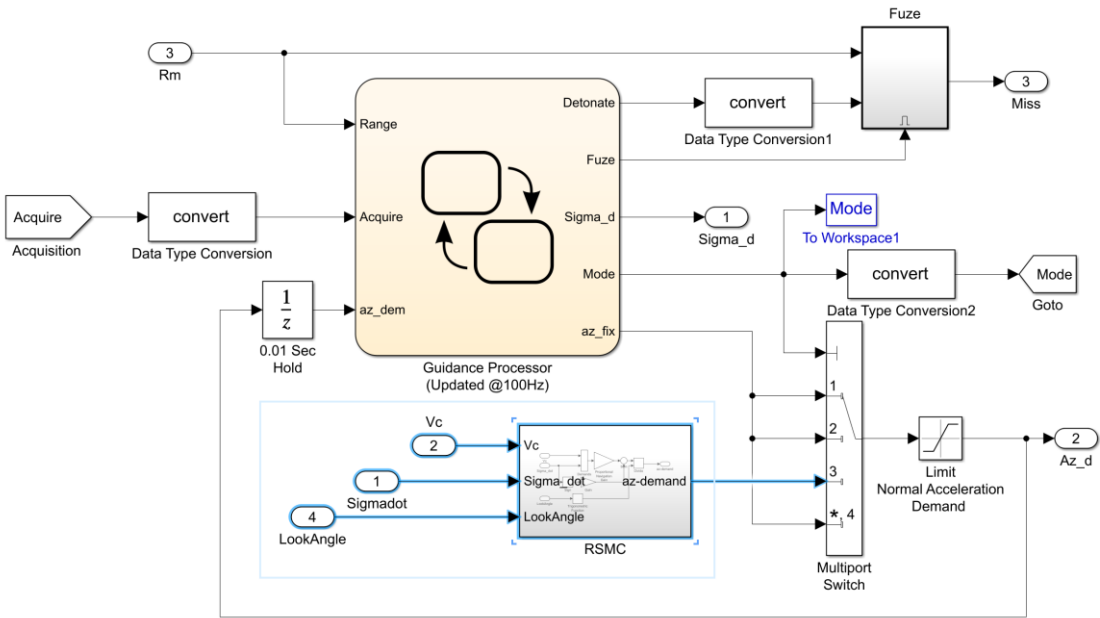


图2.29 制导律在 Guidance 模块中的位置

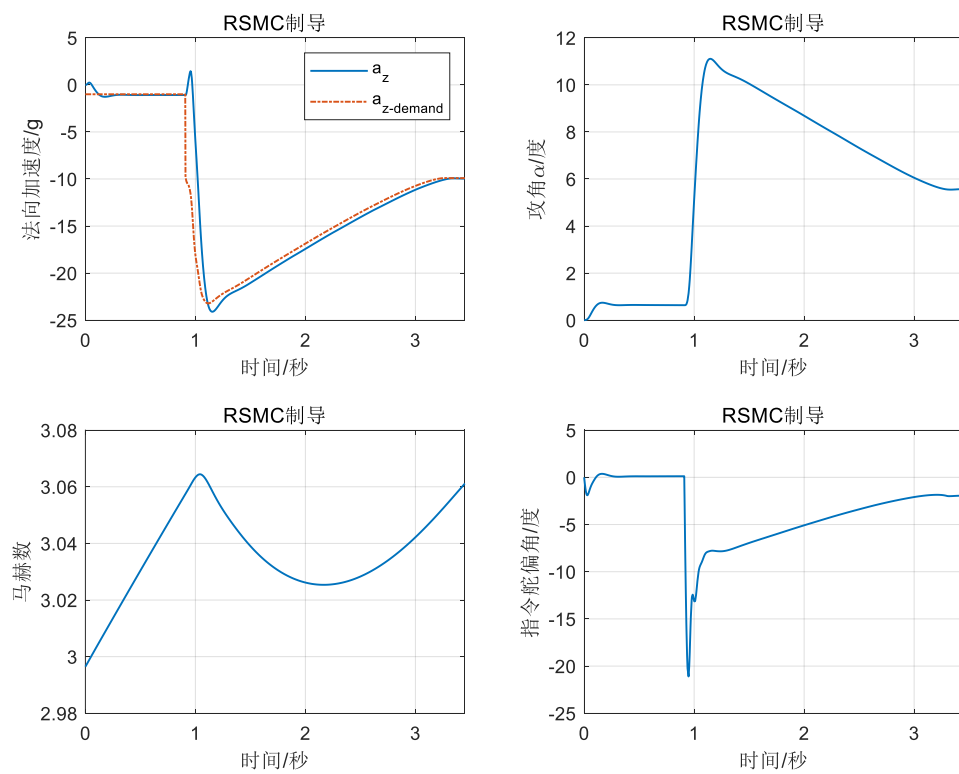


图2.30 RSMC 飞行过程数据

和 NSMC 相比，RSMC 调节速度更快，更早对准目标。

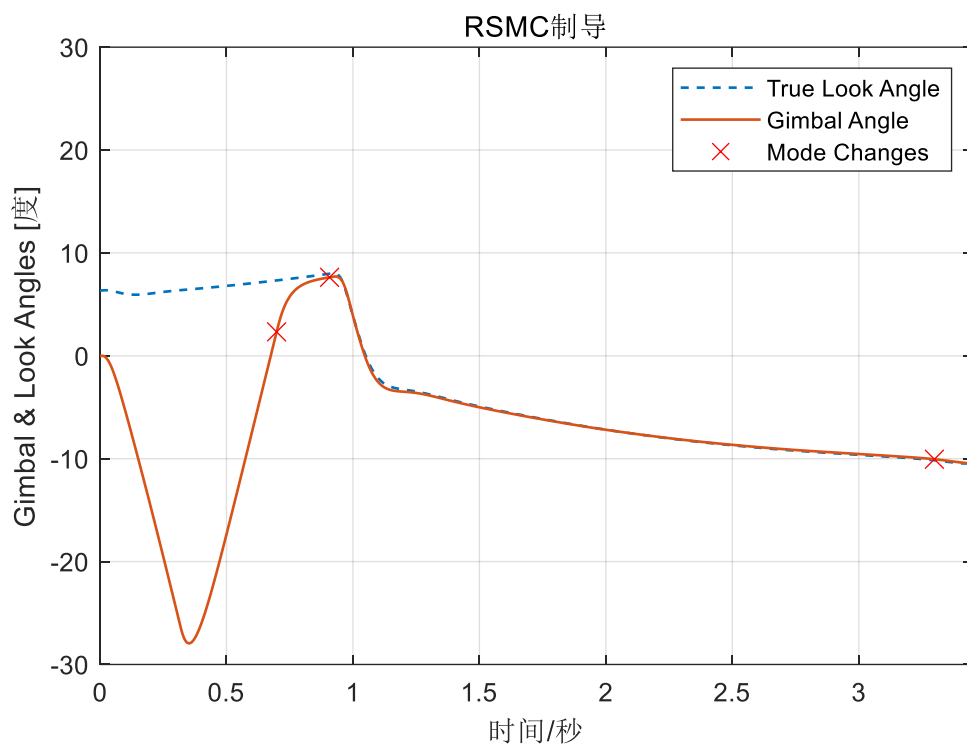


图2.31 RSMC 导引头角度关系

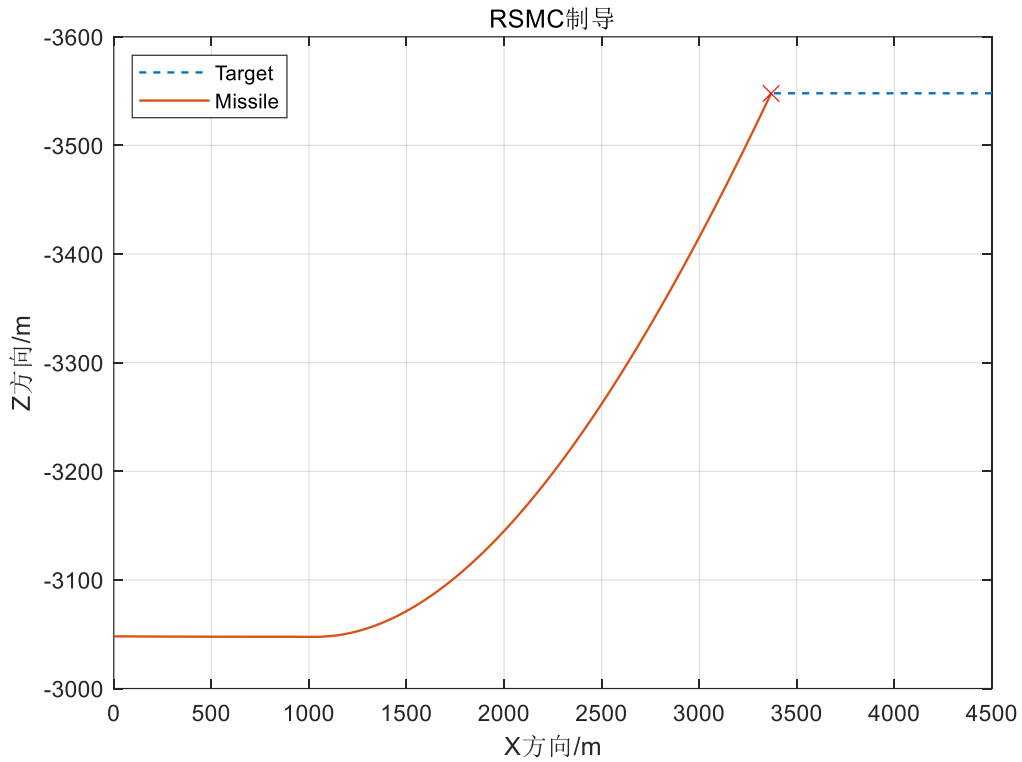


图2.32 RSMC 导弹和目标相对位置信息

2.8 导弹拦截 H_∞ 制导律

首先简单介绍非线性 H_∞ 控制理论的基本知识。考察非线性系统：

$$\dot{x} = f(x) + g(x)w \quad z = h(x)$$

其中， $x \in R^n$ 是状态矢量， $w \in R^p$ 是外界扰动， $z \in R^p$ 是输出量。

如果存在函数 $U: R^n \rightarrow R^+$ 且 $U(0) = 0$ ，满足：

$$\frac{1}{2V^2} \frac{\partial U}{\partial x} g(x) g^T(x) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^T + \frac{\partial U}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} h^T(x) h(x) \leq 0$$

那么系统增益 $L_2 \leq V$ ，即：

$$\int_0^\infty z^T z dt \leq V^2 \int_0^\infty w^T w dt$$

加入控制 u 后，系统变成：

$$\dot{x} = f(x) + g_1(x)w + g_2(x)u \quad z = h_1(x) + h_2(x)u$$

假设交叉项 $h_1^T h_2 = 0$ ，非线性 H_∞ 控制问题就是寻求 u ，使得闭环系统满足

$L_2 \leq V$ ，推理可得：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \left(\frac{1}{V^2} g_1(x) g_1^T(x) - g_2(x) g_2^T(x) \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^T + \frac{\partial U}{\partial x} f(x) + \\ & \frac{1}{2} h_1^T(x) h_1(x) + \frac{1}{2} \left(u^T + \frac{\partial U}{\partial x} g_2(x) \right) \left(u^T + \frac{\partial U}{\partial x} g_2(x) \right)^T \leq 0 \end{aligned}$$

使上式左端最小的控制为：

$$u(x) = -g_2^T(x) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^T$$

回代化简，可以得到 Hamilton-Jacobi 偏微分不等式：

$$\frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \left(\frac{1}{V^2} g_1(x) g_1^T(x) - g_2(x) g_2^T(x) \right) \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^T + \frac{\partial U}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} h_1^T(x) h_1(x) \leq 0$$

因此， H_∞ 控制问题转化为寻找上述的 $U(x)$ ，若 $U(x)$ 是 HJPD1 的解，那么

$U(x)$ 是上述系统的 Lyapunov 函数， $\dot{U}(x) \leq 0$ ，系统 Lyapunov 稳定，状态有界且

性能有界： $\|z\|_2 \leq V \|w\|_2$ 。

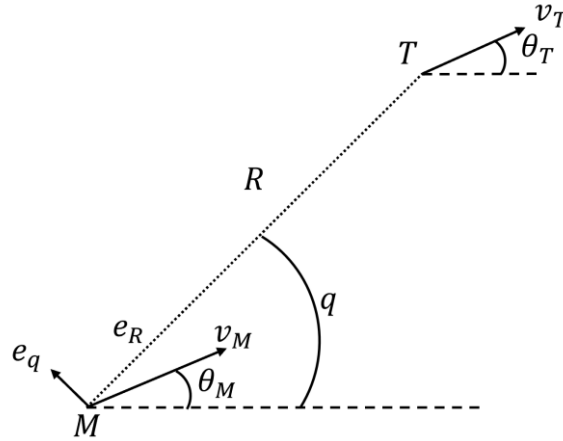


图2.33 H_∞ 弹目相对位置关系

仿照之前实验的建模过程，我们可以得到弹目相对运动关系如下：

$$\begin{aligned} \dot{R} &= v_T \cos(q - \theta_T) - v_M \cos(q - \theta_M) \\ R\dot{q} &= -v_T \sin(q - \theta_T) + v_M \sin(q - \theta_M) \end{aligned}$$

仍基于视线角速率设计制导律：

$$\ddot{q} = -\frac{2\dot{R}}{R}\dot{q} - \frac{1}{R}u_q + w_q$$

其中：

$$u_q = v_M \dot{\theta}_M \cos(q - \theta_M) - \dot{v}_M \sin(q - \theta_M)$$

为导弹法向过载，作为系统控制量。

$$w_q = \frac{1}{R} \left[v_T \dot{\theta}_T \cos(q - \theta_T) - \dot{v}_T \sin(q - \theta_T) \right]$$

看作外部扰动项。

由于目标的加速度是未知的，但是其加速能力是有限的，因此假设：

$$\int_{t_0}^{t_f} w_q^T w_q dt < \infty$$

所谓的 H_∞ 鲁棒制导律。就是对于给定的增益比系数 γ ，存在导弹控制量，

使得在任意的初始位置，对于外部扰动 w_q ，

$$\int_{t_0}^{t_f} z_q^T z_q dt \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{t_f} w_q^T w_q dt$$

成立。其中， z_q 为加权输出指标信号。为反映导弹飞行过程中的性能，输出指标信号选取 $z_q = h\dot{q}$ ，以保证飞行过程中视线角速度首目标机动影响较小，其中 h 为大于零的系数。

期望导弹在控制作用下有：

$$\ddot{q} = -\lambda\dot{q} \quad \lambda > 0$$

得到闭环系统状态为 $\dot{q}(t) = e^{-\lambda t} \dot{q}(t_0)$ ，因此设计控制量：

$$u_q = -2\dot{R}\dot{q} + \lambda R\dot{q}$$

选取 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} \dot{q}^2$$

对其进行微分得到

$$\dot{V} = \dot{q}\ddot{q} = \dot{q} \left(-\frac{2\dot{R}}{R}\dot{q} - \frac{1}{R}u_q + w_q \right)$$

将设计控制量回代得到

$$\dot{V} = \dot{q}(-\lambda\dot{q} + w_q) = -\lambda\dot{q}^2 + \dot{q}w_q$$

利用平方和不等式，得到

$$\dot{V} \leq -\lambda\dot{q}^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\dot{q}^2 + \frac{\gamma^2}{2}w_q^2 = \left(-\lambda + \frac{1}{2\gamma^2}\right)\dot{q}^2 + \frac{\gamma^2}{2}w_q^2$$

两侧积分，并补充条件，可得到

$$0 \leq V(t_f) - V(t_0) \leq \frac{\gamma^2}{2} \int_{t_0}^{t_f} w_q^2 dt - \left(\lambda - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \int_{t_0}^{t_f} \dot{q}^2 dt$$

移项化简

$$\frac{1}{h^2} \left(\lambda - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \int_{t_0}^{t_f} z_q^2 dt \leq \frac{\gamma^2}{2} \int_{t_0}^{t_f} w_q^2 dt$$

由上述 H_∞ 鲁棒制导律的设计思想，有 $\frac{2}{h^2} \left(\lambda - \frac{1}{2\gamma^2}\right) \leq 1$ ，即

$$\lambda \leq \frac{h^2}{2} + \frac{1}{2\gamma^2}$$

基于以上理论设计 H_∞ 制导律，写成适用于 Simulink 模型的变量

$$a_M = \frac{u_q}{\cos(\lambda - \gamma_T)} = \frac{1}{\cos(\lambda - \gamma_T)} \left[-2\dot{r}\dot{\lambda} + kr\dot{\theta}_s \right]$$

导弹爆炸距离目标仅 0.2181 米，Simulink 模型和实验结果如下：

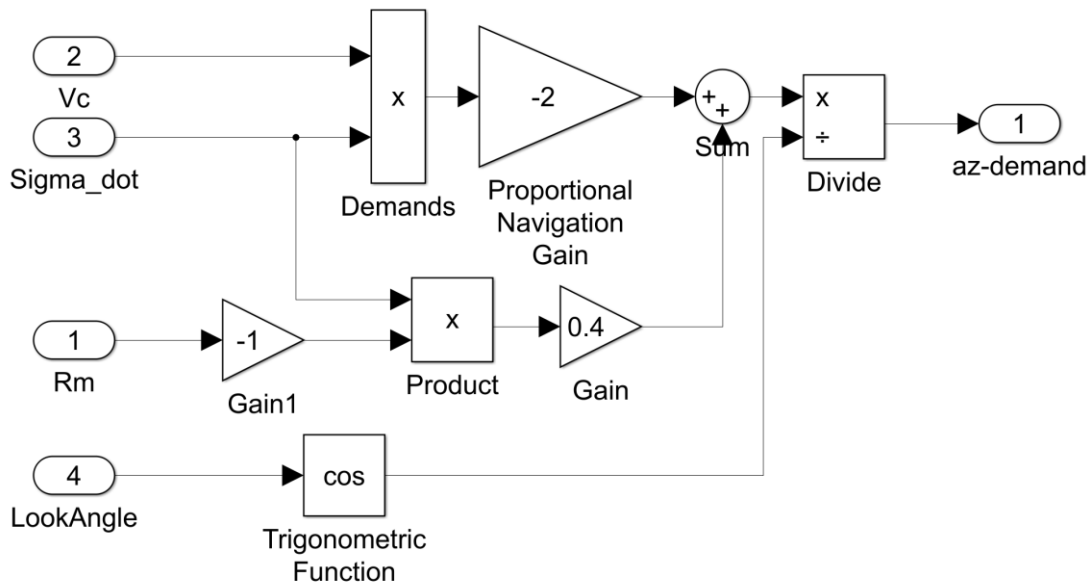


图2.34 H_{∞} 制导律设计

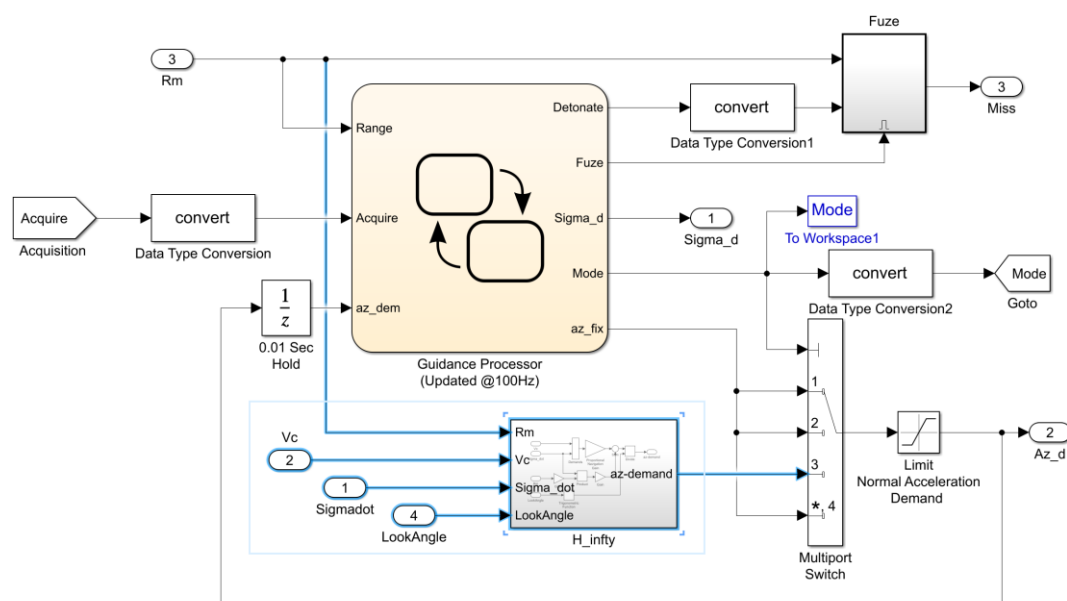


图2.35 制导律在 Guidance 模块中的位置

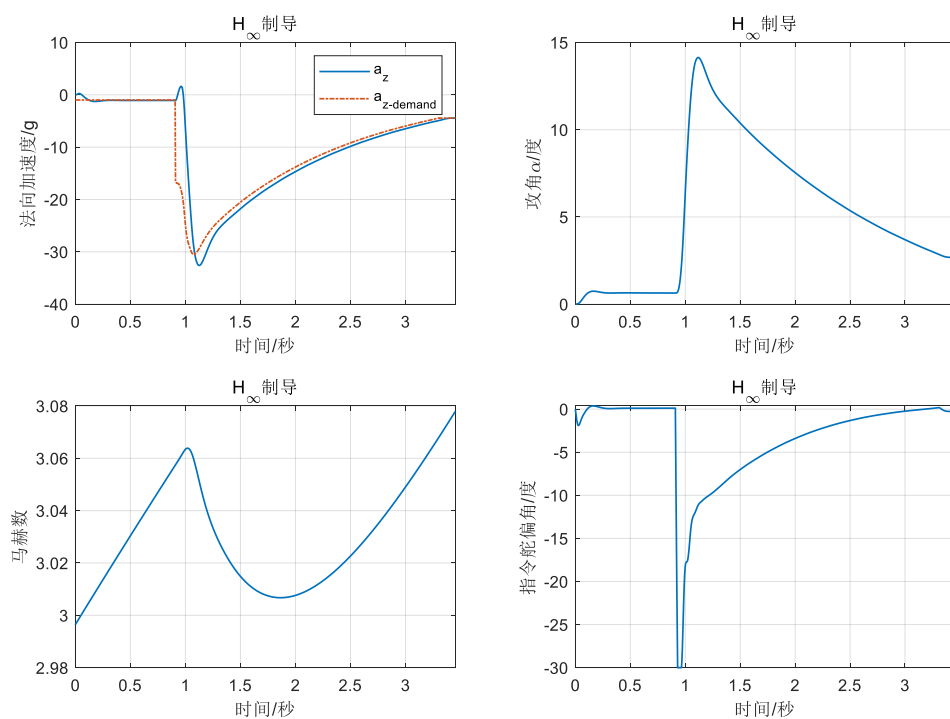


图2.36 H_{∞} 飞行过程数据

从飞行过程数据来看， H_{∞} 制导与 PNG 比较相近，但平均飞行马赫数更高，过载更小。

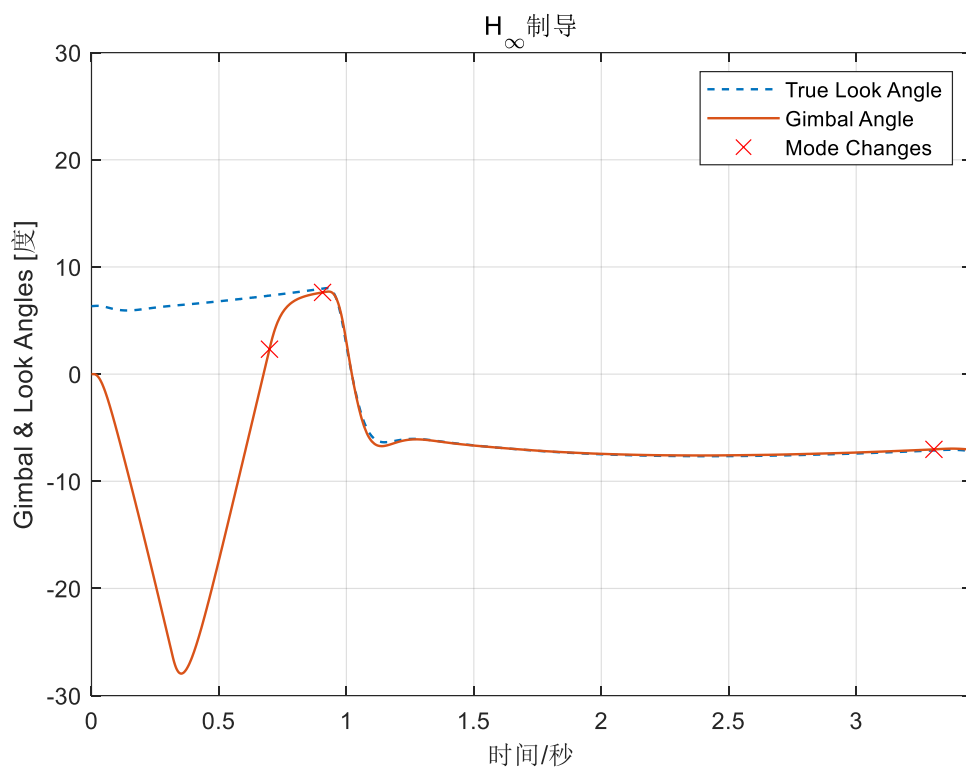


图2.37 H_{∞} 导引头角度关系

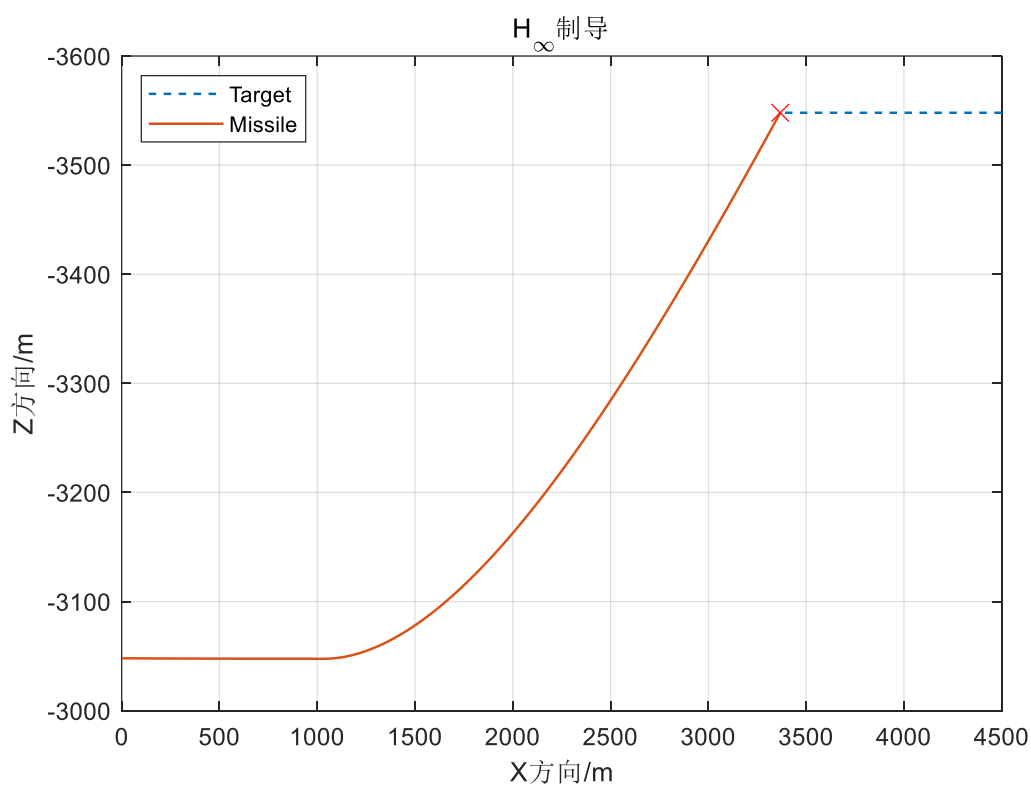


图2.38 H_{∞} 导弹和目标相对位置信息

参考文献

- [1]"Robust LPV control with bounded parameter rates", S.Bennani, D.M.C. Williams, C.W. Scherer, AIAA-97-3641, August 1997.
- [2]"Full Envelope Missile Longitudinal Autopilot Design using the State-Dependent Riccati Equation Method", C.P.Mracek and J.R. Cloutier, AIAA-97-3767, August 1997.
- [3]"Gain-Scheduled Missile Autopilot Design Using Linear Parameter Varying Transformations", J.S.Shamma, J.R. Cloutier, Journal of Guidance, Control and Dynamics, Vol. 16, No. 2, March-April 1993.
- [4]"Modern Navigation, Guidance, and Control Processing Volume 2", Ching-Fang Lin, ISBN 0-13-596230-7, Prentice Hall, 1991.
- [5]朱润人.简易防空制导火箭弹滑模制导律设计方法研究[D].中北大学,2022.DOI:10.27470/d.cnki.ghbgc.2022.000942.
- [6]方汪洋.导弹先进制导与控制理论[M].北京:国防工业出版社,2015.
- [7]樊会涛.空空导弹方案设计原理[M].北京:航空工业出版社,2013.
- [8]姜易阳.不同过载自动驾驶仪的对比研究[J].导航定位与授时,2016,3(01):40-46. DOI:10.19306/j.cnki.2095-8110.2016.01.009.
- [9]崔玺,戴娟,范存礼,苏中,刘洪,朱翠.地空导弹的新型非奇异终端滑模导引律[J].电光与控制,2021,28(01):37-40+70.
- [10]张阳,李富贵,王新民.三回路过载自动驾驶仪鲁棒性分析[J].航天控制,2017,35(06):26-31+37.DOI:10.16804/j.cnki.issn1006-3242.2017.06.005.
- [11]纪毅,王伟,张宏岩,范军芳,豆登辉,裴培.面向高机动目标拦截任务的空空导弹制导方法综述[J/OL].航空兵器:1-10[2022-11-23].<https://kns-cnki-net.e2.buaa.edu.cn/kcms/detail/41.1228.TJ.20220629.1618.001.html>
- [12]任恩泽,曾庆华,叶宵宇.巡飞弹末制导技术研究综述[C]//第十届中国指挥控制大会论文集(上册).,2022:119-128.DOI:10.26914/c.cnkihy.2022.019472.