第 9 章 气体动理论

一、选择题

1、D　2、C　3、C　4、D　5、C　6、C　7、A　8、C　9、C　10、C　11、C　12、C

13、B　14、D　15、C　16、C　17、B　18、B　19、A　20、C　21、D　22、B

二、计算题

1、解 （1）根据速率分布曲线，速率分布可表示为

$$Nf(v)=\begin{cases}\dfrac{a}{v_0}v & 0<v<v_0\\ 2a & v_0<v<2v_0\\ 3a & 2v_0<v<3v_0\\ 2a & 3v_0<v<4v_0\\ -\dfrac{a}{v_0}\left(v-5v_0\right) & 4v_0<v<5v_0\\ 0 & v>5v_0\end{cases}$$

由归一化条件，有

$$\int_0^{\infty} Nf(v)\mathrm{d}v=N$$

即

$$\int_0^{v_0}\frac{a}{v_0}v\mathrm{d}v+\int_{v_0}^{2v_0}2a\mathrm{d}v+\int_{2v_0}^{3v_0}3a\mathrm{d}v+\int_{3v_0}^{4v_0}2a\mathrm{d}v+\int_{4v_0}^{5v_0}\frac{-a}{v_0}(v-5v_0)\mathrm{d}v=N$$

由此式可解得

$$a=\frac{N}{8v_0}$$

（2）速率分布在 $2v_0\to 3v_0$ 间隔内的分子数为

$$\Delta N=N\int_{2v_0}^{3v_0}f(v)\mathrm{d}v=\int_{2v_0}^{3v_0}3a\mathrm{d}v=3av_0=\frac{3}{8}N$$

（3）分子的平均速率为

$$\bar{v}=\int_0^{\infty}vf(v)\mathrm{d}v=\frac{1}{N}\int_0^{\infty}vNf(v)\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{N}[\int_0^{v_0} \frac{a}{v_0} v^2 \mathrm{d}v + \int_{v_0}^{2v_0} 2av\mathrm{d}v + \int_{2v_0}^{3v_0} 3av\mathrm{d}v$$

$$+ \int_{3v_0}^{4v_0} 2av\mathrm{d}v + \int_{4v_0}^{5v_0} \frac{-a}{v_0}(v-5v_0)v\mathrm{d}v\,]$$

$$= \frac{1}{N}[\frac{a}{v_0} \times \frac{v_0^3}{3} + a(4v_0^2 - v_0^2) + \frac{3a}{2}(9v_0^2 - 4v_0^2)$$

$$+ a(16v_0^2 - 9v_0^2) - \frac{a}{3v_0}(125v_0^3 - 64v_0^3)$$

$$+ \frac{5av_0}{2v_0}(25v_0^2 - 16v_0^2)]$$

$$= \frac{1}{8v_0}[\frac{v_0^2}{3} + 3v_0^2 + \frac{15}{2}v_0^2 + 7v_0^2 - \frac{61}{3}v_0^2 + \frac{45}{2}v_0^2]$$

$$= \frac{5}{2}v_0$$

2、解 （1）由速率分布函数的归一化条件$\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v = 1$，有

$$\int_0^{v_f} 4\pi A v^2 \mathrm{d}v + \int_{v_f}^{\infty} 0\mathrm{d}v = 1$$

得

$$\frac{4}{3}\pi A v_f^3 = 1$$

所以常量A为

$$A = \frac{3}{4\pi v_f^3}$$

（2）电子气中一个电子的平均动能为

$$\bar{\varepsilon} = \int_0^{v_f} \frac{1}{2} m_e v^2 f(v)\mathrm{d}v = \frac{m_e}{2}\int_0^{v_f} v^2 \cdot 4\pi A v^2 \mathrm{d}v$$

$$= \frac{2}{5}\pi A m_e v_f^5 = \frac{3}{10} m_e v_f^2$$

3、解 根据求平均值的定义，速率倒数的平均值为

$$\overline{\left(\frac{1}{v}\right)}=\int_0^\infty \frac{1}{v}\,f(v)\mathrm{d}v=\int_0^\infty 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2}\,v\mathrm{d}v$$

$$=4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{kT}{\mu}\right)\int_0^\infty e^{-\frac{\mu}{2kT}v^2}\mathrm{d}\left(-\frac{\mu}{2kT}v^2\right)$$

$$=\sqrt{\frac{2\mu}{\pi kT}}=\sqrt{\frac{\pi\mu}{8kT}}\cdot\frac{4}{\pi}=\frac{4}{\pi}\frac{1}{\bar{v}}$$

4、解　麦克斯韦速率分布为

$$\frac{\Delta N}{N}=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2e^{-mv^2/2kT}\Delta v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{v^2}{v_P^3}e^{-v^2/v_P^2}\Delta v$$

式中v_P为最概然速率 $v_P=\sqrt{\frac{2kT}{m}}$

当$T=300\ \mathrm{K}$时,空气分子的

$$v_P=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{\mu}}=\sqrt{\frac{2\times 8.31\times 300}{29\times 10-3}}=415\ \mathrm{m/s}.$$

对$\Delta v=1\mathrm{m/s}$

(1) 在$v=v_P$附近,单位速率区间的分子数占分子总数的百分比

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{v^2}{v_P^3}e^{-v^2/v_P^2}\Delta v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\times\frac{1}{415}e^{-1}\times 1=0.002=0.2\%$$

(2) 在$v=10v_P$附近,单位速率区间的分子数占分子总数的百分比

$$\frac{\Delta N}{N}=\frac{4}{\pi}\frac{(10v_p)^2}{v_P^3}e^{(-10v_P)^2/v_P^2}\Delta v=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\times\frac{100}{415}e^{-100}\times 1=2.0\times 10^{-44}=2.0\times 10^{-42}\%$$

$10^5\,\mathrm{mol}$ 的空气中的总分子数 $\mathrm{N}=6.02\times 10^{23}\times 10^5$,在 v_P 附近, $\Delta v=1\,\mathrm{m/s}$ 区间的分子数为：

$$N\times 0.2\%=6.02\times 10^{23}\times 10^5\times 0.2\%=1.2\times 10^{26}$$

在$10v_P$附近,$\Delta v=1\mathrm{m/s}$区间的分子数为：

$$N\times 2\times 10^{-42}\%=6.02\times 10^{23}\times 10^5\times 2\times 10^{-42}\%=1.2\times 10^{-15}\approx 0\text{ 个}$$

5、解 (1) $p=nkT$

$$n=\frac{p}{kT}=\frac{8.31\times 10^5}{1.38\times 10^{-23}\times 300}=2.00\times 10^{26}\mathrm{m}^{-3}$$

(2) 分子的平均平动动能$\overline{W}$

$$\overline{W}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times 1.38\times 10^{-23}\times 300=6.21\times 10^{-21}\,\mathrm{J}$$

(3) 气体的内能E

由于理想气体的内能 $E=\frac{M}{\mu}\frac{i}{2}RT$

理想气体的状态方程 $pV=\frac{M}{\mu}RT$

所以 $E=\frac{i}{2}pV$

氧气为双原子分子 $i=5$

$$E=\frac{5}{2}pV=\frac{5}{2}\times 8.31\times 10^{5}\times 1.20\times 10^{-2}=2.49\times 10^{4}\,\mathrm{J}$$

6、解 (1) 由 $f_{(v)}$ 与 v 的函数曲线图可知

$$f(v)=\begin{cases} C & 0\le v\le v_0 \\ 0 & v>v_0 \end{cases}$$

由速率分布函数 $f(v)$ 的归一化条件可确定常数 C

$$\int_0^{\infty} f(v)\mathrm{d}v=1$$

可写成:

$$\int_0^{v_0} C\mathrm{d}v=1$$

$C\cdot v_0=1$ 所以 $C=\frac{1}{v_0}$

(2) 平均速率

$$\bar{v}=\int_0^{v_0} vf(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_0} vC\mathrm{d}v=\frac{1}{v_0}\int_0^{v_0} v\mathrm{d}v=\frac{v_0}{2}$$

$$\bar{v}^2=\int_0^{v_0} v^2 f(v)\mathrm{d}v=\int_0^{v_0} v^2C\mathrm{d}v=\frac{1}{v_0}\int_0^{v_0} v^2\mathrm{d}v=\frac{1}{3}v_0^2$$

方均根速率 $\sqrt{\bar{v}^2}=\frac{v_0}{\sqrt{3}}$

7、解 （1）由压强公式 $p=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_t}$，有

$$\overline{\varepsilon_t}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{3}{2}\frac{p}{n}=\frac{3pV}{2(N_1+N_2)}=\frac{3\times 2.58\times 10^{4}\times 1.0}{2(1.0\times 10^{24}+3.0\times 10^{24})}=9.68\times 10^{-21}(\mathrm{J})$$

（2）由理想气体状态方程 $p=nkT$，有

$$T=\frac{p}{nk}=\frac{pV}{(N_1+N_2)k}=\frac{2.58\times 10^{4}}{1.38\times 10^{-23}(1.0\times 10^{24}+3.0\times 10^{24})}=467(\mathrm{K})$$

8、解 （1）由方均根速率公式，有

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}=\sqrt{\frac{3p}{\rho}}=\sqrt{\frac{3\times1.013\times10^5}{1.25}}=493\text{（m/s）}$$

（2）由 $pV=\frac{m}{M}RT$，有

$$M=\frac{\rho RT}{p}=\frac{1.25\times8.31\times273}{1.013\times10^5}=0.028\text{（kg/mol）}$$

由结果可知，这是 N_2 或 CO 气体。

（3）由平均平动动能和转动动能公式，有

$$\overline{\varepsilon_t}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times273=5.56\times10^{-21}(\mathrm{J})$$

$$\overline{\varepsilon_r}=kT=1.38\times10^{-23}\times273=3.77\times10^{-21}(\mathrm{J})$$

（4）由气体分子的总平动动能公式，有

$$E_t=\overline{\varepsilon_t}\times n=\overline{\varepsilon_t}\times\frac{p}{kT}=5.56\times10^{-21}\times\frac{1.013\times10^5}{1.38\times10^{-23}\times272}=1.5\times10^5(\mathrm{J/m^3})$$

.

（5）由气体的内能公式，有

$$E=\frac{m}{M}\times\frac{i}{2}RT=0.3\times\frac{5}{2}\times8.31\times273=1.70\times10^3(\mathrm{J})$$

9、解 由理想气体状态方程，有

$$p=nkT$$

故

$$n=\frac{p}{kT}.$$

所以器壁释放出的气体分子数为

$$\Delta N=(n_2-n_1)V=(\frac{p_2}{kT_2}-\frac{p_1}{kT_1})V_0.$$

由于 $p_2>>p_1$，于是 $\frac{p_2}{T_2}>>\frac{p_1}{T_1}$，因此

$$\Delta N=\frac{p_2V_0}{kT_2}=\frac{1.0\times10^{-2}\times1.33\times10^2\times12.6\times10^{-4}}{1.38\times10^{-23}\times500}=2.43\times10^{17}(\text{个}).$$

10、解 标准状态 $T_0=273\ \mathrm{K}$ $\quad p_0=1\,atm=1.013\times10^5\,Pa$

$$\frac{1}{2}Mv^2 = \frac{M}{\mu}\frac{5}{2}R\Delta T\,..$$

$$\Delta T = \frac{\mu v^2}{5R} \qquad 代入 \quad \mu_{O_2} = 32\times10^{-3}\ \mathrm{kg}$$

$$T = T_0 + \Delta T = 273\mathrm{K} + 7.7\mathrm{K} = 280.7\mathrm{K}\,.$$

因为 $p_0 = nkT_0, p = nkT$

$$p = p_0\frac{T}{T_0} = 1.04\times10^5\ \mathrm{Pa}\,.$$

三、问答题

1、解 对于理想气体，最概然速率为

$$\upsilon_p = \sqrt{\frac{2kT}{\mu}} \quad （\mu 为分子质量）$$

代入到麦克斯韦速率分布律中，有

$$f(\upsilon) = 4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{-\mu\upsilon^2/2kT}\upsilon^2 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\upsilon_p^{-3}e^{-\upsilon^2/\upsilon_p^2}\upsilon^2$$

当 $\upsilon = \upsilon_p$ 时有

$$f(\upsilon_p) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\upsilon_p^{-1}e^{-1}$$

由于 $\Delta\upsilon$ 很小，所以在 $\upsilon_p \sim \upsilon_p + \Delta\upsilon$ 区间内的分子数为

$$\Delta N \approx Nf(\upsilon_p)\Delta\upsilon = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\upsilon_p^{-1}e^{-1}\Delta\upsilon = \frac{4N}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\mu}{2kT}}e^{-1}\Delta\upsilon$$

故 $$\Delta N \propto \frac{1}{\sqrt{T}}$$

2、解 由 $P = nkT$ 可知，当 T 不变时，由于 V 变小，n 会变大，则会引起 P 增大；当 V 不变，n 也不变，由于 T 变大，则 P 也会变大。其共同之处是都因对器壁的碰撞频率增加而增加，但是其具体过程又有不同，前者是由于 n 增加而导致对器壁的碰撞频率增加；而后者是由于 $\overline{v^2}$ 增大，除了导致对器壁的碰撞次数增加外，还使每次碰撞器壁的冲量增加。