期权定价实验

February 2023

1 变量代换

我们首先进行变量代换，令$\tau = t - T$，$x = \ln S$，则原方程可以变为：

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0$$

边界条件变为：$u(x = 0, \tau) = 0$，$u(x = x_{\max}, \tau) = e^{x_{\max}} - K$。

终止条件变为：$u(x, \tau = 0) = g(x) = \max(x - K, 0)$。

2 构建网格

我们在计算区域 $[0, x] \times [-T, 0]$ 上划分标准网格，记空间方向上步长 $h = \Delta x = \frac{S}{(N+1)}$，时间方向上步长 $\tau = \Delta t = \frac{T}{M}$。在空间方向上我们已知两个边界的值，而时间方向仅有一个边界条件，因此空间方向比时间方向多离散一个网格，保证最终要求解的网格点数为 $M \times N$。

此外，我们使用记号$u_{i,j} \approx u(x_i, t_j) = u(i\Delta x, j\Delta t) = u(ih, j\tau)$，作为数值逼近的解。其中 $i = 0, ..., N+1$，$j = 0, ..., M$。需要计算的网格点为 $i = 1, ..., N$，$j = 1, ..., M$。

3 离散方式

3.1 空间方向上的离散

空间方向采用二阶精度的中心差分

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j)=\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

作为 Black-Scholes 偏微分方程在空间方向上导数的近似。这样就得到半离散方程

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+(\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}-ru_{i,j}=0$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+(\frac{h+2}{4h^2}\sigma^2-\frac{r}{2h})u_{i-1,j}-(r+\frac{\sigma^2}{h^2})u_{i,j}+(\frac{2-h}{4h^2}\sigma^2+\frac{r}{2h})u_{i+1,j}=0$$

为了表示方便，我们令

$$\begin{cases} a=\frac{h+2}{4h^2}\sigma^2-\frac{r}{2h}, \\ b=-(r+\frac{\sigma^2}{h^2}), \\ c=\frac{2-h}{4h^2}\sigma^2+\frac{r}{2h}. \end{cases}$$

记$\bar{u_j}=(u_{1,j},u_{2,j},...,u_{N,j})^T$，当指标$i$取遍$1,2,...,N$时，得到半离散方程组

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+B\bar{u_j}+z=0,$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} b & c & & & \\ a & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & a & b \end{pmatrix},\bar{u_j}=\begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \\ u_{N,j} \end{pmatrix},z=\begin{pmatrix} au_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ cu_{N+1,j} \end{pmatrix},$$

3.2 空间方向上的离散

下面我们讨论半离散方程在时间方向上的离散。

我们考虑显式欧拉格式，隐式欧拉格式和 Crank-Nicolson 格式。