

模拟训练 V 参考答案

一、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1. 已知 $P(A)=0.60$, $P(\bar{B})=0.80$, $P(A|B)=0.50$, 则 $P(B-A)=$ 0.10.
2. 已知 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{4}}$, 且方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根概率为 $\frac{1}{2}$, 则参数 $\mu=$ 4.
3. 已知随机变量 X 为 Y 的函数: $X=2Y+1$, 且 $D(X)=4$, 则协方差 $Cov(X,Y)=$ 2.
4. 已知二项分布总体 $X \sim b(n, p)$ ($0 < p < 1$), \bar{X} 和 S^2 为样本均值和样本方差, 若 $T = \bar{X} + kS^2$ 为 np^2 的无偏估计, 则 $k =$ -1.
5. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 已知样本均值 $\bar{x}=9.5$, 参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 (8.2, 10.8).

二、选择题（每题 3 分，共 15 分）

1. 对于事件 A 、 B , 下列说法正确的是 (C).
(A) 若 A 与 B 互不相容, 则 \bar{A} 与 \bar{B} 也互不相容; (B) 若 $P(AB)=0$, 则 A 与 B 互不相容;
(C) 若 $P(A)=0$, 则 A 与 B 相互独立; (D) 若 A 与 B 互不相容, 则 A 与 B 相互独立.
2. 设 $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,9)$, $X_3 \sim N(0,4)$, $P_j = P\{-2 \leq X_j \leq 2\}$, $j=1,2,3$, 则 (D).
(A) $P_1 > P_2 > P_3$; (B) $P_2 > P_1 > P_3$; (C) $P_3 > P_1 > P_2$; (D) $P_1 > P_3 > P_2$.
3. 已知 $(X,Y) \sim N(1,2,4,9,0.5)$, 则 $Cov(3X-Y, X+2Y)=$ (D).
(A) -6; (B) 32; (C) 6; (D) 9.
4. 已知随机变量 (X,Y) 联合分布函数为 $F(x,y)$, 边缘分布函数分别为 $F_X(x)$ 、 $F_Y(y)$, 则 $Z = \max(X,Y)$ 的分布函数为 (B).
(A) $F_X(z)F_Y(z)$; (B) $F(z,z)$;
(C) $1-F(z,z)$; (D) $(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$.
5. 在单个正态总体方差的假设检验中, μ 未知, α 为显著性水平, S^2 为样本方差, n 为样本容量, $H_0: \sigma^2 \leq \sigma_0^2$, $H_1: \sigma^2 > \sigma_0^2$, 则拒绝域为 (B).
(A) $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$; (B) $\frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha}^2(n-1)$;

$$(C) \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha/2}^2(n); \quad (D) \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{\sigma_0^2} \geq \chi_{\alpha}^2(n).$$

三、(10 分) 在回答有 A、B、C、D 四个选项的单选题时，由于题目较难，只有 5% 的学生能够解答出答案。假设解答出答案的同学回答正确的概率为 99%，不能解答出答案的学生则随机猜测答案。求：

(1) 学生回答正确的概率？(2) 在学生回答不正确的情况下，他（她）是猜答案的概率。

解：设 B 表示“学生能解答出答案”， A 表示“学生回答正确”，由题可得：

$$P(B) = 0.05, \quad P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.95, \quad P(A|B) = 0.99, \quad P(A|\bar{B}) = 0.25 \quad (2 \text{ 分})$$

(1) 由全概率公式，可得学生回答正确的概率为：

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\bar{B})P(A|\bar{B}) = 0.05 \times 0.99 + 0.95 \times 0.25 = 0.287 \quad (4$$

分)

(2) 由贝叶斯公式，可得“在学生回答不正确的情况下，他（她）是猜答案”的概率为：

$$\begin{aligned} P(\bar{B}|\bar{A}) &= \frac{P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B})}{P(B)P(\bar{A}|B) + P(\bar{B})P(\bar{A}|\bar{B})} \\ &= \frac{0.95 \times 0.75}{0.05 \times 0.01 + 0.95 \times 0.75} = \frac{1425}{1426} \approx 0.9993 \end{aligned} \quad (4 \text{ 分})$$

四、(15 分) 设连续型随机变量 X 的密度函数为： $f_X(x) = \begin{cases} A \cos x, & |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{others} \end{cases}$ ，求：

(1) 常数 A ；(2) $P\{0 < X < \frac{\pi}{4}\}$ ；(3) X 分布函数 $F_X(x)$ ；(4) $Y = X + 1$ 的概率密度。

解：(1) 由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$ ，则 $1 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A \cos x dx = 2A$ ，可得 $A = \frac{1}{2}$ 。 (3 分)

$$(2) P\{0 < X < \frac{\pi}{4}\} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos x dx = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (2 \text{ 分})$$

$$(3) F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx = \begin{cases} 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \\ \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{2} \cos x dx, & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x < -\frac{\pi}{2} \end{cases} = \begin{cases} 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \\ \frac{1}{2}(1 + \sin x), & -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & x < -\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (4 \text{ 分})$$

$$(4) F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X + 1 \leq y\} = P\{X \leq y - 1\} = F_X(y - 1) \quad (3 \text{ 分})$$

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = f_X(y-1)(y-1)' = f_X(y-1) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cos(y-1), & 1 - \frac{\pi}{2} \leq y \leq 1 + \frac{\pi}{2} \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

五、(10 分) 设二维离散型随机变量 (X, Y) 相互独立, 其联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/6	1/9	1/18
1	1/3	a	b

求: (1) 参数 a, b 的值; (2) $Z = \max(2X+1, Y)$ 的分布律.

解: (1) $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + a + b = 1$, 故而 $a + b = \frac{1}{3}$. (2 分)

由 X 与 Y 相互独立, 可得

$$\frac{1}{9} = P\{X=0, Y=1\} = P\{X=0\}P\{Y=1\} = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}\right)\left(\frac{1}{9} + a\right) \quad (2 \text{ 分})$$

解得 $a = \frac{2}{9}$, $b = \frac{1}{9}$ (2 分)

(2) $Z = \max(2X+1, Y)$ 的分布律为: (4 分)

$\max(2X+1, Y)$	1	2	3
p_k	5/18	1/18	2/3

六、(15 分) 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases}$

求: (1) X 、 Y 的边缘概率密度 $f_X(x)$ 、 $f_Y(y)$, 判定两者是否相互独立, 并给出理由;

(2) 给定 $X=x$ ($0 < x < 1$) 时 Y 的条件密度函数 $f_{Y|X}(y|x)$;

(3) $E\{(1-X)Y\}$.

解: (1) $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy = \begin{cases} \int_x^1 \frac{1}{1-x} dy, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$

同理, $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} \int_0^y \frac{1}{1-x} dx, & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} = \begin{cases} -\ln(1-y), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$

由于 $f(x, y) \neq f_X(x)f_Y(y)$, 可知两者不相互独立。 (2 分)

$$(2) f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)} = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & x < y < 1 \\ 0, & \text{others} \end{cases} \quad (3 \text{ 分})$$

$$(3) E\{(1-X)Y\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (1-x)y f(x,y) dx dy \quad (2 \text{ 分})$$

$$= \int_0^1 \int_x^1 (1-x)y \frac{1}{1-x} dx dy \quad (1 \text{ 分})$$

$$= \int_0^1 [\int_x^1 y dy] dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (1-x^2) dx = \frac{1}{3} \quad (1 \text{ 分})$$

七、(10 分) 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $\theta > 0$, 设 X_1, X_2, \dots, X_n

为来自总体 X 的样本, (1) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$; (2) 判断 $\hat{\theta}$ 是否为 θ 的无偏估计量.

解: (1) 似然函数: $L(\theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x_i}{\theta}} = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i} \quad (x_i > 0)$ (2 分)

两边取对数, 可得对数似然函数:

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = -n \ln \theta - \frac{1}{\theta} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{令 } \frac{dl(\theta)}{d\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2} \sum_{i=1}^n x_i = 0 \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{可得 } \theta \text{ 的最大似然估计量: } \hat{\theta} = \bar{X}. \quad (2 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 由于 } E(\hat{\theta}) = E(\bar{X}) = E(X) = \theta, \text{ 可得 } \hat{\theta} \text{ 为 } \theta \text{ 的无偏估计量.} \quad (2 \text{ 分})$$

八、(10 分) 某公司计划在某卫视频道做广告, 广告主要针对平均年龄为 21 岁的年轻人。播放后该公司想了解其广告是否为目标观众所接受, 现随机抽取 16 位观众进行调查, 得 $\bar{x} = 25$ 岁, $s^2 = 16$, 假定观众的年龄服从正态分布, 以显著性水平 $\alpha = 0.05$ 判断该公司的广告策划是否符合实际? ($z_{0.05} = 1.645$, $z_{0.025} = 1.96$, $t_{0.05}(15) = 1.7531$, $t_{0.025}(15) = 2.1315$)

解: 根据题意给出原假设和备择假设: $H_0: \mu = \mu_0 = 21$, $H_1: \mu \neq \mu_0$ (2 分)

$$\text{取检验统计量: } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}, \text{ 在 } H_0 \text{ 成立条件下: } T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1) \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{显著性水平 } \alpha = 0.05 \text{ 下, 拒绝域为: } |t| \geq t_{\alpha/2}(n-1) = t_{0.025}(15) = 2.1315, \quad (2 \text{ 分})$$

$$\text{代入数据, 可得 } |z| = \left| \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \right| = \left| \frac{25 - 21}{4/\sqrt{16}} \right| = 4 > t_{0.025}(15) = 2.1315, \text{ 落在拒绝域, 拒绝原}$$

假设, 认为该公司的广告策划不符合实际。 (4 分)

注: 本题也可根据置信区间和假设检验接受域的对偶关系求解。