南京信息工程大学期末试卷参考答案

2021 — 2022 学年 第 一 学期 概率统计 课程试卷(A 卷)

本试卷共 2 页；考试时间 120 分钟；任课教师 统计系 ；出卷时间 2021 年 12 月

____________ 学院 ____________ 专业 ____________ 班

学号____________ 姓名____________ **得分**____________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 从区间 $(0,1)$ 和 $(0.5,1)$ 中随机各取一个数，则两数之和小于 1 的概率为 __0.25__.

2. 已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-1)^2}{4}}, x\in R$，则 $E(X^2)=$ __3__.

3. 已知 $D(X)=9, D(Y)=4, \rho_{XY}=0.5$，则 $Cov(3X-2Y, X+4Y)=$ __25__.

4.（文） 设 $X_1, X_2, \cdots, X_{100}$ 为来自总体 $X\sim b(1,0.2)$ 的简单随机样本，令 $Z=\sum_{i=1}^{100}X_i$，则依据中心极限定理可得 $P(Z>28)\approx$ __0.0228__（已知 $\Phi(2)=0.9772$）.

4.（理） 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，且均服从参数为 1 指数分布，则当 n 充分大时，随机变量 $Y_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 近似服从的分布为 $\underline{N(1,1/n)}$.

5. 某厂生产一种型号的滚珠，其直径（单位：mm）$X\sim N(\mu, 0.04)$，现从这批滚珠中随机抽取 16 个，测得直径的样本均值为 4.35mm，则滚珠直径 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $\underline{(4.252, 4.448)}$.

（附：$z_{0.025}=1.96$，$z_{0.05}=1.645$）

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设事件 A 与事件 B 互不相容，则（ D ）.

（A） $P(\bar{A}\bar{B})=0$ （B） $P(AB)=P(A)P(B)$

（C） $P(A)=1-P(B)$ （D） $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1$

2. 设 $(X,Y)\sim N(\mu,\mu,\sigma_1^2,\sigma_2^2,0)$，则 $P\{X-Y\le 0\}=$（ B ）.

（A） 0 （B） 0.5 （C） 0.3 （D） 0.2

3. 设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布，则 $P\{X=E(X^2)\}=$（ C ）.

（A） e^{-1} （B） e^{-2} （C） $\dfrac{1}{2}e^{-1}$ （D） $\dfrac{1}{2}e^{-2}$

4. 设 $E(X)=12, D(X)=1$，由切比雪夫不等式可得 $P\{10<X<14\}\ge$（ A ）.

（A） 0.75 （B） 0.80 （C） 0.85 （D） 0.90

5. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体 X 的一个样本，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$，若 $(\bar{X})^2-cS^2$ 是 μ^2 的无偏估

计量，则$c=$（ C ）.

（A） $\dfrac{1}{3n}$ （B） n （C） $\dfrac{1}{n}$ （D） $\dfrac{1}{2n}$

三、计算题 (共 70 分)

1．（本题满分 10 分）一种新方法对某种特定疾病的诊断准确率为 90%（“有病被正确诊断”和“没病被正确诊断”的概率都是 90%）．如果人群中这种病的发病率为 1%，现从人群中随机抽取一人，（1）求该人被诊断患病的概率；（2）如果该人被诊断患病，求该人的确患病的概率.

解：（1）设$A=$“该人患病”，$\bar{A}=$“该人没患病”，$B=$“该人被诊断患病”，则

$$P(A)=1\%, P(\bar{A})=99\%, P(B|A)=90\%, P(B|\bar{A})=10\%. \qquad （2 分）$$

根据全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(A)\times P(B|A)+P(\bar{A})\times P(B|\bar{A})\\&=1\%\times 90\%+99\%\times 10\%=0.108.\end{aligned} \qquad （4 分）$$

（2）由贝叶斯公式得

$$\begin{aligned}P(A|B)&=\frac{P(A)\times P(B|A)}{P(A)\times P(B|A)+P(\bar{A})\times P(B|\bar{A})}\\&=\frac{1\%\times 90\%}{1\%\times 90\%+99\%\times 10\%}=\frac{1}{12}\approx 0.083.\end{aligned} \qquad （4 分）$$

2．（本题满分 15 分）设连续型随机变量X的分布函数为$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ Ax^2, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$，求：

（1）$P\{0.5<X<2\}$；（2）$Y=2X-1$的概率密度；（3）$D(2Y+1)$.

解：（1）由$\lim\limits_{x\to 1^-}F(x)=F(1)=1$得$A=1$，$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$， （3 分）

$$P\{0.5<X<2\}=F(2)-F(0.5)=1-(\frac{1}{2})^2=\frac{3}{4}. \qquad （2 分）$$

备注：可按下面方法求得，按照步骤对应给分.

$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2Ax, & 0<x<1,\\ 1, & 其它.\end{cases}$，由$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 2Axdx=1$得$A=1$.

$$P\{0.5<X<2\}=\int_{0.5}^1 2xdx=\frac{3}{4}.$$

（2）$f(x)=F'(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$，

$$y=2x-1\text{单调增}, h(y)=\frac{y+1}{2}, h'(y)=\frac{1}{2}, \alpha=-1, \beta=1,$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\,|h'(y)|=2\cdot\dfrac{y+1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{y+1}{2},-1<y<1, \\ 0,\text{其它}. \end{cases}$$ （5 分）

备注：可按下面方法求得，按照步骤对应给分.

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{2X-1\le y\}=P\{X\le\frac{y+1}{2}\}=F_X(\frac{y+1}{2}),$$

$$f_Y(y)=F'(x)=f_X(\frac{y+1}{2})=\begin{cases}\dfrac{y+1}{2},-1<y<1, \\ 0,\text{其它}.\end{cases}$$

（3） $E(X)=\int_0^1 x\times 2xdx=\frac{2}{3},E(X^2)=\int_0^1 x^2\times 2xdx=\frac{1}{2}$，

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-(\frac{2}{3})^2=\frac{1}{18},$$

$$D(2Y+1)=D(4X-1)=16D(X)=16\times\frac{1}{18}=\frac{8}{9}.$$ （5 分）

备注：可按下面方法求得，按照步骤对应给分.

$$E(Y)=\int_{-1}^1 y\cdot\frac{y+1}{2}dy=\frac{1}{3},E(Y^2)=\int_{-1}^1 y^2\cdot\frac{y+1}{2}dy=\frac{1}{3},$$

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{3}-(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9},$$

$$D(2Y+1)=4D(Y)=4\times\frac{2}{9}=\frac{8}{9}.$$

3.（本题满分 15 分）已知二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x+y}{8},0<x<2,0<y<2, \\ 0,\text{其它}.\end{cases}$，

（1）求边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$，并判断 X,Y 的独立性；（2）求 $P\{X+Y\le 1\}$；

（3）求 $E[(X-1)Y]$.

解：（1） $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^2\dfrac{x+y}{8}dy=\dfrac{x+1}{4},0<x<2, \\ 0,\quad\text{其它}.\end{cases}$， （3 分）

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_0^2\dfrac{x+y}{8}dx=\dfrac{y+1}{4},0<y<2, \\ 0,\quad\text{其它}.\end{cases}$$ （3 分）

$f(x,y)\ne f_X(x)\cdot f_Y(y)$，所以 X,Y 不独立. （2 分）

（2） $P\{X+Y\le 1\}=\int_0^1[\int_0^{1-x}\frac{x+y}{8}dy]dx=\frac{1}{24}$. （3 分）

（3） $E(Y)=\int_0^2 y\cdot\frac{y+1}{4}dy=\frac{7}{6},E(XY)=\int_0^2\int_0^2 xy\cdot\frac{x+y}{8}dxdy=\frac{4}{3}$，

$$E[(X-1)Y]=E(XY)-E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}=\frac{1}{6}.$$ （4 分）

4.（本题满分 10 分） 已知离散型随机变量 X,Y 的分布函数分别为

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.3, & 0\le x<1,\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}\qquad F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ 0.6, & 0\le y<2,\\ 1, & y\ge 2.\end{cases}$$

且 $P\{X=1|Y=0\}=\frac{2}{3}$，求：（1）二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律；（2）离散型随机变量 $Z=\max(X+1,Y)$ 的分布律.

解：（1） （6 分）

X 和 Y 的分布律分别为：

X	0	1
p_k	0.3	0.7

Y	0	2
p_k	0.6	0.4

由 $P\{X=1|Y=0\}=\frac{2}{3}$，即 $P\{X=1|Y=0\}=\frac{P\{X=1,Y=0\}}{P\{Y=0\}}=\frac{2}{3}$，

得 $P\{X=1,\ Y=0\}=\frac{2}{3}P\{Y=0\}=0.4$，

$P\{X=1,Y=2\}=P\{X=1\}-P\{X=1,\ Y=0\}=0.7-0.4=0.3$，

$P\{X=0,Y=2\}=P\{Y=2\}-P\{X=1,\ Y=2\}=0.4-0.3=0.1$，

$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}-P\{X=0,\ Y=2\}=0.3-0.1=0.2$，

故 (X,Y) 的分布律为

Y \ X	0	1
0	0.2	0.4
2	0.1	0.3

（2） （4 分）

(X,Y)	(0, 0)	(0, 2)	(1, 0)	(1, 2)
$\max(X+1,Y)$	1	2	2	2

$P\{\max(X+1,Y)=1\}=P\{X=0,Y=0\}=0.2$，

$P\{\max(X+1,Y)=2\}=P\{X=0,Y=2\}+P\{X=1,Y=0\}+P\{X=1,Y=2\}=0.8$，

故 $\max(X+1,Y)$ 的分布律为：

$\max(X+1,Y)$	1	2
p_k	0.2	0.8

5.（本题满分 10 分） 设 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{x}{2\theta}}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$，其中 $\theta>0, X_1,\cdots,X_n$ 为来自总体 X 的样本，（1）求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；（2）求参数 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$；（3）判断 $\hat{\theta}_L$ 是否为

参数θ的无偏估计量.

解：（1）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{x}{2\theta}}dx=2\theta$，

令$E(X)=\bar{X}$,即$2\theta=\bar{X}$,解得$\hat{\theta}=\frac{\bar{X}}{2}$.（3 分）

（2）$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{2\theta}e^{-\frac{x_i}{2\theta}}=2^{-n}\theta^{-n}e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i}$，$x_i>0$，

$\ln L(\theta)=-n\ln 2-n\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^{n}x_i$，

$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，解得$\theta=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{2n}=\frac{\bar{x}}{2}$.

参数θ的最大似然估计量为$\hat{\theta}_L=\frac{\bar{X}}{2}$.（4 分）

（3）$E(\hat{\theta}_L)=E(\frac{\bar{X}}{2})=\frac{1}{2}E(\bar{X})=\frac{1}{2}E(X)=\frac{1}{2}\cdot 2\theta=\theta$，

故$\hat{\theta}_L$是参数θ的无偏估计量.（3 分）

6.（本题满分 10 分）在正常状态下，某种品牌的香烟一只平均质量为 1.1 克，若从这种香烟堆中任取 36 支，测得样本均值$\bar{x}=1.18$克，样本标准差$s=0.1$克. 已知香烟的质量近似服从正态分布，问在显著性水平$\alpha=0.05$下，能否认为这堆香烟处于正常状态?

（附：$z_{0.025}=1.96$，$z_{0.05}=1.645$，$t_{0.025}(35)=2.0301$，$t_{0.05}(35)=1.6896$）

解：$H_0:\mu=\mu_0=1.1, H_0:\mu\neq\mu_0$，（2 分）

H_0成立时，统计量$t=\frac{\bar{X}-\mu_0}{S/\sqrt{n}}\sim t(n-1)$，拒绝域$|t|>t_{\alpha/2}(n-1)$，（2 分）

由已知得$|t|=|\frac{1.18-1.1}{0.1/\sqrt{36}}|=4.8, t_{\alpha/2}(n-1)=t_{0.025}(35)=2.0301$，（3 分）

显然$|t|>t_{\alpha/2}(n-1)$，拒绝H_0，即可认为这堆香烟处于不正常状态.（3 分）