

模拟训练 II

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

- 1、设随机事件 A 、 B 相互独立， $P(B)=0.5$ ， $P(A-B)=0.3$ ，则 $P(B-A)=\underline{0.2}$ 。
- 2、已知随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P(X=E(X))=\underline{e^{-1}}$ 。
- 3、已知随机变量 X 、 Y 相互独立，且 $X \sim N(2,3)$ ， $Y \sim N(1,2)$ ，则随机变量 $Z=2X-3Y+1 \sim \underline{N(2,30)}$ 。
- 4、已知 X_1, X_2, \dots, X_n 为正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本， \bar{X} 和 S^2 为样本均值和样本方差，若 $T = \bar{X} - S^2$ ，则 $E(T) = \underline{\mu - \sigma^2}$ 。
- 5、已知 X_1, X_2, \dots, X_n 为正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本， \bar{X} 和 S^2 为样本均值和样本方差，则在显著性水平 α 下假设检验 $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ， $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$ 的拒绝域为：

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_{\alpha}^2(n-1) \text{。 (这题注意不同表达方式)}$$

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

- 1、某人向同一目标独立重复射击，每次命中目标的概率为 p ，则此人射击直至第 4 次才恰有 2 次命中目标的概率为 (C)。
- (A) $3p(1-p)^2$ ； (B) $6p(1-p)^2$ ； (C) $3p^2(1-p)^2$ ； (D) $6p^2(1-p)^2$ 。
- 2、已知随机变量 X 、 Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$ ，则 $Z = \min(X, Y)$ 分布函数为 (C)。
- (A) $[F(x)]^2$ ； (B) $F(x)F(y)$ ； (C) $1-[1-F(x)]^2$ ； (D) $[1-F(x)]^2$ 。
- 3、设随机变量 X 、 Y 独立同分布，且服从 $U(0,1)$ 分布，记 $U = X + Y$ ， $V = X - Y$ ，则 U 、 V 协方差为 (B)。
- (A) -1； (B) 0； (C) 1/2； (D) 1。
- 4、设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本， \bar{X} 为样本均值，记： $S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ， $S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ，

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, \quad S_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2,$$

则下面服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是 (B)。

(A) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1 / \sqrt{n-1}}$ ； (B) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}}$ ； (C) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_3 / \sqrt{n}}$ ； (D) $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_4 / \sqrt{n}}$ 。

- 5、已知正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (σ^2 已知)，此外对于任意 α ，有数 z_α 满足 $P(X > z_\alpha) = \alpha$ 。现利用检验统计量 Z 对数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著水平 0.05 下拒绝 $H_0: \mu = \mu_0$ ，但在显著水平 0.01 下接受 H_0 ，则检验统计量的观察值 z 必须满足 (B)：

- (A) $|z| > z_{0.025}$; (B) $z_{0.025} < |z| < z_{0.005}$; (C) $|z| > z_{0.005}$; (D) $z_{0.005} < |z| < z_{0.025}$

三 (10分)、根据以往的临床记录，某种诊断癌症的试验具有如下的效果：如果被诊断者患有癌症，则试验结果呈现阳性的概率为 0.95，反之如果该诊断者不患有癌症，则试验结果呈现阴性的概率也为 0.95。现在对一批人群进行普查，设被试验的人患有癌症的比例为 0.005，试求：(1) 这批人检测呈现阳性的概率；(2) 假设某人检验为阳性，则其患有癌症的概率。

解：设 A 表示“试验结果呈现阳性”， C 表示“被诊断者患有癌症”，

$$\text{由题可得: } P(C) = 0.005, \quad P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0.995, \\ P(A|C) = 0.95, \quad P(A|\bar{C}) = 1 - P(\bar{A}|\bar{C}) = 1 - 0.95 = 0.05, \quad (2 \text{ 分})$$

(1) 由全概率公式，可得这批人检测呈现阳性的概率为：

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C}) \\ &= 0.005 * 0.95 + 0.995 * 0.05 \\ &= 0.00475 + 0.04975 \\ &= 0.0545 \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 由贝叶斯公式，可得若某人检验为阳性，则患有癌症的概率为：

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C})} = \frac{0.00475}{0.0545} \approx 0.087 \quad (4 \text{ 分})$$

四 (15分)、设 X 的密度函数为 $f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 1 \\ b-x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ，已知 $E(X) = 1$ ，

(1) 求参数 a, b 的值；(2) 计算 $D(X)$ ；(3) 求 $Y = 2X - 1$ 的概率密度函数。

解：(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ ，可得：

$$\int_0^1 ax dx + \int_1^2 (b-x) dx = \frac{a}{2} + b - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow a+2b=5 \quad ① \quad (3 \text{ 分})$$

由 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 1$ ，可得：

$$\int_0^1 xax dx + \int_1^2 x(b-x) dx = \frac{a}{3} + \frac{3b}{2} - \frac{7}{3} = 1 \Rightarrow 2a+9b=20 \quad ② \quad (3 \text{ 分})$$

由①、②可得： $a=1, b=2$ 。 (2 分)

(2) $D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_0^1 x^2 x dx + \int_1^2 x^2 (2-x) dx - 1^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}$ (3 分)

(3) $F_Y(y) = P(2X-1 \leq y) = P\left(X \leq \frac{y+1}{2}\right) = F_X\left(\frac{y+1}{2}\right)$ (1 分)

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{y+1}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} (y+1)/4, & -1 < y < 1 \\ (3-y)/4, & 1 \leq y < 3 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

(如果按照公式法直接写出结果, 类似按步骤给分)

五 (15 分)、二维随机变量 (X, Y) 的分布律为:

	Y	0	1
X		0.4	a
1	b		0.1

已知随机事件 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 求:

- (1) 参数 a, b 的值; (2) $Z = X + Y$ 的分布律; (3) $E(XY)$ 。

解: (1) 利用 $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$, 可得 $a + b + 0.4 + 0.1 = 1 \Rightarrow a + b = 0.5$ ① (3 分)

利用 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立, 可得

$$P\{X=0, X+Y=1\} = P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$$

$$\Rightarrow a = (0.4 + a)(a + b) \quad \text{②} \quad (3 \text{ 分})$$

由①、②可得: $a = 0.4, b = 0.1$ 。 (2 分)

(2) (3 分)

$Z = X + Y$	0	1	2
p_k	0.4	0.5	0.1

$$(3) E(XY) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j p_{ij} = 0 \times 0 \times 0.4 + 0 \times 1 \times 0.4 + 1 \times 0 \times 0.1 + 1 \times 1 \times 0.1 = 0.1 \quad (4 \text{ 分})$$

(也可以先计算 $Z = XY$ 的分布律, 然后计算其期望)

六 (10 分)、设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 < y < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

- (1) 求 X 、 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$;

- (2) 判定两者是否相互独立, 并给出理由。

$$\text{解: (1)} \quad f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6dy, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} = \begin{cases} 6(x-x^2), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} = \begin{cases} 6(\sqrt{y}-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 由于 $f(x,y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 可知两者不相互独立。 (2 分)

七 (10 分)、设 X_1, X_2, \dots, X_n 是正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的一组简单随机样本, 试求参数 μ, σ^2 的极大似然估计量。

解: X 的概率密度函数为: $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(x-\mu)^2/2\sigma^2)$ (2 分)

似然函数为:

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(x_i - \mu)^2/2\sigma^2) \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(\sum_{i=1}^n -(x_i - \mu)^2/2\sigma^2\right) \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

对数似然函数为:

$$l(\mu, \sigma^2) = \ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{令: } \begin{cases} \frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} [\sum_{i=1}^n x_i - n\mu] = 0, \\ \frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0, \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{可得 } \mu, \sigma^2 \text{ 的极大似然估计量: } \hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2 \text{ 分})$$

八(10分)、某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的平均长度为 10.5cm, 标准差是 0.15cm, 今从一批产品中随机的抽取 9 段进行测量, 测得其平均长度为 10.48, 假定切割的长度服从正态分布, 且标准差没有变化, 试问该机工作是否正常? 写出完整检验过程 (显著性水平为 $\alpha=0.05$)。 ($z_{0.05} = 1.645, z_{0.025} = 1.96, t_{0.05}(8) = 1.86, t_{0.025}(8) = 2.306$)

解: 根据题意给出原假设和备择假设: $H_0: \mu = \mu_0 = 10.5, H_1: \mu \neq 10.5$ (2 分)

方差 σ^2 已知, 取检验统计量: $Z = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma / \sqrt{n}}$, 在 H_0 成立条件下: $Z \sim N(0,1)$ (2 分)

显著性水平 $\alpha=0.05$ 下, 拒绝域为: $R = \{z \mid z \geq z_{0.025} = 1.96\}$ (2 分)

代入数据, 可得 $|z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{10.48 - 10.5}{0.15 / \sqrt{9}} \right| = 0.4 < z_{0.025} = 1.96$, 落在接受域, 接受原假设, 认为当前该机工作正常。 (4 分)

注: 本题也可根据置信区间和假设检验接受域的对偶关系求解。

INUIST-2020