期权定价实验

February 2023

1 变量代换

已知 Black-Scholes 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 u}{\partial S^2}+rS\frac{\partial u}{\partial S}-ru=0$$

其中$(S,t)\in[0,S_{max}]\times[0,T]$,
欧式看涨期权满足条件：

$$\begin{cases} u(0,t)=0, \\ u(S_{max},t)=S_{max}-K, \\ u(S,T)=max(S-K,0). \end{cases}$$

我们首先进行变量代换，令$\tau=t-T$，$x=\ln S$，则原方程可以变为：

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{\partial u}{\partial x}-ru=0$$

边界条件变为：$u(x=0,\tau)=0$，$u(x=x_{\max},\tau)=e^{x_{\max}}-K$。
终止条件变为：$u(x,\tau=0)=g(x)=\max(e^x-K,0)$。

2 构建网格

我们在计算区域 $[0,x] \times [-T,0]$ 上划分标准网格，记空间方向上步长 $h = \Delta x = \frac{S}{(N+1)}$，时间方向上步长 $\tau = \Delta t = \frac{T}{M}$。在空间方向上我们已知两个边界的值，而时间方向仅有一个边界条件，因此空间方向比时间方向多离散一个网格，保证最终要求解的网格点数为 $N \times M$。

此外，我们使用记号$u_{i,j} \approx u(x_i,t_j) = u(i\Delta x, j\Delta t) = u(ih, j\tau)$，作为数值逼近的解。其中 $i = 0, ..., N+1$，$j = 0, ..., M$。需要计算的网格点为 $i = 1, ..., N$，$j = 1, ..., M$。

Images/1_grid.png

图 1: 标准网格

3 离散方式

3.1 空间方向上的离散

空间方向采用二阶精度的中心差分

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,t_j)=\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}$$

和

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i,t_j)=\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}$$

作为 Black-Scholes 偏微分方程在空间方向上导数的近似。这样就得到半离散方程

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+(\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)\frac{u_{i+1,j}-u_{i-1,j}}{2h}-ru_{i,j}=0$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+(\frac{h+2}{4h^2}\sigma^2-\frac{r}{2h})u_{i-1,j}-(r+\frac{\sigma^2}{h^2})u_{i,j}+(\frac{2-h}{4h^2}\sigma^2+\frac{r}{2h})u_{i+1,j}=0$$

为了表示方便，我们令

$$\begin{cases} a=\frac{h+2}{4h^2}\sigma^2-\frac{r}{2h}, \\ b=-(r+\frac{\sigma^2}{h^2}), \\ c=\frac{2-h}{4h^2}\sigma^2+\frac{r}{2h}. \end{cases}$$

记$\bar{u}_j=(u_{1,j},u_{2,j},...,u_{N,j})^T$，当指标$i$取遍$1,2,...,N$时，得到半离散方程组

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+B\bar{u}_j+z=0,$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} b & c & & & \\ a & b & c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ & & & a & b \end{pmatrix},\bar{u}_j=\begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{N-1,j} \\ u_{N,j} \end{pmatrix},z=\begin{pmatrix} au_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ cu_{N+1,j} \end{pmatrix},$$

3.2 时间方向上的离散

下面我们讨论半离散方程在时间方向上的离散。

我们考虑显式欧拉格式，隐式欧拉格式和 Crank-Nicolson 格式。

3.2.1 显式欧拉格式

在时间方向上的显式欧拉格式为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau}$$

代入半离散方程得到：

$$\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{\tau} + au_{i-1,j} + bu_{i,j} + cu_{i+1,j} = 0$$

$$\Rightarrow u_{i,j-1} = \tau au_{i-1,j} + (1 + \tau b)u_{i,j} + \tau cu_{i+1,j}$$

Images/2_ExpEu.png

图 2: 显式欧拉格式

当指标i取遍 $1, ..., N$ 时，得到线性方程组

$$\bar{u}_{j-1} = (I + \tau B)\bar{u}_j + z\tau,$$

其中$\bar{u}_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, ..., u_{N,j})^T$,

$$I + \tau B = \begin{pmatrix} 1+\tau b & \tau c & & & \\ \tau a & 1+\tau b & \tau c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \tau c \\ & & & \tau a & 1+\tau b \end{pmatrix}, z\tau = \begin{pmatrix} \tau a u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau c u_{N+1,j} \end{pmatrix},$$

3.2.2 隐式欧拉格式

在时间方向上的隐式欧拉格式为

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}(x_i, t_j) = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau}$$

代入半离散方程得到：

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + a u_{i-1,j} + b u_{i,j} + c u_{i+1,j} = 0$$

$$\Rightarrow -\tau a u_{i-1,j} + (1 - \tau b) u_{i,j} - \tau c u_{i+1,j} = u_{i,j+1}$$

Images/3_ImpEu.png

图 3: 隐式欧拉格式

当指标i取遍 $1, ..., N$ 时，得到线性方程组

$$(I - \tau B)\bar{u}_j = \bar{u}_{j+1} + z\tau,$$

其中$\bar{u}_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, ..., u_{N,j})^T$,

$$I - \tau B = \begin{pmatrix} 1-\tau b & -\tau c & & & \\ -\tau a & 1-\tau b & -\tau c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\tau c \\ & & & -\tau a & 1-\tau b \end{pmatrix}, z\tau = \begin{pmatrix} \tau a u_{0,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau c u_{N+1,j} \end{pmatrix},$$

3.2.3 Crank-Nicolson 格式

在时间方向上采用中心差分格式，可以看作隐式和显式格式的平均。

将显式欧拉格式的半离散方程中下标$j-1$改成j，j改成$j+1$，之后将新得到的方程同隐式欧拉格式的半离散方程相加，得到

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\tau} + \frac{1}{2}[(au_{i-1,j} + bu_{i,j} + cu_{i+1,j}) + (au_{i-1,j+1} + bu_{i,j+1} + cu_{i+1,j+1})] = 0$$

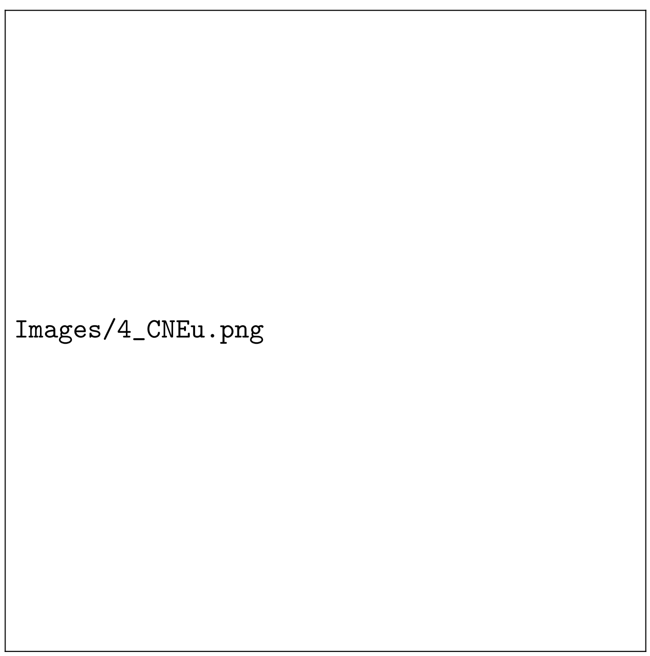

图 4: Crank-Nicolson 格式

同时得到线性方程组

$$(2I-\tau B)\bar{u}_j=(2I+\tau B)\bar{u}_{j+1}+2z\tau$$

其中

$$2I+\tau B=\begin{pmatrix}2+\tau b & \tau c & & & \\ \tau a & 2+\tau b & \tau c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \tau c \\ & & & \tau a & 2+\tau b\end{pmatrix},$$

$$2I-\tau B=\begin{pmatrix}2-\tau b & -\tau c & & & \\ -\tau a & 2-\tau b & -\tau c & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\tau c \\ & & & -\tau a & 2-\tau b\end{pmatrix}.$$

4 求解过程可视化

已知无风险利率 $r = 0.3$, 波动率 $\sigma = 0.5$, 行权价格$K = 50$, 到期时间$T = 1$。

将时间空间分别四等分（即$N = 4, M = 4$），用显示格式差分离散求解方程的过程如下：

时点	图
$t_4 = T$	Images/5_option_price_surface_4iter_step0.png
t_3	Images/6_option_price_surface_4iter_step1.png

t_2	Images/7_option_price_surface_4iter_step2.png
t_1	Images/8_option_price_surface_4iter_step3.png

如果$S = 40$，这里的蓝点就是我们所求的期权价格。

5 比较三种差分格式

5.0.1 分割次数为100时的期权价格图

设置$N = 100, M = 100$：

显式格式	Images/13_option_price_surface_Exp_(100,100).png

隐式格式	Images/10_option_price_surface_Imp_(100,100).png
C-N格式	Images/14_option_price_surface_CN_(100,100).png

结论：隐式格式和C-N格式的结果是收敛的，显式格式的结果有巨大误差。

5.0.2 观察不同分割次数的显式格式期权价格图：

$N = 10, M = 10$	Images/11_option_price_surface_Exp_(10,10).png

$N = 20, M = 20$	Images/12_option_price_surface_Exp_(20,20).png
$N = 100, M = 100$	Images/13_option_price_surface_Exp_(100,100).png

结论：显示格式随着分割网格的次数增加，误差也随之增加，故不收敛。

5.0.3 比较隐式格式与C-N格式的收敛速度：

Images/15_error.png

结论：两种格式都收敛，而且C-N格式的收敛速度更快