一、填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 设 A,B 为两个随机事件，$P(\overline{A})=0.3$，$P(B)=0.6$，$P(A|B)=0.2$，则 $P(A-B)=$ <u>0.58</u>。

2. 已知随机变量 X 与 Y 都服从泊松分布 $\pi(1)$ 且相互独立，则 $P\{\max(X,Y)\geq 1\}=$ <u>$1-e^{-2}$</u>。

3. 设随机向量 $X\sim N(0,4)$，$Y\sim N(1,9)$，$\rho_{XY}=0.2$，则 $Cov(X,Y)=$ <u>1.2</u>。

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 在区间 $(0,1)$ 独立地随机取值，则 $\sum_{i=1}^{100}X_i$ 近似地服从 <u>$N(50,25/3)$</u>。

5. 在假设检验中，如果增加样本量，其他条件不变，则犯第一类错误的概率 <u>变小</u>（填：变大、变小、不变）。

二、选择题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 某小组有 4 位男生和 2 位女生，从中抽 2 人，则 2 位都是男生的概率是(B)。
（A）0.6　　（B）0.4　　（C）0.2　　（D）0.8

2. 已知二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数为 $F(x,y)$，边缘分布函数分别为 $F_X(x)$、$F_Y(y)$，则 $M=\max\{X,Y\}$ 的分布函数是(C)。
（A）$F_X(z)F_Y(z)$　（B）$F_X(x)F_Y(y)$　（C）$F(z,z)$　（D）$1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

3. 设随机变量 X,Y 独立同分布，分布律如下：

X	-1	1
$P\{X=k\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	1
$P\{Y=k\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

则下列结论正确的是(C)。

（A）$X=Y$　（B）$P\{X=Y\}=1$　（C）$P\{X=Y\}=\frac{5}{9}$　（D）$P\{X=Y\}=\frac{4}{9}$

4. 设 $E(X)=0$，$D(X)=5$，则由切比雪夫不等式，得 $P\{-5<X<5\}\geq$(D)。
（A）1/25　（B）24/25　（C）1/5　（D）4/5

5. 在单个正态总体方差的假设检验中，显著性水平为 α，样本方差为 S^2，样本容量为 n，$H_0:\sigma^2\leq\sigma_0^2$，$H_1:\sigma^2>\sigma_0^2$，则拒绝域为(D)。

（A）$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leq\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$　　（B）$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\leq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$

（C）$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_{1-\alpha}(n-1)$　　（D）$\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}\geq\chi^2_{\alpha}(n-1)$

三、计算题 (共 70 分)

1.（本题 10 分）在某项医疗保险业务中，把被保人投保时的健康水平分为：“一级”、“二级”、“三级”。已知这三类被保人占比分别是 0.15、0.60、0.25，据统计，他们产生 2000 元以上医疗费用的概率分别是 0.05、0.10、0.30。

(1) 任选一位被保人，他(她)产生 2000 元以上医疗费用的概率；

(2) 若某一位被保人产生了 2000 元以上医疗费用，求该被保人在投保时健康水平为“二级”的概率。

解：设 A 表示“产生 2000 元以上医疗费用”，

$B_i\,(i=1,2,3)$ 分别表示健康水平为：“一级”、“二级”、“三级”。

由题可得：$P(B_1)=0.15\quad P(B_2)=0.6\quad P(B_3)=0.25$ ，

$$P(A|B_1)=0.05\quad P(A|B_2)=0.10\quad P(A|B_3)=0.30$$

(1) 由全概率公式：

$$\begin{aligned}P(A)&=\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)\\&=0.15\times0.05+0.6\times0.1+0.25\times0.3\\&=0.1425\end{aligned}$$

(2) 由贝叶斯公式：

$$P(B_2|A)=\frac{P(B_2)P(A|B_2)}{\sum_{i=1}^{3}P(B_i)P(A|B_i)}=\frac{0.6\times0.1}{0.1425}=\frac{8}{19}\approx0.42.$$

2.（本题 10 分）设二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律如下

Y \ X	0	1	2
0	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{3}$

求：(1) $X+Y$ 的分布律；(2) $E(X+3Y-5)$；(3) $D(-2Y)$。

解：(1) 由题知 $X+Y$ 的可能取值为 $0,1,2,3$.

可算得 $P\{X+Y=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{1}{18}$,

$P\{X+Y=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{2}$,

$P\{X+Y=2\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=2,Y=0\}=\frac{1}{9}$,

$P\{X+Y=3\}=P\{X=2,Y=1\}=\frac{1}{3}$,

从而 $X+Y$ 的分布律为：

$X+Y$	0	1	2	3
P	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$

(2) 由题可得 X,Y 的边缘分布律分别为

X	0	1	2
P	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{18}$

Y	0	1
P	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$

所以 $E(X+3Y-5)$

$$=E(X)+3E(Y)-5$$

$$=1+3\times\frac{13}{18}-5=-\frac{11}{6}.$$

(3) $D(-2Y)=4D(Y)=4\left[E(Y^2)-E^2(Y)\right]$

$$=4\times\left[\frac{13}{18}-\left(\frac{13}{18}\right)^2\right]=\frac{65}{81}.$$

3.（本题 10 分）已知 X_1,X_2,X_3 为来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，记 $Y_i=X_i-\bar{X}$，$\bar{X}$ 为样本均值，$i=1,2,3$，求：(1) $D(Y_1)$；(2) $Cov(Y_2,Y_3)$。

解法一：

(1) $D(Y_1)=D(X_1-\bar{X})=D(X_1)+D(\bar{X})-2Cov(X_1,\bar{X})$

$$=1+\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

(2) $Cov(Y_2,Y_3)=Cov(X_2-\bar{X},X_3-\bar{X})$

$$=Cov(X_2,X_3)-Cov(\bar{X},X_3)-Cov(X_2,\bar{X})+Cov(\bar{X},\bar{X})$$

$$=0-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$$

$$=-\frac{1}{3}$$

解法二：

(1) $D(Y_1)=D(X_1-\bar{X})=D\left(\frac{2}{3}X_1-\frac{1}{3}X_2-\frac{1}{3}X_3\right)$

$$=\frac{4}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\quad=\frac{2}{3}$$

(2) $Cov(Y_2,Y_3)=Cov(X_2-\bar{X},X_3-\bar{X})$

$$=Cov\left(-\frac{1}{3}X_1+\frac{2}{3}X_2-\frac{1}{3}X_3,-\frac{1}{3}X_1-\frac{1}{3}X_2+\frac{2}{3}X_3\right)$$

$$=Cov\left(-\frac{1}{3}X_1,-\frac{1}{3}X_1\right)+Cov\left(\frac{2}{3}X_2,-\frac{1}{3}X_2\right)+Cov\left(-\frac{1}{3}X_3,\frac{2}{3}X_3\right)$$

$$=\frac{1}{9}-\frac{2}{9}-\frac{2}{9}\quad=-\frac{1}{3}$$

4.（本题 15 分）设二维随机变量(X,Y)的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}6y, & 0<x<1,\ 0<y<x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) 判断X,Y是否相互独立，并说明理由；(2) 求概率$P\{Y\le 1-X\}$；(3) 求$Z=X+Y$的概率密度。

解：(1) 根据题意，可算得当$0<x<1$时，

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dy=\int_0^x 6ydy=3x^2,$$

所以关于X的边缘概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当$0<y<1$时，

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dx=\int_y^1 6ydx=6y-6y^2,$$

所以关于X的边缘概率密度

$$f_Y(y)=\begin{cases}6y-6y^2, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

故 $f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以$X$和$Y$不独立.

(2) $P\{Y\le 1-X\}=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_y^{1-y}6ydxdy$

$$=\frac{1}{4}$$

(3) 由 Z 的概率密度 $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x,z-x)dx$，

非零区域为 $\begin{cases}0<x<1\\0<z-x<x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<1\\x<z<2x\end{cases}$,

当 $0<z<1$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{z}6(z-x)dx=\frac{3}{4}z^2$

当 $1<z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{\frac{z}{2}}^{1}6(z-x)dx=-\frac{9}{4}z^2+6z-3$

故 Z 的概率密度为 $f_Z(z)=\begin{cases}\frac{3}{4}z^2, & 0<z<1,\\-\frac{9}{4}z^2+6z-3, & 1<z<2,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

5.（本题 15 分） 已知 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4a}, & 0\le x\le 4a,\\0, & \text{其他},\end{cases}$ 的简单随机样本，其中 $a>0$ 为未知参数，求：(1) a 的矩估计量；(2) a 的最大似然估计量；(3) 判断 a 的矩估计量是否为无偏估计量，并说明理由。

解： (1) $\mu_1=E(X)=2a$

利用 A_1 代替 μ_1，得矩估计量为 $\hat{a}_1=\frac{\bar{X}}{2}$.

(2) 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是相应于样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的一个样本值。 似然函数为

$$L(a)=\begin{cases}\frac{1}{(4a)^n}, & 0\le x_i\le 4a, i=1,2,\cdots,n\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在当分母 $(4a)^n$ 取最小值时，似然函数 $L(a)$ 取最大值，故最大似然估计量为

$$\hat{a}_2=\frac{1}{4}\max\{X_1,X_2,\ldots,X_n\}.$$

(3) $$E(\hat{a}_1)=E\left(\frac{\bar{X}}{2}\right)=\frac{1}{2}E(\bar{X})=\frac{1}{2}\times 2a=a$$

故矩估计量是无偏估计量。

6.（本题 10 分） 设某一年我国各地数字普惠金融总指数 $X\sim N(300,10000)$，五年后，随机抽取了 25 个地区的数字普惠金融总指数，其平均值为 365。设 5 年后数字普惠金融总指数仍服从正态分布，

且方差不变。问：在显著性水平$\alpha=0.05$下，数字普惠金融总指数是否发生了显著变化？

（$z_{0.025}=1.96$，$z_{0.05}=1.645$，$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$，$t_{0.05}(24)=1.7109$，$t_{0.05}(25)=1.7081$）

解： $H_0:\mu=\mu_0=300, H_1:\mu\neq 300$

在H_0为真时，$Z=\dfrac{\overline{X}-300}{\sigma/\sqrt{n}}\sim N(0,1)$

拒绝域：$|Z|=\left|\dfrac{\overline{x}-300}{\sigma/\sqrt{n}}\right|\geq z_{\frac{\alpha}{2}}$

已知$\sigma=100$，$n=25$，$\mu_0=300$，$\overline{x}=365$，$\alpha=0.05$，$z_{0.025}=1.96$

$\left|\dfrac{\overline{x}-300}{\sigma/\sqrt{n}}\right|=\dfrac{13}{4}=3.25>z_{0.025}=1.96$，3.25 落入拒绝域。

故拒绝H_0，即认为数字普惠金融总指数发生了显著变化。