

期权定价实验

February 2023

1 变量代换

我们首先进行变量代换，令 $\tau = t - T$ ， $x = \ln S$ ，则原方程可以变为：

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (r - \frac{1}{2}\sigma^2) \frac{\partial u}{\partial x} - ru = 0$$

边界条件变为： $u(x = 0, \tau) = 0$ ， $u(x = x_{\max}, \tau) = e^{x_{\max}} - K$ 。

终止条件变为： $u(x, \tau = 0) = g(x) = \max(e^x - K, 0)$ 。

2 构建网格

我们在计算区域 $[0, x] \times [-T, 0]$ 上划分标准网格，记空间方向上步长 $h = \Delta x = \frac{S}{(N+1)}$ ，时间方向上步长 $\tau = \Delta t = \frac{T}{M}$ 。在空间方向上我们已知两个边界的值，而时间方向仅有一个边界条件，因此空间方向比时间方向多离散一个网格，保证最终要求解的网格点数为 $M \times N$ 。

此外，我们使用记号 $u_{i,j} \approx u(x_i, t_j) = u(i\Delta x, j\Delta t) = u(ih, j\tau)$ ，作为数值逼近的解。其中 $i = 0, \dots, N+1$ ， $j = 0, \dots, M$ 。需要计算的网格点为 $i = 1, \dots, N$ ， $j = 1, \dots, M$ 。

3 离散方式

3.1 空间方向上的离散

空间方向采用二阶精度的中心差分

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

作为 Black-Scholes 偏微分方程在空间方向上导数的近似。这样就得到半离散方程

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(\frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} - ru_{i,j} = 0$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + \left(\frac{h+2}{4h^2}\sigma^2 - \frac{r}{2h}\right)u_{i-1,j} - \left(r + \frac{\sigma^2}{h^2}\right)u_{i,j} + \left(\frac{2-h}{4h^2}\sigma^2 + \frac{r}{2h}\right)u_{i+1,j} = 0$$

为了表示方便，我们令

$$\begin{cases} a = \frac{h+2}{4h^2}\sigma^2 - \frac{r}{2h}, \\ b = -\left(r + \frac{\sigma^2}{h^2}\right), \\ c = \frac{2-h}{4h^2}\sigma^2 + \frac{r}{2h}. \end{cases}$$

记 $\bar{u}_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j})^T$ ，当指标 i 取遍 $1, 2, \dots, N$ 时，得到半离散方程组

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + B\bar{u}_j + z = 0,$$

其中

$$B = \begin{pmatrix} b & c & & & \\ a & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & a & b \end{pmatrix}, \bar{u}_j = \begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \\ u_{N,j} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} au_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ cu_{N+1,j} \end{pmatrix},$$

3.2 时间方向上的离散

下面我们讨论半离散方程在时间方向上的离散。

我们考虑显式欧拉格式，隐式欧拉格式和 Crank-Nicolson 格式。

3.2.1 显式欧拉格式

在时间方向上的显式欧拉格式为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau}$$

代入半离散方程得到：

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau} + au_{i-1,j} + bu_{i,j} + cu_{i+1,j} &= 0 \\ \Rightarrow u_{i,j-1} &= \tau au_{i-1,j} + (1 + \tau b)u_{i,j} + \tau cu_{i+1,j} \end{aligned}$$

当指标 i 取遍 $1, \dots, N$ 时，得到线性方程组

$$\bar{u}_{j-1} = (I + \tau B)\bar{u}_j + z\tau,$$

其中 $\bar{u}_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j})^T$,

$$I + \tau B = \begin{pmatrix} 1 + \tau b & \tau c & & & \\ \tau a & 1 + \tau b & \tau c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \tau c \\ & & & \tau a & 1 + \tau b \end{pmatrix}, z\tau = \begin{pmatrix} \tau au_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau cu_{N+1,j} \end{pmatrix},$$

3.2.2 隐式欧拉格式

在时间方向上的隐式欧拉格式为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau}$$

代入半离散方程得到：

$$\begin{aligned} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + au_{i-1,j} + bu_{i,j} + cu_{i+1,j} &= 0 \\ \Rightarrow -\tau au_{i-1,j} + (1 - \tau b)u_{i,j} - \tau cu_{i+1,j} &= u_{i,j+1} \end{aligned}$$

当指标 i 取遍 $1, \dots, N$ 时, 得到线性方程组

$$(I - \tau B)\bar{u}_j = \bar{u}_{j+1} + z\tau,$$

其中 $\bar{u}_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, \dots, u_{N,j})^T$,

$$I - \tau B = \begin{pmatrix} 1 - \tau b & -\tau c & & & \\ -\tau a & 1 - \tau b & -\tau c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\tau c \\ & & & -\tau a & 1 - \tau b \end{pmatrix}, z\tau = \begin{pmatrix} \tau a u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau c u_{N+1,j} \end{pmatrix},$$

3.2.3 Crank-Nicolson 格式

在时间方向上采用中心差分格式, 可以看作是隐式和显式欧拉格式的平均。

将显式欧拉格式的半离散方程中下标 $j-1$ 改成 j , j 改成 $j+1$, 之后将新得到的方程同隐式欧拉格式的半离散方程相加, 得到

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + \frac{1}{2}[(au_{i-1,j} + bu_{i,j} + cu_{i+1,j}) + (au_{i-1,j+1} + bu_{i,j+1} + cu_{i+1,j+1})] = 0$$

同时得到线性方程组

$$(2I - \tau B)\bar{u}_j = (2I + \tau B)\bar{u}_{j+1} + 2z\tau$$

其中

$$2I + \tau B = \begin{pmatrix} 2 + \tau b & \tau c & & & \\ \tau a & 2 + \tau b & \tau c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \tau c \\ & & & \tau a & 2 + \tau b \end{pmatrix},$$

$$2I - \tau B = \begin{pmatrix} 2 - \tau b & -\tau c & & & \\ -\tau a & 2 - \tau b & -\tau c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\tau c \\ & & & -\tau a & 2 - \tau b \end{pmatrix}.$$