南京信息工程大学期末试卷答案暨评分标准

2021 － 2022 学年 第 二 学期 概率统计 课程试卷(B 卷)

本试卷共____页；考试时间 **120** 分钟；任课教师 统计系 ；出卷时间 2022 年 **6** 月

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 对事件 A、B，下列命题正确的是（ D ）

（A）若 A 与 B 互不相容，则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也互不相容

（B）若 A 与 B 相容，则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相容

（C）若 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>0,\ P(B)>0$，则 A 与 B 相互独立

（D）若 A 与 B 相互独立，则 $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也相互独立

2. 随机变量 X 的分布函数和概率密度分别为 $F(x)$、$f(x)$，若 X 与 $-X$ 具有相同的分布函数，则（ C ）

（A） $F(x)=F(-x)$　　（B） $F(x)=-F(-x)$

（C） $f(x)=f(-x)$　　（D） $f(x)=-f(-x)$

3. 随机变量 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$，且 $P(|X-\mu_1|<2)>P(|Y-\mu_2|<2)$，则必有（ D ）

（A）$\mu_1>\mu_2$　　（B）$\mu_1<\mu_2$

（C）$\sigma_1>\sigma_2$　　（D）$\sigma_1<\sigma_2$

4. 随机变量 $X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，且 X,Y 相互独立，令 $Z=\dfrac{nX^2}{Y}$，则 Z 的分布为

（ A ）

（A）$F(1,n)$　　（B）$F(n,1)$　　（C）$\chi^2(n)$　　（D）$\chi^2(n-1)$

5. 对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著性水平 0.02 下拒绝 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著性水平 0.05 下，下列结论中正确的是（ C ）

（A）接受 H_0　　（B）可能接受，也可能拒绝 H_0

（C）拒绝 H_0　　（D）不接受，也不拒绝 H_0

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $P(A)=0.4,P(A\cup B)=0.6$，且 A,B 相互独立，则 $P(B)=$ __1/3__ .

2. 设随机变量 $X\sim N(3,9)$，$Y\sim U[0,1]$，且 X,Y 相互独立，则 $E(XY)=$ __3/2__ .

3. 将单位长度的棍子，随机分割成两段，其长度分别记为 X,Y，则 $\rho_{XY}=$ __-1__ .

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n\cdots$ 独立同分布，都服从泊松分布 $\pi(\lambda)$，$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，则当 n 很大时，

$P(Y_n\le a)$ 的近似计算公式是 $\Phi(\dfrac{a-n\lambda}{\sqrt{n\lambda}})$.

5. 已知 $X_1,X_2,\cdots X_9$ 和 $Y_1,Y_2,\cdots Y_9$ 相互独立，且都服从 $N(0,1)$，则统计量

$W=\dfrac{X_1+X_2+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+Y_2^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从的分布为 $\underline{\qquad t(9) \qquad}$.

三、计算题

1.（本题 10 分） 运用试剂来检验被诊断者是否感染某种病毒，分析临床记录历史数据，发现：如果被诊断者感染了病毒，则试剂检验呈现阳性的概率为 0.85；如果被诊断者未感染病毒，则试剂检验呈现阴性的概率为 0.9. 普查发现，某地人群被病毒感染的概率为 0.05. 试求：（1）该地区人群检验呈现阳性的概率；（2）已知某人检验结果为阳性，求其感染这种病毒的概率.

解： 设 $A=$\{被诊断者检验呈现阳性\}，$B=$\{被诊断者感染了这种病毒\}。由题意，可得

$$P(A|B)=0.85, P(A|\overline{B})=1-0.9=0.1, P(B)=0.05, P(\overline{B})=0.95, \qquad \text{（2 分）}$$

（1）由全概率公式，可得被诊断者检验呈现阳性的概率为：

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})\,P(\overline{B}) \\ &=0.85\times 0.05+0.1\times 0.95 \\ &=0.1375 \end{aligned} \qquad \text{（4 分）}$$

（2）由贝叶斯公式，可得若某人检验结果为阳性，求其感染这种病毒的概率为：

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}=\frac{0.85\times 0.05}{0.1375}\approx 0.31 \qquad \text{（4 分）}$$

2.（本题 12 分） 某型号器件的寿命记为随机变量 X，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1000}{x^2}, x>1000, \\ 0, \quad 其他. \end{cases}$

（1）求概率 $P(X>1500)$；（2）现从一大批此种器件中任取 5 只，求其中至少有 2 只寿命大于 1500 小时的概率.

解：（1）

$$P(X>1500)=\int_{1500}^{+\infty}\frac{1000}{x^2}dx=-\frac{1000}{x}\Big|_{1500}^{+\infty}=\frac{2}{3} \qquad \text{（3 分）}$$

（2）设任取 5 只，其中寿命大于 1500 的只数为 Y，则有 $Y\sim B(5,2/3)$ （3 分）

$$P(Y\geq 2)=1-P(Y=0)-P(Y=1) \qquad \text{（3 分）}$$

$$=1-C_5^0\left(\frac{2}{3}\right)^0\left(\frac{1}{3}\right)^5-C_5^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(\frac{1}{3}\right)^4=\frac{232}{243} \qquad \text{（3 分）}$$

3.（本题 12 分） 设随机变量 X,Y 独立同分布，X 的分布律为

X	0	1
p	1/2	1/2

求：（1）$U=X+Y$ 的分布律；（2）$D(X-Y)$；（3）$E(XY)$.

解：（1）根据 X,Y 相互独立同分布，以及他们的分布律可以得到 X 与 Y 的联合分布律为：

X \ Y	0	1

0	0.25	0.25
1	0.25	0.25

$U = X + Y$ 的分布律为：

U	0	1	2
P	0.25	0.50	0.25

（4 分）

（2）由于 X, Y 独立同分布，则：$D(X-Y) = D(X) + D(Y) = 2D(X)$。

所以由：$D(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$,

则 $D(X-Y) = D(X) + D(Y) = 2D(X) = \frac{1}{2}$ （4 分）

（3）由于 X, Y 独立同分布，则：$E(XY) = E(X)E(Y) = \left(E(X)\right)^2 = \frac{1}{4}$ （4 分）

4.（本题 12 分）有 A, B 两路公交车独立地经过某车站，乘客等待公交车 A 的时间服从均匀分布：$X \sim f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, 0 < x < 10, \\ 0, \quad 其他. \end{cases}$ 等待公交车 B 的时间服从：$Y \sim f(y) = \begin{cases} \frac{1}{10} e^{-\frac{y}{10}}, y > 0, \\ 0, \quad 其他. \end{cases}$ 求：（1）X, Y 的联合概率密度；（2）公交车 B 先到的概率 $P(Y < X)$；（3）乘客等待时间的分布函数.

解：（1）X, Y 的联合分布密度：

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-y/10}, 0 < x < 10, y > 0 \\ 0 \qquad ,其它 \end{cases}$$ （3 分）

（2）

$$\begin{aligned} P(Y < X) &= \int_0^{10} dx \int_0^x \frac{1}{100} e^{-y/10} dy \\ &= \frac{1}{10} \int_0^{10} (1 - e^{-x/10}) dx = e^{-1} \end{aligned},$$ （4 分）

（3）记等待时间为 $T = \min\{X, Y\}$，则

$$P(T > t) = P(X > t, Y > t) = P(X > t)P(Y > t)$$

$$\begin{aligned} P(T \le t) &= 1 - P(X > t)P(Y > t) \\ &= \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1 - e^{-t/10}(1 - t/10), & 0 < t < 10 \\ 1, & t \ge 10 \end{cases} \end{aligned}$$ （5 分）

5.（本题 12 分）设总体 X 的概率密度 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\lambda}e^{-\frac{x^2}{\lambda}}, x>0,\\ 0, \qquad x\le 0.\end{cases}$，其中 $\lambda>0$ 是未知参数，

$X_1,X_2,...,X_n$ 为从该总体中抽取的简单随机样本.（1）求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$；（2）验证 $\hat{\lambda}$ 是否为 λ 的无偏估计量.

解：（1）对样本 $X_1,X_2,...,X_n$，其似然函数为：

$$L(\lambda)=\begin{cases}(\frac{2}{\lambda})^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)e^{-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}, x_i>0, \mathrm{i}=1,2,...,\mathrm{n}\\ 0 \qquad ,\text{其他}\end{cases}$$ （2 分）

取对数得：$\ln L(\lambda)=n\ln 2-n\ln\lambda+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ （2 分）

令 $$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda}=-\frac{n}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2=0,$$ （2 分）

得 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$. （2 分）

（2）由于 $E(X^2)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\cdot\frac{2}{\lambda}xe^{-\frac{x^2}{\lambda}}dx=\lambda$， （4 分）

$$E(\hat{\lambda})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\right)=E(X^2)=\lambda,$$

即 $\hat{\lambda}$ 是 λ 的无偏估计量.

6.(本题 12 分)某切割机正常工作时，切割每段金属棒的平均长度为 10.5cm，今从一批产品中随机抽取 9 段，得样本均值 $\overline{x}=10.48$cm，样本标准差 $s=0.24$cm. 假定切割的长度服从正态分布，试问该机工作是否正常？ $(\alpha=0.05;t_{0.025}(8)=2.3060,t_{0.05}(8)=1.8595)$

解：依题意，$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2 均未知。需要检验假设：

$$H_0:\mu=\mu_0=10.5,\quad H_1:\mu\ne 10.5$$ （3 分）

考虑检验统计量：$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$，在原假设 H_0 为真时，有 $t\sim t(8)$。 （3 分）

拒绝域为 $|t|=\left|\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|\ge t_{\alpha/2}(n-1)$ （2 分）

将所得结果代入该统计量得：

$$|t|=\left|\frac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{10.48-10.5}{0.24/\sqrt{9}}\right|=0.25<t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(8)=2.3060$$

故接受 H_0，认为该机工作正常。（4 分）