南京信息工程大学期末试卷答案暨评分标准

2020－ 2021 学年 第 二 学期 概率统计 课程试卷(A 卷)

一、填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 已知事件 A、B、C 满足 $P(ABC)=0.04$，$P(C\mid AB)=0.25$，$P(B)=4P(A)$，且 A、B 相互独立，则 $P(A\cup B)=$ __0.84__.

2. 已知随机变量 X、Y 相互独立且都服从 $N(0,1)$，则 $E[(X+Y)^2]=$ __2__.

3. 已知随机变量 $X\sim\pi(\lambda)$，且 $E(X)=3$，则 $P\{X=1\}=$ __$3e^{-3}$__.

4. 已知 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自于标准正态总体的简单随机样本，则 $\dfrac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$ 服从 __$t(2)$__ 分布.

5. 已知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自于总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，测得样本均值 $\overline{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 __(8.2, 10.8)__.（注：本小题中的双侧置信区间，其区间长度最短.）

二、选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=ke^{-|x|}$，$-\infty<x<\infty$，则 $k=$（ C ）.

（A）0.25　　（B）1　　（C）0.5　　（D）2

2. 已知二维随机变量 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)$，关于 X 和 Y 的边缘分布函数分别为 $F_X(x)$、$F_Y(y)$，则 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布函数为（ D ）.

（A）$1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$　　（B）$F(z,z)$

（C）$1-P\{X>x,Y>y\}$　　（D）$1-P\{X>z,Y>z\}$

3. 已知 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 是来自于总体 X 的简单随机样本，其中 $P\{X=-1\}=P\{X=1\}=0.5$，记 $\Phi(x)$ 表示标准正态分布的分布函数，则根据中心极限定理可知 $P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\le 30\right\}\approx$（ A ）.

（A）$\Phi(3)$　　（B）$1-\Phi(3)$　　（C）$\Phi(0.3)$　　（D）$1-\Phi(0.3)$

4. 已知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自于总体 X 的简单随机样本，且 $E(X)=0$，$D(X)=\sigma^2$，记 $\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则下述选项（ B ）是 σ^2 的无偏估计量.

（A）$n\overline{X}^2+S^2$　　（B）$\dfrac{1}{2}n\overline{X}^2+\dfrac{1}{2}S^2$　　（C）$\dfrac{1}{3}n\overline{X}^2+S^2$　　（D）$\dfrac{1}{4}n\overline{X}^2+\dfrac{1}{4}S^2$

5. 对正态总体的均值 μ 进行双边假设检验，如果在显著性水平 0.01 下拒绝原假设 $H_0:\mu=\mu_0$，那

么在显著性水平 0.05 下，下列结论中正确的是（　C　）.

（A）必接受 H_0　（B）不接受 H_0 也不拒绝 H_0　（C）必拒绝 H_0　（D）无法判断

三、计算题（共 70 分）

1.（本题 10 分）某保险公司推出住院保险业务，把投保人分为三类："非常健康的"、"健康的"和"亚健康的"，已知这三类投保人占比分别是 0.20、0.50、0.30. 统计资料表明，上述三类投保人住院的概率分别是 0.05、0.15、0.30. 若某投保人住院了，求该投保人是"亚健康的"概率为多少？

解：设事件 A 表示"某投保人住院"，事件 B_1 表示"该投保人是非常健康的"，事件 B_2 表示"该投保人是健康的"，事件 B_3 表示"该投保人是亚健康的".

由题可得: $P(B_1)=\frac{1}{5}$，$P(B_2)=\frac{1}{2}$，$P(B_3)=\frac{3}{10}$，

$P(A|B_1)=0.05$，$P(A|B_2)=0.15$，$P(A|B_3)=0.3$.　（2 分）

由全概率公式，可得某投保人住院的概率为：

$$\begin{aligned}P(A)&=P(A|B_1)P(B_1)+P(A|B_2)P(B_2)+P(A|B_3)P(B_3)\\&=\frac{1}{5}\times0.05+\frac{1}{2}\times0.15+\frac{3}{10}\times0.3\\&=\frac{7}{40}(=0.175).\end{aligned}$$

（4 分）

由贝叶斯公式，可得某投保人住院了，他是"亚健康的"概率为：

$$P(B_3|A)=\frac{P(A|B_3)P(B_3)}{P(A)}=\frac{3}{10}\times\frac{3}{10}\Big/\frac{7}{40}=\frac{18}{35}(\approx0.514\ ).$$

（4 分）

2.（本题 10 分）已知连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}a+be^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 求：

（1）常数 a、b 的值；（2）X 的概率密度 $f(x)$；（3）$P\left\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right\}$.

解：（1）由 $\lim\limits_{x\to0^+}F(x)=F(0)=0, F(\infty)=1$，有

$$\begin{cases}a+b=0\\ a=1\end{cases}$$

因此 $a=1, b=-1$.　（4 分）

（2）由（1）可知随机变量 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

则当 $x>0$ 时 X 的概率密度

$$f(x)=\frac{d}{dx}F(x)=2e^{-2x}.$$

（2 分）

故随机变量 X 的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ （1 分）

（3）【法一】 $P\left\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right\}=F\left(\frac{1}{2}\right)-F\left(-\frac{1}{2}\right)=1-e^{-1}$.

【法二】 $P\left\{-\frac{1}{2}<X<\frac{1}{2}\right\}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(x)dx=\int_{0}^{\frac{1}{2}}2e^{-2x}dx=1-e^{-1}$. （3 分）

3.（本题 15 分）已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}, & x>0,y>0,\\ 0, & 其他，\end{cases}$$

（1）分别求关于 X 和 Y 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$；（2）判断 X 和 Y 是否相互独立；

（3）求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解：（1）根据题意，可算得当 $x>0$ 时，关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dy=\frac{1}{2}e^{-x}(1+x),$$ （3 分）

所以关于 X 的边缘概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-x}(1+x), & x>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ （1 分）

当 $y>0$ 时，关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_{0}^{\infty}\frac{1}{2}(x+y)e^{-(x+y)}dx=\frac{1}{2}e^{-y}(1+y),$$ （3 分）

所以关于 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-y}(1+y), & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$ （1 分）

（2）由（1）知 $f(x,y)\neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 X 和 Y 不独立. （3 分）

（3）由 Z 的概率密度 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy$，可得当 $z>0$ 时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(z-y,y)dy=\int_{0}^{z}\frac{1}{2}ze^{-z}dy=\frac{1}{2}z^2e^{-z}.$$ （3 分）

故 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}z^2e^{-z}, & z>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$ （1 分）

4.（本题 15 分）已知离散型随机变量 X 和 Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ 0.3, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2,\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 0.4, & 0\le y<1,\\ 1, & y\ge 1,\end{cases}$$

且 $P\{X=1,Y=0\}=0.1$. 求：（1）(X,Y) 的分布律；（2）$Z=XY$ 的分布律；（3）$Cov(X,Y)$.

解：（1）由题可知，随机变量 X 可能取值 1, 2；随机变量 Y 可能取值 0, 1. （1 分）
由分布函数，可算得关于 X 和 Y 的边缘分布律分别为

X	1	2
p_k	0.3	0.7

Y	0	1
p_k	0.4	0.6

（2 分）

根据 $P\{X=1,Y=0\}=0.1$, 可得 (X,Y) 的分布律

Y \ X	1	2
0	0.1	0.3
1	0.2	0.4

（2 分）

（2）易知随机变量 Z 可能取值 0, 1, 2. （1 分）
由（1）可算得

$$P\{Z=0\}=P\{X=1,Y=0\}+P\{X=2,Y=0\}=0.4,$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1,Y=1\}=0.2,$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=2,Y=1\}=0.4.$$

故 Z 的分布律为

Z	0	1	2
p_k	0.4	0.2	0.4

（4 分）

（3）结合（1）和（2），可算得

$$E(X)=1.7,\ E(Y)=0.6,\ E(XY)=1.$$ （2 分）

所以$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$

$=1-1.7\times 0.6=-0.02$ （3 分）

5.（本题 12 分）已知$X_1,X_2,\ldots,X_n$是来自于总体X的简单随机样本，且总体X在$(0,3\theta]$上服从均匀分布，其中$\theta>0$为未知参数，求：（1）θ的矩估计量；（2）θ的最大似然估计量.

解：（1）由题知$\mu_1=E(X)=\int_0^{3\theta}x\cdot\frac{1}{3\theta}dx=\frac{3}{2}\theta$， （2 分）

令$\mu_1=A_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$， （2 分）

则θ的矩估计量为$\hat{\theta}=\frac{2}{3n}\sum_{i=1}^{n}X_i$. （2 分）

~~注：本问也可通过二阶矩退出矩估计量，酌情给分.~~

（2）根据X的概率密度，构造如下似然函数：

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(x_i;\theta)=\frac{1}{(3\theta)^n},\ 0<x_i\le 3\theta,\ i=1,2,\ldots,n.$$ （2 分）

由上式可知，当$\theta=\frac{1}{3}\max\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$时，似然函数$L(\theta)$达到最大值. （2 分）

所以θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}=\frac{1}{3}\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}$. （2 分）

6.（本题 8 分）设某次测试中，学生成绩X（单位：分）服从$N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取容量为 36 的简单随机样本，算得样本均值$\bar{x}=66.5$，样本方差$s^2=225$. 问在显著性水平$\alpha=0.05$下，是否可以认为此次测试学生的平均成绩为 70？（$z_{0.05}=1.645,\quad z_{0.025}=1.96,\quad t_{0.025}(35)=2.0301,\quad t_{0.025}(36)=2.0281,\quad \chi^2_{0.025}(35)=53.203,\quad \chi^2_{0.025}(36)=54.437$）

解：按题意需检验假设$H_0:\mu=\mu_0=70,\quad H_1:\mu\ne 70.$ （2 分）

定义检验统计量$T=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，在$H_0$成立的条件下$T$服从$t(n-1)$. （2 分）

根据$\alpha=0.05$，$t_{0.025}(35)=2.0301$，我们可算得拒绝域为

$$|T|=\left|\frac{\bar{x}-70}{s/\sqrt{n}}\right|\ge t_{0.025}(35)=2.0301.$$ （2 分）

由于$\left|\frac{66.5-70}{15/6}\right|=1.4<t_{0.025}(35)=2.0301$，因此不能拒绝原假设.

可以认为此次考试的平均成绩为 70.（2 分）