模拟训练 I 参考答案

一、填空题（15 分，每题 3 分）

1、已知 $P(A)=0.6$， $P(A\bar{B})=0.2$，则 $P(\bar{A}\cup\bar{B})=$ <u>0.6</u>。

2、设随机变量 $X\sim N(2,4)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$ <u>0.2</u>。

3、随机变量 X 与 Y 相互独立且具有相同的分布， $P\{X=0\}=0.3$， $P\{X=1\}=0.7$，则 $P\{X=Y\}=$ <u>0.58</u>。

4、设随机变量 X 的方差 $D(X)=25$，随机变量 Y 的方差 $D(Y)=36$，又 X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY}=0.4$，则协方差 $Cov(X+Y,2X-Y)=$ <u>26</u>。

5、设 $X\sim f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & 其它\end{cases}$，则使 $P\{X>a\}=P\{X<a\}$ 成立的常数 $a=$ <u>$\sqrt{2}/2$</u>。

二、选择题（15 分，每题 3 分）

1、对事件 A、B，下列命题正确的是（ D ）

（A）若 A 与 B 互不相容，则 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也互不相容；

（B）若 A 与 B 相容，则 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相容；

（C）若 A 与 B 互不相容，且 $P(A)>0$，$P(B)>0$，则 A 与 B 相互独立；

（D）若 A 与 B 相互独立，则 $\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也相互独立。

2、设两个相互独立的随机变量 X 与 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则（ B ）

（A） $P\{X+Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　（B） $P\{X+Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

（C） $P\{X-Y\le 0\}=\frac{1}{2}$　　（D） $P\{X-Y\le 1\}=\frac{1}{2}$

3、已知随机变量 X 服从参数为 λ (λ >0)的泊松分布，则 $\frac{E(X^2)}{[E(X)]^2}$ =（ B ）

（A）1　　（B）$1+1/\lambda$　　（C）$1-1/\lambda$　　（D） $1/\lambda$

4、袋中有 10 只球，其中红球 4 只，白球 6 只。现从中一次取出 2 只，记 X 为取出的红球数，Y 为取出的白球数，则 X 与 Y 的相关系数为（ C ）

（A）0　　（B）$-1/3$　　（C）-1　　（D）$1/3$

5、对正态总体的数学期望 μ 进行假设检验，如果在显著水平 0.01 下拒绝 $H_0:\mu=\mu_0$，那么在显著水平 0.05 下，下列结论中正确的是(C)

（A）接受 H_0　　（B）可能接受，也可能拒绝 H_0

（C）拒绝 H_0　　（D）不接受，也不拒绝 H_0

三、（10 分）对以往数据分析结果表明，当机器正常时，产品的合格率是 90%，当机器不正常时，其合格率为 30%．每天早上机器开动时，机器正常的概率为 75%．试求：

(1) 某日早上开机后第一件产品是合格品的概率；

(2) 若某日早上第一件产品是合格品，求在该条件下机器正常的概率。

解：

(1) 设 A 为事件“产品合格”， B 为事件“机器正常”。

已知 $P(A|B)=0.9,\ P(A|\overline{B})=0.3,\ P(B)=0.75,\ P(\overline{B})=0.25$，

由全概公式，所求概率为

$$P(A)=P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})=0.9\times0.75+0.3\times0.25=0.75$$

(2) 根据贝叶斯公式，所求概率为

$$P(B|A)=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A|B)P(B)+P(A|\overline{B})P(\overline{B})}=\frac{0.9\times0.75}{0.75}=0.9$$

四、（**10** 分）设离散型二维随机变量 (X,Y) 的分布律为

X \ Y	0	1
0	0.1	b
1	a	0.4

(1) 已知 $P(X=1|Y=1)=2/3$，求 a、b 的值；

(2) 求 $Z=X+Y$ 的分布律。

解：(1) 由 $P(X=1|Y=1)=\dfrac{P\{X=1,Y=1\}}{P\{Y=1\}}=\dfrac{0.4}{b+0.4}=\dfrac{2}{3}$，得 b =0.2；

由分布律的规范性，有 $a+b=0.5$，从而 a =0.3

(2) $Z=X+Y$ 的分布律为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & a+b & 0.4 \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \end{bmatrix}$$

五、（**15** 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} ax+b, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$， 已知 $E(X)=\dfrac{7}{12}$， (1) 求参数 a、b 的值； (2) 求 $D(X)$；

(3) 求 $Y=2X-1$ 的概率密度函数。

解：(1) 由密度函数规范性， $\int_0^1(ax+b)dx=1$ 得 $\dfrac{a}{2}+b=1$

由 $E(X)=\int_0^1 x(ax+b)dx=\frac{7}{12}$ 得 $\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{7}{12}$

上式联立解得： $a=1$、$b=\frac{1}{2}$

(2) $E(X^2)=\int_0^1 x^2(ax+b)dx=\frac{a}{4}+\frac{b}{3}=\frac{5}{12}$

从而 $D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{11}{144}$

(3) 由 $y=2x-1$ 得 $x=h(y)=(y+1)/2$

进而由公式法可得 $f_Y(y)=f(h(y))|h'(y)|=\begin{cases}\frac{y}{4}+\frac{1}{2}, & -1<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

六、(**15** 分) 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}e^{-y}, & 0\le x\le 1, y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}。$$

(1) 求关于 X 与 Y 的边缘密度函数，并据此判断它们是否独立；

(2) 求随机变量 $Z=X+Y$ 的概率密度。

解：(1) X 的密度函数为 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}e^{-y}, & y>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$

可见，$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 与 Y 独立。

(2) 利用卷积公式，$Z=X+Y$ 的概率密度为

$$f_z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\begin{cases}0 & z<0\\ \int_0^z e^{-(z-x)}dx & 0\le z<1\\ \int_0^1 e^{-(z-x)}dx & z\ge 1\end{cases}=\begin{cases}0 & z<0\\ 1-e^{-z} & 0\le z<1\\ e^{1-z}-e^{-z} & z\ge 1\end{cases}$$

七、(**10** 分) 设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}(\alpha+1)x^\alpha, & 0<x<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，其中参数 $\alpha>-1$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为一组样本，求参数 α 的矩估计量和最大似然估计量。

解：（**1**）$EX=\frac{\alpha+1}{\alpha+2}$，

令 $EX=\bar{X}$，得参数 α 的矩估计量 $\hat{\alpha}=\frac{2\bar{X}-1}{1-\bar{X}}$；

（2）联合似然函数 $L(\alpha)=(\alpha+1)^n(x_1\cdots x_n)^\alpha$， $0<x_i<1, i=1,\cdots,n$，

对数似然 $\ln L(\alpha)=n\ln(\alpha+1)+\alpha\ln(x_1\cdots x_n)$，

令 $\dfrac{d}{d\alpha}\ln L(\alpha)=0$ 得参数 α 的极大似然估计量 $\hat{\alpha}=-\dfrac{n}{\ln(X_1\cdots X_n)}-1$.

八、（**10 分**）某厂生产的电池寿命（以小时计）长期以来服从方差 $\sigma^2=5000$ 的正态分布。现有一批这种电池，由于生产过程的原因，怀疑寿命的波动性有所改变。现随机取 26 只电池，测出其寿命的样本方差 $S^2=9200$。 问据此数据能否推断这批电池的寿命波动性较以往有显著变化？(取显著性水平 $\alpha=0.02$)

（附： $\chi^2_{0.01}(25)=44.314$， $\chi^2_{0.02}(25)=41.869$， $\chi^2_{0.01}(26)=45.642$， $\chi^2_{0.02}(26)=43.163$， $\chi^2_{0.99}(25)=11.524$， $\chi^2_{0.98}(25)=12.588$， $\chi^2_{0.99}(26)=12.198$， $\chi^2_{0.98}(26)=13.295$）

解：本题为单个正态总体关于方差的双边检验。

H_0： $\sigma^2=5000$ ； H_1： $\sigma^2\neq 5000$

取检验统计量： $T=\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$， H_0 成立时 $T\sim\chi^2(n-1)$

拒绝域为： $T\geq\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 或 $T\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$

由题可得，$n=26$，$\sigma_0^2=5000$，$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.01}(25)=44.314$，$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)=\chi^2_{0.99}(25)$ $=11.524$， $s^2=9200$，计算得： $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}=46\geq 44.314$，落在拒绝域内，故拒绝 H_0，即认为这批电池的寿命的波动性较以往的有显著变化。

（**备注：**本题也可以先求出方差的双侧置信区间，然后根据对偶性，将置信区间的补集作为拒绝域）