模拟训练 III 参考答案

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1、设 $P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.76$，且 A 和 B 相互独立，则 $P(B)=$____0.6____。

2、设随机变量 $\xi\sim N(3,6)$，η 服从[0, 1]上的均匀分布，且 ξ 与 η 相互独立，则 $E(\xi\eta)=$________$\frac{3}{2}$____。

3、设随机变量 X 和 Y 分别服从泊松分布 $P(1)$ 和 $P(2)$，且相互独立，则 $P(X+Y\le 1)=$________$4e^{-3}$______。

4、设来自正态总体 $X\sim N(\mu,0.9^2)$ 容量为 9 的简单随机样本，其样本均值 $\bar{x}=5$，则未知参数 μ 的置信水平为 95%的置信区间为____(4.412,5.588)_______。（注：$z_{0.025}=1.96$）

5、已知 $X_1,\ldots,X_9$ 和 $Y_1,\ldots,Y_9$ 相互独立，且都服从 $N(0,1)$，则统计量 $W=(X_1+X_2+\cdots+X_9)\Big/\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}$ 服从_____$t(9)$______分布。

二、选择题（单项选择，每题 3 分，共 15 分）

1、已知 $P(A)=\frac{1}{2}, P(B|A)=\frac{1}{3}$，$P(A|B)=\frac{1}{4}$，则 $P(B)=$（ D ）

（A）$\frac{1}{6}$；（B）$\frac{1}{8}$；（C）$\frac{1}{12}$；（D）$\frac{2}{3}$。

2、n 张彩票中有 m 张是有奖的，今有 k 个人各买 1 张，则其中至少有 1 人中奖的概率是（ B ）

（A）$\frac{m}{C_n^k}$；（B）$1-\frac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$；（C）$\frac{C_m^1 C_{n-m}^{k-1}}{C_n^k}$；（D）$\sum_{i=1}^{k}\frac{C_m^i}{C_n^k}$。

3、设 $X\sim N(\mu,2^2)$，$Y\sim N(\mu,3^2)$，记 $P_1=P\{X\le\mu-2\}, P_2=P\{Y\ge\mu+3\}$，则（ A ）。

（A）对任意实数 μ，都有 $P_1=P_2$；（B）只对个别实数 μ，有 $P_1=P_2$；

（C）对任意实数 μ，都有 $P_1<P_2$；（D）只对任意实数 μ，有 $P_1>P_2$。

4、设随机变量 ξ,η 相互独立，其分布律为：

k	-1	1
$P\{\xi=k\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

k	-1	1
$P\{\eta=k\}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

则下列结论中正确的是（ C ）

（A）$\xi=\eta$；（B）$P\{\xi=\eta\}=0$；（C）$P\{\xi=\eta\}=\frac{1}{2}$；（D）$P\{\xi=\eta\}=1$。

5、在假设检验问题中，下列选项错误的是（ C ）

（A）在其他条件不变下，显著性水平 α 变小，则拒绝域范围缩小；

（B）在其他条件不变下，降低第一类错误概率，则会增加第二类错误概率；

（C）对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.01 下拒绝 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著性水平 0.05 下可能接受，也可能拒绝 H_0；

（D）显著性水平 α 的意义是：原假设 H_0 成立，经检验被拒绝的概率。

三（10 分）、设有 3 只箱子，第一只箱子里有 4 个黑球和 1 个白球；第二只箱子里有 3 个黑球和 3 个白球；第三只箱子里有 3 个黑球和 5 个白球，现随机地抽取一只箱子，再从这只箱子中随机地取出 1 球，试求：

（1）这个球是白球的概率；

（2）已知取出的是白球，此球属于第二只箱子的概率。

解：（1）设事件 A 表示“随机的取一箱子，并随机取出一球，此球为白球”，

B_i 表示“随机的取出一球，此球取自第 i 只箱子”， $i=1,2,3$，则 $P(B_i)=\frac{1}{3}$。（2 分）

由全概率公式得：

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)=\frac{1}{3}(\frac{1}{5}+\frac{3}{6}+\frac{5}{8})=\frac{53}{120}(\approx 0.4417)。$$ （4 分）

（2）由贝叶斯公式得：

$$P(B_2|A)=\frac{P(AB_2)}{P(A)}=\frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{6}\times\frac{1}{3}}{\frac{53}{120}}=\frac{20}{53}(\approx 0.3774)。$$ （4 分）

四（10 分）、设 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}Ae^{-2x}, & x\ge 0\\ 0, & 其它\end{cases}$，求：

（1）常数 A 的值；（2）计算 X 的分布函数；（3）$P(-1<X<1)$。

解：（1）
$$\because \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$
$$\therefore \int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}Ae^{-2x}dx=1\Rightarrow A=2$$ （3 分）

（2）$F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \int_0^x 2e^{-2t}dt=1-e^{-2x}, & x\ge 0\end{cases}$ （4 分）

（3）$P(-1<X<1)=\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}2e^{-2x}dx=1-e^{-2}$ （3 分）

五（10 分）、设离散型随机变量 ξ 的分布列为

ξ	-1	1	2
p	0.2	0.5	0.3

求：（1）ξ 的分布函数；（2）$P(-1\le\xi\le 2)$；（3）$E(\xi)$。

解：（1）$F(x)=P(\xi\le x)=\begin{cases}0, & x<-1\\ 0.2, & -1\le x<1\\ 0.7, & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x\end{cases}$ （4 分）

（2）$P(-1\le\xi\le 2)=F(2)-F(-1)+P(\xi=-1)=1-0.2+0.2=1$ （3 分）

或直接根据随机变量的取值范围确定概率为 1.

（3） $E(\xi)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i P_i=(-1)\times 0.2+1\times 0.5+2\times 0.3=0.9$ （3 分）

六（**10** 分）、设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度函数为：

$$f(x,\ y)=\begin{cases} be^{-(x+y)}, & 0<x<+\infty, 0<y<+\infty \\ 0, & \text{其他} \end{cases},$$

（1）试确定常数 b； （2）求 X 、Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$；

（3）判定 X 与 Y 是否相互独立，并给出理由。

解：（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dxdy=1$ （2 分）

$\therefore$ 有 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} be^{-(x+y)}dxdy=b\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dxdy=1\Rightarrow b=1$

（2） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dy=e^{-x}, x>0$

所以： $f_X(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ （3 分）

$f_Y(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\int_0^{+\infty} e^{-(x+y)}dx=e^{-y}, y>0$

所以： $f_Y(x)=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ （3 分）

（3）由于 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(x)$，所以 X 与 Y 是相互独立的。 （2 分）

七（**10** 分）、设随机变量 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 独立同分布，且 $\boldsymbol{X}$ 的分布律为

X	0	1
p_k	1/2	1/2

求：（1）随机变量 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律； （2） $D(X-Y)$； （3） $E(XY)$。

解：（1）根据 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 独立同分布，以及他们的分布律可以得到 X 与 Y 的联合分布律为：

X \ Y	0	1
0	0.25	0.25
1	0.25	0.25

则可以得到：

$Z=\max\{X,Y\}$	0	1	1	1
P	0.25	0.25	0.25	0.25

所以 $Z=\max\{X,Y\}$ 的分布律为

Z	0	1
P	0.25	0.75

(3 分)

（2）由于 X 与 Y 独立同分布，则：$D(X-Y)=D(X)+D(Y)=2D(X)$。

所以由：$D(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，

则 $D(X-Y)=D(X)+D(Y)=2D(X)=\frac{1}{2}$ （4 分）

（3）由于 X 与 Y 独立同分布，则：$E(XY)=E(X)E(Y)=(E(X))^2=\frac{1}{4}$ （3 分）

八（**10 分**）、设总体 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\frac{2x}{\lambda}e^{-\frac{x^2}{\lambda}}, & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$，其中 $\lambda>0$ 是未知参数，从总体 X 中抽取样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$。

求：（1）求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$；（2）判断 $\hat{\lambda}$ 是否为 λ 的无偏估计量。

解：（1）设样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一组取值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则似然函数

$$L(\lambda)=\begin{cases}(\frac{2}{\lambda})^n(\prod_{i=1}^n x_i)e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i^2}, & x_i>0, i=1,2,\ldots n,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

（2 分）

当 $x_i>0, i=1,2,\cdots,n$ 时，取对数得：$\ln L(\lambda)=n\ln 2-n\ln\lambda+\sum_{i=1}^n \ln x_i-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i^2$。

令 $\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^n x_i^2=0$， （3 分）

得 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2$. （1 分）

（2）由于 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\cdot\frac{2}{\lambda}xe^{-\frac{x^2}{\lambda}}dx=\lambda$， （2 分）

$E(\hat{\lambda})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2\right)=E(X^2)=\lambda$，即 $\hat{\lambda}$ 是 λ 的无偏估计量. （2 分）

九（**10 分**）、设某次考试的考生成绩服从正态分布，从中随机地抽取 36 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，样本标准差为 15 分，问在**显著性水平** α=0.05 下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？写出完整检验过程。

（$z_{0.05}=1.645$，$z_{0.025}=1.96$，$t_{0.05}(35)=1.69$，$t_{0.025}(35)=2.03$，$t_{0.05}(36)=1.688$，$t_{0.025}(36)=2.028$）

解：设该次考试的考生成绩为 X，则 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$。把从 X 中抽取的容量为 n 的样本均值记为 $\overline{X}$，样本标准差记为 S，本题是在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下检验假设：

$H_0: \mu = \mu_0 = 70$ ，$H_1: \mu \neq \mu_0$ （2 分）

因为方差未知，则在原假设成立的条件下，

统计量$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$， （2 分）

则根据$P\left(\left|\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)\right) = \alpha$ 可得：

拒绝域为$W = \left\{\left|\dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}\right| \geq t_{\alpha/2}(n-1)\right\}$。 （2 分）

而由所给数据得$n = 36$，$\bar{x} = 66.5$ ，$s = 15$， 代入上式得t统计量的观察值得：

$|t| = \dfrac{|66.5 - 70|}{15/\sqrt{36}} = 1.4$， 显然$|t| < t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(35) = 2.03$， （3 分）

所以接受原假设，即在显著性水平 0.05 下，可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分。 （1 分）