南京信息工程大学期末试卷答案暨评分标准

2020－ 2021 学年 第 一 学期 概率统计 课程试卷(理工科 A 卷)

一、填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 设 A,B 为两个随机事件，$P(A)=0.5, P(B)=0.6, P(B|A)=0.8$，则 $P(A\cup B)=$ __0.7__。

2. 已知随机变量 $X\sim N(-3,1)$，设 $Z=-2X+1$，则 $Z\sim$ __$N(7,4)$__。

3. 设随机变量 $X\sim B(n,p)$，且 $E(X)=0.5$，$D(X)=0.45$，则 $p=$ __0.1__。

4. 若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 X、Y 相互独立的充要条件为 $\rho=$ __0__。

5. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为它的一个简单随机样本，令 $Y=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$，则

$D(Y)=$ __$2n$__。

二、 选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1. 设 A,B 为两个随机事件，若 $P(AB)=0$，则下列命题中正确的是(C)。

（A）$P(A)P(B)=0$ （B）A 与 B 独立 （C）$P(A-B)=P(A)$ （D）A 与 B 互斥

2. 设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，则随 σ 的增大，概率 $P\{|X-\mu|<2\sigma\}$ 应(C)。

（A）单调增大 （B）单调减少 （C）保持不变 （D）增减不定

3. 随机变量 X 与 Y 独立同分布，且 X 的分布函数为 $F(x)$，则 $Z=\max(X,Y)$ 的分布函数为(A)。

（A）$[F(x)]^2$ （B）$F(x)F(y)$ （C）$1-[1-F(x)]^2$ （D）$[1-F(x)]^2$

4. 设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2), X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自 X 的样本，则 σ^2 的最大似然估计量为(A)。

（A）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ （B）$\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$ （C）$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ （D）$\overline{X}^2$

5. 设一批零件的长度服从 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 均未知，从中随机抽取 16 个零件，测得样本均值 $\overline{x}=20(cm)$、样本标准差 $s=1(cm)$，则 μ 的置信度为 0.9 的置信区间为(C)。

（A）$\left(20\pm\frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$（B）$\left(20\pm\frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$（C）$\left(20\pm\frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$（D）$\left(20\pm\frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$

三、计算题（共 70 分）

1.（本题 10 分）为防控某种传染疾病，某市开展广泛的疾病检测，检测过程中，如果一个人感染了这种疾病，有 95%的可能性检测结果为阳性；如果未感染此种疾病，有 1%的可能性检测结果为阳性（即为假阳性）。假设该市有 10%的人口感染了这种疾病，并且每个人去检测的机会是均等的，问：

1）随机对一个人进行检测，其检测结果呈阳性的概率是多少？

2）如果一个人检测结果呈阳性，此人感染这种疾病的概率是多少？

解：设 A 表示“检测结果阳性”， B 表示“某人感染此疾病”，

由题可得: $P(B)=0.1$，$P(\bar{B})=1-P(B)=0.9$，

$P(A|B)=0.95$，$P(A|\bar{B})=0.01$。（2 分）

（1）由全概率公式，可得检测结果呈阳性的概率为：

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})\\&=0.1*0.95+0.9*0.01\\&=0.095+0.009\\&=0.104\end{aligned}$$（4 分）

（2）由贝叶斯公式，可得一个人检测结果呈阳性，他感染此疾病的概率为：

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})}=\frac{0.095}{0.104}=\frac{95}{104}\approx 0.91。$$（4 分）

2.（本题 10 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, x>0\\0, \quad x\le 0\end{cases}$，求 $Y=1-e^{-3X}$ 的概率密度。

解：Y 的分布函数为：

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(1-e^{-3X}\le y)=P(e^{-3X}\ge 1-y)$$（2 分）

$$P(e^{-3X}\ge 1-y)=\begin{cases}1, y\ge 1,\\0, y\le 0\end{cases}$$（2 分）

当 $0<y<1$ 时

$$P(e^{-3X}\ge 1-y)=P(X\le -\frac{1}{3}\ln(1-y)=F_X(-\frac{1}{3}\ln(1-y))$$（2 分）

当 $0<y<1$ 时，Y 的概率密度为：

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=F_X'(-\frac{1}{3}\ln(1-y))=\frac{1}{3}\frac{1}{1-y}f_X(-\frac{1}{3}\ln(1-y))$$

$$=\frac{1}{3}\frac{1}{1-y}\times 3e^{\ln(1-y)}=1$$（2 分）

当 $y\le 0$ 或 $y\ge 1$ 时，Y 的概率密度 $f_Y(y)=F_Y'(y)=0$

故 $Y=1-e^{-3X}$ 概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}1, \ 0<y<1,\\0, \quad 其他.\end{cases}$。（2 分）

3.（本题 10 分）设二维连续型随机变量(X,Y)的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases}3x, & 0<x<1,0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$。

试求：1）条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$；2）条件概率 $P(X\le 0.5|Y\le 0.5)$。

解：1）由 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^x 3xdy, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ……………（3 分）

得条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}, & 0<x<1,0<y<x\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<x<1,0<y<x,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$ ………………（2 分）

2） $P(X\le 0.5|Y\le 0.5)=\dfrac{P(X\le 0.5,Y\le 0.5)}{P(Y\le 0.5)}=\dfrac{\int_0^{0.5}dx\int_0^x f(x,y)dy}{\int_0^{0.5}dy\int_y^1 f(x,y)dx}$ ……………（3 分）

$$=\frac{\int_0^{0.5}dx\int_0^x 3xdy}{\int_0^{0.5}dy\int_y^1 3xdx}=\frac{1/8}{11/16}=\frac{2}{11}$$ ………………（2 分）

4.（本题 10 分）设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，$X\sim U(0,1)$，Y 的概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$。1）求 X 和 Y 的联合概率密度 $f(x,y)$；2）设未知数为 a 的一元二次方程为 $a^2+2\sqrt{X}a+Y=0$，求该方程有实根的概率。

解：1） X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，由于 X 和 Y 相互独立

故 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}e^{-y/2}, & 0<x<1,0<y,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ ………………（4 分）

2）方程有实根要求 $(2\sqrt{X})^2-4Y\ge 0$，即 $Y\le X$。记 $B=\{Y\le X\}$ ………………（2 分）

则 $P(B)=P(Y\le X)=\int_0^1\int_0^x \dfrac{1}{2}e^{-y/2}dydx$ ………………（2 分）

$$=\int_0^1(1-e^{-x/2})dx=1-(2-2e^{-1/2})=2e^{-1/2}-1$$ ………………（2 分）

5.（本题 10 分）设随机变量 X 满足 $P(X>0)=0.2$。设另有随机变量 $Y_i, i=1,2,\cdots$，当 $X>0$ 时，

Y_i 为 1；否则 Y_i 为 0。再设 $Z=\sum_{i=1}^{100}Y_i$，且所有 Y_i 均独立且分布相同。

1）分别写出 Y_i 和 Z 分布律；2）求 Z 的数学期望和方差；

3）运用中心极限定理，计算 $P(Z>28)$ 约为多少？（已知 $\Phi(2)=0.9772$）

解：1）由题意 Y_i 服从（0-1）分布；………………（2 分）

其分布律为：$Y_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$

Z 服从二项分布，$Z \sim B(100,0.2)$，其分布律为：

$P(Z=k)=C_{100}^k 0.2^k(1-0.2)^{100-k}=C_{100}^k 0.2^k 0.8^{100-k}, k=0,1,2,\cdots,100$ ………………（2 分）

2）$E(Y_i)=0\times 0.8+1\times 0.2=0.2$；$D(Y_i)=E(Y_i^2)-(E(Y_i))^2=0.2\times(1-0.2)=0.16$

$E(Z)=E(\sum_{i=1}^{100}Y_i)=\sum_{i=1}^{100}E(Y_i)=100\times 0.2=20$ ………………（2 分）

$D(Z)=100D(Y_i)=100\times 0.2\times(1-0.2)=16$ ………………（2 分）

3）由棣莫弗-拉普拉斯定理，得 Z 近似地服从正态分布，故

$P(Z>28)=P(\frac{Z-20}{\sqrt{16}}>\frac{28-20}{\sqrt{16}})=1-\Phi(2)=0.0228$ ………………（2 分）

6.（本题 12 分）已知总体 X 服从瑞利分布，其概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$，其中 $\theta>0$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为简单随机样本。1）试求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$；2）验证 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量；3）运用大数定律，验证 $\hat{\theta}$ 是 θ 的相合估计量。

解：1）设样本的一组观察值为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则似然函数为

$L(\theta)=\prod_{i=1}^n f(x_i)=\prod_{i=1}^n \frac{x_i}{\theta}e^{-\frac{x_i^2}{2\theta}}=\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\theta^n}e^{-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2}$ ………………（2 分）

$\ln L(\theta)=\sum_{i=1}^n \ln x_i-n\ln\theta-\frac{1}{2\theta}\sum_{i=1}^n x_i^2$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=-\frac{n}{\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

令$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，解得$\theta=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2$ ……………… （2 分）

故θ的最大似然估计量为：$\hat{\theta}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ ……………… （1 分）

2）$E(\hat{\theta})=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2)=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}E(X^2)=\frac{1}{2}E(X^2)$ ……………… （2 分）

又$E(X^2)=\int_0^{\infty}x^2f(x)dx=\int_0^{\infty}x^2\frac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}dx=2\theta\int_0^{\infty}te^{-t}dt=2\theta$

所以$E(\hat{\theta})=\frac{1}{2}E(X^2)=\theta$

故$\hat{\theta}$是θ的无偏估计量。 ……………… （2 分）

3）由于$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且与总体X同分布。

所以$X_1^2,X_2^2,\cdots,X_n^2$也相互独立，且与X^2同分布。同时$E(X_i^2)=E(X^2)=2\theta,i=1,2,\cdots,n$

由大数定律得$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}E(X^2)=2\theta$ ……………… （2 分）

从而$\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2\xrightarrow{P}\theta$，故$\hat{\theta}$是$\theta$的相合估计量。 ……………… （1 分）

7.（本题 8 分）根据以往经验，某厂生产的导线电阻值X服从$N(\mu,0.5^2)$，其中参数μ未知。今在生产现场中取样品 9 根，测得样本方差$s^2=0.36$，试问在显著性水平$\alpha=0.05$下，生产的导线电阻值的方差有无显著性变化？（$\chi^2_{0.975}(8)=2.18$，$\chi^2_{0.025}(8)=17.534$，$\chi^2_{0.975}(9)=2.7$，$\chi^2_{0.025}(9)=19.022$）

解：$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2,H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$ ……………… （2 分）

在H_0为真时$\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\sim\chi^2(n-1)$ ……………… （2 分）

从而$P((\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup (\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)) = \alpha$

故拒绝域为：$(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \le \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \cup (\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \ge \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ ……………… （2 分）

已知$\sigma_0^2 = 0.5^2$，$s^2 = 0.36$，$n = 9$，$\alpha = 0.05$，$\chi^2_{0.975}(8) = 2.18, \chi^2_{0.025}(8) = 17.534$

由于$\chi^2_{0.975}(8) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} = 11.52 < \chi^2_{0.025}(8)$

故接受H_0，即认为生产的导线电阻值的方差有显著性变化。 ……………… （2 分）