

# 南京信息工程大学试卷答案暨评分标准

2022—2023 学年第一学期 概率论与数理统计 课程试卷(B 卷答案)

本试卷答案共 4 页；考试时间 120 分钟；任课教师 统计系；出卷时间 2023 年 1 月

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设随机事件  $A, B$  相互独立, 且  $P(B) = 0.5, P(A-B) = 0.3$ , 则  $P(A) = \underline{0.6}$ .
2. 设随机变量  $X \sim N(6, 4)$ , 且已知  $\Phi(1) = 0.8413$ , 则  $P\{4 \leq X \leq 8\} = \underline{0.6826}$ .
3. 设随机变量  $X$  的概率分布为  $P\{X = k\} = \frac{e^{-1}}{k!}, k = 0, 1, 2, \dots$ , 则  $E(X^2) = \underline{2}$ .
4. 设  $D(X) = 25, D(Y) = 16, \rho_{xy} = 0.4$ , 则  $D(X - Y) = \underline{25}$ .
5. 已知总体  $X \sim N(\mu, 9)$ , 观测得样本容量为 9 的样本均值为 56.61, 则  $\mu$  的置信度为 95% 的双侧置信区间为 (54.65, 58.57). (附:  $z_{0.025} = 1.96, z_{0.05} = 1.645$ )

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设  $A, B$  为任意两个随机事件, 则下列选项正确的是 ( D ).  
(A)  $P(A-B) = P(A)-P(B)$       (B)  $P(A \cup B) = P(A)+P(B)$   
(C)  $P(AB) = P(A)P(B)$       (D) 上述结论都不成立
2. 三重伯努利试验中, 至少有一次成功的概率为  $\frac{37}{64}$ , 则每次试验成功的概率为 ( A ).  
(A)  $\frac{1}{4}$       (B)  $\frac{1}{3}$       (C)  $\frac{3}{4}$       (D)  $\frac{2}{3}$
3. 设随机变量  $X$  在区间  $[2, 4]$  上服从均匀分布, 则  $P\{3 < X < 4\} = \underline{(A)}$ .  
(A)  $P\{2.25 < X < 3.25\}$       (B)  $P\{1.5 < X < 2.5\}$   
(C)  $P\{3.5 < X < 4.5\}$       (D)  $P\{4.5 < X < 5.5\}$
4. 设  $X_1, X_2, X_3, X_4$  为来自总体  $N(1, \sigma^2)$  ( $\sigma > 0$ ) 的简单随机样本, 则统计量  $\frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$  的分布是 ( B ).  
(A)  $N(0, 1)$       (B)  $t(1)$       (C)  $\chi^2(1)$       (D)  $F(1, 1)$
5. 设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自总体  $X$  的一个简单随机样本,  $E(X) = \mu, D(X) = \sigma^2$ , 若  $(\bar{X})^2 + cS^2$  是  $\mu^2$  的无偏估计量, 则  $c = \underline{(C)}$ .  
(A)  $\frac{1}{3n}$       (B)  $-n$       (C)  $-\frac{1}{n}$       (D)  $\frac{1}{2n}$

## 三、计算题 (共 70 分)

1. (本题满分 10 分) 两台车床加工同样的零件, 第一台加工的废品率为 0.05, 第二台加工的废品率为 0.03, 加工出来的零件不加标签混合放在一起, 已知这批零件中, 由第一台车床加工的

占  $1/4$ , 由第二台加工的占  $3/4$ , 从这批零件中任取一件, 求:

(1) 取到合格品的概率; (2) 取到的合格品是由第二台车床加工的概率.

解: 设  $B_i$  = “零件是第  $i$  台车床加工的”,  $i = 1, 2$ ;  $A$  = “取到的是合格品”, 则

$$(1) P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2)$$

$$= \frac{1}{4}(1 - 0.05) + \frac{3}{4}(1 - 0.03)$$

$$= \frac{193}{200} = 0.965 \quad (6 \text{ 分})$$

$$(2) P(B_2 | A) = \frac{P(AB_2)}{P(A)} = \frac{P(A|B_2)P(B_2)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{4}(1 - 0.03)}{0.965} = \frac{291}{386} \approx 0.754 \quad (4 \text{ 分})$$

2. (本题满分 10 分) 设连续型随机变量  $X$  的分布函数  $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ Ax^2, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$ , 求:

(1) 常数  $A$ ; (2)  $X$  落在  $(\frac{1}{3}, 2)$  内的概率; (3)  $Y = 3X + 1$  的概率密度.

解: (1) 由  $F_X(x)$  为连续函数, 可得

$$1 = F(1) = F(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} F(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (Ax^2) = A, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\therefore A = 1$$

$$(2) P\left(\frac{1}{3} < X < 2\right) = F(2) - F\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \quad (3 \text{ 分})$$

$$(3) f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$$

设  $y = g(x) = 3x + 1$ ,  $x = h(y) = \frac{y-1}{3}$ , 因为  $h'(y) = \frac{1}{3} > 0$ ,

$$\text{由定理可得: } f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]h'(y), & 0 \leq h(y) < 1, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

$$\text{即 } f_Y(y) = \begin{cases} 2 \cdot \frac{y-1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2(y-1)}{9}, & 1 \leq y < 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

注：还可以先求  $F_Y(y)$ ，再求导可得.

3. (本题满分 15 分) 已知二维离散型随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律为：

	$Y$	2	3
$X$			
0		0.1	0.2
1		0.4	0.3

(1) 求关于  $X, Y$  的边缘分布律，并判断  $X, Y$  的独立性；(2) 求  $P(Y=2|X=1)$ ；(3) 求  $Z=XY$  的分布律；(4) 求  $Cov(X, Y)$ .

解：(1)

$X$	0	1
P	0.3	0.7

(2 分)

$Y$	2	3
P	0.5	0.5

(2 分)

$X, Y$  不独立.

(2 分)

$$(2) P(Y=2|X=1)=\frac{P(X=1, Y=2)}{P(X=1)}=\frac{0.4}{0.7}=\frac{4}{7}$$

(3 分)

(3)

$Z$	0	2	3
P	0.3	0.4	0.3

(3 分)

$$(4) Cov(X, Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=1.7-0.7 \times 2.5=-0.05$$

(3 分)

4. (本题满分 15 分) 已知二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度为

$$f(x, y)=\begin{cases} e^{-(x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

(1) 判断  $X$  与  $Y$  是否相互独立，并给出理由；(2) 求  $M=\min\{X, Y\}$  的概率密度；(3) 求  $P\{X+Y \leq 1\}$ .

$$\text{解：(1)} f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2 分)

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx=\begin{cases} e^{-y}, & y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

(2 分)

$$f(x, y)=f_X(x)f_Y(y), \text{ 所以 } X \text{ 与 } Y \text{ 相互独立.}$$

(1 分)

$$(2) F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad F_Y(y) = \begin{cases} 1-e^{-y}, & y > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)] = \begin{cases} 1 - e^{-2z}, & z > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad (2 \text{ 分})$$

$$f_{\min}(z) = \begin{cases} 2e^{-2z}, & z > 0 \\ 0, & z \leq 0 \end{cases} \quad (1 \text{ 分})$$

$$(3) P\{X + Y \leq 1\} = \int_0^1 \left[ \int_0^{1-y} e^{-(x+y)} dx \right] dy = 1 - 2e^{-1} \quad (5 \text{ 分})$$

5. (本题满分 10 分) 设总体  $X$  的概率密度为  $f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$ , 其中  $\lambda (\lambda > 0)$  未知,

$X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自  $X$  的一个样本, 求  $\lambda$  的矩估计量.

$$\text{解: } E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, \lambda) dx \quad (3 \text{ 分})$$

$$= \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda^2 x e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{2}{\lambda} = \bar{X}, \quad (3 \text{ 分})$$

$$\text{解得 } \hat{\lambda} = \frac{2}{\bar{X}} \text{ 为 } \lambda \text{ 的矩估计量.} \quad (2 \text{ 分})$$

6. (本题满分 10 分) 某车间包装糖果, 当机器正常时所包装糖果的平均质量为 500g, 标准差为 12g. 某日开工后为检验机器是否正常, 随机地抽取所包装的糖果 9 袋, 测得其平均质量为 510g, 假定包装糖果质量服从正态分布, 标准差没有变化, 以显著性水平  $\alpha=0.05$  判断机器工作是否正常?

$$(附: z_{0.05} = 1.645, z_{0.025} = 1.96, t_{0.05}(8) = 1.86, t_{0.025}(8) = 2.306,$$

$$\chi^2_{0.025}(9) = 19.022, \chi^2_{0.975}(9) = 2.700, \chi^2_{0.05}(9) = 16.919, \chi^2_{0.95}(9) = 3.325)$$

解: 根据题意给出原假设和备择假设:  $H_0: \mu = \mu_0 = 500, H_1: \mu \neq \mu_0$  (2 分)

方差  $\sigma^2$  已知, 取检验统计量:  $Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$ , 在  $H_0$  成立条件下:  $Z \sim N(0, 1)$  (2 分)

显著性水平  $\alpha=0.05$  下, 拒绝域为:  $|z| \geq z_{0.025} = 1.96$  (2 分)

代入数据, 可得  $|z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{510 - 500}{12 / \sqrt{9}} \right| = 2.5 > z_{0.025} = 1.96$  (2 分)

落在拒绝域, 拒绝原假设, 认为机器工作不正常. (2 分)

注: 本题也可根据置信区间和假设检验接受域的对偶关系求解.