第 7 章 波动 答案

一、选择题

1、C； 2、A； 3、D； 4、D； 5、D； 6、C； 7、B； 8、C； 9、C； 10、D；
11、A；12、D；13、B；14、C；15、B；16、B；17、D；18、C

二、计算题

1、解：（1）$x=0$ 处质点做简谐振动，

其三要素为：振幅：$A=0.10\,\mathrm{m}$，周期：$T=\dfrac{\lambda}{u}=\dfrac{20}{400}=0.05\ \mathrm{s}$，

角频率：$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=\dfrac{2\pi}{0.05}=40\pi$，

初位相：因为 $y_{x=0}(t=0)=0.05=A\cos\varphi_0=0.10\cos\varphi_0$，所以 $\cos\varphi_0=\dfrac{1}{2}$，

$\varphi_0=\pm\dfrac{\pi}{3}$，又因 $v_{x=0}(t=0)=-A\omega\sin\varphi_0<0$，即 $\sin\varphi_0>0$，所以 $\varphi_0=\dfrac{\pi}{3}$

故：$x=0$ 处质点简谐振动方程：$y_{x=0}(t)=0.10\cos\left(40\pi t+\dfrac{\pi}{3}\right)$

（2）波函数：$y(x,t)=0.10\cos\left[40\pi\left(t-\dfrac{x}{u}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]=0.10\cos\left[40\pi\left(t-\dfrac{x}{400}\right)+\dfrac{\pi}{3}\right]$

$$=0.10\cos\left[40\pi t-\frac{\pi x}{10}+\frac{\pi}{3}\right]$$

2、解：（1）$y_0=A\cos\varphi=0 \quad V_0=-A\omega\sin\varphi<0$

$$\varphi=\frac{\pi}{2} \qquad \lambda=0.40m \quad T=\frac{\lambda}{u}=5s \quad \omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{5}s^{-1}$$

$$y=0.04\cos(\frac{2\pi}{5}t+\frac{\pi}{2})$$

（2）$y=0.04\cos[2\pi(\dfrac{t}{5}-\dfrac{x}{0.4})+\dfrac{\pi}{2}]$； （3）$y=0.04\cos[2\pi\dfrac{t}{5}-\dfrac{3\pi}{2}]$

3、解：$\omega=\dfrac{2\pi}{T}=3.14({}^{rad}\!/\!{}_{s}) \quad u=\dfrac{\lambda}{T}=20({}^{cm}\!/\!{}_{s})$

(1) $\varphi_0=\frac{\pi}{3} \quad y_0=10\cos[\pi t+\frac{\pi}{3}]cm$

(2) $y=10\cos[\pi(t-\frac{x}{20})+\frac{\pi}{3}]cm$

(3) $\because t=\frac{1}{3}s$时 $y_c=0$ 即 $y_c=10\cos(\frac{\pi}{3}+\varphi_c)$

$\therefore \varphi_c=\frac{\pi}{6}$ 或者 $-\frac{5}{6}\pi$ 又$\because$ $V_c>0$

$\therefore \varphi_c=-\frac{5}{6}\pi$

(4) $x_{oc}=23.33cm$

4、解：（1）O 点振动方程：$y_o(t)=A\cos(\omega t+\varphi_o)=0.02\cos(500\pi t+0)$；

（2）波函数：$y(x,t)=A\cos(\omega t-\frac{2\pi x}{\lambda}+\varphi_o)=0.02\cos(500\pi t-\frac{2\pi x}{0.1})$

$$=0.02\cos(500\pi t-20\pi x)\ \text{m}$$

（3）在 x =1.0 m 处，该点的振动方程为：$y_{x=1.0}(t)=0.02\cos(500\pi t-20\pi)\ \text{m}$；

该点的振动速度为：$u=\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=1.0}=-10\pi\sin(500\pi t-20\pi)\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$。

（4）t = 100 s 时，波形方程：$y_{t=100}=0.02\cos(5\times10^4\pi-20\pi x)\ \text{m}$。

（5）波速为：$u=\lambda\nu=0.1\times250=25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$

5、解：（1）波函数：$y(x,t)=y_o(t-\Delta t)=y_o(t-\frac{x}{u})=0.04\cos[2.5\pi(t-\frac{x}{100})]$

$$=0.04\cos(2.5\pi t-\frac{\pi x}{40})$$

（2）当 $t=1.0$s 时，$x=20$m 处质点的振动位移：

$$y=0.04\cos[2.5\pi(1.0-\frac{20}{100})]=0.04\cos(2.0\pi)=4.0\times10^{-2}(\text{m})$$

又：$v(x,t)=\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}=-2.5\pi\times0.04\sin[2.5\pi(t-\frac{x}{100})]$

$$a(x,t)=\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=-(2.5\pi)^2\times0.04\cos[2.5\pi(t-\frac{x}{100})]$$

所以当$t=1.0\mathrm{s}$时，$x=20\mathrm{m}$处质点的振动速度、加速度为

$$v=-2.5\pi\times0.04\sin2.0\pi=0$$

$$a=-\left(2.5\pi\right)^2\times0.04\cos2.0\pi\approx-2.5(\mathrm{m/s^2})$$

6、解：（1） $y=0.02\cos[2\pi(100t-\frac{x}{2/5})]$

$\varphi_0=0$ A=0.02m $\nu=100Hz$ T=0.01S

$\lambda=0.4m$ $v=\nu\lambda=40m/s$

（2）$y=0.02\cos(5x\pi)$，$t_1=0.0025s=\frac{T}{4}$。

7、解：由波的表达式为$y=0.1\cos\left[7\pi\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-0.7\pi\sin\left[7\pi\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi\right]$

由$y_a=0,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_a<0$，得 $7\pi\left(1-\frac{0.1}{u}\right)+\varphi=\frac{\pi}{2}$ ………… (1)

由$y_b=0.05,\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_b>0$，得$7\pi\left(1-\frac{0.2}{u}\right)+\varphi=-\frac{\pi}{3}$ …………(2)

(1)、(2)两式相减，得$u=0.84\left(\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)$，代入(1)式，得$\varphi=-\frac{17}{3}\pi$，所以波的表达式为

$$y=0.1\cos\left[7\pi\left(t-\frac{x}{0.84}\right)+\left(-\frac{17}{3}\pi\right)\right]=0.1\cos\left(7\pi t-\frac{\pi x}{0.12}+\frac{\pi}{3}\right)\quad(\mathrm{SI})$$

8、解：由题意知 t=0 时，原点处质点的振动状态为$y_0=0$，$\upsilon_0<0$

故原点的振动初相为$\frac{\pi}{2}$

设波动方程为$y=A\cos[2\pi(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda})+\varphi]$

则有$y=0.1\cos[2\pi(2t+\frac{x}{1})+\frac{\pi}{2}]=0.1\cos(4\pi t+2\pi x+\frac{\pi}{2})$

9、解：将已知的波源运动方程与简谐运动方程的一般形式$y=A\cos(\omega t+\varphi)$比较后可得：A=$4.0\times10^{-3}$m，$\omega=240\pi\,\mathrm{s^{-1}}$，$\varphi=0$

（1）波的周期就是振动的周期，故有$T=\frac{2\pi}{\omega}=8.33\times10^{-3}s$

波长为$\lambda=uT=0.25m$

（2）以波源为原点，沿 x 轴正向传播的波的波动方程为

$$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]=4.0\times10^{-3}\cos(240\pi t-8\pi x)$$

10、解：由题设条件知波源的频率 ω=2π/T=4πrad/s

由题意知$\varphi_0=0$，所以$y_0=0.1\cos 4\pi t$

（1）$y(x,t)=0.1\cos(4\pi t-\frac{2\pi}{10}x)=0.1\cos 4\pi(t-\frac{x}{20})$

（2）$y(\frac{\lambda}{4},\frac{T}{4})=0.1\cos(4\pi\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{2\pi}{10}\times\frac{1}{4}\times 10)=0.1m$

（3）$v=\frac{\partial y}{\partial t}=-0.4\pi\sin(4\pi t-\frac{2\pi}{10}x)$

$v(\frac{\lambda}{4},\frac{T}{2})=-0.4\pi=-1.26m/s$

11、解：（1）设波动方程为$y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\varphi]$

由已知条件 T=0.02s，u=100m/s 得$\omega=\frac{2\pi}{T}=100\pi\ \mathrm{s}^{-1}$，$\lambda=uT=2$ m

由旋转矢量图可得该质点的初相位$\varphi=-\frac{\pi}{2}$

若以波源为坐标原点，则波动方程为$y=A\cos[100\pi(t-\frac{x}{100})-\frac{\pi}{2}]$

距波源为 15.0m 和 5.0m 处质点的运动方程分别为：

$y_1=A\cos(100\pi t-15.5\pi)$ 和 $y_2=A\cos(100\pi t-5.5\pi)$

它们的初位相分别为$\varphi_1=-15.5\pi$ 和$\varphi_2=-5.5\pi$

（2）距波源 16.0m 和 17.0m 的两质点间的相位差为$\Delta\varphi=2\pi\frac{x_2-x_1}{\lambda}=\pi$

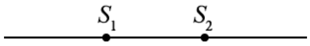
12、解：（1）$\omega=2\pi\nu=2\pi\times 10^3$rad/s

$$I=\frac{1}{2}u\rho A^2\omega^2=\frac{1}{2}\times 10^3\times 800\times(10^{-4})^2(2\pi\times 10^3)^2$$
$$=1.58\times 10^5 W/m^2$$

（2）1 分钟内垂直通过面积$S=4.0\times 10^{-4}\ \mathrm{m}^2$ 的总能量

$$\mathrm{W}=\mathrm{ISt}=1.58\times 10^5\times 4\times 10^{-4}\times 60=3.79\times 10^3 J$$

13、解：



（1）在 S_1 外侧，距离 S_1 为 r_1 的点，S_1 S_2 传到该 P 点引起的位相差为

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}\left[r_1 - (r_1 + \frac{\lambda}{4})\right] = \pi$$

$$A = A_1 - A_1 = 0, I = A^2 = 0$$

（2）在 S_2 外侧.距离 S_2 为 r_1 的点，S_1 S_2 传到该点引起的位相差.

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 + \frac{\lambda}{4} - r_2) = 0$$

$A = A_1 + A_1 = 2A_1, I = A^2 = 4A_1^2$

14、解：

设 A 点振动方程为 $y_1 = A\cos[\omega t + \varphi_0]$

设 B 点振动方程为 $y_2 = A\cos[\omega t + \varphi_0 + \pi]$

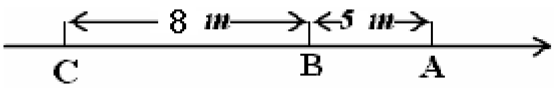
(1) P 在 AB 之间 $\Delta\varphi = \pi x - 14\pi = (2k+1)\pi$

x=2k+15 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \pm 7$

(2) P 在 AB 的延长线上时 $\Delta\varphi = \omega\frac{30}{u} + \pi = 16\pi$，始终相长干涉

(3) P 在 AB 的反向延长线上时 $\Delta\varphi = -14\pi$, 始终相长干涉

15、解：



(1) 以 A 为坐标原点波动方程为：Y = 3cos4π(t – X/24);

(2) B 点振动方程为： Y = 3cos4π(t + 5/24) = 3cos(4πt + 5π/6);

以 B 为坐标原点波动方程为 Y = 3cos[4π(t – X/24)+5π/6];

(3) B C 二点间的位相差

频率 $\nu = \omega/2\pi = 2$ Hz；$\lambda = 12$m；

$\Delta\Phi = 2\pi\Delta X/\lambda = 2\pi\times 8/12 = 4\pi/3$。

16、解：X 轴上干涉极小的点为

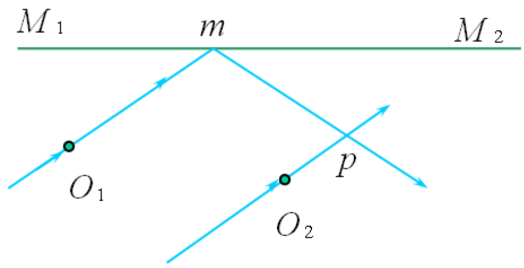
$r - X = -K\lambda$ (K 为整数)

$r^2 = (X - K\lambda)^2$

$X^2 + a^2 = X^2 - 2k\lambda X + K^2\lambda^2$

$X = (K^2\lambda^2 - a^2)/2K\lambda$

17、解：

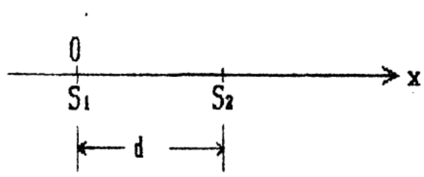


$$(1)\ y_1 = A\cos\left[\pi t - 2\pi\cdot(8\lambda)/\lambda - \pi\right] = A\cos(\pi t - \pi)$$

$$y_2 = A\cos\left[\pi t - 2\pi\cdot(3\lambda)/\lambda\right]$$
$$= A\cos(\pi t)$$

$$(2)\ y = y_1 + y_2$$
$$= A\cos[\pi t \pm \pi] + A\cos(\pi t)$$
$$=0$$

18、解：



设 S_1 和 S_2 的振动相位分别为 ϕ_1 和 ϕ_2。在 x_1 点两波引起的振动位相差

$$(\phi_2 - \phi_1) - 2\pi(d - 2x_1)/\lambda = (2K+1)\pi \quad ①$$

在 x_2 点两波引起的振动位相差

$(\phi_2-\phi_1)-2\pi(d-2x_2)/\lambda=(2K+3)\pi$ ②

②-①得: $4\pi(x_2-x_1)/\lambda=2\pi$

$$\lambda=2(x_2-x_1)=6m$$

$$\phi_2-\phi_1=(2K+1)\pi+2\pi(d-2x_1)/\lambda$$

$$=(2K+5)\pi$$

当 K= -2、-3 时相位差最小 $\phi_2-\phi_1=\pm\pi$

19、解： $\cos(-\varphi)=\cos\varphi.$

$$y_1=A\cos(\omega t+\frac{2\pi x}{\lambda})=4.00\times10^{-2}\cos(8\pi t-\frac{2\pi x}{3/2}),$$
$$\lambda=\frac{3}{2},\omega=8\pi$$

$$y_2=4.00\times10^{-2}\cos(8\pi t+\frac{2\pi x}{3/2}),$$

$$\therefore y=y_1+y_2=2\times4.00\times10^{-2}\cos\frac{2\pi x}{1.5}\cos8\pi t,$$

两波在一根很长的弦线上传播，两波叠加后波腹满足条件为：

$$\cos\frac{2\pi x}{\lambda}=1,\frac{2\pi x}{\lambda}=\pm2k\frac{\pi}{2}\ ,\quad \mathrm{k}=0,1,2,\cdots$$

波腹位置坐标：

$$x=\pm2k\frac{\lambda}{4}\ ,\quad \mathrm{k}=0,1,2,\cdots,$$
$$x=\pm2k\frac{3}{2\cdot4}=\pm\frac{3}{4}k\qquad(k=0,1,2,\cdots).$$

两波叠加后的波节满足条件为：$\cos\frac{2\pi x}{\lambda}=0,\frac{2\pi x}{\lambda}=\pm(2k+1)\frac{\pi}{2},\quad \mathrm{k}=0,1,2,\cdots.$

波节位置：

$$x=\pm(2k+1)\frac{\lambda}{4},\quad \mathrm{k}=0,1,2,\cdots,$$
$$x=\pm(2k+1)\frac{3}{2\cdot4}=\pm\frac{3}{4}(\mathrm{k}+\frac{1}{2}),\qquad(\mathrm{k}=0,1,2,\cdots,).$$

20、解：（1）由于两列波形成了驻波，所以该波的波动方程为：

$$y = A\cos[2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})]$$
$$= 0.05\cos[2\pi(\frac{t}{0.05} - \frac{x}{4})].$$

$$y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos 2\pi\gamma t$$

（2）$= 2\cdot 0.05\cos\frac{2\pi x}{4}\cos 2\pi\frac{t}{0.05}$

$$= 0.1\cos\frac{\pi}{2}x\cos 40\pi t.$$

波节位置：

$$x = \pm(2k+1)\frac{\lambda}{4},\quad \mathrm{k} = 0,1,2,\cdots,$$
$$x = \pm(2k+1)\frac{4}{4} = \pm(2\mathrm{k}+1)\mathrm{m},\qquad (\mathrm{k} = 0,1,2,\cdots,)$$

离原点最近的位置：k=0,1,2

$$\therefore x = \pm(2\mathrm{k}+1) = \pm 1, \pm 3.$$

离原点最近的四个波节的坐标数值：–1m，1m，–3m，3m。

21、解：（1）波源远离观察者时直接听到的频率为：

$$\nu' = \frac{u}{u+v_s}\nu = \frac{330}{330+10}1000 = 970Hz.$$

（1） 波源靠近观察者的频率与反射回来频率相等，

所以 $\nu' = \frac{u}{u-v_s}\nu = \frac{330}{330-10}1000 = 1031Hz.$

22、解：（1） 根据多普勒频率公式，当声源（警车）以速度 v_s ＝25 m s^{-1} 运动时，静止于路边的观察者所接收到的频率为

$$v' = v\frac{u}{u \mp v_s}$$

警车驶近观察者时，式中 v_s 前取“－”号，故有

$$v_1' = v\frac{u}{u - v_s} = 865.6\ \mathrm{Hz}$$

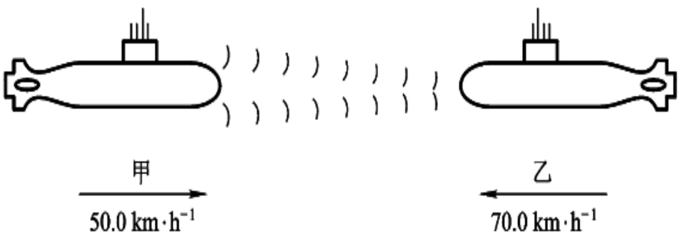
警车驶离观察者时，式中 v_s 前取“＋”号，故有

$$v_2' = v\frac{u}{u+v_s} = 743.7\ \text{Hz}$$

（2） 声源（警车）与客车上的观察者作同向运动时，观察者收到的频率为

$$v_2' = v\frac{u}{u+v_s} = 743.7\ \text{Hz}$$

23、解：



由题已知 v_1 ＝50.0 km h^{-1}， v_2 ＝70.0 km h^{-1} ， u ＝5.47 ×10^3 km h^{-1}，v ＝1000 Hz，分析可知：

（1） $$v' = \frac{u+v_2}{u-v_1}v = 1022\ \text{Hz}$$

（2） $$v'' = \frac{u+v_1}{u-v_2}v' = 1045\ \text{Hz}$$

三、问答题

1、**答：**振动是指一个孤立的系统（也可以是介质中的一个质元）在某固定平衡位置附近所做的往复运动，系统离开平衡位置的位移是时间的周期性函数；波动是振动在连续介质中的传播过程，此时介质中所有质元都在各自的平衡位置附近作振动，因此介质中任一质元离开平衡位置的位移既是坐标位置 x，又是时间 t 的函数。

2、**答：**在谐振动方程 y=f(t)中只有一个独立的变量时间 t，它描述的是介质中一个质元偏离平衡位置的位移随时间变化的规律；平面谐波方程 y=f(x,t)中有两个独立变量，即坐标位置 x 和时间 t，它描述的是介质中所有质元偏离平衡位置的位移随坐标和时间变化的规律。当谐波方程的坐标位置给定后，即可得到该点的振动方程，而波源连续不断地振动又是产生波动的必要条件之一。