第 1 章 质点运动学

一、选择题

1、B　2、C　3、A　4、B　5、B　6、D 7、B　8、C　9、C　10、D
11、C　12、B　13、C　14、A　15、B

二、计算题

1、解：（1）第 2s 内的平均速度：$\bar{v}_2=\dfrac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\dfrac{[24-16]-[6-2]}{2-1}=40\text{m/s}$

（2）$v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=12t-6t^2$，第 3 s 末的速度：$v_3=-18\text{m/s}$

第 4 s 末的速度：$v_4=-48\text{m/s}$

（3）$a=\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=12-12t$，第 3 s 末的加速度：$a_3=-24\text{m/s}^2$

第 4 s 末的加速度：$a_4=-36\text{m/s}^2$

“－”表示速度、加速度方向沿 x 轴负方向。

2、解：（1）$x=2t$，$y=-t^2+4t$，消去时间 t，得轨迹方程

$$y=-\frac{1}{4}x^2+2x$$

（2）质点任意时刻的速度和加速度

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=2\vec{i}+(-2t+4)\vec{j}\,,\qquad \vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=-2\vec{j}$$

$t=2\text{s}$ 时的速度 $\vec{v}=2\vec{i}$，大小为 $v=2\text{m/s}$，方向沿 x 轴的正方向。

加速度为恒量，大小为 $a=2\text{m/s}^2$，方向沿 y 轴的负方向。

3、解：（1）由 $a_x=\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$，$a_y=\dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}$，得

$$\int_0^{v_x} \mathrm{d}v_x = \int_0^t a_x \mathrm{d}t = \int_0^t 30t^4 \mathrm{d}t$$ 即 $v_x = 6t^5$

$$\int_0^{v_y} \mathrm{d}v_y = \int_0^t a_y \mathrm{d}t = \int_0^t 2\mathrm{d}t$$ 即 $v_x = 2t$

由 $v_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$， $v_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，得

$$\int_5^x \mathrm{d}x = \int_0^t v_x \mathrm{d}t = \int_0^t 6t^5 \mathrm{d}t，\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t v_y \mathrm{d}t = \int_0^t 2t\mathrm{d}t$$

积分可得 $x = 5 + t^6$， $y = t^2$

（2）消去时间t，得轨迹方程：$y^3 = x - 5$。

4、解： $\because a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，于是有$\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}v}{a} = -\dfrac{\mathrm{d}v}{Cv^2}$

两边积分，得$t = \int_{v_0}^{v} -\dfrac{\mathrm{d}v}{Cv^2} = \dfrac{1}{C}(\dfrac{1}{v} - \dfrac{1}{v_0})$， 即$v = \dfrac{v_0}{Cv_0 t + 1}$

$\because v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$，$\therefore \mathrm{d}s = v\mathrm{d}t = \dfrac{v_0}{Cv_0 t + 1}\mathrm{d}t$

两边积分，得$s - s_0 = \int_0^t \dfrac{v_0}{Cv_0 t + 1}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{C}\ln(Cv_0 t + 1)$，即$s = s_0 + \dfrac{1}{C}\ln(Cv_0 t + 1)$

5、解：（1）质点任意时刻的速率为$v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = a - bt$

切向加速度：$a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -b$， 法向加速度：$a_\mathrm{n} = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{1}{R}(a - bt)^2$

（2）当两者数值相等时：$|a_t| = a_n$

即 $b = \dfrac{1}{R}(a - bt)^2 \Rightarrow t = \dfrac{a}{b} - \sqrt{\dfrac{R}{b}}$

6、解：（1）$\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 12t^2$ $\alpha = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = 24t$

t ＝2.0s 时，质点的线速度： $v\big|_{t=2.0s} = \omega R = 48\mathrm{m/s}$

法向加速度：$a_n\big|_{t=2.0s} = \omega^2 R = 2304\mathrm{m/s^2}$

切向加速度：$a_\tau\big|_{t=2.0s}=\alpha R=48\mathrm{m/s}^2$

（2）$\dfrac{a_\tau}{a_\mathrm{n}}=\dfrac{24t}{(12t^2)^2}=\tan 30^\circ$，得 $t^3=\dfrac{\sqrt{3}}{6}\mathrm{s}$

其角位置在 $\theta=2+4\times\dfrac{\sqrt{3}}{6}=3.15\mathrm{srad}$

7、解：以火箭发射点为原点、水平向右为 x 轴、竖直向上为 y 轴，建立坐标系。设发射火箭的初速度为 v_0，则其竖直向上的分量为

$$v_{y0}=v_0\sin 45^\circ$$

竖直向上的速度为 $v_y=v_{y0}-gt$

火箭到达最高点时，$v_y=0$，由此可以求得初速度为

$$v_0=\frac{gt}{\sin 45^\circ}=\frac{2\times 9.8\times 6.0}{\sqrt{2}}\mathrm{m/s}=83\mathrm{m/s}$$

8、 解：$V_x=V_0$　　$V_y=gt$　　$V=\sqrt{V_0{}^2+g^2t^2}$

$$a_n=g\cos\theta=g\frac{V_0}{\sqrt{V_0{}^2+g^2t^2}}$$

$$a_\tau=g\sin\theta=g\frac{gt}{\sqrt{V_0{}^2+g^2t^2}}=\frac{g^2t}{\sqrt{V_0{}^2+g^2t^2}}$$

三、问答题

1、答：$\dfrac{\mathrm{d}|\boldsymbol{R}|}{\mathrm{d}t}$ 与 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t}\right|$ 在一般情况下是不相等的。因为前者是对矢量 $\boldsymbol{R}$ 的绝对值(大小或长度)求导，表示矢量 $\boldsymbol{R}$ 的大小随时间的变化率；而后者是对矢量 $\boldsymbol{R}$ 的大小和方向两者同时求导，再取绝对值，表示矢量 $\boldsymbol{R}$ 大小随时间的变化和矢量 $\boldsymbol{R}$ 方向随时间的变化两部分的绝对值。如果矢量 $\boldsymbol{R}$ 方向不变只是大小变化，那么这两个表示式是相等的。

2、答：这种说法正确。若取初速为$\vec{v}_{10}$的质点为参考系，则初速为$\vec{v}_{20}$的质点相对于它的速度为$\vec{v}=\vec{v}_{20}-\vec{v}_{10}$，显然是个恒矢量。若取地面为参考系，则两个质点在任意时刻的速度分别为$\vec{v}_1=v_{10}\cos\theta_1\vec{i}+(v_{10}\sin\theta_1-gt)\vec{j}$，$\vec{v}_2=v_{20}\cos\theta_2\vec{i}+(v_{20}\sin\theta_2-gt)\vec{j}$，两质点的相对速度为$\vec{v}=\vec{v}_2-\vec{v}_1=\vec{v}_{20}-\vec{v}_{10}$。由此可见，物理问题的实质与所选参考系无关，只是影响解题过程的难易程度。

3、答：指向道路的内侧。因为车辆沿弯曲公路运动，必定有法向加速度是指向道路的内侧的，因此有指向内侧的力，同时存在切向加速度，即存在沿道路切向的力，所以合力必指向道路的内侧。

4、答：斜抛运动的运动方程为$x=v_0\cos\theta\cdot t$，　$y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$。令$y=0$并消去时间$t$得射程$x=\frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$。当$\theta=45^\circ\pm\varphi$时，有$x=\frac{v_0^2}{g}\sin(90^\circ\pm 2\varphi)=\frac{v_0^2}{g}\cos 2\varphi$。可见$\theta=45^\circ+\varphi$和$\theta=45^\circ-\varphi$有相等的射程。