南京信息工程大学期末试卷参考答案

2021 — 2022 学年 第 一 学期 概率统计 课程试卷(B 卷)

本试卷共 2 页；考试时间 120 分钟；任课教师 统计系；出卷时间 2021 年 12 月

__________ 学院 __________ 专业 ______ 班

学号__________ 姓名__________ 得分______

一、填空题 （每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知两两相互独立的三个事件 A、B 和 C 满足：$ABC=\varnothing$，$P(A)=P(B)=P(C)<1/2$，且 $P(A\cup B\cup C)=9/16$，则 $P(A)=$ 1/4 .

2. 设离散型随机变量 $X\sim\pi(\lambda)$，已知 $P\{X=0\}=e^{-1}$，则 $P\{X\geq 2\}=$ $1-2e^{-1}$.

3. 已知随机变量 X 和 Y 满足：$D(X)=2$，$D(Y)=3$，$\operatorname{Cov}(X,Y)=-1$，则 $\operatorname{Cov}(3X-2Y,X+4Y)=$ -28 .

4. 设 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，记 $Y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$，则

$E(Y)=$ $\frac{n-1}{n}\sigma^2$.

5. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，已知样本均值 $\bar{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 (8.2, 10.8) .

二、选择题 （每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $P(A)>0,P(B)>0,P(A|B)=P(A)$，则下列结论不正确的有（ D ）.

（A） $P(B|A)=P(B)$ （B） $P(\bar{A}|\bar{B})=P(\bar{A})$

（C） A,B 相容 （D） A,B 互不相容

2. 设随机变量 $X_i\sim\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}(i=1,2)$，且 $P\{X_1X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}=$（ A ）.

（A）0 （B）1/4 （C）1/2 （D）1

3. 已知随机变量 $X\sim b(n,p)$，且 $E(X)=2.4,D(X)=1.44$，则参数 n,p 的值为（ B ）.

（A） $n=4,p=0.6$ （B） $n=6,p=0.4$.

（C） $n=8,p=0.3$ （D） $n=24,p=0.1$

4.（文）设 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim N(-1,1)$，且 X 与 Y 相互独立，则（ A ）.

（A） $P\{X+Y\leq -1\}=\frac{1}{2}$ （B） $P\{X+Y\leq 0\}=\frac{1}{2}$

（C） $P\{X-Y\le 0\}=\dfrac{1}{2}$　　　　（D） $P\{X-Y\le -1\}=\dfrac{1}{2}$

4.（理）设 $X\sim N(0,1)$， $Y\sim N(2,3)$，且 X 与 Y 相互独立，则由切比雪夫不等式可得 $P\{|X+Y-2|<4\}\ge$（ A ）.

（A）0.75　　（B）0.80　　（C）0.85　　（D）0.90

5. 在单个正态总体方差的假设检验中，μ 未知，α 为显著性水平，S^2 为样本方差，n 为样本容量，$H_0:\sigma^2\ge\sigma_0^2$；$H_1:\sigma^2<\sigma_0^2$，则拒绝域为（ B ）.

（A） $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$　　（B） $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

（C） $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\geqslant\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$　　（D） $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{\alpha}(n)$

三、计算题 （共 70 分）

1.（本题满分 10 分）某品牌设备发烫现象产生的原因有三种，分别是软件、电池以及主板故障. 长期维修记录统计显示，软件、电池和主板故障占比分别为 15%、80%和 5%，其中导致设备发烫的比例分别为 20%、10%和 30%。若新到一部存在发烫现象的该品牌设备，请判断产生该故障的最大可能原因.

解：设 A 表示设备发烫，$B_i(i=1,2,3)$ 分别表示软件、电池和主板故障，由题可得：

$P(B_1)=0.15$， $P(B_2)=0.80$， $P(B_3)=0.05$，

$P(A|B_1)=0.20$， $P(A|B_2)=0.10$， $P(A|B_3)=0.30$.

全概率公式：$P(A)=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)=0.125$.（4 分）

贝叶斯公式： $P(B_1|A)=\dfrac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A)}=\dfrac{0.20\times0.15}{0.125}=0.24$；

$P(B_2|A)=0.64$； $P(B_3|A)=0.12$.　　（5 分）

由上可见，产生该品牌设备发烫故障的最大可能来自电池故障.　　（1 分）

2.（本题满分 15 分）设 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}ax, & 0<x<1\\ b-x, & 1\le x<2\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，已知 $E(X)=1$，求：

（1）参数 a,b 的值；（2）$D(X)$；（3）$Y=2X-1$ 的概率密度函数.

解：（1） $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 axdx+\int_1^2(b-x)dx=\dfrac{a}{2}+b-\dfrac{3}{2}=1\Rightarrow a+2b=5$.　　（3 分）

$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^1 xaxdx+\int_1^2 x(b-x)dx=\dfrac{a}{3}+\dfrac{3b}{2}-\dfrac{7}{3}=1\Rightarrow 2a+9b=20$.（3 分）

由上可得： $a=1,b=2$.　　（2 分）

（2） $D(X)=E(X^2)\text{-}E^2(X)=\int_0^1 x^2xdx+\int_1^2 x^2(2-x)dx\text{-}1^2=\dfrac{7}{6}\text{-}1=\dfrac{1}{6}$.　　（3 分）

（3） $F_Y(y)=P(2X-1\le y)=P(X\le\dfrac{y+1}{2})=F_X(\dfrac{y+1}{2})$.　　（1 分）

$$\Rightarrow f_Y(y)=f_X(\frac{y+1}{2})\cdot\frac{1}{2}=\begin{cases}(y+1)/4, & -1<y<1\\ (3-y)/4, & 1\le y<3\\ 0, & others\end{cases}.$$ （3 分）

（如果按照公式法直接写出结果，类似按步骤给分）

3.（本题满分 15 分） 设数 X 在区间$(0,1)$上随机取值，当观察到 $X=x\,(0<x<1)$时，数Y 在区间$(x,1)$上随机取值，求：

（1）给定 $X=x\,(0<x<1)$条件下，Y的条件概率密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$；

（2）Y的概率密度函数 $f_Y(y)$，并判断X,Y是否独立；（3）$E[(1-X)Y^2]$.

解：（1）由题可知 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & others\end{cases}$，$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x<y<1\\ 0, & others\end{cases}$. （3 分）

（2）$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & 0<x<y<1\\ 0, & others\end{cases}$. （3 分）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^y\frac{1}{1-x}dx, & 0<y<1\\ 0, & others\end{cases}=\begin{cases}-\ln(1-y), & 0<y<1\\ 0, & others\end{cases}.$$ （4 分）

由于 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，可知两者不相互独立. （1 分）

（3） $E[(1-X)Y^2]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(1-x)y^2f(x,y)dxdy$ （2 分）

$$=\int_0^1\int_x^1(1-x)y^2\frac{1}{1-x}dxdy=\int_0^1[\int_x^1y^2dy]dx=\int_0^1\frac{1}{3}(1-x^3)dx=\frac{1}{4}.$$ （2 分）

4.（本题满分 10 分） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim N(0,\sigma^2)$ 的简单随机样本，令 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^nX_i$，$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$，求：（1）$E(\frac{1}{2}n\overline{X}^2+\frac{1}{2}S^2)$；（2）$D(X_1-\overline{X})$.

解：（1）$E(\frac{1}{2}n\overline{X}^2+\frac{1}{2}S^2)=\frac{1}{2}nE(\overline{X}^2)+\frac{1}{2}E(S^2)=\frac{1}{2}n(D(\overline{X})+E^2(\overline{X}))+\frac{1}{2}E(S^2)$

$$=\frac{1}{2}n(\frac{\sigma^2}{n}+0^2)+\frac{1}{2}\sigma^2=\sigma^2.$$ （5 分）

（2）$D(X_1-\overline{X})=D(X_1-\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n})=D(\frac{(n-1)}{n}X_1-\frac{1}{n}X_2-\cdots-\frac{1}{n}X_n)$

$$=\frac{(n-1)^2}{n^2}D(X_1)+\frac{1}{n^2}D(X_2)+\cdots+\frac{1}{n^2}D(X_n)$$

$$=\frac{(n-1)^2+(n-1)}{n^2}D(X)=\frac{n-1}{n}\sigma^2.$$ （5 分）

5.（本题满分 10 分） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自总体 $X\sim f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}$（$-\infty<x<+\infty$）的简单随机样本，其中$\mu_0$为已知常数，$\sigma^2>0$未知，（1）求参数$\sigma^2$的

最大似然估计量$\hat{\sigma}^2$；（2）验证$\hat{\sigma}^2$是否为σ^2的无偏估计量.

解：（1）似然函数：

$$L(\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}}]=(2\pi\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2}$$ （2 分）

取对数：$\ln L(\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi\sigma^2)-\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2\sigma^2}$ （1 分）

令$\frac{d\ln L(\sigma^2)}{d(\sigma^2)}=-\frac{n}{2\sigma^2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu_0)^2}{2(\sigma^2)^2}=\frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}[(x_i-\mu_0)^2-\sigma^2]=0$ （2 分）

解得$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_0)^2$. 因此，$\sigma^2$最大似然估计量为$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2$ （1 分）

（2）由$X_i\sim N(\mu_0,\sigma^2)$，可得$\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\sim N(0,1)$，$Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu_0}{\sigma}\right)^2\sim\chi^2(n)$ （1 分）

$$E(\hat{\sigma}^2)=\frac{1}{n}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu_0)^2\right]=\frac{1}{n}E\left(\sigma^2Y\right)=\frac{1}{n}\sigma^2E\left(Y\right)=\frac{1}{n}\sigma^2\cdot n=\sigma^2,$$

因此，$\hat{\sigma}^2$为σ^2的无偏估计量. （3 分）

6.（本题满分 10 分）根据以往经验，某自动车床生产的铜丝折断力指标服从正态分布，现随机抽取 9 根产品，测得其样本均值$\bar{x}=287.89$，样本方差$s^2=20.36$. 试问在显著性水平$\alpha=0.05$下，是否可相信该自动车床生产铜丝的折断力方差$\sigma^2=20$？（$\chi^2_{0.975}(8)=2.18$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.534$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.022$）

解：$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2=20, H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$. （2 分）

H_0为真时，$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$. （2 分）

拒绝域为：$(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\le\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1))\cup(\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\ge\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$. （2 分）

已知$\sigma_0^2=20$，$s^2=20.36$，$n=9$，$\alpha=0.05$，$\chi^2_{0.975}(8)=2.18$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.534$.

由于$2.18=\chi^2_{0.975}(8)<\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=\frac{8\times20.36}{20}=8.144<\chi^2_{0.025}(8)=17.534$， （3 分）

故接受H_0，即认为该自动车床生产铜丝的折断力方差为 20. （1 分）