电磁学复习

电　场

磁　场

电磁感应

电 场 复 习

基本概念

一个定律

1、库仑定律 $\vec{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\vec{e}_r$

两个定理

1、场强环路定理--静电场中，沿任一闭合路径的环流等于零。

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$$

反映静电场是保守力场（有势场）

2、高斯定理

真空中：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i^{in}$

电介质中：$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum_i q_i^{in}$ 其中：$\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$

两个基本物理量

出发点：

电场对外两个表现 $\begin{cases} \text{电场中电荷受到 电场力} \Rightarrow \vec{E} \\ \text{电场可移动电荷 作功} \Rightarrow U \end{cases}$

1、电场强度

定义：

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

单位正电荷在电场中某点所受的电场力。

方向为正电荷在该点所受电场力的方向。

2、电势

电场力是保守力

$$W_{ab}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=-(E_{pb}-E_{pa})$$

① 取E_{pb}=0，a点电势能 $E_{pa}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$

② 电势 $U_a=\frac{E_{pa}}{q_0}=\int_a^{参考点}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

③ 电势差 $\boxed{U_{ab}=U_a-U_b=\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}}$

④ 电场力的功 $W_{ab}=q_0\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}=q_0(U_a-U_b)=-(E_{pb}-E_{pa})$

2、$\vec{E}$ 和U计算：

计算电势的方法	计算场强的方法
1、点电荷场的电势及叠加原理 $U=\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$ （分立） $U=\int_Q dU=\int_Q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}$ （连续）	1、点电荷场的场强及叠加原理 $\vec{E}=\sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2}\hat{r}$ （分立） $\vec{E}=\int_Q d\vec{E}=\int_Q \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$ （连续）
2、根据电势的定义 $\vec{E}\Rightarrow U$ $U=\int_P^{参考点}\vec{E}\cdot d\vec{l}$	2、高斯定理（求高度对称电场） $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{(S内)} q_i$ 3、可由 $U\Rightarrow\vec{E}$ $-\nabla U=\vec{E}$　　$-\frac{\partial U}{\partial x}=E_x$

重点：高斯定理

注意：高斯定理是普遍成立的，但用于求场强则只适用于某些具有高度对称性的电场。

（1）分析电场对称性（球、面、轴对称）

（2）作高斯面（闭合面）

通常为球面或圆柱面 (高斯面垂直或平行于电场线)

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{(S内)} q_i$$

利用典型带电体场强或电势分布叠加。

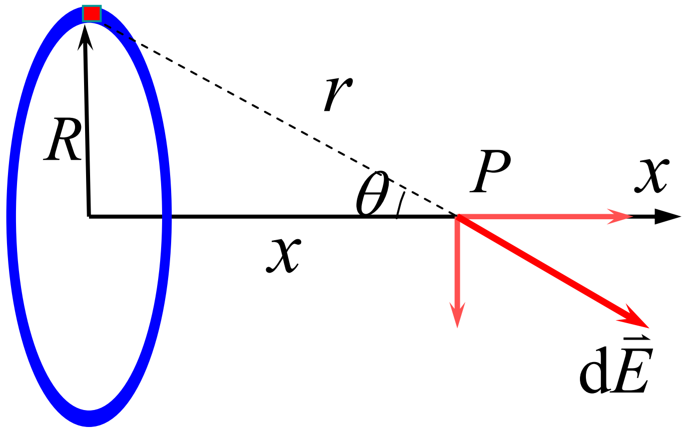
应能记住或熟练计算一些典型的场强和电势分布！

典型带电体场强或电势

	场强	电势
点电荷	$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$	$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$
均匀带电球面	$\vec{E}=0 \quad (r<R)$	$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (r\le R)$
	$\vec{E}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r \quad (r>R)$	$U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad (r>R)$
无限长均匀带电直线	$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$ 方向垂直于直线	
无限大均匀带电平面	$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ 方向垂直于平面	

典型习题

例1 电荷q 均匀地分布在一半径为R的圆环上。计算在圆环的轴线上任一给定点P的场强和电势。



$\vec{E}$ 解法1

$$dq = \frac{q}{2\pi R} dl$$

$$dE = \frac{dq}{4\pi \varepsilon_0 r^2} = \frac{q dl}{8\pi^2 R \varepsilon_0 r^2}$$

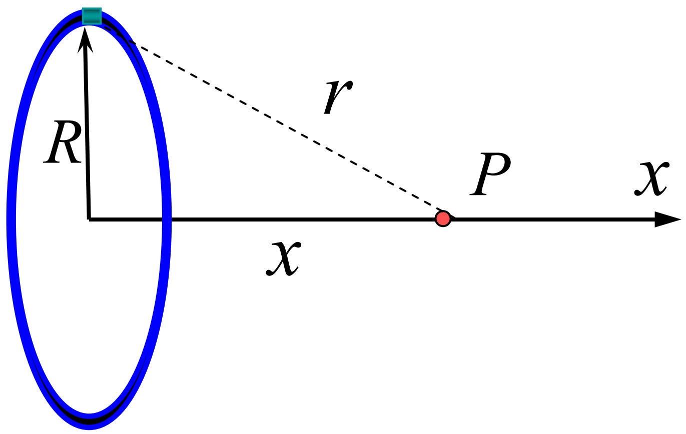
$$E = E_x = \int_L dE_x = \int_L dE \cos\theta = \int_L \frac{x}{r} \cdot dE$$

$$E = \int_0^{2\pi R} \frac{qx dl}{8\pi^2 \varepsilon_0 R r^3} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 \left(x^2 + R^2\right)^{3/2}}$$

$\vec{E}$ 解法2

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{x^2 + R^2}} \Rightarrow E = E_x = -\frac{dU}{dx} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$

U 解法1



$$dq=\lambda dl=\frac{q}{2\pi R}dl$$

$$dU=\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q\,dl}{8\pi^2\varepsilon_0 Rr}$$

$$U=\int dU=\frac{q}{8\pi^2\varepsilon_0 Rr}\int_L dl=\frac{q\cdot 2\pi a}{8\pi^2\varepsilon_0 Rr}$$

可见，求电势比场强容易，因为电势是标量。

$$U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

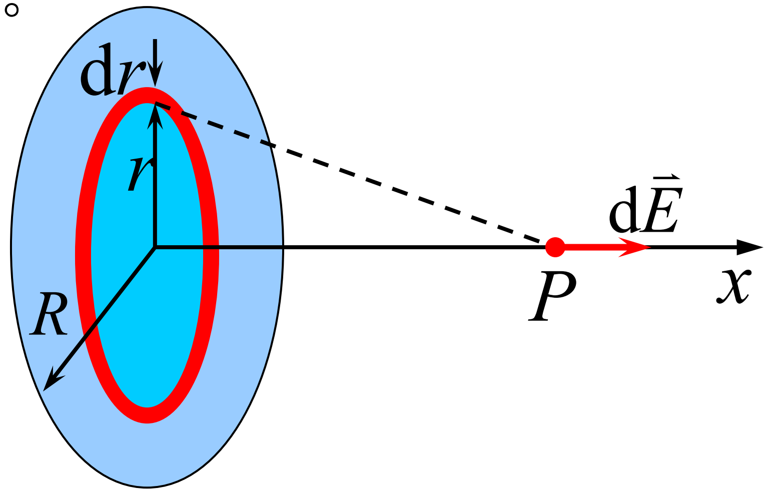
U 解法2

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$U=\int_x^\infty E\,dx=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_x^\infty\frac{x\,dx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\Rightarrow\quad U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

例2　均匀带电圆板，半径为R，电荷面密度为σ。求轴线上任一点 P 的电场强度。



解　利用带电圆环场强公式

$$E=\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+R^2\right)^{3/2}}$$

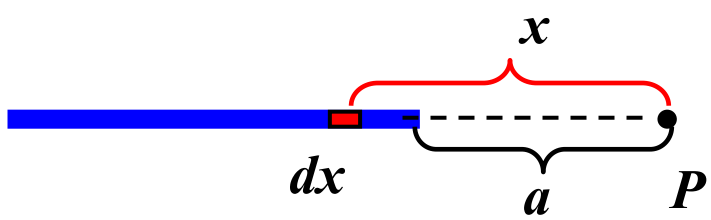
$$dq=\sigma 2\pi r dr$$

$$\mathrm{d}E=\frac{x\cdot\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$

$$E=\int\mathrm{d}E=\int\frac{x\cdot\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}$$

$$E=\int_0^R\mathrm{d}E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1-\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right]$$

例3　均匀带电线，长为l，带电量为q，求延长线上一点 P 的电场强度和电势。



解: (1) 电场强度

$$dq = \lambda dx$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dx}{x^2}$$

$$E = \int dE = \int_a^{a+l}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dx}{x^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+l}\right)$$

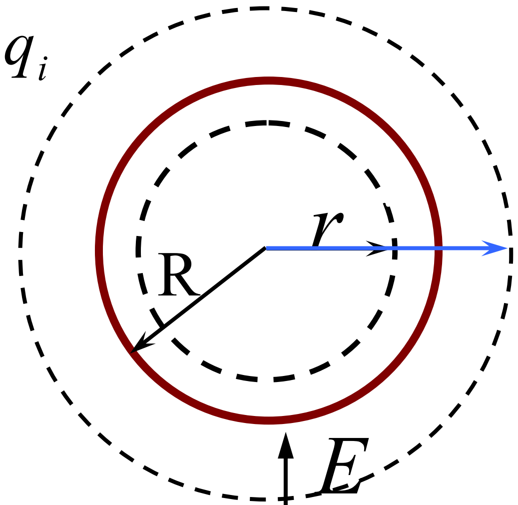
(2) 电势

$$dU = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dx}{x}$$

$$U = \int dU = \int_a^{a+l}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\frac{dx}{x} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{a+l}{a}$$

高斯定理应用举例：

例4　求均匀带电球面的场强和电势分布。（已知球面半径为R，带电荷为$+q$）　$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_i q_i$



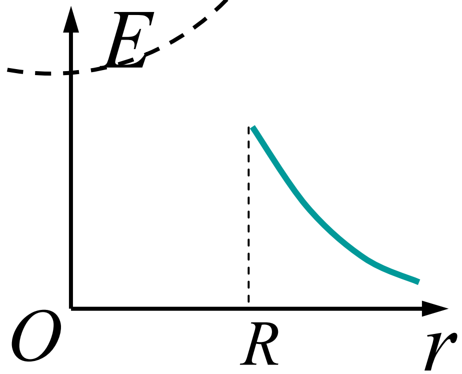
解　（1）球面内某点的场强($r<R$)

$$\oint_S EdS = E\oint_S dS = E\cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow E = 0$$

（2）求球面外一点的场强($r>R$)

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\oint_S dS = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



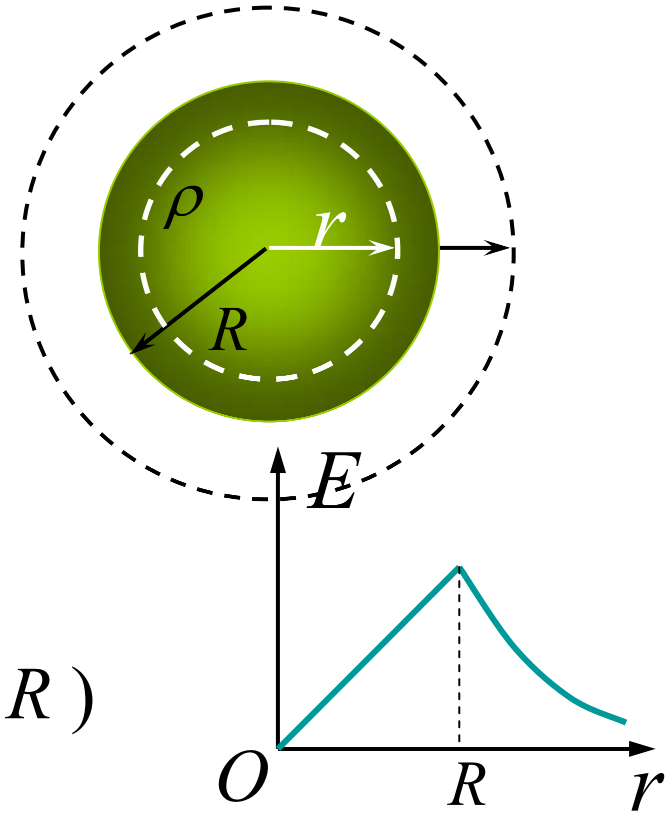
($r<R$)

$$U_1 = \int_r^R E_1 dr + \int_R^\infty E_2 dr = \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

($r>R$)

$$U_2 = \int_r^\infty E_2 dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

例5 求均匀带电球体的场强分布。（已知球体半径为R，带电荷为q，电荷密度为ρ）



解 （1）球外某点的场强

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad q = \rho\frac{4}{3}\pi R^3$$

$$E\oint_S \mathrm{d}S = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad (r \geqslant R)$$

（2）求球体内一点的场强

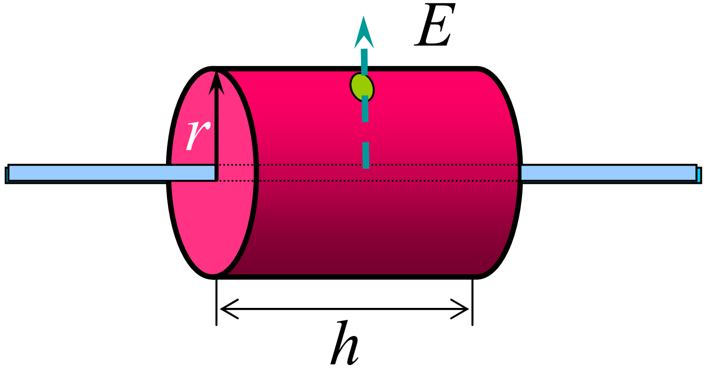
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0} \qquad E\oint_S \mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{4\pi R^3/3}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{qr^3}{\varepsilon_0 R^3} \qquad E = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \quad (r < R)$$

例6 求无限长带电直线的场强分布.（已知线电荷密度为λ）

解

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\Phi_{e1}+\int_{S_2} E dS+\Phi_{e3}$$

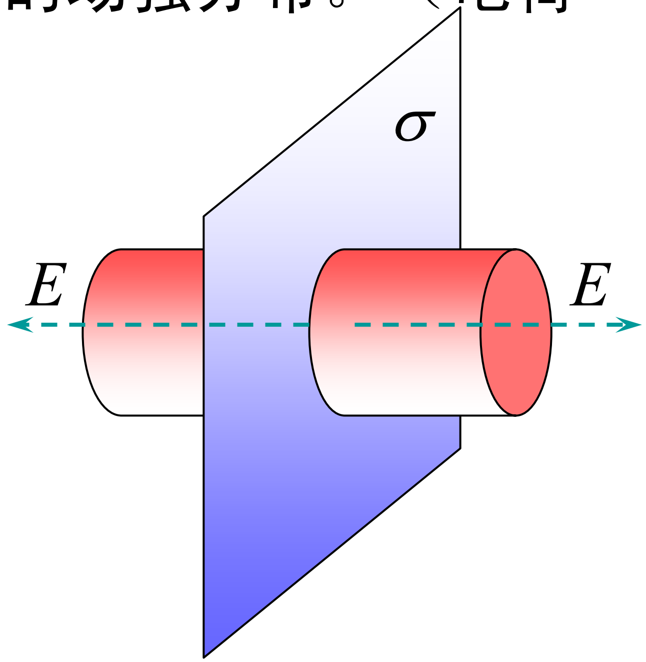
$$\Phi_{e1}=\Phi_{e3}=0$$

$$\int_{S_2} E\cdot dS=E\cdot 2\pi rh$$

$$E\cdot 2\pi rh=\frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

例7 计算无限大均匀带电平面的场强分布。（电荷密度为σ）



解
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

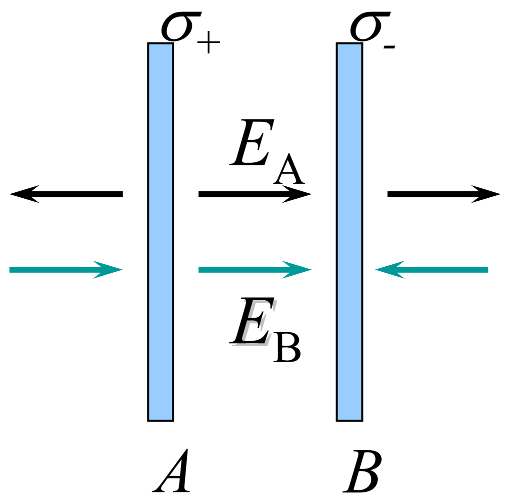
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 2\Phi_{\text{e底}} + \Phi_{\text{e侧}}$$

$$\Phi_{\text{e侧}} = 0 \qquad \Phi_{\text{e底}} = 2ES$$

$$2ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0} \qquad \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

例8 计算两无限大均匀带异号电荷平面的场强分布。

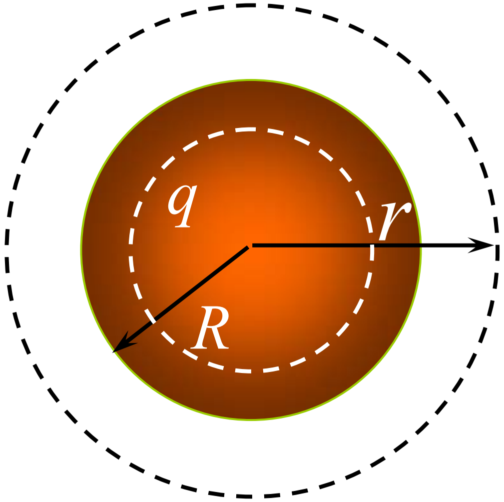
$$E_A = E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$



平面之间：$E_{内} = E_A + E_B = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

两平面外侧：$E_{外} = E_A - E_B = 0$

例9　半径为R的均匀带电球体，带电荷量为q。求电势分布。



解
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$$

$$E_1 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{q}{4\pi R^3/3} \frac{4\pi r^3}{3}$$

$$E_1 = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \qquad E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$U_1 = \int_r^R E_1 \mathrm{d}r + \int_R^\infty E_2 \mathrm{d}r = \int_r^R \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \mathrm{d}r + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}(R^2 - r^2) + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q(3R^2 - r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

$$U_2 = \int_r^\infty E_2 \mathrm{d}r = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \mathrm{d}r = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

静电场对

- 导体 ⟷ 静电感应
- 电介质 ⟷ 极化

静电场中的导体

静电平衡时： $\vec{E}_{内}=0$, $\vec{E}_{面}\perp$ 表面，导体等势， $\vec{E}_{面}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

◆平板板电荷分布问题

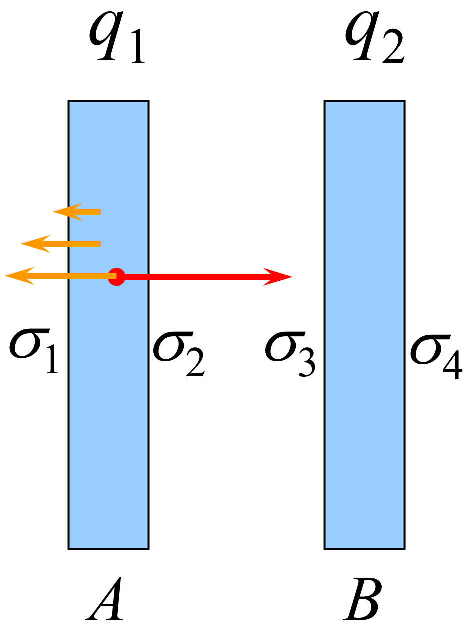
① 两板带电等值同号，电荷分布在两板外侧

② 两板带电等值异号，电荷分布在两板内侧

③ 两板带电不等值，则四个面都有电荷

④ 接地时，电荷在两板内侧，外侧电荷为0，接地板电势U=0

例1 两块导体平板，面积为S，分别带电荷q_1和q_2，两极板间距远小于平板的线度。求平板各表面的电荷密度。



解 电荷守恒：

$$\sigma_1 S + \sigma_2 S = q_1$$

$$\sigma_3 S + \sigma_4 S = q_2$$

由静电平衡条件，导体板内$E = 0$

$$E_A = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

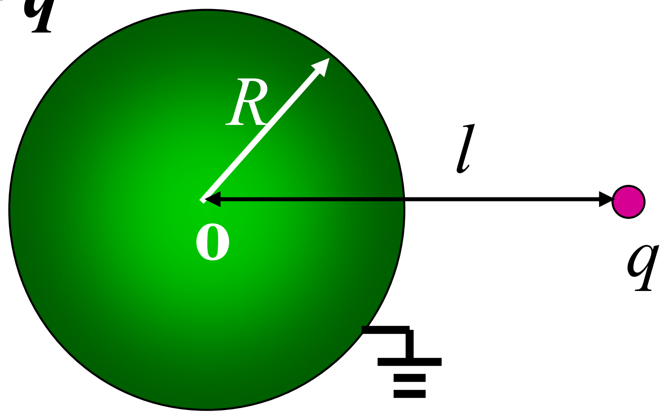
$$E_B = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{q_1 + q_2}{2S} \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{q_1 - q_2}{2S}$$

两板内侧等值异号，外侧等值同号。

例2 半径为R的金属球与地相连接，在与球心相距l处有一点电荷q(>0)，问球上的感应电荷 q' =?

$q' \overset{?}{=} q$



解： 金属球是等势体

球体上处处电电势： $V=0$

球心处： $V_o=0$

即：$$\int_0^{q'}\frac{dq'}{4\pi\varepsilon_o R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_o l}=0$$

$$\int_o^{q'}\frac{dq'}{4\pi\varepsilon_o R}=-\frac{q}{4\pi\varepsilon_o l} \Longrightarrow \frac{q'}{R}=-\frac{q}{l}$$

$$\therefore q'=-\frac{R}{l}q$$

静电场中的电介质

极化 $\begin{cases} \text{位移极化} \\ \text{取向极化} \end{cases}$ ⟹ 极化电荷（束缚电荷）

电介质存在时的高斯定理

$$\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i}$$

$$\begin{cases} \vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E} \\ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}} \end{cases}$$

（各向同性电介质）

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$\varepsilon_r = 1 + \chi_e \text{，} \varepsilon_r > 1 \text{，} \chi_e > 0$$

$$\boxed{\sigma' = \vec{P}\cdot\vec{n} = P\cos\theta}$$

电介质中的电场

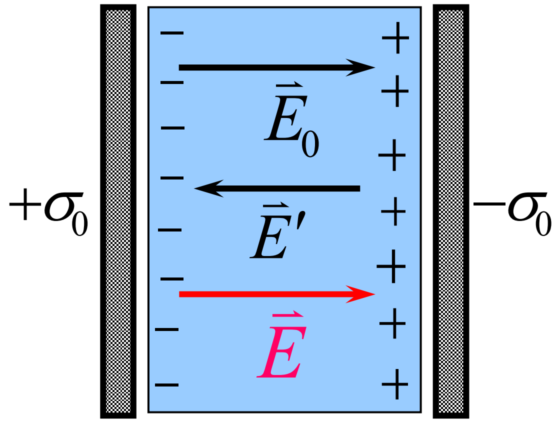
外电场：$\vec{E}_0$

极化电荷的电场：$\vec{E}'$

总电场：$\vec{E}$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

以平行板电容器为例：



$$E = E_0 - E'$$

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

注意到：$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$ $\quad P = \sigma'$

令 $\varepsilon_r = 1 + \chi_e$：相对介电常数

$$\boxed{E = \frac{E_0}{\varepsilon_r}}$$

$$U = Ed = \frac{U_0}{\varepsilon_r} \qquad C = \varepsilon_r C_0$$

有介质时静电场的计算

1. 根据介质中的高斯定理计算出电位移矢量。

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_i$$

2. 根据电场强度与电位移矢量的关系计算场强。

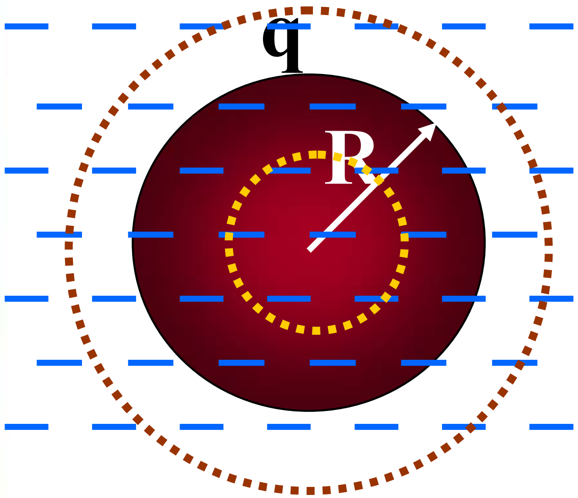
$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}$$

3. 可计算电极化强度。 $\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}$

4. 可计算极化电荷面密度。 $P_n = P\cos\theta = \sigma'$

22

例3.一个带正电的金属球，半径为R，带电量为q，浸在一个大油箱中，油的相对介电常数为ε_r。求E、U、P。



分析：电荷q及电介质呈球对称分布

则E、D也为球对称分布

解：取半径为r的同心球面为高斯面

$r < R \quad \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \sum q_i = 0 \quad \therefore \ D = 0$

$r > R \quad \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot 4\pi r^2$

$\sum q_i = q$

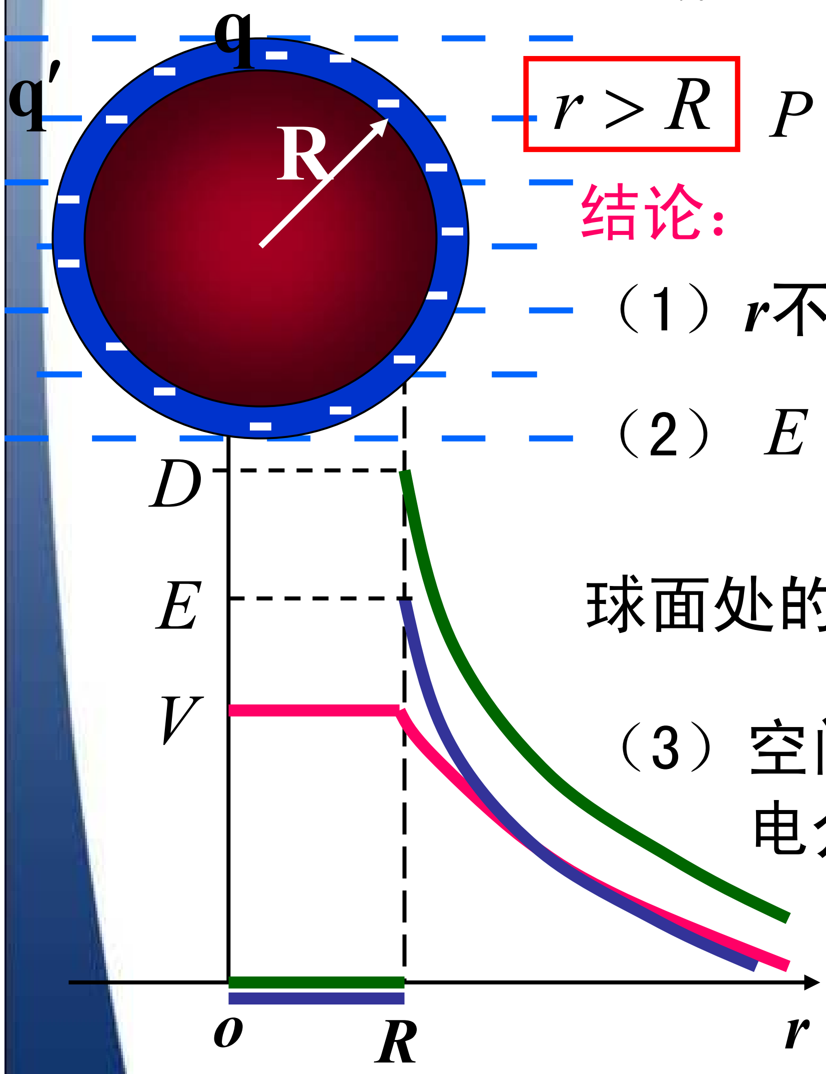
$$\left.\begin{matrix} \oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = D\cdot 4\pi r^2 \\ \sum q_i = q \end{matrix}\right\} D = \frac{q}{4\pi r^2}$$

则有：$E = \dfrac{D}{\varepsilon}\begin{cases} r < R & E = 0 \\ r > R & E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \end{cases}$

$$U = \int_a^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}\begin{cases} r < R & U_1 = \int_r^R \underset{0}{E_1}\cdot dr + \int_R^\infty E_2\cdot dr = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R} \\ r \geq R & U_2 = \int_r^\infty E_2\cdot dr = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r<R & D=0 \qquad E=0 \\ r>R & D=\dfrac{q}{4\pi r^2} \qquad E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r<R & U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R} \\ r\geq R & U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \end{cases}$$



$\boxed{r>R}$ $P=\chi_e\varepsilon_0 E=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E=(1-\dfrac{1}{\varepsilon_r})\dfrac{q}{4\pi r^2}$

结论：

（1）r不同，各点极化程度不同

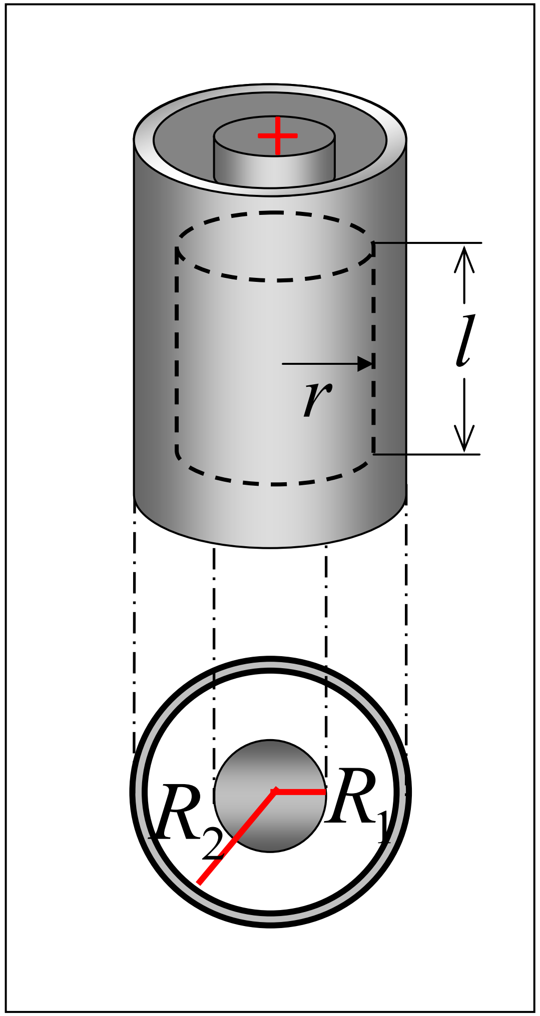
（2） $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}<\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 减弱 $\dfrac{1}{\varepsilon_r}$

球面处的介质油面上出现了束缚电荷q'

（3）空间某点处的E仅与该点的电介质有关，

而该处的U与积分路径上所有电介质有关。

例4　图中是由半径为R_1的长直圆柱导体和同轴的半径为R_2的薄导体圆筒组成，其间充以相对电容率为ε_r的电介质。设直导体和圆筒单位长度上的电荷分别为$+\lambda$和$-\lambda$。求（1）电介质中的电场强度、电位移和极化强度，（2）电介质内、外表面的极化电荷面密度。



解：（1）$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \lambda l$$

$$D2\pi rl = \lambda l \qquad D = \frac{\lambda}{2\pi r}$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$P = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E = \frac{\varepsilon_r - 1}{2\pi\varepsilon_r r}\lambda$$

（2）电介质内、外表面的极化电荷面密度。

$$\because E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$$

电介质内、外表面处的电场强度分别为：

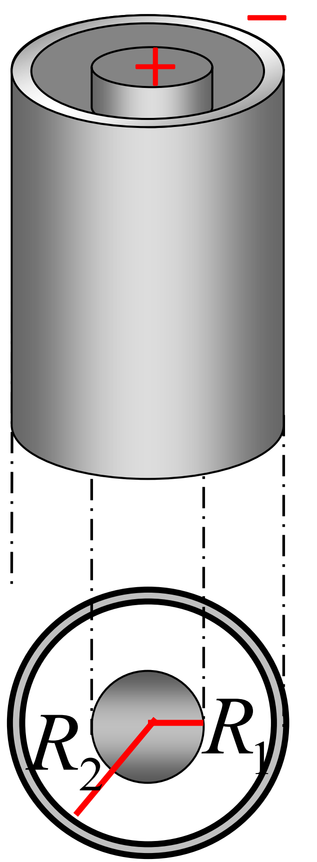
$$E_1=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1}\quad (r=R_1)$$

$$E_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_2}\quad (r=R_2)$$

所以，电介质两表面极化电荷面密度分别为：

$$-\sigma_1'=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E_1=(\varepsilon_r-1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_1}$$

$$\sigma_2'=(\varepsilon_r-1)\varepsilon_0 E_2=(\varepsilon_r-1)\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_r R_2}$$



电容和电容器

1、孤立导体的电容 $C=\dfrac{q}{U}$

2、电容器的电容 $C=\dfrac{q}{U_A-U_B}=\dfrac{q}{U_{AB}}$

电容的大小仅与导体的形状、相对位置、其间的电介质有关，与所带电荷量无关.

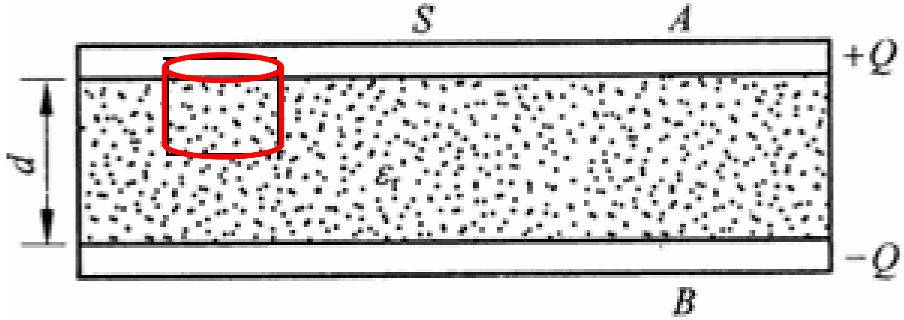
计算电容器电容的步骤:

1. 设两极板分别带电$\pm Q$
2. 计算极板间的场强 E
3. 计算极板间的电势差 $$U_{AB}=\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$
4. 由电容器电容定义计算C $$C=\frac{q}{U_{AB}}$$

1. 平板电容器

平行板电容器由两块彼此靠得很近的平行极板组成，两个极板的面积为S，内表面间的距离为d，两个极板间充满了相对电容率为ε_r的电介质。求电容器的电容。

解 每块极板上的电荷面密度分别为 $\sigma = Q/S$



作圆柱形高斯面，$D=\sigma$

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

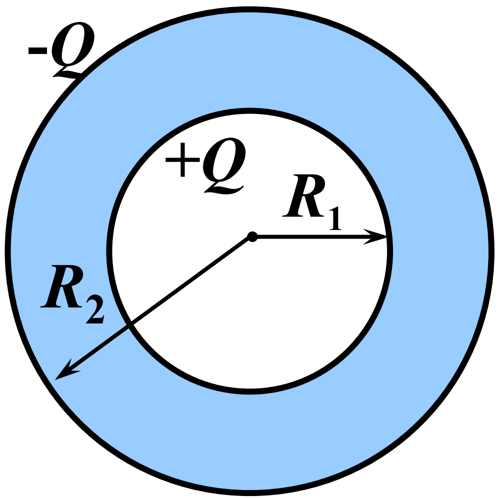
$$U=Ed=\frac{Qd}{\varepsilon_0\varepsilon_r S} \Rightarrow \boxed{C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d}}$$

2. 球形电容器

球形电容器是由两个内外半径分别为R_1和R_2的同心导体球壳组成，两个极板间充满了电容率为ε的电介质，求电容。

解

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = Q \quad \Rightarrow \quad D = \frac{Q}{4\pi r^2}$$



$$E = \frac{D}{\varepsilon} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

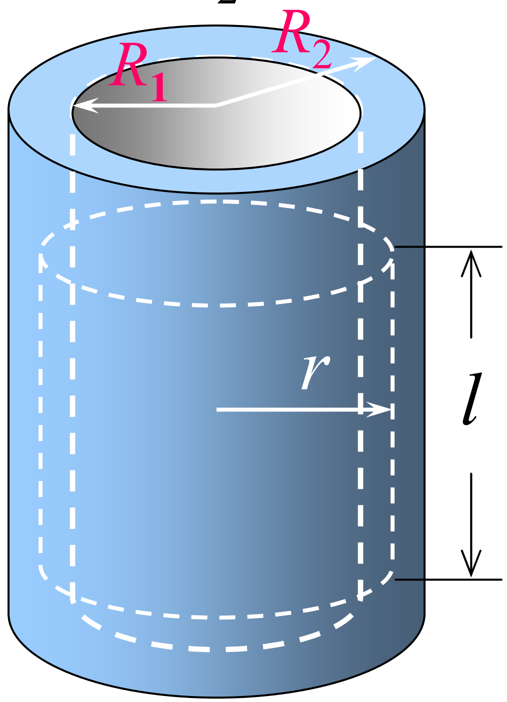
$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}}$$

3. 圆柱形电容器

圆柱形电容器是由两个内外半径分别为R_1和R_2的同轴圆柱导体面组成的，圆柱面长度为L，且$L>>R_2$，两个圆柱面之间充满了相对电容率为ε_r的电介质。求此圆柱形电容器的电容。

$L >> R_2$



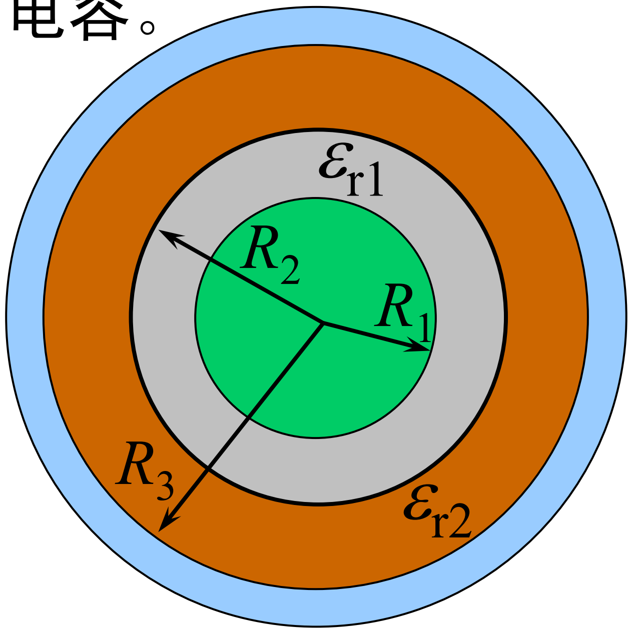
解

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\frac{1}{r}$$

$$U_{AB}=\int_l \vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\frac{dr}{r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

圆柱形电容器电容：$\boxed{C=\frac{Q}{U}=\frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln(R_2/R_1)}}$

例5　球形电容器由半径为R_1的导体球和内半径为R_3的导体球壳构成，其间有两层均匀电介质，分界面的半径为R_2，相对介电常数分别为ε_{r1}和ε_{r2} 。求电容。



解：
$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 4\pi r^2 \cdot D = q$$

$$D = \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r^2} \qquad E_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r^2}$$

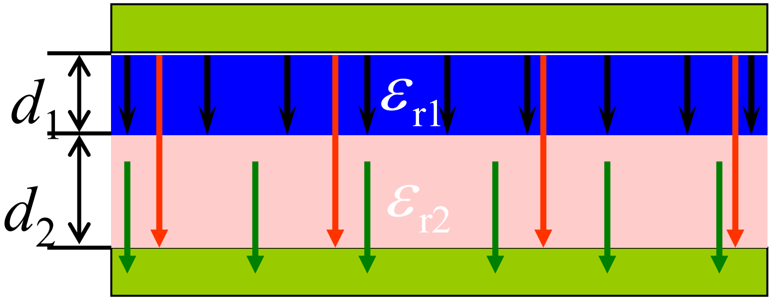
$$\Delta U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1} r^2} + \int_{R_2}^{R_3} \frac{q\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r2} r^2}$$

$$= \frac{q\left[\varepsilon_{r2}R_3\left(R_2 - R_1\right) + \varepsilon_{r1}R_1\left(R_3 - R_2\right)\right]}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}R_1R_2R_3}$$

$$C = \frac{q}{\Delta U} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}R_1R_2R_3}{\varepsilon_{r2}R_3\left(R_2 - R_1\right) + \varepsilon_{r1}R_1\left(R_3 - R_2\right)}$$

例6　一平行板电容器，中间有两层厚度分别为d_1和d_2的电介质，它们的相对介电常数分别为ε_{r1}和ε_{r2}，极板面积为S。求电容。

解　$D=\sigma_0$ 两种介质中D相等。



$$E_1=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}} \qquad E_2=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}}$$

$$\Delta U=E_1d_1+E_2d_2=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)$$

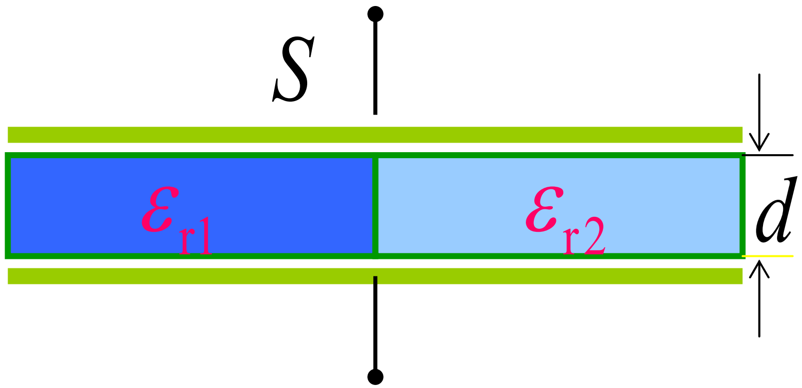
可看成两个电容器串联

$$C=\frac{\sigma_0 S}{\Delta U}=\frac{\varepsilon_0 S}{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}}$$

$$\frac{1}{C}=\frac{\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}}{\varepsilon_0 S}=\frac{1}{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{d_1}}+\frac{1}{\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{d_2}}$$

例7　一平行板电容器充以两种不同的介质，每种介质各占一半体积。求其电容。

解　可看成两个电容器并联



$$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{2d}$$

$$C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{2d}$$

$$C=C_1+C_2=\frac{\varepsilon_0 S}{2d}\left(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}\right)$$

静电场的能量 能量密度

电能储存在（定域在）电场中

静电场的能量 $W_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}CU^2$

电场能量密度：单位体积电场所具有的能量

$$\boxed{w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2} \quad \text{或} \quad \boxed{w_{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}}$$

注意：对于任意电场，上式普遍适用。

当电场不均匀时，电场能的一般计算式：

$$\boxed{W_{\mathrm{e}} = \int w_{\mathrm{e}}\mathrm{d}V}$$

例8 球形电容器的内、外半径分别为R_1和R_2，所带电荷为$\pm Q$，若在两球壳间充以电容率为ε 的电介质，问此电容器贮存的电场能量为多少？

解

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{r^2}$$

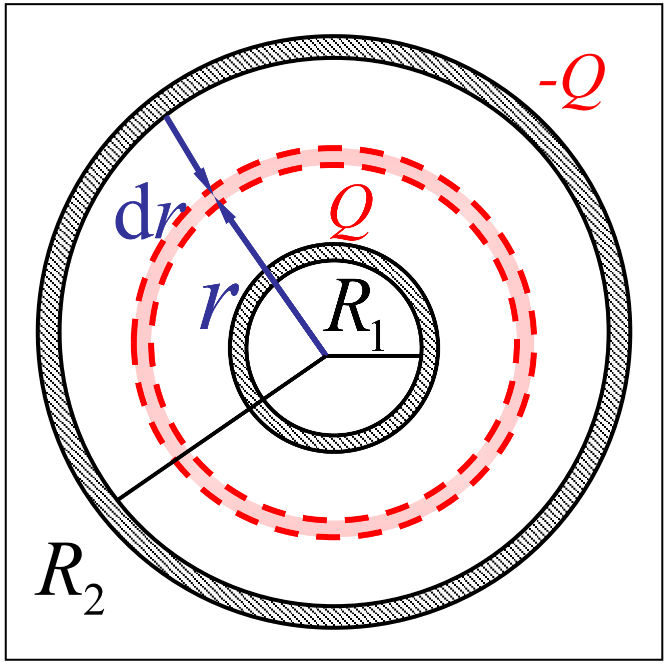
$$dV=4\pi r^2 dr$$

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon r^4}$$

$$\mathrm{d}W_e=w_e\mathrm{d}V=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon r^2}\mathrm{d}r$$

$$W_e=\int \mathrm{d}W_e=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$



磁 场 复 习

更方便!

1、毕奥---萨伐尔定律: $d\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{Id\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$

2、 安培环路定理: $\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$ $\xrightarrow{\text{作用}}$ 对称磁场的计算

3、磁场高斯定理: $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ (说明磁场是无源场)

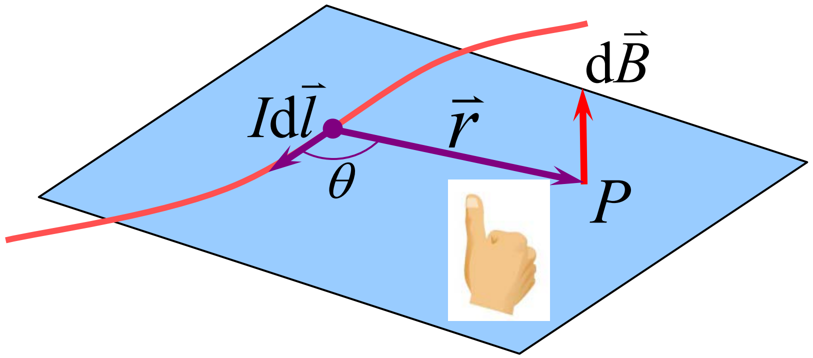
4、安培定律: $d\vec{f} = Id\vec{l} \times \vec{B}$ 磁场对电流元的作用力——安培力

磁场对带电粒子及电流的作用

- 磁场对运动电荷的作用力— 洛仑兹力: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$
- 磁场对载流导线的安培力: $d\vec{F} = \int_l Id\vec{l} \times \vec{B}$
- 磁场对载流线圈的作用力: $\vec{F} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{P} \times \vec{B}$

毕奥---萨伐尔定律

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

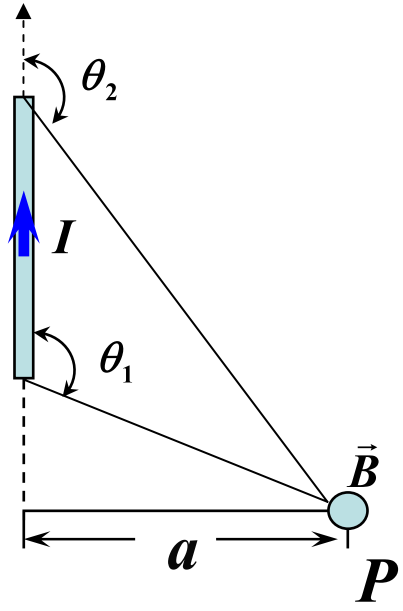


结论

1、电流元或一段载流直导线在其延长线上不产生磁场

2、一段载流直导线产生的磁场：

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi a}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

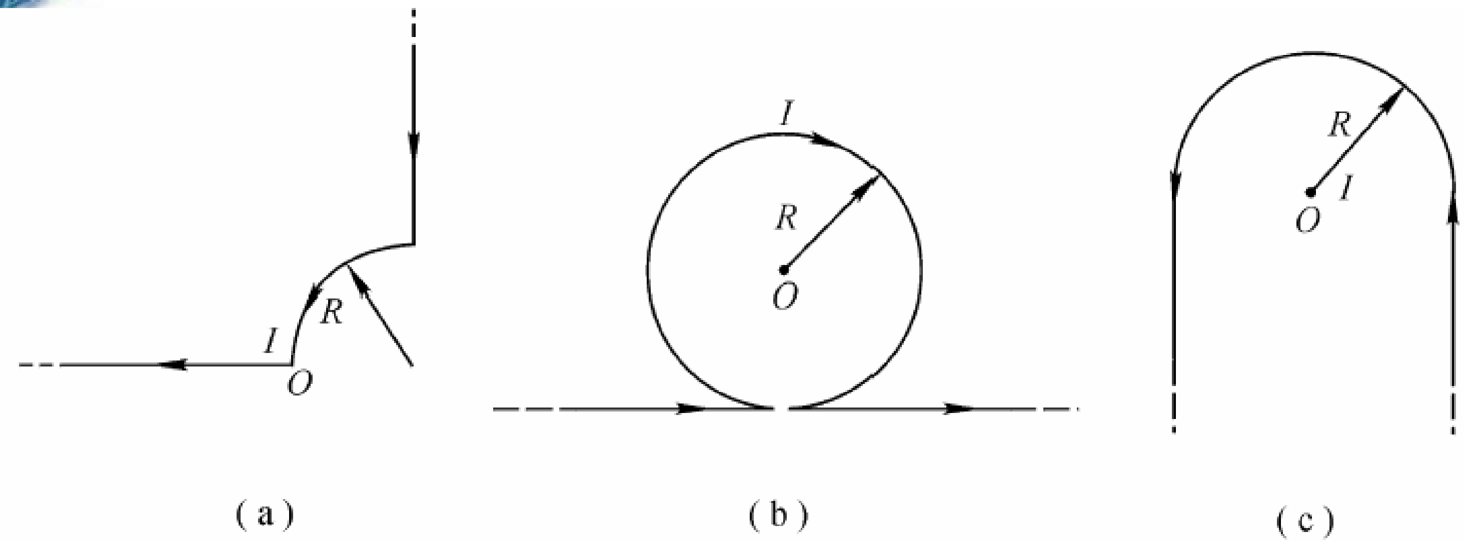


3、“无限长”载流直导线产生的磁场：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$

4、圆电流在圆心处产生的磁场：$B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

5、半径为R，圆心角为 θ 的载流圆弧在圆心处产生的磁场：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\theta}{2\pi}$$



点O 的磁感强度?

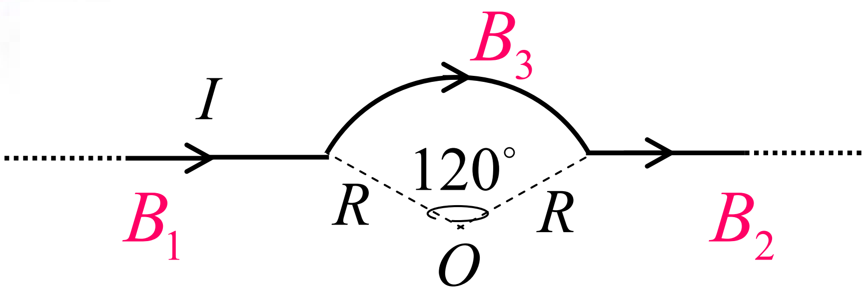
叠加原理:

(a) $B=\dfrac{\mu_0 I}{8R}$ （向外）

(b) $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}-\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}$ （向里）

(c) $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi R}+\dfrac{\mu_0 I}{4R}$ （向外）

点O 的磁感强度?



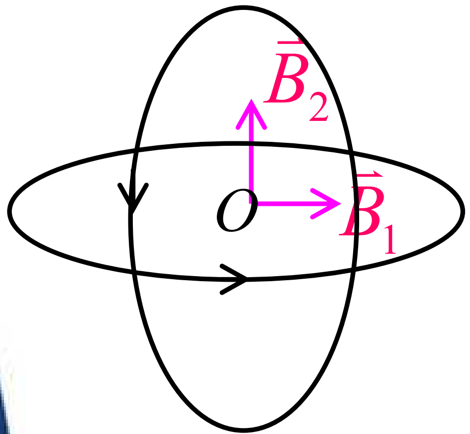
$$\vec{B}_O=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3$$

方向都垂直向里

$$B_3=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{1}{3}$$

$$B_1=B_2=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)\qquad r_0=\frac{R}{2},\ \theta_1=0,\ \theta_2=30^\circ$$

$$B_O=B_1+B_2+B_3=\frac{\mu_0 I}{3R}+\frac{\mu_0 I}{2\pi R}(2-\sqrt{3})$$ 方向垂直向里



$$B_1=\frac{\mu_0 I}{2R}\qquad B_2=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

$$B_O=\sqrt{B_1^2+B_1^2}=\frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2R}$$ 方向....

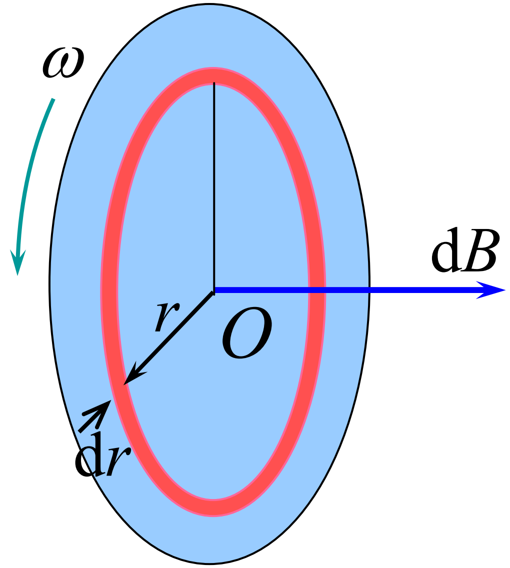
例2 半径为R的圆盘均匀带电，电荷密度为σ。若该圆盘以角速度ω绕圆心O旋转，求圆心O处的磁感应强度以及磁矩。

解

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r} \qquad \mathrm{d}I=\frac{\omega}{2\pi}\mathrm{d}q$$

$$\mathrm{d}q=\sigma\cdot 2\pi r\mathrm{d}r \qquad \mathrm{d}I=\omega\sigma r\mathrm{d}r$$

$$B=\int \mathrm{d}B=\int_0^R \frac{\mu_0\omega\sigma\,\mathrm{d}r}{2}=\frac{\mu_0\omega\sigma R}{2}$$



磁矩： $$\mathrm{d}p_\mathrm{m}=\pi r^2\mathrm{d}I=\pi r^2\omega\sigma r\mathrm{d}r=\pi r^3\omega\sigma\,\mathrm{d}r$$

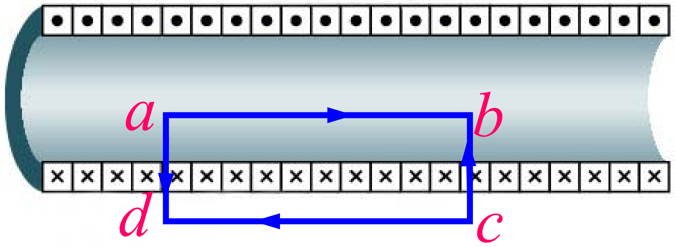
$$p_\mathrm{m}=\int_0^R \pi r^3\omega\sigma\,\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\pi\omega\sigma R^4$$

安培环路定理的应用

可计算电流分布具有一定对称性的恒定磁场。

1. 长直螺线管内的磁感应强度

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$



$$\int_b^c \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_d^a \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\int_c^d \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot l$$

穿过矩形环路的电流强度： $\sum I_i = I\cdot n\cdot l$

$$B\cdot l = \mu_0 I\cdot n\cdot l \qquad \boxed{B = \mu_0 nI}$$

结论：长直螺线管内为均匀磁场。两端：$\boldsymbol{B = \frac{1}{2}\mu_0 nI}$

2. 螺绕环内的磁感应强度

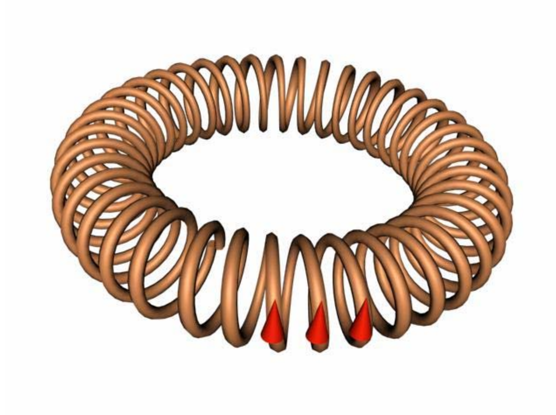
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \sum I$$

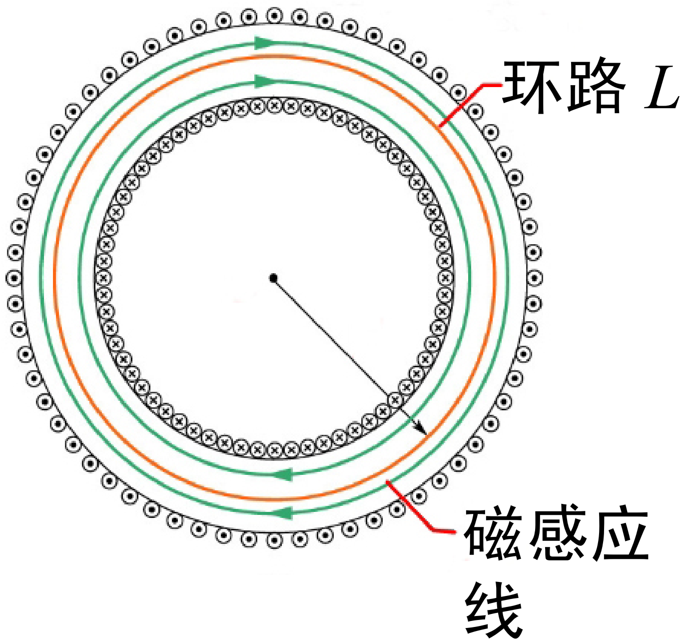
$$B\cdot 2\pi r = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

$$n = \frac{N}{2\pi r}$$

$$B = \mu_0 nI$$



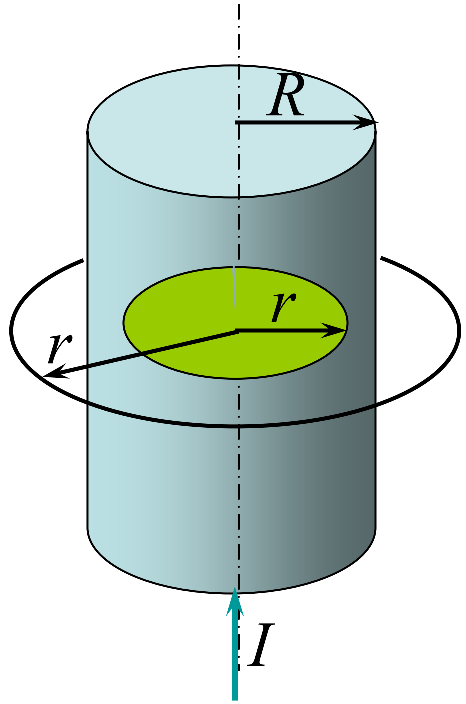


3. 无限长载流圆柱形导体的磁场分布

（1）圆柱外的磁场：

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



（2）圆柱内的磁场：

$$I' = \frac{I}{\pi R^2}\cdot \pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} I$$

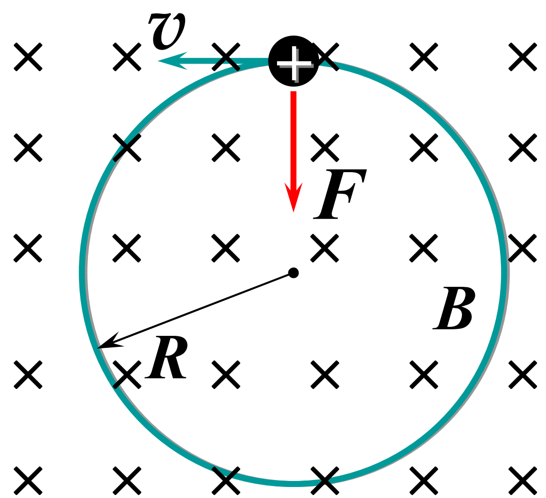
$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = B\cdot 2\pi r = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0 r I}{2\pi R^2}$$

磁场对运动电荷的作用

1. 运动方向与磁场方向平行----带电粒子做匀速直线运动。

2. 运动方向与磁场方向垂直



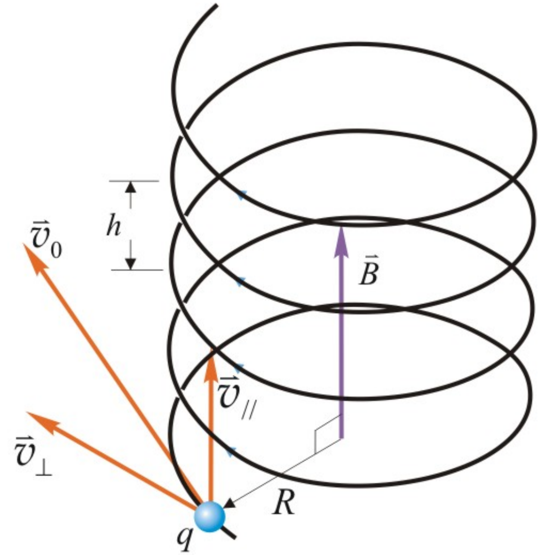
运动方程：$F = qvB \Rightarrow qvB = m\dfrac{v^2}{R}$

周期：$T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{qB}$

结论：带电粒子做匀速圆周运动，其周期和频率与速度无关。

3. 运动方向沿任意方向

$v_{\perp}$：匀速圆周运动　　$v_{//}$：匀速直线运动



结论：带电粒子做螺旋运动

螺距：$h = v_{//}T = \dfrac{2\pi m}{qB} v\cos\theta$

载流导线在磁场中所受的力

安培定律： $d\vec{F} = Id\vec{l} \times \vec{B}$

安培力： 磁场对电流的作用力

安培力的基本计算公式： $\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$

典型结论

1) 均匀磁场中，一段任意形状载流导线所受的力，等于电流的起点、终点与之相同的载流直导线所受的力;

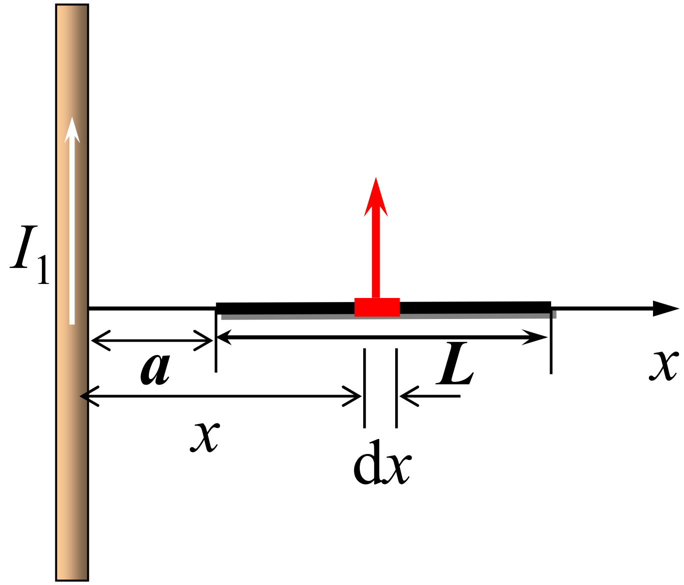
2) 均匀磁场中，任意形状载流平面线圈所受合力为零.

例7 无限长直载流导线通有电流I_1，在同一平面内有长为L的载流直导线，通有电流I_2（如图所示）。求长为L的导线所受的磁场力。

解 $$dF = I_2 dx B = I_2 dx \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

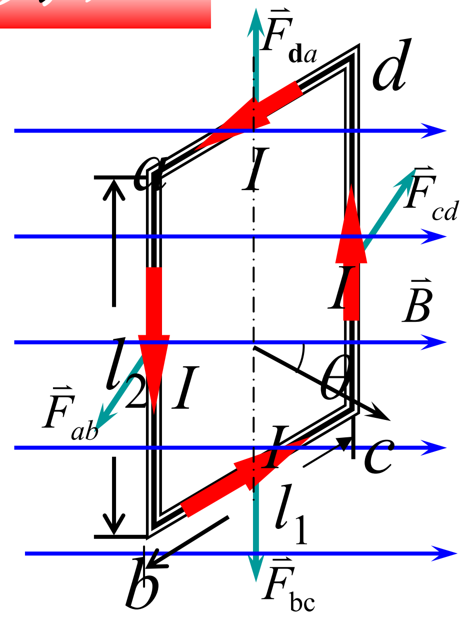
$$F = \int dF = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_a^{a+L} \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a}$$



载流线圈在磁场中所受的磁力矩

线圈所受磁力偶矩：$\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{P}_m \times \vec{B}$



注意：上式对均匀磁场中任意形状的平面载流线圈都适用。

载流线圈在磁场中转动时磁场力的功

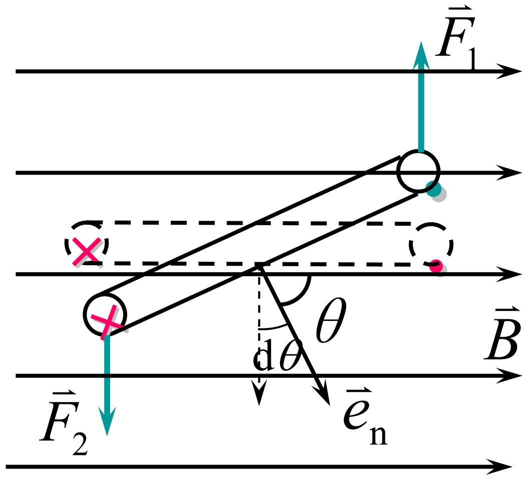
力矩的功：$W = \int -M\mathrm{d}\theta$

磁力矩：$M = ISB\sin\theta$

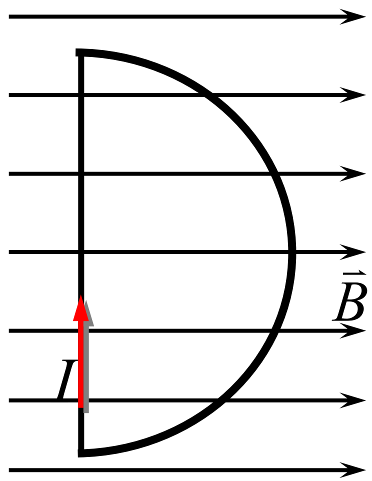
$$W = \int -BIS\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = I\int \mathrm{d}(BS\cos\theta)$$

$$= I\int \mathrm{d}\Phi \quad = I\Delta\Phi$$

$$\boxed{W = I\Delta\Phi}$$



例8 有一半径为R的闭合载流线圈，通过电流I. 今把它放在均匀磁场中，磁感应强度为B，其方向与线圈平面平行. 求(1)以直径为转轴，线圈所受磁力矩的大小和方向；(2)在力矩作用下，线圈转过90°，力矩做了多少功？



解 $\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B}$ $\because \quad \theta = 90°$

$$\therefore \quad M = ISB\sin\theta = I \cdot \frac{\pi R^2}{2} B = \frac{1}{2}\pi IBR^2$$

线圈转过90°时，磁通量的增量为

$$\Delta\Phi = \frac{\pi R^2}{2} B$$

$$W = I\Delta\Phi = \frac{\pi R^2}{2} IB$$

真空中的磁场

电流的磁场

电流元的磁场
毕--萨定律

$$d\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Id\vec{l}\times\vec{e}_r}{r^2}$$

载流导线的磁场

$$\vec{B}=\int d\vec{B}$$

运动电荷的磁场

$$\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\upsilon}\times\vec{r}_0}{r^2}$$

基本方程

1、高斯定理

$$\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$

2、安培环路定理

$$\oint_L\vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I$$

磁场的描述

磁感应线

磁通量

$$\Phi=\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}$$

磁感应强度

$$B=\frac{F_m}{q\upsilon}$$

磁场对电流的作用

磁场对载流导线的作用

安培定理

$$d\vec{F}=Id\vec{l}\times\vec{B}$$

磁场对载流线圈的作用

$$\vec{F}=I\vec{S}\times\vec{B}$$

磁场对运动电荷作用

$$\vec{F}=q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$$

电磁感应

1、电磁感应

电磁感应定律 $\varepsilon_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$

楞次定律　感应电流的方向总是反抗引起感应电流的原因

2、动生电动势 $\varepsilon_i = \int (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$

感生电动势 $\varepsilon_i = \oint_l \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = -\int_s \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$

例1　一长直导线通以电流$i=I_0\sin\omega t$，旁边有一个共面的矩形线圈$abcd$。求：线圈中的感应电动势。

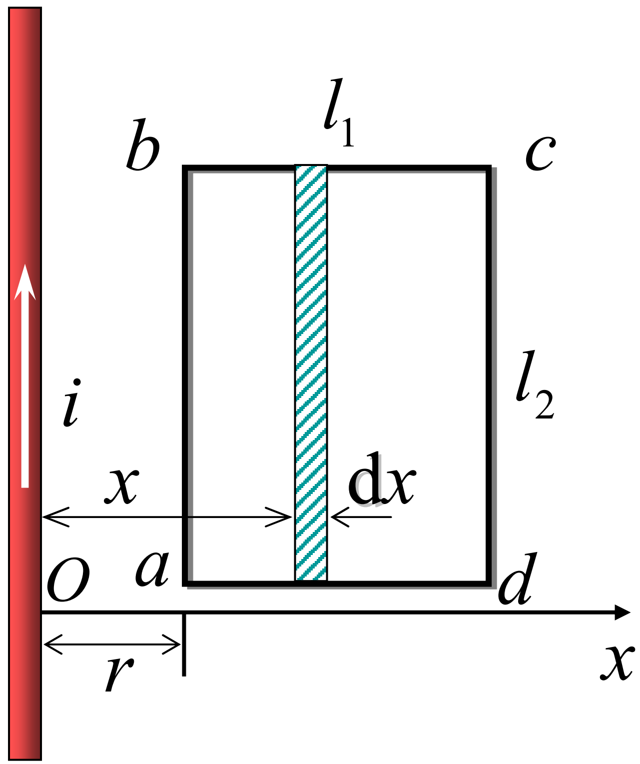
解

$$\Phi=\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=\int_r^{r+l_1}\frac{\mu_0 i}{2\pi x}l_2 dx$$

$$=\frac{\mu_0 I_0 l_2}{2\pi}\sin\omega t\ln\frac{r+l_1}{r}$$

$$\varepsilon_i=-\frac{d\Phi}{dt}$$

$$=-\frac{\mu_0 I_0}{2\pi}l_2\omega\cos\omega t\ln\frac{r+l_1}{r}$$



例2　一根长为L的铜棒，在均匀磁场B中以角速度ω在与磁场方向垂直的平面上做匀速转动。求棒的两端之间的感应电动势大小。

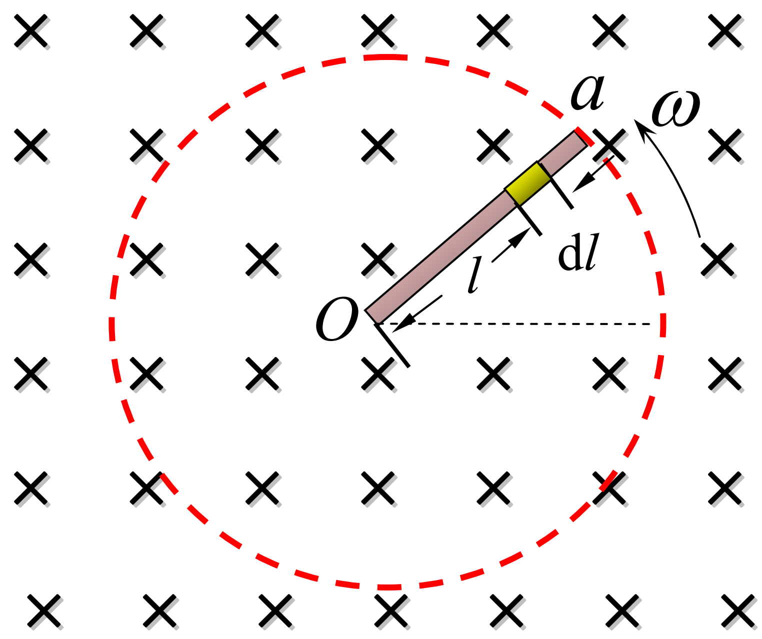
解

$$\varepsilon_{\mathrm{i}} = \int_0^L (\vec{v}\times\vec{B})\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\int_0^L vB\mathrm{d}l$$

$$= -\int_0^L B\omega l\mathrm{d}l$$

$$= -\frac{1}{2}B\omega L^2$$



动生电动势方向：$\boldsymbol{a\rightarrow O}$

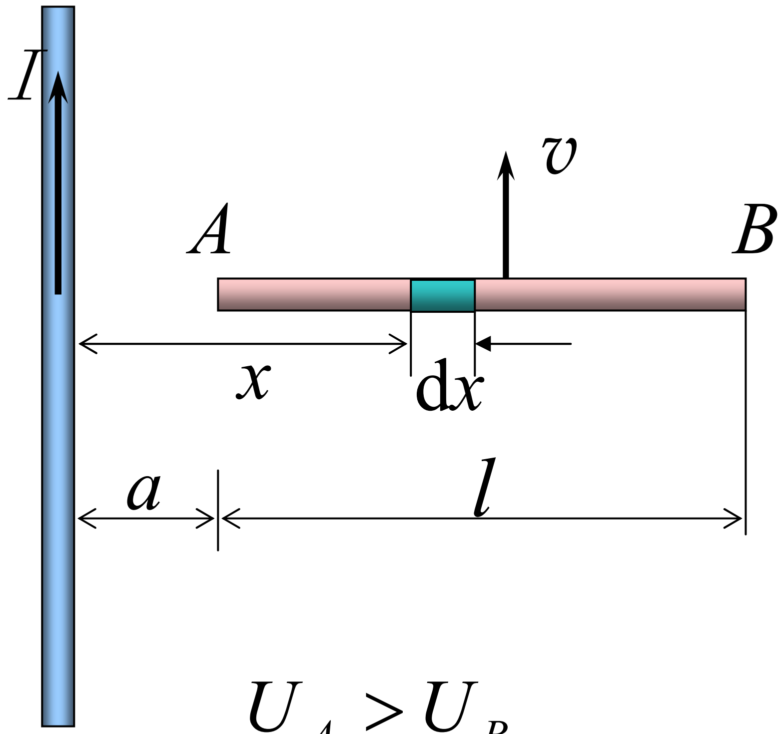
例3 一长直导线中通电流 I，有一长为l的金属棒与导线垂直共面。当棒以速度v 平行与长直导线匀速运动时，求棒产生的动生电动势。

解 $$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$$\mathrm{d}\varepsilon_{\mathrm{i}}=(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{x}=-Bv\mathrm{d}x$$

$$\varepsilon_{\mathrm{i}}=-\int_a^{a+l}\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=-\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{a+l}{a}$$



$$U_A>U_B$$