第 3 章 功和能

一、选择题

修改后答案

1、D； 2、A； 3、C； 4、D； 5、D； 6、D；7、C；8、B；9、D； 10、C；11、B；12、C；13、A；14、D；15、C；16、C；17、C；18、C；19、A；20、D；21、C；22、D；23、B；24、A；25、C；

二、计算题

1、解：（1）由题知，合外力为恒力，

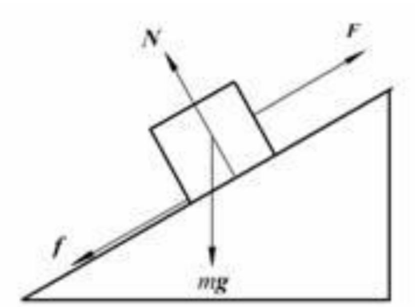
$$\therefore\ A_F = \vec{F}_{合} \cdot \Delta\vec{r} = \left(7\vec{i} - 6\vec{j}\right) \cdot \left(-3\vec{i} + 4\vec{j} + 16\vec{k} - 0\right) = -21 - 24 = -45(J)$$

（2）平均功率：$P = \dfrac{A_F}{\Delta t} = \dfrac{45}{0.6} = 75(W)$

（3）由动能定理，质点动能的变化为：

$$\Delta E_k = A_F = -45(J)$$

2、解：



物体受力情形如图所示。力 F 所作的功：

$$A_F = \vec{F} \cdot \vec{s} = 4.0 \times 10^2 J$$

摩擦力 $f = \mu N = \mu mg \dfrac{\sqrt{l^2 - h^2}}{l} = 0.24 \times 12 \times 10 \times \dfrac{\sqrt{5.6^2 - 3.2^2}}{5.6} = 23.1N$

摩擦力所作的功：

$$A_f = \vec{f} \cdot \vec{s} = fs\cos\pi = -23.1 \times 4.0 = -92.4J$$

重力所作的功：

$$A_g = m\vec{g} \cdot \vec{s} = mgs\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -mgs\frac{h}{l} = -269J$$

支撑力 **N** 与物体的位移相垂直，不作功，即 $A_N = 0$；

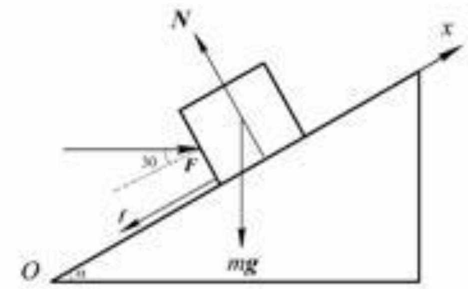
这些功的代数和为 $A_{\Sigma} = A_F + A_f + A_g + A_N = 38.8J$；

物体所受合力为 $F_{\Sigma} = F - f - mg\sin\alpha = 9.7N$；

合力的功为 $A_{\Sigma} = \vec{F}_{\Sigma} \cdot \vec{s} = 38.8J$；

这表明，物体所受诸力的合力所作的功必定等于各分力所作功的代数和。

3、解：



物体受力情况如图所示。取 x 轴沿斜面向上，y 轴垂直于斜面向上。可以列出下面的方程：

$$F\cos 30° - f - mg\sin\alpha = 0 \quad (1)$$

$$N - F\sin 30° - mg\cos\alpha = 0 \quad (2)$$

$$f = \mu N \quad (3)$$

由已知条件可知：sinα=0.6，cosα=0.8

由式（2）得：$N = F\sin 30° + mg\cos\alpha = 0.5F + 0.8mg$

将上式代入（3）可解得：$f = \mu N = 0.5\mu F + 0.8\mu mg$

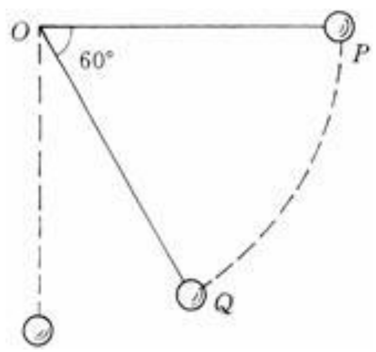
再代入（1）式得：

$$\frac{\sqrt{3}}{2}F - \left(\frac{1}{2}\mu F + \frac{4}{5}\mu mg\right) - \frac{3}{5}mg = 0，\quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\mu}{2}\right)F = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mu\right)mg$$

代入数据：$F = 9.7\times 10^3 N$

推力所做的功：$A_F = \vec{F}\cdot\vec{s} = Fs\cos 30° = 4.2\times 10^4 J$

4、解：



取 Q 点的势能为零，则有

$$mgl\sin 60° = \frac{1}{2}mv^2，\quad 即：mv^2 = \sqrt{3}mgl$$

于是求得小球到达 Q 点时的速率为

$$v = 2.9 m \cdot s^{-1}$$

设小球到达 Q 点时绳子的张力为 T，则沿轨道法向可以列出下面的方程式

$$T - mgl\cos 30° = m\frac{v^2}{l}$$

由此可解得： $T = 2.6N$

在小球从 P 到 Q 的过程中的任意一点上，沿轨道切向作位移元 ds，重力所作元功可表示为

$$dA = m\vec{g} \cdot d\vec{s} = mg\cos\theta ds = mgl\cos\theta d\theta$$

式中 θ 是沿轨道切向所作位移元 ds 与竖直方向的夹角。小球从 P 到 Q 的过程中重力所作的总功可以由对上式的积分求得

$$A = \int dA = \int_0^{60°} mgl\cos\theta d\theta = 0.42J$$

5、解：（1）将牛顿第二定律写为下面的形式

$$md\vec{v} = \vec{F}dt \qquad (1)$$

用速度 **v** 点乘上式两边，得

$$mvdv = Fvdt$$

式中 $Fv = P$，是机车的功率，为一定值。对上式积分

$$\int_0^v mvdv = \int_0^t Pdt$$

即可得：$\frac{1}{2}mv^2 = Pt$

将已知数据代入上式，可求得列车的质量，为 $m = 1.0 \times 10^6 kg$

（2）利用上面所得到的方程式：$\frac{1}{2}mv^2 = Pt$

就可以求得速度与时间的关系，为

$$v = \sqrt{\frac{2Pt}{m}} = 2\sqrt{t} \qquad (2)$$

（3）由式(2)两边求导得

$$dv = \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

将上式代入式(1)，得

$$m\frac{dt}{\sqrt{t}} = Fdt\text{，即}\ \frac{m}{\sqrt{t}} = F$$

由上式可以得到机车的拉力与时间的关系

$$F = \frac{m}{\sqrt{t}} = \frac{1.0 \times 10^6}{\sqrt{t}}$$

（4）列车在这 100 秒内作复杂运动，因为加速度也在随时间变化。列车所经过的路程可以用位移公式：$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \int_{t_0}^{t} d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}(\mathrm{t})dt$，来求解。

对于直线运动，上式可化为标量式，故有

$$s=\int_0^t v(\mathrm{t})dt=\int_0^{100}2\sqrt{t}dt=\frac{4}{3}\times100^{3/2}=1.3\times10^3 m$$

6、解：（1）根据已知条件，可以作下面的运算

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{f}{m}=\frac{-\beta v}{m}$$

于是可以得到下面的关系

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{-\beta}{m}\mathrm{d}t$$

对上式积分：

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_{t_0}^{t}\frac{-\beta}{m}\mathrm{d}t$$

可得：

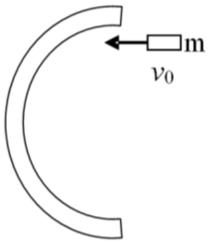
$$v=v_0\mathrm{e}^{-\beta(t-t_0)/m}$$

（2）在从 t_0 到 t 的时间内，黏性阻力所作的功可以由下面的运算中得出

$$A_f=\int_0^s fds=\int_{t_0}^{t}f\frac{ds}{dt}\mathrm{d}t=\int_{t_0}^{t}fv\mathrm{d}t=-\int_{t_0}^{t}\beta vv\mathrm{d}t$$

$$=-\beta v_0^2\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-2\beta(t-t_0)/m}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}mv_0^2\left[\mathrm{e}^{-2\beta(t-t_0)/m}-1\right]$$

7、解：



根据功能原理，在滑块和固定的屏障（相当于地球）构成系统中，该系统不受外力，而两者之间的摩擦力为非保守内力，所以

$$A_{外力}+A_{非保守内力}=\Delta E_k+\Delta E_p$$

$$0+A_f=\frac{1}{2}m(v_t^2-v_0^2)+0$$

或者根据动能定理可知，对于滑块而言只有摩擦力做功，屏障对其支持力 N 不做功，则

$$A_f=\frac{1}{2}mv_t^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

小滑块的运动轨迹为半圆，利用自然坐标系及角量运算比较方便。
在法线方向上，

$$N=ma_n=m\frac{v^2}{R}$$

摩擦力方向始终与速度方向相反，其大小可表示为

$$f=\mu N=\mu m\frac{v^2}{R}$$

在切线方向上，

$$f=-ma_t=-m\frac{dv}{dt}=-m\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=-m\frac{dv}{Rd\theta}\cdot\frac{ds}{dt}=-mv\frac{dv}{Rd\theta}$$

其中 θ 为滑块在运动过程中的角位移。

故摩擦力：$f=\mu m\frac{v^2}{R}=-mv\frac{dv}{Rd\theta}$，$\mu d\theta=-\frac{dv}{v}$

滑块刚进入屏障时角位移为 0，从另一端滑出屏障时的角位移为 π，两边积分，

$$\int_0^{\pi}\mu d\theta=-\int_{v_0}^{v}\frac{dv}{v}$$

计算可得：$v_t=v_0e^{-\pi\mu}$

在整个过程中，只有摩擦力做功，则有

$$A_f=\frac{1}{2}mv_t^2-\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}m\left(v_t^2-v_0^2\right)=\frac{1}{2}m\left[(v_0e^{-\pi\mu})^2-v_0^2\right]=\frac{1}{2}mv_0^2(e^{-2\pi\mu}-1)$$

8、解：（1）卫星围绕地球旋转可近似看成圆周运动，二者之间的万有引力提供向心力，则

$$\mathrm{G}\frac{m_Em}{\left(3R_E\right)^2}=m\frac{v^2}{3R_E}$$

卫星的动能：

$$E_k=\frac{1}{2}mv^2=\frac{Gm_Em}{6R_E}$$

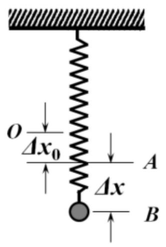
（2）取卫星与地球相距无限远时为势能零点，则卫星的引力势能为

$$E_p=-\frac{Gm_Em}{r}=-\frac{Gm_Em}{3R_E}$$

（3）卫星的机械能

$$E=E_k+E_p=\frac{Gm_Em}{6R_E}+\left(-\frac{Gm_Em}{3R_E}\right)=-\frac{Gm_Em}{6R_E}$$

9、解：



若把小球、弹簧和地球看作一个系统，则小球所受弹性力和重力都是保守内力，在小球运动过程中机械能守恒。取小球处于 B 点位置取做系统重力势能零点，而系统的弹性势能零点应取在弹簧未发生形变位置，即 O 点位置，则有：

$$\frac{1}{2}k\left(\Delta x_0+\Delta x\right)^2=\frac{1}{2}k\left(\Delta x_0\right)^2+mg\left(\Delta x\right)+\frac{1}{2}mv^2$$

v 是小球到达点 ***A*** 时的速率，并且小球在 ***A*** 点时重力和弹性力相平衡。

$$mg=k\left(\Delta x_0\right)$$

二式联立解得：

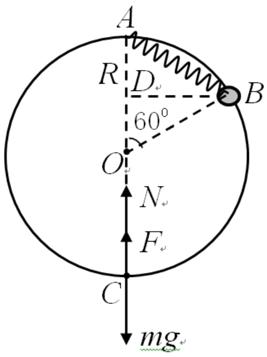
$$v=\Delta x\sqrt{\frac{k}{m}}$$

10、解：（1）小球在运动过程中受重力，环对它的支持力和弹簧对它的弹力作用，此过程中满足机械能守恒，设 C 点为重力势能零点，弹簧原长时为弹性势能零点，则有

$$mgR\left(1+\cos 60°\right)=\frac{1}{2}mv_C^2+\frac{1}{2}k\left(2R-R\right)^2$$

可解得：$v_C=\sqrt{3gR-\frac{kR^2}{m}}$

（2）小球在 C 点时受重力、弹簧弹力和环对它的作用力，受力如图所示，



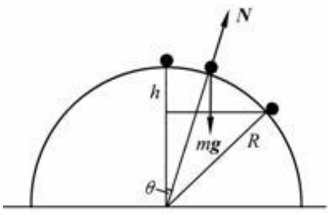
$$N+F-mg=m\frac{v_C^2}{R}$$

其中，$F=k\left(2R-R\right)=kR$

$$N=m\frac{v_C^2}{R}+mg-kR=4mg-2kR$$

方向：竖直向上。

11、解：



设物体的质量为 m，离开球面时速度为 *v*，此时它下落的竖直距离为 *h*。对于由物体、球体和地球所组成的系统，没有外力和非保守内力的作用，机械能守恒，故有

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

在物体离开球体之前，物体在球面上的运动过程中，应满足下面的关系

$$mg\cos\theta - N = \frac{mv^2}{R} \qquad (2)$$

式中 N 是球面对物体的支撑力，$\boldsymbol{\theta}$ 是物体所处位置到球体中心连线与竖直方向的夹角。在物体离开球体的瞬间，由图可见

$$\cos\theta = \frac{R-h}{R}$$

并且这时应有 $\boldsymbol{N} = 0$，于是式(2)成为

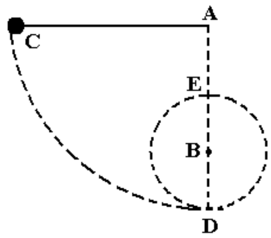
$$mg\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$$

即：$v^2 = g\left(R-h\right)$

将上式代入式(1)，得

$$h = \frac{1}{3}R$$

12、解：



小球恰能绕 B 点作圆周运动则有：

$$mg = m\frac{v_E^2}{R}，\quad v_E = \sqrt{gR}$$

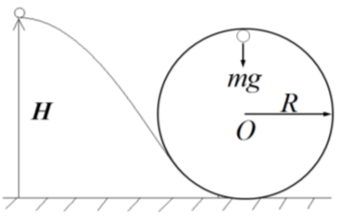
整个过程中满足机械能守恒，

$$mgl = \frac{1}{2}mv_E^2 + 2mgR，$$

可得：$R = \frac{2}{5}l$

$$\therefore \quad d = l - R = \frac{3}{5}l$$

13、解：



（1）小球和地球组成的系统，运动过程中机械能守恒。即在 H 处和圆形轨道顶点处机械能相等：

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R$$

因为 $ma_{\mathrm{n}} = m\frac{v^2}{R} = mg$ ，故

$$H = \frac{5}{2}R$$

（2）由于 ***H*** 较小，故设在 ***h*** 处小球脱离轨道，计算出 ***h***。

$$mg2R = mgh + \frac{1}{2}mv^2$$

$$ma_{\mathrm{n}} = m\frac{v^2}{R} = mg\sin\theta + N$$

因轨道的支撑力 N=0，所以

$$\frac{v^2}{R} = g\sin\theta$$

又因为

$$\sin\theta = \frac{h-R}{R}\ ,$$

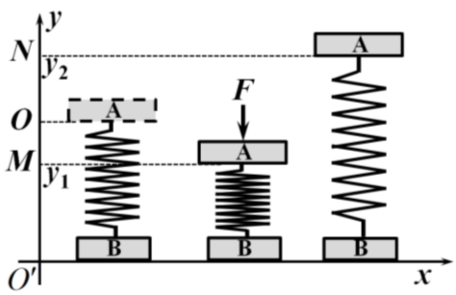
$$v^2 = g(h-R)$$

$$mg2R = mgh + \frac{1}{2}mg(h-R)$$

$$4R = 2h + h - R$$

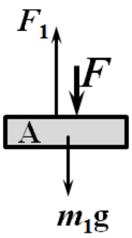
$$h = \frac{5}{3}R$$

14、解：建立如图坐标系，坐标原点 ***O*** 取在弹簧自然伸长（无形变）处。



图中，M 点为施加外力 ***F*** 后，A 板的位置；N 点为撤销外力后 A 板跳起的最大高度位置。取坐标原点水平线为重力势能和弹簧弹性势能零点。

M 点位置时对 A 板受力情况如图



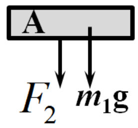
$$F_1 = F + m_1 g$$

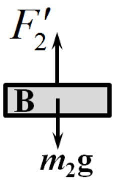
由弹簧的形变可知，$F_1 = ky_1$

M→N 的变化过程中，A、B 两板、弹簧和地球构成的系统满足机械能守恒；

$$\frac{1}{2}ky_1^2 - m_1 g y_1 = \frac{1}{2}ky_2^2 + m_1 g y_2$$

N 点位置时对 A、B 两板受力情况如图





并且满足：

$$F_2 = F_2'$$

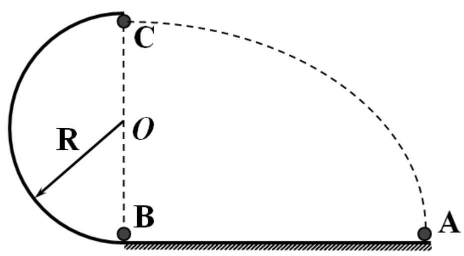
$$F_2 = ky_2$$

$$F_2' = m_2 g$$

将以上方程联立可解得：

$$F = \left(m_1 + m_2\right) g$$

15、解：



（1）计算小球在 AB 段运动时的加速度可以通过小球在 AB 段运动时的位移和时间来求解。

因为小球在 C 点恰能维持圆周运动，则有：

$$mg = m\frac{v_C^2}{R} \qquad （1）$$

$$即：v_C = \sqrt{gR} \qquad （2）$$

小球由 B 点到 C 点机械能守恒，则：

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg2R \qquad （3）$$

由（2）和（3）式可得：$v_B = \sqrt{5gR}$

小球由 C 点到 A 点为平抛运动，在竖直方向上满足：$2R = \frac{1}{2}gt^2$，

即：$t = \sqrt{\frac{4R}{g}}$

从而可的 AB 段长度为：$s = v_C t = 2R$

由于从 A 点到 B 点小球作初速度为零的匀加速直线运动，得小球的加速度为：

$$a = \frac{v_B^2}{2s} = \frac{5gR}{4R} = \frac{5g}{4}$$

（2）由 C 点到 A 点小球作平抛运动，这个过程中小球的加速度为 $\boldsymbol{g}$，并有

$$v_x = v_C, \quad v_y = gt$$

在任意时刻 t，小球速度的大小为：

$$v = \sqrt{v_C^2 + (gt)^2}$$

其切向加速度：

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_C^2 + (gt)^2}}$$

小球落回 A 点的瞬间，$t = \sqrt{\frac{4R}{g}}$，代入上式，得：

$$a_\tau = \sqrt{\frac{4}{5}}g = \frac{2g}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}g}{5}$$

三、问答题

1、**答：**质点的空间位置坐标随时间变化的函数关系叫做运动方程。知道了质点的运动方程，就可以知道质点在任意时刻的位置、速度、加速度以及运动轨道。由此可见，掌握了运动方程，也就掌握了质点运动的全貌。