模拟训练 IV 参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1、设 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.5$，$P(A|B)=0.4$，则 $P(A\cup B)=$ <u>0.6</u>。

2、设随机变量 $X\sim N(3,\sigma^2)$，且 $P(3<X<5)=0.2$，则 $P(X<1)=$ <u>0.3</u>。

3、已知随机变量 X 所有可能取值为 -2、1、3，且 $P\{X=-2\}=0.3$、$P\{X=1\}=a$、$P\{X=3\}=0.5$，则 $D(X)=$ <u>4.69</u>。

4、设 X 与 Y 相互独立，$X\sim\pi(4)$，Y 的分布律为 $P\{Y=k\}=k^{-1}(k+1)^{-1}$，$k=1,2,\cdots$，

则 $P\{X\le 2,Y\le 4\}=\underline{\dfrac{52}{5}e^{-4}}$。

5、设总体 $X\sim N(\mu,9)$，$z_{0.025}=1.96$，则样本容量 n 至少为 <u>16</u> 时，才能保证 μ 的置信水平为 0.95 的双侧置信区间的长度不大于 3。

二、 选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1、盒子中有 4 只白球和 2 只红球，从中同时取 2 只球，则取得 2 只白球的概率为（ B ）。

A. 0.6； B. 0.4； C. 0.2； D. 0.8。

2、设随机变量 X 与 Y 相互独立，$f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 分别表示 X 与 Y 的概率密度，则在 $X=x$ 的条件下，Y 的条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ 为（ A ）。

A. $f_Y(y)$； B. $f_X(x)$； C. $f_X(x)\ f_Y(y)$； D. $f_Y(y)/f_X(x)$。

3、设 $E(X)=12$，$D(X)=1$，由切比雪夫不等式，可得 $P\{10<X<14\}\ge$（ C ）。

A. 0.25； B. 0.8； C. 0.75； D. 0.9。

4、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 和 σ^2 均未知，X_1,X_2,X_3 是来自总体 X 的一个样本则（ D ）是统计量。

A. $\sum_{i=1}^{3}X_i+2\mu$； B. $\sigma^{-1}(X_1+2X_2+X_3)$； C. $\sum_{i=1}^{3}(X_i-\mu)^2$； D. $2X_1$。

5、在假设检验中，原假设为 H_0，备择假设为 H_1，则称（ B ）为犯第二类错误。

(A) H_0 为真，接受 H_0；(B) H_0 不真，接受 H_0；(C) H_0 为真，拒绝 H_0；(D) H_0 不真，拒绝 H_0。

三、（本题 10 分）某工厂中有甲、乙、丙 3 台机器生产同样的产品，它们的产量分别占总产量的 20%、35%、45%，它们生产产品的次品率分别为 6%、4%、1%，现从出厂产品中任取一件，⑴求抽到次品的概率；⑵已知抽到的是次品，求它是由甲机器生产的概率。

解　设 A:“抽到次品”，B_1:“取到甲机器生产的产品”，B_2:“取到乙机器生产的产品”

B_3:“取到丙机器生产的产品”。　　（1 分）

⑴ $P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)$　　（2 分）

$=0.2\times0.06+0.35\times0.04+0.45\times0.01$　　（3 分）

$=0.0305$；　　（1 分）

⑵ $P(B_1|A)=\dfrac{P(B_1)P(A|B_1)}{P(A)}$　　（2 分）

$=\dfrac{0.2\times0.06}{0.0305}=\dfrac{24}{61}$。　　（1 分）

四、（本题 10 分）设随机变量 $X\sim U(1,7)$，⑴对 X 进行四次独立地观察，其观测值大于 5 的次数为 Y，求 $P\{Y=1\}$；⑵求 $E(X^2+3X+5)$。

解：⑴

$$P(X>5)=\int_5^7\frac{1}{6}dx=\frac{1}{3};$$　　（2分）

由题意知，$Y\sim B(4,1/3)$，故

$$P\{Y=1\}=C_4^1\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{32}{81};$$　　（3 分）

⑵　由题意知，$E(X)=4$，　$D(X)=3$　　（2 分）

$E(X^2+3X+5)$

$=D(X)+[E(X)]^2+3E(X)+5$　　（2 分）

$=36$。　　（1 分）

五、（本题 10 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}(2x+3)/10, & 0\le x\le 2,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$

求：⑴分布函数 $F_X(x)$；　⑵$Y=2X+5$的概率密度。

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

$$=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{10}(x^2+3x), & 0\le x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}$$ （3 分）

⑵　方法一：Y 的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X+5\le y\}$$

$$=P\{X\le \frac{y-5}{2}\}$$

$$=F_X(\frac{y-5}{2}),$$ （2 分）

两边求导，得

$$f_Y(y)=[F_Y(y)]'=f_X(\frac{y-5}{2})(\frac{y-5}{2})'=\frac{1}{2}f_X(\frac{y-5}{2})$$ （2 分）

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{20}(y-2), & 5<y<9,\\ 0, & 其他;\end{cases}$$ （3 分）

方法二：$y=2x+5$ 为严格增函数，且 $x=h(y)=\dfrac{y-5}{2}$，$h'(y)=\dfrac{1}{2}$； （2 分）

当 $0<x<2$，$5<y<9$； （1 分）

故 $$f_Y(y)=\begin{cases}f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, & 5<y<9,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$ （2 分）

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{10}\left(2\times\dfrac{y-5}{2}+3\right), & 5<y<9,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{20}(y-2), & 5<y<9,\\ 0, & 其他。\end{cases}$$ （2分）

六、（本题 10 分）设 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	1	2	3
1	1/8	a	1/24
2	b	1/4	1/8

已知 $P\{Y=1|X=1\}=0.6$，求：⑴a 和 b 的值；　⑵ $Z=X+Y$ 的分布律。

解：　(1)　$$\frac{1}{8}+a+\frac{1}{24}+b+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=1$$

$$a+b=\frac{11}{24},$$ （2 分）

$$P\{Y=1|X=1\}=0.6$$

$$\frac{1/8}{\frac{1}{8}+a+\frac{1}{24}}=0.6$$ （2 分）

解得　$a=\frac{1}{24}$，$b=\frac{5}{12}$；（2 分）

(2)　$Z=X+Y$ 的分布律为

Z	2	3	4	5
p_k	1/8	11/24	7/24	1/8

（4 分）

七、（本题 10 分）设 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}(x+y)/8, & 0<x<2,0<y<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$

求：(1) $f_X(x)$；　(2) $P\{X+Y\le 1\}$；　(3) $E(XY)$。

解：(1)　$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$ （1 分）

$$=\begin{cases}\int_0^2\frac{1}{8}(x+y)dy, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$ （2 分）

$$=\begin{cases}\frac{1}{4}(x+1), & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$$ （1 分）

(2)　$$P\{X+Y\le 1\}$$

$$=\int_0^1\left[\int_0^{1-x}\frac{1}{8}(x+y)dy\right]dx$$ （2 分）

$$=\frac{1}{24};$$ （1 分）

(3)　$$E(XY)$$

$$=\int_0^2\left[\int_0^2 xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dy\right]dx$$ （2 分）

$$=\frac{4}{3}$$ 。 （1 分）

八、（本题 10 分）设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2^\theta \theta x^{-(\theta+1)}, & x>2,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 θ 未知且 $\theta>1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，求：(1) θ 的矩估计量；(2) θ 的最大似然估计量。

解： (1) $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx$

$$=\int_2^{+\infty}x\cdot 2^\theta \theta x^{-(\theta+1)}dx$$

$$=\frac{2\theta}{\theta-1};$$ （2 分）

令 $\dfrac{2\theta}{\theta-1}=\overline{X}$，

解得 $\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{\overline{X}-2}$ 为 θ 的矩估计量。 （2 分）

(1) $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i)$

$$=\begin{cases}\prod_{i=1}^{n}2^\theta \theta x_i^{-(\theta+1)}, & x_i>2, i=1,2,\ldots,n,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2^{n\theta}\cdot\theta^n\cdot\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-(\theta+1)}, & x_i>2, i=1,2,\ldots,n,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$ （2分）

当 $x_i>2$，$i=1,2,\ldots,n$ 时，

$$\ln L(\theta)=n\theta\ln 2+n\ln\theta-(\theta+1)\ln\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)$$

$$=n\theta\ln 2+n\ln\theta-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$ （1 分）

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=n\ln 2+\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，

即 $n\ln 2+\frac{n}{\theta}-\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$，（2 分）

解得 $\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\ln X_i-n\ln 2}$ 为 θ 的最大似然估计量。（1 分）

九、（本题 10 分）设某种元件的寿命为 X 小时，$X\sim N(\mu,120^2)$，现从某厂生产的这种元件中随机地抽取 25 个，测得它们的平均寿命为 1608 小时。问在 $\alpha=0.05$ 下，是否可以认为这种元件的寿命均值 μ 为 1650 小时？（$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$，$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.05}(25)=1.7081$，$z_{0.025}=1.96$，$z_{0.05}=1.645$）

解 $H_0:\mu=1650$，$H_1:\mu\neq 1650$；（2 分）

选取的统计量为

$$Z=\frac{\overline{X}-1650}{120/\sqrt{25}},$$

当 H_0 成立时，$Z\sim N(0,1)$；（3 分）

$z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0.025}=1.96$，

拒绝域为 $(-\infty,-1.96]\cup[1.96,+\infty)$（或写成 $|z|\geq 1.96$）；（2 分）

统计量 Z 的观察值 $z=\frac{\bar{x}-1650}{120/\sqrt{25}}=\frac{1608-1650}{120/\sqrt{25}}=-1.75$，

显然，$|z|=1.75<1.96$，（2 分）

故接受假设 H_0，即在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，可以认为这种元件的寿命均值 μ 为 1650 小时。（1 分）