一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$，则 $P(A\cup\overline{B})=$ __0.8__。

2. 已知随机变量 X_1,X_2 相互独立，且 $X_1\sim U(0,6), X_2\sim\pi(3)$，令 $Y=X_1+3X_2$，则 $D(Y)=$ __30__。

3. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, x>0,\\0, \quad x\le 0.\end{cases}$ 则 $P\left\{0<X\le\frac{1}{3}\right\}=$ __$1-e^{-1}$__。

4. 已知 $D(X)=D(Y)=2$，$\rho_{XY}=0.2$，则 $D(X-Y)=$ __3.2__。

5. 设 X_1,X_2 是来自总体 $X\sim N(0,4)$ 的简单随机样本，且 $Y=a(X_1-2X_2)^2$，则 $a=$ __1/20__时，

统计量 Y 服从 χ^2 分布。

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 A,B 为两个随机事件，且 $P(A)\ne 0, P(B|A)=1$，则下列命题中正确的是（ C ）。

（A）$P(A\cup B)=P(AB)$ （B）$P(A\cup B)=P(A)$

（C）$P(A\cup B)=P(B)$ （D）$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

2. 某人向同一目标独立重复射击，每次射击命中目标的概率为 p $(0<p<1)$，则此人第 3 次射击才命中目标的概率为（ C ）。

（A）$p^2(1-p)$ （B）$3p(1-p)^2$ （C）$p(1-p)^2$ （D）$3p^2(1-p)$

3. 随机变量 X，Y 相互独立且服从同一分布，记 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数为（ A ）。

（A）$[F(z)]^2$ （B）$F(x)F(y)$ （C）$1-[1-F(z)]^2$ （D）$[1\text{-}F(z)]^2$

4. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(0,1)$ 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，S^2 为样本方差，则下列结论正确的是（ D ）。

（A）$n\overline{X}\sim N(0,1)$ （B）$nS^2\sim\chi^2(n)$ （C）$\frac{(n-1)\overline{X}}{S}\sim t(n-1)$ （D）$\overline{X}\sim N(0,\frac{1}{n})$

5. 设一批零件的长度服从 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知，先从中随机抽取 16 个零件，测得样本均

值 $\overline{x}=20$，样本标准差 $s=1$，则 μ 的置信度为 0.9 的置信区间为（ C ）。

（A）$\left(20\pm\frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$ （B）$\left(20\pm\frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$ （C）$\left(20\pm\frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$ （D）$\left(20\pm\frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$

三、计算题(共 70 分)

1.（本题 10 分）两台车床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率是 0.03，第二台出现不合格品的概率是 0.06，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件数是第二台加工的零件数的二倍。（1）求任取一个零件是合格品的概率；（2）如果取出的零件是不合格品，求它是由第二台车床加工的概率。

解：设 A="零件由第一台车床加工"，B="零件是合格品"

(1)由全概率公式

$P(A)=\frac{2}{3}$，$P(\overline{B}\mid A)=0.03$，$P(\overline{B}\mid\overline{A})=0.06$

$$P(B)=P(A)P(B\mid A)+P(\overline{A})P(B\mid\overline{A})=\frac{2}{3}\times0.97+\frac{1}{3}\times0.94=0.96$$

(2)由贝叶斯公式

$$P(\overline{A}\mid\overline{B})=\frac{P(\overline{A})P(\overline{B}\mid\overline{A})}{P(\overline{B})}=\frac{\frac{1}{3}\times0.06}{0.04}=0.5$$

2.（本题 15 分）设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}cx^2y, & x^2\le y<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

（1）求常数 c；（2）求边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$，并判断 X,Y 的独立性；

（3）求 $E\left[(X-1)Y\right]$。

解：

$$（1）\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}[\int_{x^2}^{1}cx^2ydy]dx=\int_{-1}^{1}[\frac{cx^2}{2}(1-x^4)dx=\frac{4}{21}c=1,$$

故 $c=\frac{21}{4}$。

$$（2）f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2ydy\\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{21}{8}x^2(1-x^4),-1<x<1,\\ 0,\text{其他}.\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{21}{4}x^2 ydx \\ 0\end{cases}=\begin{cases}\frac{7}{2}y^{\frac{5}{2}}, 0\le y<1, \\ 0, 其他.\end{cases}$$

因为 $f(x,y)\ne f_X(x)f_Y(y)$，故 X,Y 不独立。

（3）$E(XY)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}[\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^3y^2dy]dx=0$，

$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy=\int_{-1}^{1}[\int_{x^2}^{1}\frac{21}{4}x^2y^2dy]dx=\frac{7}{9}$，

$E[(X-1)Y]=E(XY-Y)=E(XY)-E(Y)=0-\frac{7}{9}=-\frac{7}{9}$.

3.（本题 15 分） 设随机变量 $X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1/3 & 2/3\end{pmatrix}$，$Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3/4 & 1/4\end{pmatrix}$，且 X,Y 相互独立。求：（1）(X,Y) 的联合分布律；（2）$3X+Y$ 的分布律；（3）$D(3X+Y)$。

解：（1）由于 X,Y 相互独立，得 (X,Y) 的联合分布律为

Y \ X	0	1
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

（2）$3X+Y$ 的分布律为：

$3X+Y$	1	2	4	5
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$

（3）$E[3X+Y]=\frac{13}{4}$，$E\left[(3X+Y)^2\right]=\frac{51}{4}$，$D(3X+Y)=E\left[(3X+Y)^2\right]-E^2[3X+Y]=\frac{35}{16}$。

4.（本题 10 分） 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma_0^2)$ 的样本，其中 σ_0^2 已知。（1）求 μ 的最大似然估计量 $\hat{\mu}$；（2）判断 $\hat{\mu}$ 是否为 μ 的无偏估计量，并给出理由。

解：（1）X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}$， $-\infty<x<\infty$

设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的值。则样本似然函数为

$$L(\mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_0}\mathrm{e}^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma_0^{-n}e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}{2\sigma_0^2}},$$

$$\ln L(\mu)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-n\ln\sigma_0-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

由 $\dfrac{d\ln L(\mu)}{d\mu}=\dfrac{1}{\sigma_0^2}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=0$

得 μ 的最大似然估计值为 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\overline{x}$，最大似然估计量为 $\hat{\mu}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i=\overline{X}$.

（2）因为 $E(\hat{\mu})=E(\overline{X})=E(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}EX_i=\mu$，

$\hat{\mu}$ 是 μ 的无偏估计量。

5.（本题 10 分）设随机变量 X ,Y 相互独立，X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, 0<x<1,\\ 0,\ \ 其他.\end{cases}$ Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, y\ge 0,\\ 0,\ \ \ y<0.\end{cases}$ 求：（1）$Z=X+Y$ 的概率密度；（2）$D(Z)$。

解：（1）

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

$$=\begin{cases}\int_0^z e^{-(z-x)}dx, 0<z<1,\\ \int_0^1 e^{-(z-x)}dx, z\ge 1,\\ 0, 其他.\end{cases}$$

故 $Z=X+Y$ 的密度函数为：$f_Z(z)=\begin{cases}1-e^{-z}, 0<z<1,\\ e^{-z}(e-1), z>1,\\ 0, 其他.\end{cases}$

（2）$D(Z)=D(X)+D(Y)=\dfrac{1}{12}+1=\dfrac{13}{12}$

6.（本题 10 分）在某地一次数学统考中，假定考生成绩服从正态分布。现随机抽取了 16 位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5 分，标准差为 15 分，问在显著性水平 0.05 下，是否可以认为这次考试中考生的平均成绩为 70 分？附：$z_{0.05}=1.645$，$z_{0.025}=1.96$，$t_{0.05}(15)=1.753$，$t_{0.05}(16)=1.746$，$t_{0.025}(15)=2.131$，$t_{0.025}(16)=2.120$。

解：

检验问题：$H_0:\mu=\mu_0=70,\quad H_1:\mu\neq 70$，

检验统计量为：$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}$

在原假设 H_0 成立时，$t=\dfrac{\overline{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$

由于 $P\left\{|t|\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}=\alpha$，得检验的拒绝域为 $\left\{\dfrac{|\overline{x}-\mu|_0}{s/\sqrt{n}}\geq t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right\}$。

由已知条件，$\alpha=0.05$，$n=16$，$\overline{x}=66.5$，$s=15$，$t_{0.025}(15)=2.131$，故检验统计量的值为

$t=\dfrac{\overline{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}=\dfrac{66.5-70}{15/4}=-0.93$，因为 $|t|<2.14$，故接受原假设，可以认为这次考试全体考生的平均成绩与 70 分无显著差异。