第 10 章 静电场

一、选择题

1．A　2．B　3．C　4．C　5．B
6．C　7．D　8．C　9．B　10．C
11．D　12．C　13．A　14．B　15．D

二、计算题

1．解：铜球的摩尔数为：

$$\nu = \frac{m}{\mu} = \frac{1.77\times10^{-2}}{63.5\times10^{-3}} = 0.279\ \text{mol}$$

该铜球所包含的原子个数为：

$$N = \nu N_A = 1.68\times10^{23}$$

每个铜原子中包含了 29 个质子，而每个质子的电量为$e = 1.602\times10^{-19}$ C，所以铜球所带的正电荷为

$$q = 1.68\times10^{23}\times29\times1.602\times10^{-19}\,\text{C} = 7.80\times10^{5}\,\text{C}$$

2．解：（1）电子与质子之间的库仑力为：

$$f_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2} = 8.99\times10^{9}\times(\frac{1.60\times10^{-19}}{5.29\times10^{-11}})^2 = 8.22\times10^{-8}\,\text{N}\,.$$

（2）电子与质子之间的万有引力为：

$$f_m = G\frac{mM}{r^2} = 6.67\times10^{-11}\times\frac{1.67\times10^{-27}\times9.11\times10^{-31}}{(5.29\times10^{-11})^2} = 3.63\times10^{-47}\,\text{N}\,.$$

所以

$$\frac{f_e}{f_m} = \frac{8.22\times10^{-8}}{3.63\times10^{-47}} = 2.62\times10^{39}$$

3．解：（1）因电荷分布具有球对称性，用电场迭加原理分析可知：电场分布也具有相同的球对称性。作一半径为r的同心球形高斯面，根据高斯定理有

$$\oiint_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = E\oiint\mathrm{d}S = E4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q$$

当$r < R$时：$\sum q = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{r^3}{R^3}Q$

所以$E_{内}\cdot4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{R^3}Q$

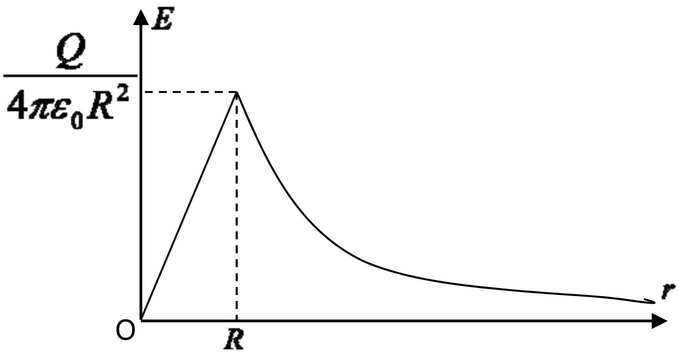
故$E_{内} = \frac{Q\,r}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\quad(r < R)$

当$r > R$时，$\sum q = Q$

所以 $E_{外} 4\pi r^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_o} Q$

故 $E_{外} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \qquad (r > R)$

其 $E-r$ 分布曲线如图所示..



（2）选无穷远点为电势零点。

球内任一点的电势为：$U_{内} = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^R E_{内} dr + \int_R^\infty E_{外} dr$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\int_r^R r dr + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{dr}{r^2}$$

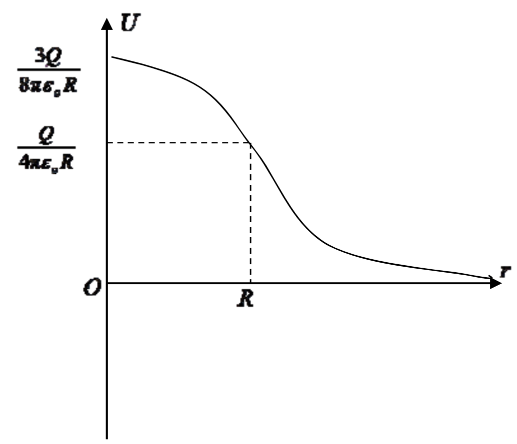
$$= \frac{Q}{8\pi\varepsilon_o R^3}(R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

化简得 $U_{内} = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_o R}(3 - \dfrac{r^2}{R^2}) \qquad (r < R)$

球外任一点的电势为： $U_{外} = \int_r^\infty \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^\infty E_{外} dr = \int_r^\infty \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{dr}{r^2} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

即 $U_{外} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} \qquad (r > R)$

$U-r$ 分布曲线如图所示

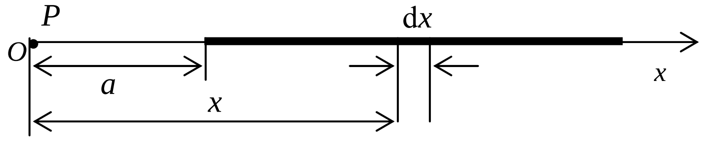


4．解：设坐标原点位于 P 点，x 轴沿杆的方向，如图所示。杆的电荷线密度 $\lambda = q/l$。

在 x 处取电荷元 $\mathrm{d}q$， $\mathrm{d}q=\lambda\mathrm{d}x=q\mathrm{d}x/l$

它在 P 点产生的电势：$\mathrm{d}U_p=\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 x}$

整个杆上电荷产生的电势：$U_p=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\int_a^{a+l}\dfrac{\mathrm{d}x}{x}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l}\ln\dfrac{a+l}{a}$



5．解：（1） 以 q_1 和 q_2 分别表示内外球面所带电量，由电势叠加原理得：

$$U_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{R_2}\right)=60$$

$$U_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_2}=-30$$

代入 R_1 和 R_2 的值联立上式得：$q_1=\dfrac{2}{3}\times10^{-9}\ \mathrm{C}$、$q_2=-\dfrac{4}{3}\times10^{-9}C$

（2） 由 $U=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{r}+\dfrac{q_2}{R_2}\right)=0$ 得：$r=\dfrac{q_1}{-q_2}R_2=10\ \mathrm{cm}$

6．解：（1）高斯定理为：$\oiint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum\limits_{S内}q_i/\varepsilon_0$

（2）在球内（$r<R$），$\oiint_{S_1}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum\limits_{S_1内}q_i/\varepsilon_0$， $E_{内}=0$；

（3）在球外（$r>R$），$\oiint_{S_2}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\sum\limits_{S_2内}q_i/\varepsilon_0$， $E_{外}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，方向沿径向向外；

（4）对于球内的任意一点，若距球心为 r（$r<R$），其电势为

$$U_1=\int_r^\infty\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^R\vec{E}_{内}\cdot\mathrm{d}\vec{l}+\int_R^\infty\vec{E}_{外}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0+\int_R^\infty\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

对于球外的任意一点，若距球心为 r（$r>R$），其电势为

$$U_2=\int_r^\infty\vec{E}_{外}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\int_r^\infty\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}。$$

7．解：$\mathrm{d}q=\dfrac{Q}{2\pi R}\mathrm{d}l$， $r=\sqrt{R^2+x^2}$

$$\mathrm{d}U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{R^2+x^2}}\frac{Q}{2\pi R}\mathrm{d}l$$

$$U=\oint\mathrm{d}U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\sqrt{R^2+x^2}}$$

当 $x>>R$ 时，$U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x}$；当 $x=0$ 时，$U=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$。

8．解：（1）圆环上电荷元 $\mathrm{d}q$ 在轴线上任一点（设其坐标为 x）的电位为：

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}},$$

积分：
$$U=\int \mathrm{d}U=\int_Q\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}。$$

（2）P_1 点的电势为：$U_1=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+R^2}}=\dfrac{Q}{4\sqrt{2}\pi\varepsilon_0 R}$。

P_2 点的电势为：$U_2=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+(2R)^2}}=\dfrac{Q}{4\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 R}$。

所以：$\dfrac{U_1}{U_2}=\sqrt{\dfrac{5}{2}}$

9．解：$E_x=-\dfrac{\partial u}{\partial x}=-(6-12xy)=66$

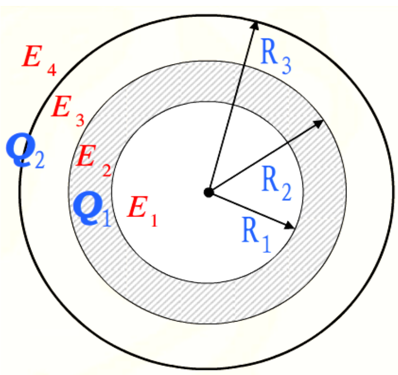
$$E_y=-\frac{\partial u}{\partial y}=6x^2=24$$

$$E_z=-\frac{\partial u}{\partial z}=-14z=0$$

$$\vec{E}=E_x\vec{i}+E_y\vec{j}=66\vec{i}+24\vec{j}$$

10．解：取半径为 r 的同心球面为高斯面：

$$\oint\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=E\cdot 4\pi r^2=\frac{\sum q}{\varepsilon_0};$$



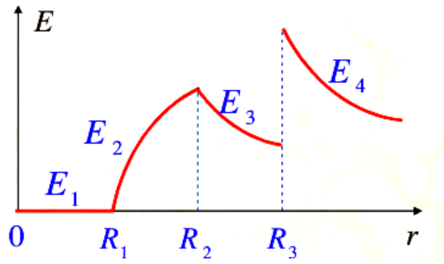
（1）$r<R_1$，该高斯面内无电荷，$\sum q=0$，故 E_1=0；

（2）$R_1<r<R_2$，高斯面内电荷 $\sum q=\dfrac{Q_1(r^3-R_1^3)}{R_2^3-R_1^3}$；故 $E_2=\dfrac{Q_1(r^3-R_1^3)}{4\pi\varepsilon_0\left(R_2^3-R_1^3\right)}$；

（3）$R_2<r<R_3$，高斯面内电荷为 Q_1，故 $E_3=\dfrac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$；

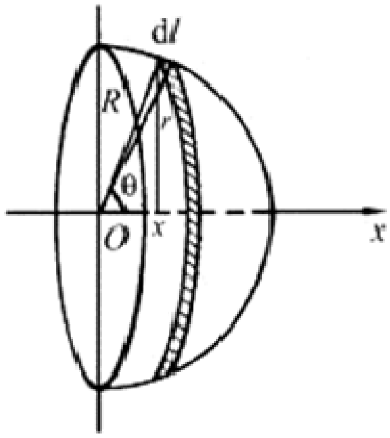
（4）$r>R_3$，高斯面内电荷为 Q_1+Q_2，故 $E_4=\dfrac{Q_1+Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，方向沿着径向向外；.

如图所示，在带电球面的两侧，场强的左右极限不同，电场强度不连续。



而在紧贴 $r=R_3$ 的带电球面两侧，场强的跃变量为：$\Delta E=E_4-E_3=\dfrac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$ 。

11．解：以球心 O 为坐标原点，建立如图所示的坐标系。



在球面上取宽度为 dl 的圆环，圆环的半径为 r。

$$\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta,$$

圆环所带的电量为：

$$\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}l=\sigma 2\pi rR\mathrm{d}\theta\,.$$

该圆环在球心产生的电场强度为：

$$\mathrm{d}E=\frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}}=\frac{\sigma 2\pi rR\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(x^2+r^2\right)^{3/2}},$$

方向沿 x 轴的反方向。

由图中可见，$r=R\sin\theta, x=R\cos\theta$ ，将这些关系代入上式，得：

$$\mathrm{d}E=\frac{\sigma 2\pi R^3\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0\left(R^2\cos^2\theta+R^2\sin^2\theta\right)^{3/2}}=\frac{\sigma 2\pi\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0}.$$

所以：

$$E=\int\mathrm{d}E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^{x/2}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0},$$

$\bar{E}$ 的方向沿 x 轴的反方向。

12．解：（1）点 A 的电势：

$$U_A=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\frac{d}{2}}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0\frac{d}{2}}$$

$$=\frac{40\times10^{-9}}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times5\times10^{-2}}+\frac{-70\times10^{-9}}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times5\times10^{-2}}$$

$$=-5.4\times10^{3}\ \text{V}$$

（2）点 B 的电势：

$$U_B=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_1}+\frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_2}$$

$$=\frac{40\times10^{-9}}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times8\times10^{-2}}+\frac{-70\times10^{-9}}{4\times3.14\times8.85\times10^{-12}\times6\times10^{-2}}$$

$$=-6.0\times10^{3}\ \text{V}$$

三、问答题

1．解：（1）电场强度 $\vec{E}=\vec{F}/q$ 是从力的角度对电场分布的描述，它给出了一个矢量场分布的图像。（2）电势 $U=W/q$ 是从能量和功的角度对电场分布的描述，它给出了一个标量场分布的图像。（3）空间任一点的电场强度 $\vec{E}$ 和该点的电势 U 之间并没有一对一的关系。二者的关系是 $\vec{E}=-\nabla U=-\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}$， $U=\int_P^{P_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ ，即空间任一点的场强 $\vec{E}$ 和该点附近电势的空间变化率相联系；空间任一点的电势和该点到电势零点的整个空间的场强分布相联系。（4）由于电场强度 $\vec{E}$ 是矢量，利用场迭加原理计算时，应先将各电荷元产生的电场 $\mathrm{d}\vec{E}$ 进行分解，再按方向进行合成，即 $\mathrm{d}\vec{E}=\mathrm{d}E_x\vec{i}+\mathrm{d}E_y\vec{j}+\mathrm{d}E_z\vec{k}$ ， $E_x=\int\mathrm{d}E_x$ ， $E_y=\int\mathrm{d}E_y$ ， $E_z=\int\mathrm{d}E_z$ ，而电势是标量可直接进行迭加，即 $U=\int\mathrm{d}U$ ，但用这种方法求电势时，应注意电荷是否分布在有限空间及电势零点的选择，最好选无穷远点为电势零点。

2．解：相对于观察者静止的电荷所所激发的电场叫做静电场。

高斯定理：$\psi_E=\oiint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{\sum_i q_i}{\varepsilon_0}$。物理意义：在任意静电场中，通过任一闭合曲面的 $\vec{E}$ 通量，等于该曲面内电荷量的代数和除以 ε_0。

环路定理：$\oint_L\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\oint_L E\cos\theta\mathrm{d}l=0$。物理意义：静电场力做功与路径无关。

3．解：$U_A=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 。