

## 模拟训练 II

### 一、填空题 (每题 3 分, 共 15 分)

- 1、设随机事件  $A$ 、 $B$  相互独立,  $P(B)=0.5$ ,  $P(A-B)=0.3$ , 则  $P(B-A) = \underline{0.2}$ 。
- 2、已知随机变量  $X$  服从参数为 1 的泊松分布, 则  $P(X=E(X)) = \underline{e^{-1}}$ 。
- 3、已知随机变量  $X$ 、 $Y$  相互独立, 且  $X \sim N(2,3)$ ,  $Y \sim N(1,2)$ , 则随机变量  $Z=2X-3Y+1 \sim \underline{N(2,30)}$ 。
- 4、已知  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  和  $S^2$  为样本均值和样本方差, 若  $T = \bar{X} - S^2$ , 则  $E(T) = \underline{\mu - \sigma^2}$ 。
- 5、已知  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  和  $S^2$  为样本均值和样本方差, 则在显著性水平  $\alpha$  下假设检验  $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ ,  $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$  的拒绝域为:

$$\underline{\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} > \chi_\alpha^2(n-1)} \text{。 (这题注意不同表达方式)}$$

### 二、选择题 (每题 3 分, 共 15 分)

- 1、某人向同一目标独立重复射击, 每次命中目标的概率为  $p$ , 则此人射击直至第 4 次才恰有 2 次命中目标的概率为 ( C )。  
(A)  $3p(1-p)^2$ ; (B)  $6p(1-p)^2$ ; (C)  $3p^2(1-p)^2$ ; (D)  $6p^2(1-p)^2$ 。
- 2、已知随机变量  $X$ 、 $Y$  独立同分布, 且  $X$  的分布函数为  $F(x)$ , 则  $Z = \min(X, Y)$  分布函数为 ( C )。  
(A)  $[F(x)]^2$ ; (B)  $F(x)F(y)$ ; (C)  $1-[1-F(x)]^2$ ; (D)  $[1-F(x)]^2$ 。
- 3、设随机变量  $X$ 、 $Y$  独立同分布, 且服从  $U(0,1)$  分布, 记  $U = X + Y$ ,  $V = X - Y$ , 则  $U$ 、 $V$  协方差为 ( B )。  
(A) -1; (B) 0; (C) 1/2; (D) 1。
- 4、设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  为来自正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本,  $\bar{X}$  为样本均值, 记:  $S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,  $S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ ,  
 $S_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ ,  $S_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$ ,  
则下面服从自由度为  $n-1$  的  $t$  分布的随机变量是 ( B )。  
(A)  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_1 / \sqrt{n-1}}$ ; (B)  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}}$ ; (C)  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_3 / \sqrt{n}}$ ; (D)  $T = \frac{\bar{X} - \mu}{S_4 / \sqrt{n}}$ 。
- 5、已知正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  ( $\sigma^2$  已知), 此外对于任意  $\alpha$ , 有数  $z_\alpha$  满足  $P(X > z_\alpha) = \alpha$ 。现利用检验统计量  $Z$  对数学期望  $\mu$  进行假设检验, 如果在显著水平 0.05 下拒绝  $H_0: \mu = \mu_0$ , 但在显著水平 0.01 下接受  $H_0$ , 则检验统计量的观察值  $z$  必须满足 ( B ):

(A)  $|z| > z_{0.025}$ ; (B)  $z_{0.025} < |z| < z_{0.005}$ ; (C)  $|z| > z_{0.005}$ ; (D)  $z_{0.005} < |z| < z_{0.025}$

三 (10 分)、根据以往的临床记录, 某种诊断癌症的试验具有如下的效果: 如果被诊断者患有癌症, 则试验结果呈现阳性的概率为 0.95, 反之如果该诊断者不患有癌症, 则试验结果呈现阴性的概率也为 0.95。现在对一批人群进行普查, 设被试验的人患有癌症的比例为 0.005, 试求: (1) 这批人检测呈现阳性的概率; (2) 假设某人检验为阳性, 则其患有癌症的概率。

解: 设  $A$  表示“试验结果呈现阳性”,  $C$  表示“被诊断者患有癌症”,

$$\begin{aligned} \text{由题可得: } P(C) &= 0.005, \quad P(\bar{C}) = 1 - P(C) = 0.995, \\ P(A|C) &= 0.95, \quad P(A|\bar{C}) = 1 - P(\bar{A}|\bar{C}) = 1 - 0.95 = 0.05, \end{aligned} \quad (2 \text{ 分})$$

(1) 由全概率公式, 可得这批人检测呈现阳性的概率为:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C}) \\ &= 0.005 \cdot 0.95 + 0.995 \cdot 0.05 \\ &= 0.00475 + 0.04975 \\ &= 0.0545 \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

(2) 由贝叶斯公式, 可得若某人检验为阳性, 则患有癌症的概率为:

$$P(C|A) = \frac{P(C)P(A|C)}{P(C)P(A|C) + P(\bar{C})P(A|\bar{C})} = \frac{0.00475}{0.0545} \approx 0.087 \quad (4 \text{ 分})$$

四 (15 分)、设  $X$  的密度函数为  $f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 1 \\ b-x, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 已知  $E(X) = 1$ ,

(1) 求参数  $a, b$  的值; (2) 计算  $D(X)$ ; (3) 求  $Y = 2X - 1$  的概率密度函数。

解: (1) 由  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ , 可得:

$$\int_0^1 axdx + \int_1^2 (b-x)dx = \frac{a}{2} + b - \frac{3}{2} = 1 \Rightarrow a + 2b = 5 \quad (3 \text{ 分})$$

由  $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 1$ , 可得:

$$\int_0^1 xaxdx + \int_1^2 x(b-x)dx = \frac{a}{3} + \frac{3b}{2} - \frac{7}{3} = 1 \Rightarrow 2a + 9b = 20 \quad (3 \text{ 分})$$

由①、②可得:  $a = 1, b = 2$ 。 (2 分)

$$(2) \quad D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \int_0^1 x^2 xdx + \int_1^2 x^2 (2-x)dx - 1^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6} \quad (3 \text{ 分})$$

$$(3) \quad F_Y(y) = P(2X - 1 \leq y) = P(X \leq \frac{y+1}{2}) = F_X(\frac{y+1}{2}) \quad (1 \text{ 分})$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X(\frac{y+1}{2}) \cdot \frac{1}{2} = \begin{cases} (y+1)/4, & -1 < y < 1 \\ (3-y)/4, & 1 \leq y < 3 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

(如果按照公式法直接写出结果, 类似按步骤给分)

五 (15 分)、二维随机变量  $(X, Y)$  的分布律为:

X \ Y	0	1
	0	1
0	0.4	$a$
1	$b$	0.1

已知随机事件  $\{X=0\}$  与  $\{X+Y=1\}$  相互独立, 求:

(1) 参数  $a, b$  的值; (2)  $Z = X + Y$  的分布律; (3)  $E(XY)$ 。

解: (1) 利用  $\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$ , 可得  $a + b + 0.4 + 0.1 = 1 \Rightarrow a + b = 0.5$  ① (3 分)

利用  $\{X=0\}$  与  $\{X+Y=1\}$  相互独立, 可得

$$P\{X=0, X+Y=1\} = P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}P\{X+Y=1\}$$

$$\Rightarrow a = (0.4 + a)(a + b) \quad \text{②} \quad (3 \text{ 分})$$

由①、②可得:  $a = 0.4, b = 0.1$ 。 (2 分)

(2) (3 分)

$Z = X + Y$	0	1	2
$p_k$	0.4	0.5	0.1

$$(3) E(XY) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j p_{ij} = 0 \times 0 \times 0.4 + 0 \times 1 \times 0.4 + 1 \times 0 \times 0.1 + 1 \times 1 \times 0.1 = 0.1 \quad (4 \text{ 分})$$

(也可以先计算  $Z = XY$  的分布律, 然后计算其期望)

六 (10 分)、设二维随机变量  $(X, Y)$  的概率密度函数为:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6, & x^2 < y < x, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

(1) 求  $X$ 、 $Y$  的边缘概率密度  $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$ ;

(2) 判定两者是否相互独立, 并给出理由。

解: (1)  $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_{x^2}^x 6 dy, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} = \begin{cases} 6(x - x^2), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$  (4 分)

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_y^{\sqrt{y}} 6 dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} = \begin{cases} 6(\sqrt{y} - y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$$
 (4 分)

(2) 由于  $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$ , 可知两者不相互独立。 (2 分)

七 (10 分)、设  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是正态总体  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  的一组简单随机样本, 试求参数  $\mu, \sigma^2$  的极大似然估计量。

解:  $X$  的概率密度函数为:  $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(x - \mu)^2 / 2\sigma^2)$  (2 分)

似然函数为:

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-(x_i - \mu)^2 / 2\sigma^2)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 / 2\sigma^2\right)$$
 (2 分)

对数似然函数为:

$$l(\mu, \sigma^2) = \ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$$
 (2 分)

令: 
$$\begin{cases} \frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \left[ \sum_{i=1}^n x_i - n\mu \right] = 0, \\ \frac{\partial l(\mu, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0, \end{cases}$$
 (2 分)

可得  $\mu, \sigma^2$  的极大似然估计量:  $\hat{\mu} = \bar{X}, \hat{\sigma}^2 = B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  (2 分)

八 (10 分)、某切割机在正常工作时, 切割每段金属棒的平均长度为 10.5cm, 标准差是 0.15cm, 今从一批产品中随机的抽取 9 段进行测量, 测得其平均长度为 10.48, 假定切割的长度服从正态分布, 且标准差没有变化, 试问该机工作是否正常? 写出完整检验过程 (显著性水平为  $\alpha=0.05$ )。 ( $z_{0.05} = 1.645, z_{0.025} = 1.96, t_{0.05}(8) = 1.86, t_{0.025}(8) = 2.306$ )

解: 根据题意给出原假设和备择假设:  $H_0: \mu = \mu_0 = 10.5, H_1: \mu \neq 10.5$  (2 分)

方差  $\sigma^2$  已知，取检验统计量：  $Z = \frac{(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma / \sqrt{n}}$ ，在  $H_0$  成立条件下：  $Z \sim N(0,1)$  （2 分）

显著性水平  $\alpha=0.05$  下，拒绝域为：  $R = \{z \mid |z| \geq z_{0.025} = 1.96\}$  （2 分）

代入数据，可得  $|z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \right| = \left| \frac{10.48 - 10.5}{0.15 / \sqrt{9}} \right| = 0.4 < z_{0.025} = 1.96$ ，落在接受域，接受原

假设，认为当前该机工作正常。 （4 分）

注：本题也可根据置信区间和假设检验接受域的对偶关系求解。

INUIST-2020