第 11 章 静电场中的导体和电介质

一、选择题

1．B　　2．B　　3．D　　4．D　　5．C
6．C　　7．B　　8．C　　9．B　　10．B
11．A　　12．C　　13．A　　14．C　　15．C
16．C　　17．D　　18．C　　19．C　　20．B
21．A　　22．B　　23．D　　24．B　　25．C

二、计算题

1．解：（1）因 3 块导体板靠的很近，可将 6 个导体表面视为 6 个无限大带电平面。导体表面电荷分布可认为是均匀的，且其间的场强方向垂直于导体表面。作如图虚线所示的圆柱形高斯面，因导体在达到静平衡后，内部场强为零，又导体外的场强方向与高斯面的侧面平行，故由高斯定理可得

$$\sigma_2 = -\sigma_3 \qquad \sigma_4 = -\sigma_5$$

再由导体板 A 内 d 点场强为零，可知

$$E_d = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_5}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_6}{2\varepsilon_0} = 0$$

所以 $\sigma_1 = \sigma_6$.

故点 a 的场强为 6 个导体表面产生场强的代数和

$$E_a = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{6}\sigma_i = \frac{1}{2\varepsilon_0}（-\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 - \sigma_5 - \sigma_6）= -\frac{Q_1+Q_2+Q_3}{2\varepsilon_0 S}$$

根据上述已有结果，可知 $\sigma_1 = \sigma_6 = \dfrac{Q_1+Q_2+Q_3}{2S}$

再由于 $\sigma_1 + \sigma_2 = \dfrac{Q_1}{S} \qquad \sigma_3 + \sigma_4 = \dfrac{Q_2}{S}$

得 $$\sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1}{S} - \sigma_1 = \frac{Q_1-Q_2-Q_3}{2S}$$

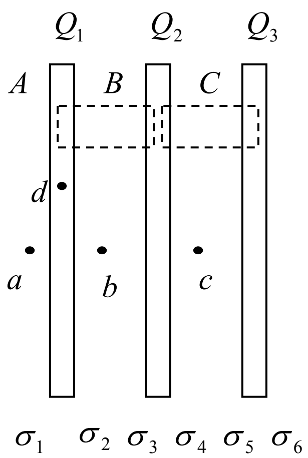
$$\sigma_4 = -\sigma_5 = \frac{Q_2}{S} - \sigma_3 = \frac{Q_1+Q_2-Q_3}{2S}$$

（2）a、b、c 点的场强

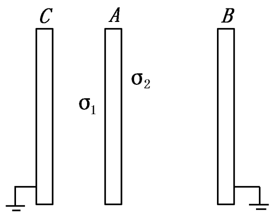
$$E_a = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sum\sigma_i = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = -\frac{Q_1+Q_2+Q_3}{2\varepsilon_0 S}$$

同理 $$E_b = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sum\sigma_i = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1-Q_2-Q_3}{2\varepsilon_0 S}$$

$$E_c = \frac{1}{2\varepsilon_0}\sum\sigma_i = -\frac{\sigma_5}{\varepsilon_0} = \frac{Q_1+Q_2-Q_3}{2\varepsilon_0 S}$$



2．解：



如题图示，令 A 板左侧面电荷面密度为 σ_1，右侧面电荷面密度为 σ_2

（1）　∵　　$U_{AC}=U_{AB}$，即 $E_{AC}\cdot d_{AC}=E_{AB}\cdot d_{AB}$，

又∵
$$E_{AC}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0},\quad E_{AB}=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}$$

∴
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2}=\frac{E_{AC}}{E_{AB}}=\frac{d_{AB}}{d_{AC}}=2$$

且
$$\sigma_1+\sigma_2=\frac{q_A}{S}$$

得
$$\sigma_2=\frac{q_A}{3S},\quad \sigma_1=\frac{2q_A}{3S}$$

而
$$q_C=-\sigma_1 S=-\frac{2}{3}q_A=-2\times10^{-7}\ \mathrm{C},\quad q_B=-\sigma_2 S=-\frac{1}{3}q_A=-1\times10^{-7}\ \mathrm{C}$$

（2）$U_A=E_{AC}\cdot d_{AC}=\dfrac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\cdot d_{AC}=2.3\times10^{3}\ \mathrm{V}$

3．解：根据静电平衡时电荷的分布，可知电场分布呈球对称。

内球壳带电量为 q， 取同心球面为高斯面，由高斯定理
$$\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E(r)\cdot4\pi r^2=\sum q/\varepsilon_0$$
根据不同半径的高斯面内的电荷分布，解得各区域内的电场分布为：

$r<R_1$ 时：$E_1(r)=0$

$R_1<r<R_2$ 时：$E_2(r)=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$r>R_2$ 时：$E_3(r)=\dfrac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

由电场强度与电势的积分关系，可得各相应区域内的电势分布：

$r < R_1$时，

$$U_1=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R_1}\vec{E}_1\cdot d\vec{l}+\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_3\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

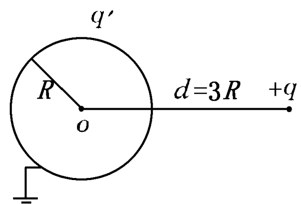
$R_1 < r < R_2$ 时，

$$U_2=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}=\int_r^{R_2}\vec{E}_2\cdot d\vec{l}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_3\cdot d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$R > R_2$ 时，

$$U_3=\int_r^{\infty}\vec{E}_3\cdot d\vec{l}=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

4．



解：如题图所示，设金属球感应电荷为 q'，则球接地时电势 $U_o=0$

由电势叠加原理有：$U_O=\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}+\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 3R}=0$

得　$q'=-\dfrac{q}{3}$

5．解：利用有介质时的高斯定理 $\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\sum_{S内} q_0$ 及 $\vec{D}=\varepsilon_r\varepsilon_0\vec{E}$，得

（1）介质内（$R_1<r<R_2$）场强

$$\vec{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r},\quad \vec{E}_{内}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}\hat{r}$$

介质外（$r>R_2$）场强

$$\vec{D}=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{r},\quad \vec{E}_{外}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

（2）介质外（$r>R_2$）电势

$$U=\int_r^{\infty}\vec{E}_{外}\cdot d\vec{r}=\int_r^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

介质内（$R_1 < r < R_2$）电势

$$\begin{aligned}U&=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{R_2}\vec{E}_{内}\cdot d\vec{r}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_{外}\cdot d\vec{r}\\&=\int_r^{R_2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr+\int_{R_2}^{\infty}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2}\\&=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2}\left(\frac{1}{r}-\frac{\varepsilon_r-1}{R_2}\right)\end{aligned}$$

（3）金属球的电势

$$U=\int_{R_1}^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\vec{E}_{内}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{R_2}^{\infty}\vec{E}_{外}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}R_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}-1}{R_2}\right)$$

6．解：由介质中的高斯定理：

$$\int\vec{D}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum q_0$$

$$D\cdot\Delta S=\sigma_0\Delta S$$

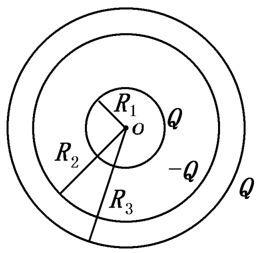
$$D=\sigma_0=4.5\times10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}$$

$$E=\frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{r}}}=2.5\times10^{6}\ \mathrm{V/m}$$

$$P=(\varepsilon_{\mathrm{r}}-1)\varepsilon_0E=D-\varepsilon_0E=2.3\times10^{-5}\ \mathrm{C/m^2}$$

$\vec{D}$、$\vec{E}$ 和 $\vec{P}$ 的方向相同，均垂直向下。

7．解:



如图，内球带电 Q，外球壳内表面带电-Q，外表面带电 Q

（1）在 $r<R_1$ 和 $R_2<r<R_3$ 区域：$\vec{E}=0$

在 $R_1<r<R_2$ 区域：$\vec{E}_1=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\hat{r}$

在 $r>R_3$ 区域：$\vec{E}_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\hat{r}$

∴ 在 $R_1<r<R_2$ 区域：$W_{\mathrm{e1}}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{2}\varepsilon_0(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2})^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q^2\mathrm{d}r}{8\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})$

在 $r>R_3$ 区域：$W_{\mathrm{e2}}=\int_{R_3}^{\infty}\frac{1}{2}\varepsilon_0(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2})^2 4\pi r^2\mathrm{d}r=\int_{R_3}^{\infty}\frac{Q^2\mathrm{d}r}{8\pi\varepsilon_0r^2}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_3}$

∴ 总能量：$W_{\mathrm{e}}=W_{\mathrm{e1}}+W_{\mathrm{e2}}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3})=1.82\times10^{-4}\ \mathrm{J}$

（2）导体壳接地时，只有 $R_1<r<R_2$ 区域：$\vec{E}_1=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\hat{r}$

而在 $r>R_3$ 区域：$\vec{E}_2=0$，所以 $W_{\mathrm{e2}}=0$。

∴ 总能量：$W_{\mathrm{e}}=W_{\mathrm{e1}}=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2})=1.01\times10^{-4}\ \mathrm{J}$

（3）电容器电容：$C=\dfrac{2W_{\mathrm{e1}}}{Q^2}=\dfrac{4\pi\varepsilon_0R_1R_2}{R_2-R_1}=4.99\times10^{-12}\ \mathrm{F}$。

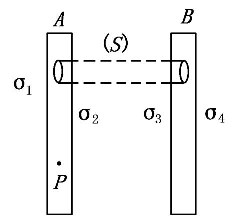
三、问答题

1．关键是题目中两个表达式中的σ不是一回事。下面为了讨论方便，我们把导体表面的电荷密度改为σ'，其附近的场强则为写成$E=\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$。

对于无限大均匀带电平面（面电荷密度为σ），两侧场强为$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$，这里的$\sigma$是指带电平面单位面积上所带的电荷。对静电平衡状态下的导体，其表面附近的场强为$E=\dfrac{\sigma'}{\varepsilon_0}$，这里的$\sigma'$是指带电导体表面某处单位面积上所带的电荷。

如果无限大均匀带电平面是一个静电平衡状态下的无限大均匀带电导体板，则σ是此导体板的单位面积上（包含导体板的两个表面）所带的电荷，而σ'仅是导体板的一个表面单位面积上所带的电荷。在空间仅有此导体板（即导体板旁没有其他电荷和其他电场）的情形下，导体板的表面上电荷均匀分布，且有两表面上的面电荷密度相等，在此情形下两个电荷密度之间的关系为$\sigma=2\sigma'$，这样，题目中的两个E式就统一了。

2．解：



如图所示，设两导体A、B的四个平面均匀带电的电荷面密度依次为σ_1、σ_2、σ_3、σ_4。

（1）则取与平面垂直且底面分别在A、B内部的闭合柱面为高斯面时，有

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=(\sigma_2+\sigma_3)\cdot \Delta S=0$$

$$\therefore \qquad \sigma_2+\sigma_3=0$$

说明相向两面上电荷面密度大小相等、符号相反；

（2）在导体A内部任取一点P，则其场强为零，并且它是由四个均匀带电平面产生的场强叠加而成的，即

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

又∵ $$\sigma_2+\sigma_3=0$$

∴ $$\sigma_1=\sigma_4$$

说明相背两面上电荷面密度总是大小相等，符号相同。

3．① 机理：静电感应是导体中的自由电子在电场力的作用下的宏观移动，使导体上的电荷整体达到一种新的分布状态；而电介质的极化则是分子在电场力的作用下的取向极化或位移极化，介质中的分子并未出现宏观的迁移。

② 电荷分布：导体达到静电平衡后电荷只分布在导体的表面，导体内电荷体密度为零；对于均匀各向同性电介质，介质极化后，极化电荷亦只分布在介质的表面，介质内部的体电荷密度亦为零。

③ 电场分布：导体达到静电平衡后其内部电场强度处处为零，导体表面附近的电场强

度方向处处垂直于导体表面，大小与表面处的电荷密度呈正比；电介质极化后极化电荷在介质内部产生反向电场，使介质中的场强减弱，但不为零。

4．电势能是电场中相对于电势零点的电势高低而具有的能量，其具体大小与势能零点的选择有关；电容器存储的能量是由充电过程中非静电力克服静电场力做功而储存在电容器中的能量；电场的能量是以场的形式储存在电场空间中的能量。电势能、电容器存储的能量归根结底都是电场的能量。