第 8 章 狭义相对论

练习题答案

一、选择题

1、A 2、B 3、C 4、**A** 5、**B** 6、**A** 7、**C** 8、**B** 9、**B** 10、**C**

11、**D** 12、D 13、B 14、A 15、A 16、D 17、A 18、B 19、D 20、A

21、B 22、A 23、C 24、B 25、A 26、A 27、C 28、D 29、C 30. C

31、A 32、B 33、D

二、计算题

1、解 $\Delta t=\dfrac{\Delta t'}{\sqrt{1-\dfrac{v_x{}^2}{c^2}}}=\dfrac{20}{\sqrt{1-(0.6)^2}}=25\text{s}$.

2、解 $l=l'\sqrt{1-\dfrac{v_x{}^2}{c^2}}=2\sqrt{1-(0.6)^2}=1.6\text{m}$

3、解 K' 系：$E'=m_0c^2=2\times(3\times10^8)^2=1.8\times10^{17}\,\text{J}$

K 系：$E'=mc^2=\dfrac{m_0c^2}{\sqrt{1-\dfrac{v_x{}^2}{c^2}}}=\dfrac{1.8\times10^{17}}{0.8}=2.25\times10^{17}\,\text{J}$.

4、解：（1）由洛伦兹变换得 $\Delta t'=\dfrac{\Delta t-v_x\dfrac{\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{v_x^2}{c^2}}}$

当 $\Delta t=0, \Delta x=1\times10^5\,\mathrm{m}$ 时 $\Delta t'=\dfrac{\dfrac{-0.6c\times1\times10^5}{c^2}}{\sqrt{1-(0.6)^2}}=-2.5\times10^{-4}\,\mathrm{s}$

在 K' 系看来，两事件不同时。.

（2）由洛伦兹变换得 $\Delta x'=\dfrac{\Delta x-v_x\Delta t}{\sqrt{1-\dfrac{v_x^2}{c^2}}}=\dfrac{1\times10^5-0}{\sqrt{1-(0.6)^2}}=1.25\times10^5\,\mathrm{m}$

K' 系中测得这两件事件相距 $1.25\times10^5\,\mathrm{m}$

5、解 $\Delta E=\Delta mc^2=0.006\times10^{-3}\times(3\times10^8)^2=5.4\times10^{11}\,\mathrm{J}$

$\Delta E'=1.3\times10^5\,\mathrm{J}$

则 $\dfrac{\Delta E}{\Delta E'}=\dfrac{5.4\times10^{11}}{1.3\times10^5}=4.2\times10^6$

6、解　取实验室为 k 系，沿 x 轴负向运动的电子束为 k' 系，沿 x 轴正向运动的电子为运动物体。 则 $u=-0.9c$　$v_x=0.9c$

由相对论的速度变换关系式得

$$v_x{}'=\frac{v_x-u}{1-\dfrac{v_x u}{c^2}}=\frac{0.9c-(-0.9c)}{1-\dfrac{0.9c\times(-0.9c)}{c^2}}=\frac{1.8c}{1.81}=0.99c$$

即两束电子的相对速度为 $0.99c$

7、解 取空间站为 S 系，飞船 I 为 S' 系，飞船 I 的运动方向沿 x 轴正方向。由题意知，S' 系相对于 S 系的速率 $u=0.60c$，飞船 II 沿 S 系的 y 轴方向运动，$v_y=0.80c$，$v_x=0$，

如图所示。利用相对论速度变换公式可求出飞船 II 对于飞船 I 的速度分量 v_x' 和 v_y' 分别为

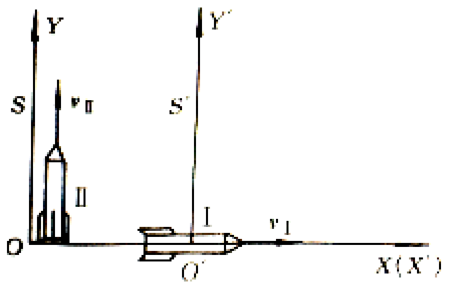
$$v_x'=\frac{v_x-u}{1-\dfrac{u}{c^2}v_x}=\frac{0-0.6c}{1-\dfrac{0.6c}{c^2}\times0}=-0.6c$$

$$v_y'=\frac{\sqrt{1-(\dfrac{u}{c})^2}\,v_y}{1-\dfrac{u}{c^2}v_x}=\frac{\sqrt{1-(\dfrac{0.6c}{c})^2}\times0.8c}{1-\dfrac{0.6c}{c^2}\times0}=0.64c$$

所以，第一个飞船的观测者测得第二个飞船的速度大小为

$$v'=\sqrt{v_x'^2+v_y'^2}=\sqrt{(-0.6c)^2+(0.64c)^2}=0.877c$$

方向（与 x' 轴正向夹角）为: $\theta=\arctan(-\dfrac{0.64}{0.60})=133.2^\circ$



8、解：两静止质量均为 m_0 的小球所组成的系统，在碰撞前后动量守恒，以 m 表示碰撞前运动小球的相对质量，M 、v 分别表示碰撞后合成小球的质量和速度，则有

$$mv=MV \qquad (1)$$

而

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{m_0}{0.6} \qquad (2)$$

此系统碰撞前后遵循能量守恒定律，则有

$$m_0c^2+mc^2=Mc^2$$

即
$$m_0+m=M \qquad (3)$$

将式(2)代入式(3)得：$M=m_0+\dfrac{m_0}{0.6}=\dfrac{8}{3}m_0$

设碰撞后合成小球的静止质量为 M_0，则根据质速关系有

$$M=\frac{M_0}{\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}} \qquad (4)$$

将式(1)、(2)及 $M=\dfrac{8}{3}m_0$ 代入式(4)得

$$M_0=M\sqrt{1-(\frac{V}{c})^2}=M\sqrt{1-(\frac{m}{M}\cdot\frac{v}{c})^2}=\frac{8}{3}m_0\sqrt{1-(\frac{m_0}{0.6}\cdot\frac{3}{8m_0}\cdot\frac{0.8c}{c})^2}=\frac{4\sqrt{3}}{3}m_0$$

9、解：设中微子和 μ^+ 子的动量分别为 P_ν 和 P_μ，由于在衰变过程中**系统的动量守恒**，

故：$P_\mu=P_\nu \qquad (1)$

在衰变过程中**系统的能量也是守恒**的，故：$m_\pi c^2 = E_\mu + E_\nu$ (2)

$m_\pi c^2$ 为 π^+ 介子的能量，其中 E_μ，E_ν 分别表示 μ^+ 子和中微子 ν 的能量。

对子 μ^+ 和中微子分别用**相对论动量与能量的关系**，有

$$c^2P_\mu^2 = E_\mu^2 - m_\mu^2 c^4 \quad (3) \qquad c^2P_\nu^2 = E_\nu^2 \quad (4)$$

由式(1)~(4)解得：

$$E_\mu = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}, \quad E_\nu = \frac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$$

由 $E_k = E - E_0$ 得 μ^+ 子的动能为：

$$E_{k\mu} = E_\mu - m_\mu c^2 = \frac{(m_\pi^2 + m_\mu^2)c^2}{2m_\pi} - m_\mu c^2 = \frac{(m_\pi - m_\mu)^2 c^2}{2m_\pi}$$

中微子 ν 的动能为： $E_{k\nu} = E_\nu = \dfrac{(m_\pi^2 - m_\mu^2)c^2}{2m_\pi}$

10、解：（1）设 P 和 P' 为粒子的初末动量，则有

$$\frac{P'}{P} = \frac{\dfrac{2m_0 v}{\sqrt{1-(\frac{2v}{c})^2}}}{\dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}} = \frac{2\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}{\sqrt{1-(\frac{2v}{c})^2}} = \frac{2\sqrt{1-0.4^2}}{\sqrt{1-4\times 0.4^2}} = 3.1$$

即在此速度时，速度增加一倍，动量增加了约 2 倍。这是因为粒子的质量改变所造成的。

（2）由已知的粒子初速度 v 可求出粒子的初动量为 $P = 0.44m_0 c$，而末动量为

$P' = 10P$，由 $P = \dfrac{m_0 v}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ 可得：

$$v = \frac{Pc}{\sqrt{P^2 + m_0^2c^2}}, \qquad v' = \frac{P'c}{\sqrt{P'^2 + m_0^2c^2}}$$

所以

$$\frac{v'}{v}=\frac{P'\sqrt{P^2+m_0^2c^2}}{P\sqrt{P'^2+m_0^2c^2}}=\frac{10\sqrt{P^2+m_0^2c^2}}{\sqrt{100P^2+m_0^2c^2}}=\frac{10\sqrt{(0.44^2+1)m_0^2c^2}}{\sqrt{(100\times0.44^2+1)m_0^2c^2}}=2.4$$

则当 $P'=10P$ 时,粒子末速度只为初速度的 2 倍半左右。

11、解：根据

$$E=mc^2=m_0c^2/\sqrt{1-v^2/c^2}\;=E_0/\sqrt{1-v^2/c^2}$$

可得 $$1/\sqrt{1-v^2/c^2}=E/E_0=30$$

由此求出 $$v\approx2.996\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

又介子运动的时间 $$\tau=\tau_0/\sqrt{1-v^2/c^2}=30\tau_0$$

因此它运动的距离 $$l=v\tau=v\cdot30\tau_0\approx1.798\times10^4\,\mathrm{m}$$

12、解：⑴设地面为 S 系，宇宙飞船为 S' 系。

在 S' 中：飞船长度就是飞船的原长 L'，由于相对于 S' 系，小物体的速度为 v'，经过的距离为 $\Delta x'=L'$，所以小物体由尾部到头部所需的时间为：

$$\Delta t'=\frac{\Delta x'}{v'}=\frac{L'}{v'}$$

⑵在 S 系中看到飞船的长度为：

$$L=L'\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}<L'$$

在小物体从船尾出发向船头运动中，飞船始终在向前飞行，所以小物体从尾部到头部运动的距离 Δx 要比 S 系中测得飞船的长度 L 要长。由洛伦兹变换有：

$$\Delta x=\frac{\Delta x'+u\Delta t'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{L'+u\frac{L'}{v'}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

由相对论速度变换，小物体相对 S 系的速度为：

$$v=\frac{v'+u}{1+\frac{uv'}{c^2}}$$

所以在 S 系中测得小物体运动的时间为：

$$\Delta t=\frac{\Delta x}{v}=\frac{L'+u\frac{L'}{v'}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{1+\frac{uv'}{c^2}}{v'+u}=\frac{1+\frac{uv'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{L'}{v'}=\frac{1+\frac{uv'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\Delta t'>\Delta t'$$

表明地面观测者测得的时间要较宇航员测得的长一些。

13、解：取地面为 S 系，飞船为 S′ 系，两信号是在 S′ 系中同一地点发出的，故 $\Delta t'_{发}$ 为原时，因此地面上观测到两信号发出的时间间隔为

$$\Delta t_{发}=\frac{\Delta t'_{发}}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}=\frac{\Delta t'_{发}}{0.6}=\frac{5}{3}\Delta t'_{发} \quad (1)$$

在 S 系中，第一个信号发出到接收，有： $t_{1接}=t_{1发}+\frac{\Delta l}{c}$

Δl 为 S 系中第一个信号发出点距接收点的距离。

而第二个信号发出至接受到，有： $t_{2接}=t_{2发}+\frac{\Delta l+u\Delta t_{发}}{c}$

因此： $\Delta t_{接}=t_{2接}-t_{1接}=\Delta t_{发}+\frac{u}{c}\Delta t_{发}=1.8\Delta t_{发} \quad (2)$

由题意，将 $\Delta t_{接}=10\text{s}$ 代入式⑵，得： $\Delta t_{发}=\frac{50}{9}(\text{s})$

代入式⑴得： $\Delta t'_{发}=\frac{3}{5}\Delta t_{发}=\frac{3}{5}\times\frac{50}{9}=\frac{10}{3}(\text{s})$

14、解：⑴以地面为 S 系，飞船为 S′ 系。则 $\Delta x=l=100\text{m}$， $\Delta t=10\text{s}$， $u=0.8c$ 。l 为原长，因此 S′ 系中测得的百米跑道长度为：

$$l'=l\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}=100\times\sqrt{1-0.8^2}=60\text{ m}$$

由相对论时空间隔变换式，S' 系测得的运动员跑过的路程为

$$\Delta x'=\frac{\Delta x-u\Delta t}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}=\frac{100-0.8\times3\times10^8\times10}{\sqrt{1-0.8^2}}=-4\times10^9\text{ m}$$

⑵ S' 系测得的运动员的百米纪录为

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}}=\frac{10-\frac{0.8}{3\times10^8}\times100}{\sqrt{1-0.8^2}}=16.7\text{ s}$$

运动员的平均速度为：

$$\bar{v}'=\frac{\Delta x'}{\Delta t'}=-\frac{4\times10^{9}}{16.7}=-2.4\times10^{8}(\text{m/s})=-0.8c$$

15、解：⑴设地面参照系为S'系，μ子参照系为S系。

在地面参照系S'中，μ子的平均寿命：

$$\tau'=\frac{\tau}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^{2}}}=\frac{2\times10^{-6}}{\sqrt{1-(\frac{0.99c}{c})^{2}}}=1.418\times10^{-5}(\text{s})$$

由$N(t)=N(0)e^{-t/\tau}$知：$\frac{N(t')}{N(0)}=e^{-t'/\tau'}=\frac{1}{100}$

因此，地面参照系中测得的μ子从产生到抵达地面的时间为：

$$t'=-\tau'\ln\frac{1}{100}=6.53\times10^{-5}(\text{s})$$

测得的高度：$h'=vt'=0.99\times3\times10^{8}\times6.53\times10^{-5}=1.94\times10^{4}(\text{m})$

⑵S'系中的h'为原长，因此在μ子参照系中测得的高度为：

$$h=h'\sqrt{1-(\frac{0.99c}{c})^{2}}=2.74\times10^{3}(\text{m})$$

16、解法 1：

设 S、S'系的时空坐标分别为(x,y,z,t)和(x',y',z',t')，其坐标轴对应平行，x和x'轴重合。S'系沿 S 系的 x 轴负方向以$0.8c$的速度运动，则$1.8\times10^{5}\,\text{m}$的距离就是原长。因此在$S'$系中：

测得的OO'的距离为：$l'=l\sqrt{1-(u/c)^{2}}$

OO'重合的时间为：

$$\Delta t'=\frac{l'}{u}=\frac{l\sqrt{1-(u/c)^{2}}}{u}=\frac{1.8\times10^{5}\times0.6}{0.8\times3\times10^{8}}=4.5\times10^{-4}(\text{s})$$

解法 2：

设S'系静止，则 S 系沿x'轴正方向以$0.8c$的速度运动。由题意知：

$$\Delta x=1.8\times10^{5}\,\text{m}\qquad\qquad \Delta t=\frac{\Delta x}{u}$$

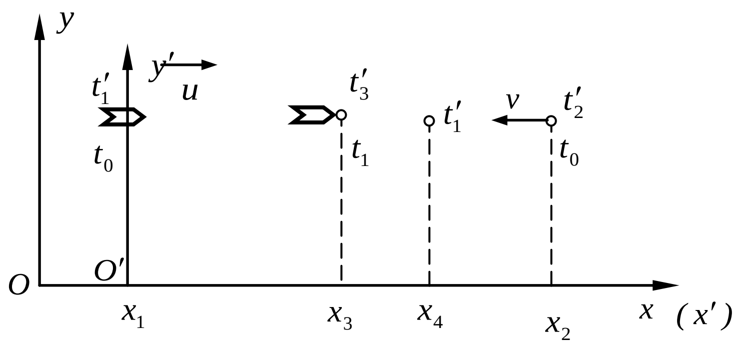
因此，由相对论时空间隔变换式得：

$$\Delta t'=\frac{\Delta t-\frac{u}{c^{2}}\Delta x}{\sqrt{1-(u/c)^{2}}}=\frac{\frac{\Delta x}{u}-\frac{u^{2}}{c^{2}}\frac{\Delta x}{u}}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^{2}}}=\frac{\Delta x}{u}\sqrt{1-(\frac{u}{c})^{2}}$$

$$=\frac{1.8\times10^{5}}{0.8\times3\times10^{8}}\times0.6=4.5\times10^{-4}\,\text{s}$$

17、解：建立地面参照系 S 及飞船参照系 S'，如图所示。开始飞船经过地面上 x_1 位置到达 x_3 位置与彗星相撞，这两个事件在飞船上观察是发生在同一地点，因此他们的时间间隔 $\Delta t'$ 为固有时，故

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2} = 5\times\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2} = 4\ \mathrm{s}$$



18、解：取地面为 S 系，飞船为 S' 系，以北京为 S 系的原点，北京至上海方向为 $x\,(x')$轴正向，如图所示。对甲乙两列车，$\Delta t_1 = 3.5\times10^{-3}\mathrm{s}$，$\Delta x_1 = 1.463\times10^{6}\,\mathrm{m}$。由时空间隔变换关系式有：

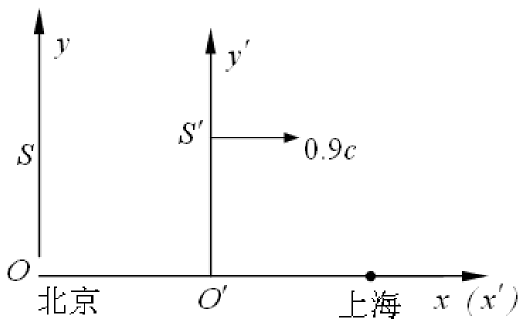
$$\Delta t_1' = \frac{\Delta t_1 - \dfrac{u}{c^2}\Delta x_1}{\sqrt{1-(\dfrac{u}{c})^2}} = \frac{3.5\times10^{-3} - \dfrac{0.9}{3\times10^{8}}\times1.463\times10^{6}}{\sqrt{1-0.9^2}} = -2.04\times10^{-3}(\mathrm{s}) < 0$$

表明在飞船中的宇航员测得北京站的甲车晚于上海站的乙车 $2.04\times10^{-3}(\mathrm{s})$ 发车，时序发生了颠倒。

对甲丙两列火车，$\Delta t_2 = \Delta t_1 = 3.5\times10^{-3}\mathrm{s}$，$\Delta x_2 = 0$，于是：

$$\Delta t_2' = \frac{\Delta t_2}{\sqrt{1-(\dfrac{u}{c})^2}} = \frac{3.5\times10^{-3}}{\sqrt{1-0.9^2}} = 8.03\times10^{-3}(\mathrm{s}) > 0$$

表明飞船中的宇航员测得丙车仍然是晚于甲车发车，两参照系的时序不变。



19、解： 由题意，$\Delta x = 1.0\times10^3\,\text{m}$，$\Delta t = 0$，$\Delta x' = 2.0\times10^3\,\text{m}$。因此，由相对论时空间隔变换式

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \qquad (1)$$

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} \qquad (2)$$

将数值代入式(1)，解得

$$u = \sqrt{1-(\frac{\Delta x}{\Delta x'})^2}\,c = \sqrt{1-(\frac{1.0\times10^3}{2.0\times10^3})^2}\,c = \frac{\sqrt{3}}{2}c$$

将$u = \frac{\sqrt{3}}{2}c$代入式(2)，得

$$\Delta t' = \frac{-\frac{u}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-(\frac{u}{c})^2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2\times3\times10^8}\times1.0\times10^3}{\sqrt{1-(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}} = -5.77\times10^{-6}\,\text{s}$$

试中的负号表示距原点的事件先发生。

20、解 由洛仑兹逆变换式，该事件在 S 系中的时空坐标为

$$x = \frac{x'+vt'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{65+0.6\times3\times10^8\times7.0\times10^{-8}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} = 97\ \text{m}$$

$$y = y' = 0$$

$$z = z' = 0$$

$$t = \frac{t'+\frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} = \frac{7.0\times10^{-8}+\frac{0.6\times65}{3\times10^8}}{\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2}} = 2.5\times10^{-7}\ \text{s}$$

三、问答题

1、解：一个封闭系统的总质量是守恒的，但不是静止质量守恒，而是相对论质量的守恒。正负电子湮灭时，产生两个γ光子。与正负电子相应的静质量全部转化为光子的动质量，总质量是守恒的。

2、证明： 设衰变后，两粒子的动量分别为 P_1 和 P_2 ，能量分别为 E_1 和 E_2 ，衰变过程中

动量守恒： $P_1 = P_2$ (1)

能量守恒： $mc^2 = E_1 + E_2$ (2)

由 $E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 P^2$，对 m_1 和 m_2 两粒子分别有

$$E_1^2 = m_1^2 c^4 + c^2 P_1^2 \quad (3)$$
$$E_2^2 = m_2^2 c^4 + c^2 P_2^2 \quad (4)$$

式(4)减去式(3)，并利用式(1)，得：

$$E_2^2 - E_1^2 = (m_2^2 - m_1^2)c^4 \quad (5)$$

对式(5)，利用式(2)得

$$E_2 - E_1 = \frac{(m_2^2 - m_1^2)c^2}{m} \quad (6)$$

式(2)减去式(6)，得

$$E_1 = \frac{m^2 + m_1^2 - m_2^2}{2m} c^2$$

式(2)加上式(6)，得

$$E_2 = \frac{m^2 - m_1^2 + m_2^2}{2m} c^2$$

证毕。

3、相对论的时空观认为时、空相互联系，时空同运动着的物质不可分割，这就否认了经典力学中时空相互独立的观念。相对论还认为时空度量具有相对性（时间膨胀、长度收缩），这就否认了经典力学中认为时空度量与参照系无关的概念。