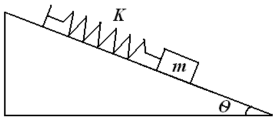
第 6 章 振动 答案

一、选择题

1、A； 2、C； 3、B； 4、D； 5、B； 6、A； 7、C；8、B； 9、B； 10、B；11、B；12、B；13、D；14、B

二、计算题

1、解：



设此时弹簧伸长量为 X_0

$mg\sin\theta = kX_0$ $X_0 = mg\sin\theta/k$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0,\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

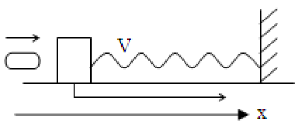
2、解：根据已知条件可以求得弹簧的劲度系数

$$k=\frac{F}{x}=\frac{10}{5.0\times10^{-2}}=2.0\times10^{2}\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$$

于是，振动系统的角频率为: $\varpi=\sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}=\sqrt{\frac{2.0\times10^{2}}{2.5}}\mathrm{rad\cdot s^{-1}}=8.9\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

所以，物体的振动周期为 $\mathrm{T}=\frac{2\pi}{\varpi}=7.0\times10^{-1}\mathrm{s}$

3、解：



$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=40\qquad mV_0=(M+m)V\qquad V=\frac{mV_0}{M+m}=2m/s$$

$\frac{1}{2}(m+M)V^2=\frac{1}{2}kA^2$； $A=0.05m$ $x=0.05\cos(40t-\frac{\pi}{2})$。

4、解：（1）将位移与时间的关系与简谐振动的一般形式：$x=A\cos(\varpi t+\varphi)$

相比较，可以得到角频率 $\varpi=\frac{5}{2}\pi$ /s, 频率 $\nu=\frac{\varpi}{2\pi}=\frac{5}{4}\mathrm{Hz}$, 周期 $\mathrm{T}=\frac{1}{\nu}=\frac{4}{5}\mathrm{s}$, 振幅

A=0.1m, 初相位 $\varphi=\frac{\pi}{3}$.

(2)t = 2 s 时质点的位移

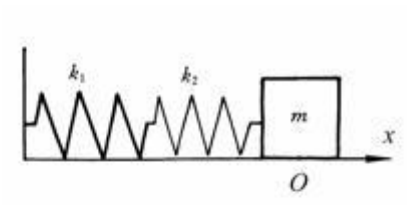
$$x = 0.1\cos(\frac{5\pi}{2}\times 2+\frac{\pi}{3})m = 0.1\cos(\pi+\frac{\pi}{3})m = -0.1\cos\frac{\pi}{3}m = -5.0\times 10^{-2}m$$

t = 2 s 时质点的速度

$$v = \frac{dx}{dt} = -0.25\pi\sin(\frac{5\pi}{2}t+\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{8}\pi ms^{-1} = 0.68m\cdot s^{-1}$$

t = 2 s 时质点的加速度 $a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\varpi^2 x = \frac{5\pi^2}{16}m\cdot s^{-2} = 31m\cdot s^{-2}$

5、解：



以平衡位置 O 为坐标原点，建立如图 6-6 所示的坐标系。当物体由原点 O 向右移动 x 时，弹簧 1 伸长了 x_1，弹簧 2 伸长了 x_2，并有

$$x = x_1 + x_2$$

物体所受的力为：$F = -k_1x_1 = -k_2x_2 = -kx = -k(x_1+x_2)$，

式中 k 是两个弹簧串联后的劲度系数。由上式可得

$$x_1 = \frac{F}{k_1}，\quad x_2 = -\frac{F}{k_2}$$

于是，物体所受的力可另写为：$F = -k(x_1+x_2) = k(\frac{F}{k_1}+\frac{F}{k_2})$

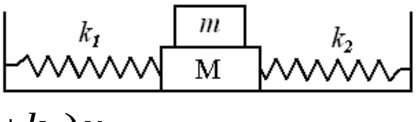
由上式可得：$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}$

所以 $k = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$

装置的振动角频率为：$\varpi = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$

装置的振动频率为：$\nu = \frac{\varpi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1k_2}{m(k_1+k_2)}}$

6、解：



$$-k_1x - k_2x = -(k_1+k_2)x$$

$$-(k_1+k_2)x = (M+m)a$$

$$a_{\max} = \frac{\mu mg}{m} = \mu g$$

$$x_{\max}=\frac{M+m}{k_1+k_2}\mu g$$

7、解：(1)将 $t=0$ 和 $x=-A$ 代入

$x=A\cos(\varpi t+\varphi)$， 得 $-A=A\cos\varphi$， $\therefore\cos\varphi=-1,\varphi=\pi$

(2)根据 $t=0,x=0$ 以及 $t=0,v>0$，可以得到

$A\cos\varphi=0$

$-\varpi A\sin\varphi>0$

由上两式可以解得

$\varphi=-\dfrac{\pi}{2}$

(3)由 $t=0,x=\dfrac{A}{2}$ 和 $v<0$ 可以得到 $\dfrac{A}{2}=A\cos\varphi$， $-\varpi A\sin\varphi<0$

由上两式可以解得 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

(4)由 $t=0,x=\dfrac{A}{\sqrt{2}}$ 和 $v>0$ 可以得到 $A\cos\varphi=\dfrac{A}{\sqrt{2}}$

$-\varpi A\sin\varphi>0$

由上两式可以解得 $\varphi=-\dfrac{\pi}{4}$

8、解：初相位为零的简谐振动可以表示为 $x=A\cos\varpi t$

振动系统的动能和势能可分别表示为

$E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}m\varpi^2A^2\sin^2\varpi t$； $E_p=\dfrac{1}{2}kx^2=\dfrac{1}{2}kA^2\cos^2\varpi t$

因为 $\varpi^2=\dfrac{k}{m}$，所以势能可以表示为 $E_p=\dfrac{1}{2}m\varpi^2A^2\cos^2\varpi t$

当 $E_k=E_p$ 时，应有 $\cos^2\varpi t=\sin^2\varpi t$，即 $2\sin^2\varpi t=1$，$\therefore\sin\varpi t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

由上式解得 $\varpi t=\dfrac{n\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4},n=0,1,2\ldots$

将 $\varpi={2\pi}/{T}$ 代入上式，得: $t=(\dfrac{n}{2}+\dfrac{1}{4})\dfrac{T}{2}=(\dfrac{n}{4}+\dfrac{1}{8})T,n=0,1,2\ldots.$

或 $t=(2n+1)\dfrac{T}{8},n=0,1,2\ldots.$

9、解：设物体的质量为 m，以平衡位置 O 为坐标原点建立如图 6-9 所示的坐标系。物体所受的力，有向下的重力 mg 和向上的支撑力 N，可以列出下面的运动方程

$N-mg=ma$ (1)

由简谐振动

$x=A\cos(\varpi t+\varphi)$

可以求得加速度 $a=-A\varpi^2\cos(\varpi t+\varphi)$

当振动达到最高点时，木板的加速度的大小也达到最大值，为

$a_{\max} = -A_{\max}\varpi^2$ (2)

负号表示加速度的方向向下。如果这时物体仍不脱离木板，物体就能够跟随木板一起上下振动。将式(2)代入式(1)，得

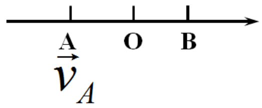
$$N = mg - mA_{\max}\varpi^2 \quad (3)$$

物体不脱离木板的条件是 $N \geq 0$

取其最小值，并代入式(3)，得 $mg = mA_{\max}\varpi^2$

于是可以求得物体和木板一起振动的最大振幅，为 $A_{\max} = \dfrac{g}{\varpi^2} = \dfrac{g}{4\pi^2\nu^2}$

10、解：



由 A、B 两点具有相同的速率，则有 A、B 两点分别处于平衡位置对称的两侧，又因为 AB=10cm，故 OA=5cm OB=5cm，即 x_A=－ 0.05， x_B=0.05

设 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

t=0 时 $-0.05 = A\cos(\varphi_0)$

t=1s 时 $0 = A\cos(\omega + \varphi_0)$

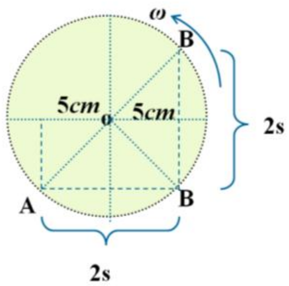
t=2s 时 $0.05 = A\cos(2\omega + \varphi_0)$

$\omega = \dfrac{\pi}{2}/2 = \dfrac{\pi}{4}$，结合速度 v_A>0，故：$\varphi_0 = \dfrac{5}{4}\pi$ $A = 5\sqrt{2}cm$

$\therefore x = 5\sqrt{2}\times 10^{-2}\cos(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{5}{4}\pi)$，$v = \dfrac{dx}{dt} = -5\sqrt{2}\times 10^{-2}\dfrac{\pi}{4}\sin(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{5}{4}\pi)$

$v_0 = -5\sqrt{2}\times 10^{-2}\times\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{5}{4}\pi = 3.925\times 10^{-2}\ \mathrm{m/s}$

另解：旋转矢量法，

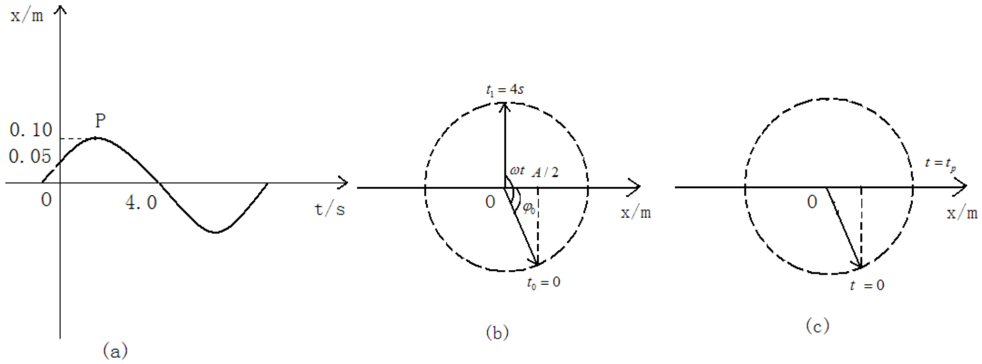


由图可知 $A = 5\sqrt{2}cm$，$\varphi_0 = \dfrac{5}{4}\pi$，$\omega = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{2} = \dfrac{\pi}{4}$

$\therefore x = 5\sqrt{2}\times 10^{-2}\cos(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{5}{4}\pi)$，$v = \dfrac{dx}{dt} = -5\sqrt{2}\times 10^{-2}\dfrac{\pi}{4}\sin(\dfrac{\pi}{4}t + \dfrac{5}{4}\pi)$

$v_0 = -5\sqrt{2}\times 10^{-2}\times\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{5}{4}\pi = 3.925\times 10^{-2}\ \mathrm{m/s}$

11、解：



（1）设 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

由图可知，$A = 0.1m$，$\varphi_0 = \arccos\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$，$\omega = (\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3})/4 = \frac{5}{24}\pi$

故：$x = 0.1\cos(\frac{5}{24}\pi t - \frac{\pi}{3})$

（2）$\varphi_p = 0$

（3）$\varphi_p = \frac{5}{24}\pi t - \frac{\pi}{3} = 0$，$t = \frac{8}{5} = 1.6s$

12、解：（1）$a_{\max} = A\omega^2 = A(\frac{2\pi}{T})^2$

$T^2 = (2\pi)^2 A / a_{\max} = (2\pi)^2 \times 1\times 10^{-2}/4$，$T = 0.314s$

（2）$E = \frac{1}{2}kA^2$，$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T}$，$k = (2\pi)^2 m/T^2 = (2\pi)^2 \times 0.1/0.314^2 = 40$

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\times 40\times(1\times10^{-2})^2 = 2\times10^{-3}J = E_k$$

（3）$E_k = E_p$，$\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \varphi_0) = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)$

$$\tan^2(\omega t+\varphi_0) = k/(m\omega^2) = 40/(0.1\times(\frac{2\pi}{0.314})^2) = 1,\quad \omega t + \varphi_0 = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore x = A\cos(\omega t+\varphi_0) = 1.0\times10^{-2}\times\cos(k\pi+\frac{\pi}{4}) = \pm 0.707\times10^{-2}m$$

（4）$x = A\cos(\omega t+\varphi_0) = \frac{1}{2}A$，$\omega t+\varphi_0 = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$

$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi_0) = \frac{1}{4}E$

$E_k = E - E_p = \frac{3}{4}E$

13、解：（1）$x = 0.1\cos(8\pi t + \frac{2}{3}\pi)$

由波动表达式可知：$A = 0.1\text{m}$，$\varphi_0 = \frac{2}{3}\pi$，$T = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4}s$

$v_{\max}=A\omega=0.8\pi=2.51m/s$， $a_{\max}=A\omega^2=0.1\times(8\pi)^2=63.1m/s$

（2） $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$， $k=\omega^2/m=(8\pi)^2\times10\times10^{-3}=6.31$

$f_{\max}=kA=6.31\times0.1=0.631N$

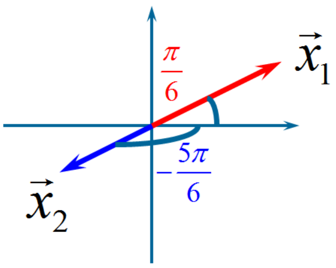
$E_p=\dfrac{1}{2}kA^2=\dfrac{1}{2}\times6.31\times0.1^2=3.16\times10^{-2}J$

$\overline{E_k}=\overline{E_p}=\dfrac{1}{4}kA^2=1.58\times10^{-2}J$

$E_k=E_p=\dfrac{1}{2}E=\dfrac{1}{4}kA^2=\dfrac{1}{2}kx^2$， $x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}A=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{20}m$

（3） $\Delta\varphi=8\pi t_2+\dfrac{2}{3}\pi-(8\pi t_1+\dfrac{2}{3}\pi)=8\pi(t_2-t_1)=32\pi$

14、解：（1）旋转矢量法，由 x_1 和 x_2 两个矢量合成可得 $x=0.1\cos(2t+\dfrac{\pi}{6})$



（2）振动合成法

$x=x_1+x_2=0.4\cos(2t+\dfrac{\pi}{6})+0.3\cos(2t-\dfrac{5\pi}{6})$

$=0.4(\cos2t\cos\dfrac{\pi}{6}-\sin2t\sin\dfrac{\pi}{6})+0.3(\cos2t\cos(-\dfrac{5\pi}{6})-\sin2t\sin(-\dfrac{5\pi}{6}))$

$=0.1\cos2t\cos\dfrac{\pi}{6}-0.1\sin2t\sin\dfrac{\pi}{6}$

$=0.1\cos(2t+\dfrac{\pi}{6})$