第 4 章 动量

一、选择题

1、C　2、C　3、B　4、A　5、C
6、C　7、D　8、A　9、C　10、B

二、计算题

1、解：对于榔头：

$$I_1 = \overrightarrow{F_1}\Delta t = 0 - mv$$

式中 I_1 是榔头所受的冲量，$\overrightarrow{F_1}$ 是榔头所受钉子的平均打击力；

对于钉子：

$$I_2 = -I_1 = \overrightarrow{F_2}\Delta t = mv$$

式中 I_2 是钉子受到的冲量，$\overrightarrow{F_2}$ 是钉子所受的平均打击力，显然 $\overrightarrow{F_2} = -\overrightarrow{F_1}$。

题目所要求的是 I_2 和 $\overrightarrow{F_2}$：

$$I_2 = mv = 0.500 \times 8.0\mathrm{N \cdot s} = 4.0\mathrm{N \cdot s}$$

I_2 的方向与榔头运动方向一致。

$$\overrightarrow{F_2} = \frac{I_2}{\Delta t} = \frac{4.0}{2.0 \times 10^{-3}}\mathrm{N} = 2.0 \times 10^3\mathrm{N}$$

$\overrightarrow{F_2}$ 的方向与榔头运动方向一致。

2、解：设桌面对小球的平均冲力为 F，并建立如图所示的坐标系，根据动量定理，对于小球可列出

$$F_x\Delta t = mv\sin\alpha - mv\sin\alpha = 0$$

$$F_y\Delta t = mv\cos\alpha - \left(-mv\cos\alpha\right) = 2mv\cos\alpha$$

由第一个方程式可以求得

$$F_x = 0$$

由第二个方程式可以求得

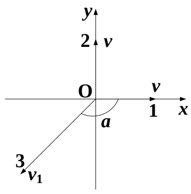
$$F_y = \frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}$$

根据牛顿第三定律，小球对桌面的平均冲力为

$$F_y' = -F_y = -\frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}$$

负号表示小球对桌面的平均冲力沿 y 轴的负方向。

3、解：建立如图所示的坐标系。



在水平方向上，水银求不受力的作用，所以动量守恒，故可列出下面的两个方程式

$$mv = mv_3 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$mv = mv_3 \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

式中 v 是 1、2 两球的运动速率，v_3 是第三个水银小球的运动速率。由上两方程式可解的

$$v_3 = \sqrt{2}v \approx 42\mathrm{cm} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

$$\alpha = \frac{3\pi}{4}$$

4、解：设木块的质量为 M；子弹的质量为 m，速度为 v；碰撞后的共同速度为 V。此类问题一般分两步处理：第一步是子弹与木块作完全非弹性碰撞，第二步是子弹在木块内以共同的速度压缩弹簧。

第一步遵从动量守恒，故有

$$mv = (M+m)V \qquad (1)$$

第二步是动能与弹力势能之间的转换，遵从机械能守恒，于是有

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (2)$$

由式(2)解得

$$\frac{1}{2}V = \sqrt{\frac{kx^2}{M+m}} = \sqrt{\frac{16}{25}}\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1} = 0.80\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

将 V 值代入式(1)，就可求得子弹撞击木块的速率，为

$$v = \frac{(M+m)V}{m} = 1.0 \times 10^2 \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$$

5、解：这个问题也应分两步处理：第一步是子弹与木块作完全非弹性碰撞过程，第二步是子弹处于木块内一起滑动而克服桌面的摩擦力作功的过程。

第一步遵从动量守恒，有

$$mv = (M+m)V \qquad (1)$$

式中 V 是木块受冲击后沿桌面滑动的速度。

第二步遵从功能原理，可列出下面的方程式

$$-\mu(M+m)gs = 0 - \frac{1}{2}(M+m)V^2 \qquad (2)$$

由以上两式可解得

$$\mu=\frac{\frac{1}{2}\left(M+m\right)V^2}{\left(M+m\right)gs}=\frac{m^2v^2}{2\left(M+m\right)^2gs}=4.0\times10^{-2}$$

6、解：小球与物体相碰撞的速度 v_1 可由下式求得

$$mgl=\frac{1}{2}mv_1^2 \qquad (1)$$

小球与物体相碰撞，在水平方向上满足动量守恒，碰撞后小球的速度变为 v_2，物体的速度为 V，在水平方向上应有

$$mv_1=-mv_2+MV \qquad (2)$$

完全弹性碰撞，动能不变，即

$$\frac{1}{2}mv_1^2=\frac{1}{2}mv_2^2+\frac{1}{2}MV^2 \qquad (3)$$

碰撞后，小球在到达张角 α 的位置的过程中满足机械能守恒，应有

$$\frac{1}{2}mv_2^2=mgl\left(1-\cos\alpha\right) \qquad (4)$$

由以上四式可解得

$$v_2=\frac{M-m}{M+m}v_1$$

将上式代入式(4)，得

$$\cos\alpha=1-\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{mgl}=1-\frac{\frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv_1^2}=1-\frac{v_2^2}{v_1^2}=1-\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2=\frac{4Mm}{\left(M+m\right)^2}$$

$$\therefore\alpha=\arccos\frac{4Mm}{\left(M+m\right)^2}$$

7、解：取过滑轮中心 O 点的水平轴为 Oz，正方向指向读者，并把重物、小猴、绳子和滑轮作为一个系统，即质点系。该系统所受外力相对滑轮中心 O 的力矩有两个，一个是重物所受重力 mg 对 O 点的力矩，另一个是小猴所受重力 mg 对 O 点的力矩，这两个力矩相平衡，即

$$\overrightarrow{M}=-mgR\vec{k}+mgR\vec{k}=0$$

式中 R 是滑轮的半径。所以该质点系的角动量是守恒的。

显然，当小猴不动时，系统相对于 O 点的角动量为零，即

$$\overrightarrow{L_1}=0$$

设当小猴相对于绳子向上运动的速度为 v 时，重物相对于地面向上的运动速度为 u，则小猴相对于地面向上的速度为 $v-u$，系统相对于 O 点的角动量为

$$\overrightarrow{L_2}=Rmu\vec{k}-Rm\left(v-u\right)\vec{k}$$

质点系的角动量是守恒，即 $L_1=L_2$。于是可求得

$$u=\frac{1}{2}v$$

8、解：根据题意，重物的质量为 $M+m$，以托盘、弹簧、重物和滑轮为质点系。以滑轮中心为参考点，系统所受合外力矩为零，故角动量守恒，即

$$mvr=\left(2M+m\right)Vr$$

式中 v 是缠缚的细线断开时弹簧向上弹的初速度，V 为托盘获得的向下的初速度，这两个速度均相对于地面；r 是滑轮的半径。由上式解得托盘由于弹簧弹起而获得的速度为

$$V=\frac{mv}{2M+m}$$

缠缚的细线断开时弹簧所获得的弹力势能为 mgh，它全部转变为系统的动能，就是弹簧托盘和重物的动能之和，即

$$mgh=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\left(2M+m\right)V^2$$

由以上两式可解得

$$v^2=\frac{2M+m}{M+m}gh$$

所以弹簧弹起的最大高度为

$$H=\frac{v^2}{2g}=\frac{2M+m}{2\left(M+m\right)}h$$

9、解：卫星是沿椭圆形轨道运行的，近地点和远地点都是卫星离地心距离为极值的位置，在这两个位置上卫星的速度与其位置矢量相垂直。设在近地点卫星的位置矢量和速度分别为 r_1 和 v_1，在远地点卫星的位置矢量和速度分别为 r_2 和 v_2。根据角动量守恒，有

$$mv_1r_1=mv_2r_2$$

即

$$v_1r_1=v_2r_2$$

根据机械能守恒，有

$$\frac{1}{2}mv_1^2-G\frac{Mm}{r_1}=\frac{1}{2}mv_2^2-G\frac{Mm}{r_2}$$

由以上两式消去 v_2，得

$$\frac{1}{2}v_1^2\left(1-\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)=GM\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

将 数 值 $r_1=\left(4\quad 3\quad 9\quad\right)6\ k3\ m7=8$ 、 $r_2=\left(2384+6378\right)km=8762km$ 、 $G=6.672\times10^{-11}N\cdot m^2\cdot kg^{-2}$ 和 $M=5976\times10^{24}kg$ 代入上式，得

$$v_1=\sqrt{\frac{2GMr_2}{\left(r_1+r_2\right)r_1}}=8.111\times10^3m\cdot s^{-1}$$

远地点的速度为

$$v_2=v_1\frac{r_1}{r_2}=6.311\times10^3m\cdot s^{-1}$$