第 3 章 二维随机变量及其分布

在实际问题中，除了讨论一个随机变量的情形，许多随机现象需要用两个或者更多个随机变量来描述，这就需要我们研究多维随机变量的问题. 多维随机变量的性质不仅与每一个随机变量有关，而且还与它们之间的相互联系有关，研究多维随机变量不仅要研究各个随机变量的性质，而且还要研究他们之间的联系. 为了简明起见，本章只介绍二维随机变量. 二维随机变量是一维随机变量的延伸，与一维随机变量相比情况要复杂得多.

本章首先介绍二维随机变量的概念，以及二维随机变量的联合分布函数。类似于第二章的内容，本章中只涉及两类最重要的随机变量:二维离散型随机变量和二维连续型随机变量.

在二维离散型随机变量内容中，主要介绍二维随机变量的联合分布律. 在二维连续型随机变量内容中，重点介绍二维随机变量的联合密度函数，最后介绍二维随机变量的函数的分布. 把一维随机变量推广到二维随机变量会产生一些新问题，把二维随机变量推广到三维以至于 n 维，很多研究可以类推，结果可以自然推广.

§3.1 二维随机变量的联合分布与边际分布

3.1.1 二维随机变量的联合分布函数及其性质

设 X 和 Y 为 Ω 上的两个随机变量，则称有序数组 (X,Y) 为 Ω 上的**二维随机变量**.

一维随机变量就是直线 R 上的一个随机点，那么二维随机变量就是平面 R^2 上的一个二维的随机点。在研究一维随机变量的时候，我们已经知道，一维随机变量的所有概率特性完全由它的分布函数决定。二维随机变量的研究与一维随机变量非常类似，它的所有概率特性完全由它的联合分布函数决定.

定义 3.1.1 设二维随机变量 (X,Y)，对任意实数 x,y，二元函数

$$F(x,y)=P(X\le x,Y\le y), \tag{3.1.1}$$

称为 (X,Y) 的**联合分布函数**. 其中 $\{X\le x,Y\le y\}$ 为 $\{X\le x\}\bigcap\{Y\le y\}$ 的简写形式.

从几何上看，(X,Y) 表示平面直角坐标系中随机点的坐标，设 (x,y) 表示坐标系中的任一点，那么分布函数 $F(x,y)$ 在 (x,y) 处的函数值表示随机点落在以 (x,y) 为顶点的左下方无穷矩形域上的概率（图 3-1）.

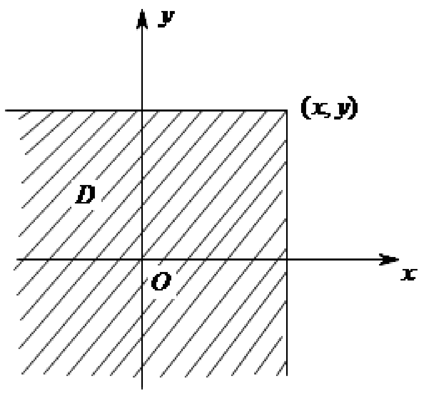


图 3-1

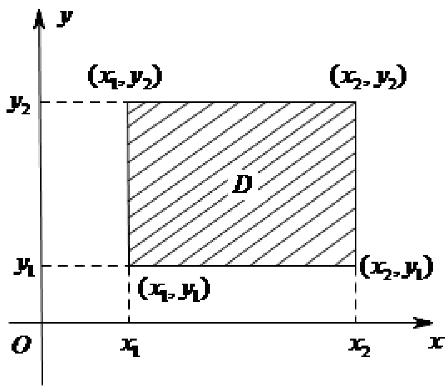


图 3-2

由分布函数的几何意义可以得出，对任何$x_1 < x_2$，$y_1 < y_2$，有

$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1)$$

它表示随机点落在区域D内的概率（图 3-2）.

注意：$F(x, y)$是一个普通的二元函数，其定义域为R^2.

可以证明分布函数具有以下的性质：

（1）$F(x, y)$对x或y都是不减函数，即对任意y，若$x_1 \le x_2$，则$F(x_1, y) \le F(x_2, y)$，对任意x，若$y_1 \le y_2$，则$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$.

（2）对任意的x, y，

$$F(-\infty, y) = 0，F(x, -\infty) = 0，F(-\infty, -\infty) = 0，F(+\infty, +\infty) = 1.$$

（3）$F(x, y)$分别对x, y右连续，即有

$$F(x+0, y) = F(x, y) \quad F(x, y+0) = F(x, y).$$

（4）（矩形法则），对任何$x_1 \le x_2$，$y_1 \le y_2$，有

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \ge 0. \tag{3.1.2}$$

例 3.1.1 已知二元函数$F(x, y) = \begin{cases} 1, & 2x + y \ge 0 \\ 0, & 2x + y < 0 \end{cases}$，证明$F(x, y)$不是联合分布函数。

证明 显然$F(x, y)$对x或y都是右连续的不减函数；且对任意的x, y，

$$F(-\infty, y) = 0，F(x, -\infty) = 0，F(-\infty, -\infty) = 0，F(+\infty, +\infty) = 1。$$

但是，$F(x, y)$不满足矩形法则，比如取$x_1 = -1, x_2 = 1, y_1 = 0, y_2 = 3$，则有

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$$

$$=F(1,3)-F(1,0)-F(-1,3)+F(-1,0)=-1<0$$

所以$F(x,y)$不是分布函数。

例 3.1.2 已知$F(x,y)=A(B+\arctan x)(C+\arctan y)$（$x,y\in R$）为二维随机变量$(X,Y)$的联合分布函数. 求常数$A,B,C$.

解　由联合分布函数的性质$F(-\infty,y)=0$，$F(x,-\infty)=0$，$F(+\infty,+\infty)=1$，由此得到联立方程组

$$\begin{cases} A(B+\arctan x)(C-\dfrac{\pi}{2})=0, & (1) \\ A(B-\dfrac{\pi}{2})(C+\arctan y)=0, & (2) \\ A(B+\dfrac{\pi}{2})(C+\dfrac{\pi}{2})=1, & (3) \end{cases}$$

由方程（3）可知$A\neq 0$， 所以对任意的x都有

$$(B+\arctan x)(C-\frac{\pi}{2})=0,$$

于是$C=\dfrac{\pi}{2}$, 同理可得$B=\dfrac{\pi}{2}$, 所以$A=\dfrac{1}{\pi^2}$.

3.1.2 边际分布函数

在研究二维随机变量(X,Y)的过程中，为了避免将单个随机变量X或Y的分布与联合分布混为一谈，往往将单个随机变量X或Y的分布称为边际分布，即X的分布函数$F_X(x)$称为X的**边际分布函数**，Y的分布函数$F_Y(y)$称为Y的**边际分布函数**。(X,Y)的联合分布函数与X，Y的边际分布函数有如下关系

$$F_X(x)=F(x,+\infty),\qquad F_Y(y)=F(+\infty,y)。\qquad (3.1.3)$$

比如，在上例中X的边际分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan x),\quad x\in R;$$

Y的边际分布函数为

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{\pi}(\frac{\pi}{2}+\arctan y),\quad y\in R。$$

读者需要注意的是，由联合分布函数必然可求出边际分布函数，但是如果即使两个边际分布函数都已知，一般来说是求不出联合分布函数的。

虽然二维随机变量的概率性质完全由它的联合分布函数决定，但是联合分布函数非常不便于实际应用，它只是在理论上比较有用。因此，在处理实际问题时，我们通常只考虑二维离散与二维连续两类随机变量。

3.1.3 习题

1.设二维随机变量（X，Y）的联合分布函数为

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\sin y, & 0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

（1）边际分布函数 $F_X(x)$ 与 $F_Y(y)$（2）求 $P(0<X\le\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{6}<Y\le\frac{\pi}{3})$。

2. 已知二元函数$F(x,y)=\begin{cases}1 & x\ge\frac{\pi}{2},y\ge 0 或 y\ge\frac{\pi}{2},x\ge 0\\ \sin x\sin y & 0\le x\le\frac{\pi}{2},0\le y\le\frac{\pi}{2}\\ 0 & x<0 或 y<0\end{cases}$，$F(x,y)$ 能否成为一个联合分布函数？

§3.2 二维离散型随机变量

如果 X 与 Y 是两个一维离散型随机变量, 称 (X,Y) 为**二维离散型随机变量**. 由于 X 与 Y 的可能取值都是至多可数个, 所以 (X,Y) 的可能取值也是至多可数个. 我们已经知道一维离散型随机变量的概率特性是由它的分布列来决定的, 类似地二维离散型随机变量的概率特性是由它的联合分布列来决定的.

定义 3.2.1 设 (X,Y) 为二维离散型随机变量，且 X 的可能取值记为 $x_1,x_2,\cdots$，Y 的可能取值记为 $y_1,y_2,\cdots$，称

$$p_{ij}=P(X=x_i,Y=y_j),\qquad i,j=1,2,\cdots \tag{3.2.1}$$

为二维离散型随机变量 (X,Y) 的**联合分布列**或**联合分布律**.

读者容易验证，p_{ij}具有以下性质：

（1） 非负性 $p_{ij} \ge 0\ (i, j = 1, 2, \cdots)$；

（2） 归一性 $\sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

(X,Y)的联合分布列与(X,Y)的联合分布函数二者是等价的：如果已知(X,Y)的联合分布列为$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$, $i, j = 1, 2, \cdots$，可以求出(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x, y) = \sum_{x_i \le x} \sum_{y_j \le y} p_{ij} \text{。}$$

反之，由联合分布函数也可以求出联合分布列。对于二维离散型随机变量的联合分布列，使用下面的表格会更加方便。

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

3.2.1 离散型随机变量的边际分布

设(X,Y)为二维离散型随机变量，其联合分布律为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}\text{，}\ i, j = 1, 2, \cdots$$

则称

$$P(X = x_i)) = P(X = x_i, Y < \infty),\ i = 1, 2, \cdots$$

为 X 的**边际分布列**，记作 $p_{i\cdot}$.

同理称

$$P(Y = x_i)) = P(X < \infty, Y < y_j),\ j = 1, 2, \cdots$$

为Y的**边际分布列**，记作$p_{\cdot j}$.

根据**边际分布列**的定义，可以得到

$$\begin{aligned}p_{i\cdot}&=P(X=x_i)=P(X=x_i,Y<+\infty)\\&=P(X=x_i,Y=y_1)+P(X=x_i,Y=y_2)+\cdots+P(X=x_i,Y=y_j)+\cdots\\&=p_{i1}+p_{i2}+\cdots+p_{ij}+\cdots=\sum_j p_{ij}\ ,\end{aligned}$$

即

$$p_{i\cdot}=\sum_j p_{ij}\ ,\quad i=1,2,\cdots \tag{3.2.2}$$

同理

$$p_{\cdot j}=\sum_i p_{ij}\ ,\quad j=1,2,\cdots. \tag{3.2.3}$$

可见将(X,Y)的联合分布律的表格形式中的第i行各数相加，即得$p_{i\cdot}$，将第j列各数相加，即得$p_{\cdot j}$. 如下表所示：

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

例 3.2.1 已知X和Y的边际分布列均为$\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$，且$P(XY=0)=1$，试求$(X,Y)$的联合分布律.

解 由于$P(XY=0)=1$，所以$P(XY\neq 0)=0$，又因为

$$\{X=-1,Y=-1\}\subset\{XY\neq 0\}\ ,$$

得

$$P(X=-1,Y=-1)=0。$$

同理可得 $P(X=-1,Y=1)=P(X=1,Y=-1)=P(X=1,Y=1)=0$。

利用联合分布列和边际分布列的关系可得(X,Y)的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

例 3.2.2 某射手向一目标独立地连续射击，每次命中的概率都是 p，以 X 表示第二次命中时的射击次数，以Y表示第三次命中时的射击次数。求(X,Y)的联合分布列，并利用联合分布列求出 X 和 Y 的边际分布列.

解 求(X,Y)的联合分布列就是求$\{X=m,Y=n\}$（$m<n$）的概率，$\{X=m,Y=n\}$表示在前n次射击中，第m次命中了第二次，第n次命中了第三次，而在前$m-1$次中有一次命中，所以

$$P(X=m,Y=n)=C_{m-1}^{1}p^{3}q^{n-3},$$

其中$n=3,4,\cdots;m=2,3,\cdots,n-1$。

X 的边际分布列为

$$P(X=m)=\sum_{n=m+1}^{\infty}C_{m-1}^{1}p^{3}q^{n-3}=C_{m-1}^{1}p^{3}\sum_{n=m+1}^{\infty}q^{n-3}=C_{m-1}^{1}p^{2}q^{m-2},\ m=2,3,\cdots.$$

Y 的边际分布列为

$$P(Y=n)=\sum_{m=2}^{n-1}C_{m-1}^{1}p^{3}q^{n-3}=p^{3}q^{n-3}\sum_{m=2}^{n-1}C_{m-1}^{1}=C_{n-1}^{2}p^{3}q^{n-3},\ n=3,4,\cdots 。$$

例 3.2.3 一批产品共有 5 件，其中 3 件正品，2 件次品，从中任取一件，然后再从中任取 1 件. 设每次抽取时，每件产品被取到的概率相同，分别以 X 与 Y 表示两次取到的正品个数. 试分别在有放回和不放回两种情况下，求 (X,Y) 的联合分布律和边际分布列.

解 (X,Y) 可能取的值为数组 $(0,0),(0,1),(1,0)$ 和 $(1,1)$.

（1）由乘法公式知，在有放回抽取的情况下，

$$P(X=0,Y=0)=\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}=0.16；\qquad P(X=0,Y=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}=0.24；$$

$$P(X=1,Y=0)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}=0.24；\qquad P(X=1,Y=1)=\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}=0.36.$$

（2）在无放回抽取的情况下，

$$P(X=0,Y=0)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{10}=0.1；\qquad P(X=0,Y=1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{10}=0.3；$$

$$P(X=1,Y=0)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}=0.3；\qquad P(X=1,Y=1)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{3}{10}=0.3.$$

于是得到在有放回抽取下，(X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0.16	0.24	0.4
1	0.24	0.36	0.6
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6	1

(X,Y) 的边际分布列为

X	0	1
$p_{i\cdot}$	0.4	0.6

Y	0	1
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6

在不放回下，(X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1	$p_{i\cdot}$

0	0.1	0.3	0.4
1	0.3	0.3	0.6
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6	1

(X,Y)的边际分布列为

X	0	1
$p_{i\cdot}$	0.4	0.6

Y	0	1
$p_{\cdot j}$	0.4	0.6

这个例子显示，“有放回”和“不放回”时，(X,Y)具有不同的分布律，但它们相应的边际分布列却是一样的. 这一事实表明，虽然二维随机变量的联合分布律完全决定了两个边缘分布，但反过来边际分布列却不能决定(X,Y)的联合分布律.

另外，这个例子又再一次证明了抽签的公平性，即无论是“有放回”还是“不放回”，每次抽中的概率都是一样的.

3.2.2 二维离散随机变量的独立性

在第一章中我们已经知道两个事件A与B相互独立是指积事件的概率等于概率乘积，即

$$P(AB)=P(A)P(B)。$$

如果(X,Y)为二维离散随机变量，那么事件$\{X=x_i\}$与$\{Y=y_j\}$相互独立就是

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)。$$

那么X和Y是否可以定义独立性呢？事实上，我们有下面的定义。

定义 3.2.2 设(X,Y)为二维离散随机变量，X与Y的可能取值分别为$x_1,x_2,\cdots$与$y_1,y_2,\cdots$，如果对任意的$i,j=1,2,\cdots$，都有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j) \quad (3.2.4)$$

则称X与Y是**相互独立**。

在例 3.2.3 中的有放回情形下，X与Y是相互独立的；在不放回情形下，X与Y是不独立的。

例 3.2.4 试判断例 3.2.2 中的 X 与 Y 是否独立。

解 因为

$$P(X=m,Y=n)=C_{m-1}^{1}p^{3}q^{n-3}\neq C_{m-1}^{1}p^{2}q^{m-2}\cdot C_{n-1}^{2}p^{3}q^{n-3}=P(X=m)P(Y=n),$$

所以 X 与 Y 是不独立的。

3.2.3 二维离散随机变量的条件分布列

在第一章中，我们曾经研究过两个事件的条件概率，同样地，我们可以定义二维离散随机变量的条件概率。

定义 设 (X,Y) 为二维离散随机变量，X 与 Y 的可能取值分别为 $x_1,x_2,\cdots$ 与 $y_1,y_2,\cdots$，如果对任意的 $i,j=1,2,\cdots$，称

$$p_{i|j}\overset{\Delta}{=}P(X=x_i\mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(Y=y_j)} \tag{3.2.5}$$

为已知 $\{Y=y_j\}$ 的条件下 X 的分布列，简称条件分布列。类似地定义已知 $\{X=x_i\}$ 的条件下 Y 的分布列为

$$p_{j|i}\overset{\Delta}{=}P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}\text{。} \tag{3.2.6}$$

例 3.2.5 试求例 3.2.2 中的 X 与 Y 的条件分布列。

解 已知 $\{Y=n\}$ 的条件下 X 的分布列为

$$P(X=m\mid Y=n)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(Y=n)}=\frac{C_{m-1}^{1}p^{3}q^{n-3}}{C_{n-1}^{2}p^{3}q^{n-3}}=\frac{C_{m-1}^{1}}{C_{n-1}^{2}},$$

其中 $n=3,4,\cdots;m=2,3,\cdots,n-1$。

已知 $\{X=m\}$ 的条件下 Y 的分布列为

$$P(Y=n\mid X=m)=\frac{P(X=m,Y=n)}{P(X=m)}=\frac{C_{m-1}^{1}p^{3}q^{n-3}}{C_{m-1}^{1}p^{2}q^{m-2}}=pq^{n-m-1},$$

其中 $n=3,4,\cdots;m=2,3,\cdots,n-1$。

例 3.2.6 设在某医院每天出生的婴儿总数 X 服从参数为 14 的泊松分布，其中每个初生婴儿为男婴的概率为 0.51，以 Y 表示每天在该医院出生的男婴个数。（1）求 (X,Y) 的联合分布列；（2）求 Y 的边际分布列。

解 （1）由题意知在已知$\{X=n\}$的条件下，男婴个数Y服从参数为n，0.51 的二项分布，所以

$$P(Y=m\,|\,X=n)=C_n^m 0.51^m 0.49^{n-m},\quad m=0,1,\cdots,n。$$

又$P(X=n)=\dfrac{14^n}{n!}e^{-14}$，$n=0,1,\cdots$，所以$(X,Y)$的联合分布列为

$$P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m\,|\,X=n)$$

$$=\frac{14^n}{n!}e^{-14}C_n^m 0.51^m 0.49^{n-m}$$

$$=\frac{7.14^m 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-14},$$

其中$n=0,1,\cdots;m=0,1,\cdots,n$。

（2）$P(Y=m)=\sum\limits_{n=m}^{\infty}P(X=n,Y=m)=\sum\limits_{n=m}^{\infty}\dfrac{7.14^m 6.86^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-14}$

$$=\frac{7.14^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{6.86^{n-m}}{(n-m)!}e^{-14}=\frac{7.14^m}{m!}e^{-7.14},\quad m=0,1,\cdots。$$

即Y服从参数为 7.14 的泊松分布.

本例中使用的等式

$$P(X=n,Y=m)=P(X=n)P(Y=m\,|\,X=n)$$

对于一般的二维离散随机变量可以写成

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j\,|\,X=x_i)。\qquad(3.2.7)$$

可以称之为二维离散随机变量的乘法公式。

数学家简介 莱昂哈德·欧拉（Leonhard Euler，1707 年 4 月 5 日～1783 年 9 月 18 日）是瑞士数学家和物理学家。被称为历史上最伟大的四位数学家之一，把微积分应用于物理学的先驱者之一。欧拉是有史以来最多遗产的数学家，他的全集共计 75 卷。欧拉实际上支配了 18 世纪的数学，对于当时的新发明微积分，他推导出了很多结果。在他生命的最后 7 年中，欧拉的双目完全失明，尽管如此，他还是以惊人的速度产出了生平一半的著作。

3.2.4 习题

1．一口袋中有四个球，它们依次标有数字 1,2,2,3. 从这袋中任取一球后，不放回袋中，再从袋中任取一球，设每次取球时，袋中每个球被取到的可能性相同. 以 X,Y 分别记第一，二次取得的球上面标有的数字，求 (X,Y) 的联合分布律及 $P(X=Y)$.

2．盒中装有 3 个黑球，2 个红球，2 个白球，从中任取 4 个，以 X 表示取到的黑球数，以 Y 表示取到的白球数，求 (X,Y) 的联合分布律和边际分布列。

3．将一个硬币抛掷 3 次，以 X 表示 3 次中出现正面的次数，以 Y 表示出现正面次数与反面次数之差的绝对值，求 (X,Y) 的联合分布律和边际分布列。

4．设 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	-1	0	1
0	0.1	0.2	α
1	β	0.1	0.2

且 $P(X+Y=1)=0.4$

（1）求 α,β；（2） $P(X+Y<1)$；（3） $P(X^2Y^2=1)$.

5．箱子中有 12 件产品，其中 2 件是次品，从中任取 2 次，每次取 1 件，定义随机变量 X，Y 如下：

$$X=\begin{cases}1, & 第1次取出的是次品,\\ 0, & 第1次取出的是正品;\end{cases} \qquad Y=\begin{cases}1, & 第2次取出的是次品,\\ 0, & 第2次取出的是正品.\end{cases}$$

试就下面两种情况（1）有放回抽取；（2）无放回抽取

写出 (X,Y) 的联合分布律和边际分布列，并判断 X,Y 是否独立？

6. 已知 (X,Y) 的联合分布律为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若事件$\{X=0\}$和$\{X+Y=1\}$互相独立，求a,b.

7. 袋中有五个号码 1，2，3，4，5，从中任取三个，记这三个号码中最小的号码为 X，最大的号码为 Y.

（1） 求 X 与 Y 的联合概率分布；

（2） X 与 Y 是否相互独立？

8. 设某班车起点站上客人数 X 服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$的泊松分布，每位乘客在中途下车的概率为 p（$0<p<1$），且中途下车与否相互独立，以 Y 表示在中途下车的人数，求：（1）在发车时有 n 个乘客的条件下，中途有 m 人下车的概率；（2）二维随机变量（X，Y）的概率分布.

§3.3 二维连续型随机变量

一维连续型随机变量的概率特性是由它的密度函数来决定的，类似地二维连续型随机变量的概率特性是由它的联合密度来决定的.

定义 3.3.1 设$F(x,y)$为二维随机变量(X,Y)的联合分布函数，若存在非负函数$f(x,y)$，使得对于任意的$x,y\in R$，有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu\ , \qquad (3.3.1)$$

则称(X,Y)为**二维连续型随机变量**，并称$f(x,y)$为(X,Y)的**联合概率密度函数**，简称**联合密度**（或**概率密度**）.

联合密度 $f(x,y)$具有以下性质：

（1） 非负性 $f(x,y)\geq 0$ （$x,y\in R$）；

（2） 归一性 $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=1$. （3.3.2）

由联合密度函数的定义还可以得到如下性质：

（1）$F(x,y)$是二元连续函数；

（2）在 $f(x,y)$的连续点(x,y)处有

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}=f(x,y)\ ; \qquad (3.3.3)$$

注：(1) 二维连续随机变量的定义与二维离散随机变量的定义截然不同。如果X 与Y 都是一维离散随机变量，那么(X,Y)就是二维离散随机变量；但是，如果X 与Y 都是一

维连续随机变量，那么(X,Y)不一定是二维连续随机变量，因为在定义中要求(X,Y)的联合分布函数$F(x,y)$在$f(x,y)$的连续点处混合偏导存在，然而，对于任意两个一维连续随机变量X与Y，我们甚至于都不能保证$F(x,y)$是二维连续的。反之，如果(X,Y)是二维连续随机变量，那么X与Y肯定都是一维连续随机变量，因为由第一节的知识，我们知道X的分布函数为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{\infty}f(u,y)dydu$$

所以X具有密度函数（称之为X的**边际密度函数**）

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy，\quad x\in R。\qquad（3.3.4）$$

同样地可以得到Y的密度函数（称之为Y的**边际密度函数**）为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy\quad ,y\in R。\qquad（3.3.5）$$

所以X与Y必为一维连续随机变量。

（2）我们曾经将一维连续随机变量的密度函数比喻成质量线密度，那么二维连续随机变量的联合密度就相当于质量面密度。

（3）由于一维连续随机变量X为直线R上的一个随机点，所以在求X的概率的时候都是求X落在某个区间(a,b)内的概率，就是在区间(a,b)上关于X的密度函数$f(x)$进行一重积分

$$P(a<X<b)=\int_a^b f(x)dx$$

现在二维连续随机变量(X,Y)作为平面R^2上的一个二维的随机点，所以今后在求(X,Y)的概率的时候都是求(X,Y)落在某个平面区域G中的概率，这个概率当然应该是在区域G上关于(X,Y)的联合密度函数$f(x,y)$进行二重积分

$$P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)dxdy。\qquad（3.3.6）$$

这个公式非常重要，可以说，它是所有二维连续随机变量求概率的唯一的公式。

例 3.3.1 设二维连续随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Axy, & 0<x<1, x^2<y<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

其中常数$A<0$。试求：

（1）常数A；（2）X与Y的边际密度函数$f_X(x)$与$f_Y(y)$；（3）$P(X>Y)$。

解 将(X,Y)的联合密度函数的非零区域画在平面R^2上。

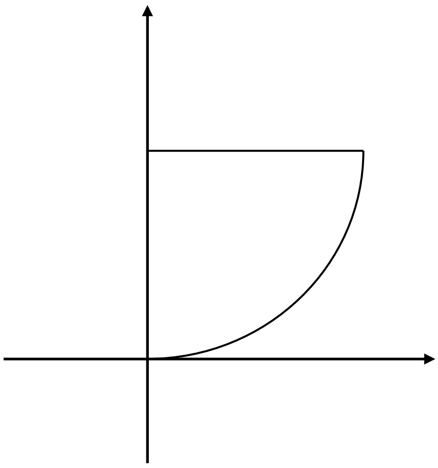


图 3-3

（1）利用联合密度函数的归一性可得

$$\int_0^1\int_{x^2}^1 Axydxdy=1,$$

由于$\int_0^1\int_{x^2}^1 xydxdy=\frac{1}{6}$，所有$A=6$。

（2）随机变量X的取值范围是[0,1]，所有当$0<x<1$时，

$$f_X(x)=\int_{x^2}^1 6xydy=3(x-x^5)。$$

于是

$$f_X(x)=\begin{cases} 3(x-x^5), & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}。$$

随机变量Y的取值范围是[0,1]，所有当$0<y<1$时，

$$f_Y(y)=\int_0^{\sqrt{y}} 6xydx=3y^2,$$

于是 $f_Y(y)=\begin{cases}3y^5, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$。

（3）$\{X>Y\}$表示的区域应该是曲线$y=x^2$与直线$y=x$围成的区域，所以

$$P(X>Y)=\int_0^1\int_{x^2}^{x}6xydxdy=\int_0^1 3x(x^2-x^4)dx=\frac{3}{20}。$$

下面介绍两个常用的二维连续分布：

1．二维均匀分布

设D为平面有界闭区域，其面积为S_D，若密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\notin D,\end{cases} \tag{3.3.7}$$

则称二维随机变量(X,Y)服从D上的二维**均匀分布**.

若G为D的子区域，面积为S_G，则由二维随机变量求概率的公式得

$$P((X,Y)\in G)=\iint_G f(x,y)d\sigma=\frac{1}{S_D}\iint_G d\sigma=\frac{S_G}{S_D}$$

这表明二维均匀分布随机变量(X,Y)落入D内任意子区域G内的概率，只与G的面积有关，与G的形状及位置没有关系，这就是“均匀”一词的体现，与第一章介绍的几何概型是一致的.

例 3.3.2 设平面区域D是由曲线$y=\dfrac{1}{x^2}$及直线$y=0$，$x=1$所围成，二维随机变量(X,Y)在D上服从均匀分布. 求（1）(X,Y)的联合密度函数；（2）X与Y的边际密度函数$f_X(x)$与$f_Y(y)$.

解 平面区域D如图 3-4 所示.

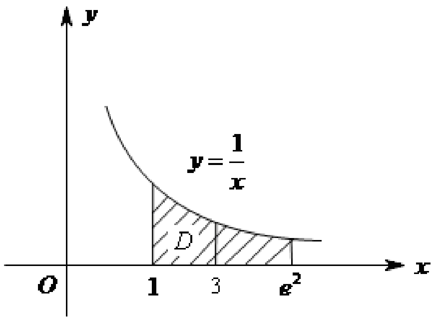


图 3-4

（1）首先计算出D的面积$S_D=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=1$.

则随机变量(X,Y)的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in D\\ 0, & (x,y)\notin D\end{cases}。$$

（2）随机变量X的取值范围是$[1,+\infty]$，所有当$1<x<\infty$时，

$$f_X(x)=\int_0^{x^{-2}}1dy=\frac{1}{x^2},$$

于是

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^2}, & 1<x\\ 0, & 其它\end{cases}。$$

随机变量Y的取值范围是$[0,1]$，所有当$0<y<1$时，

$$f_Y(y)=\int_1^{\frac{1}{\sqrt{y}}}1dx=\frac{1}{\sqrt{y}}-1,$$

于是 $f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{y}}-1, & 0<y<1\\ 0, & 其它\end{cases}$。

2．二维正态分布

若随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\cdot$$
$$[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2{}^2}]\} \qquad (x,y\in R) \tag{3.3.8}$$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$的**二维正态分布**（其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$为常数，且有$\sigma_1>0$，$\sigma_2>0$，$|\rho|<1$）.记为$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$。

特殊地，当$\mu_1=\mu_2=0$，$\sigma_1=\sigma_2=1$时

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x^2-2\rho xy+y^2)]；$$

更特殊地，当$\rho=0$时，则有

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp[-\frac{1}{2}(x^2+y^2)].$$

正态分布是最常见，也是最有用的分布，在后续课程中有重要的应用.

例 3.3.3 求二维正态分布的边缘分布.

解 设随机变量(X,Y)服从二维正态分布，即$(X,Y)\sim N(\mu_1.\mu_2.\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，

利用变量替换$t=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$，得

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}$$
$$[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)t}{\sigma_1}+t^2]dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}$$
$$[(1-\rho^2+\rho^2)\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1{}^2}-\frac{2\rho(x-\mu_1)t}{\sigma_1}+t^2]dt$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1{}^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{1-\rho^2}}\cdot$$
$$\exp\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}[t-\frac{\rho(x-\mu_1)}{\sigma_1}]^2\}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}.\ (x\in R)$$

类似地，

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.\ (y\in R)$$

这表明 $X\sim N(\mu_1.\sigma_1^2)$，　$Y\sim N(\mu_2.\sigma_2^2)$，即二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布. 此外还注意到，两个边缘密度都不含参数 ρ，这意味着具有相同参数 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2$，但是 ρ 值不同的二维正态分布具有相同的边缘分布函数. 这一事实再一次说明，对二维连续型随机变量而言，仅有 X 和 Y 的边缘分布一般不能决定 X 和 Y 联合分布.

3.3.2 二维连续随机变量的独立性

下面是二维连续随机变量相互独立的定义.

定义 3.3.2　设 $F(x,y)$ 及 $F_X(x)$，$F_Y(y)$ 分别是二维连续随机变量 (X,Y) 的分布函数和边缘分布函数，若对于所有的 x,y 有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y),\tag{3.3.9}$$

或

$$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)\tag{3.3.10}$$

则称**随机变量 X 和 Y 是相互独立的**.

易知式（3.3.9）与（3.3.10）是等价的。

例 3.3.1 与例 3.3.2 中的 X 与 Y 都是不独立的。对于二维正态分布，利用例 3.3.3 的结果可得如下的结论。

性质 3.3.1 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1.\mu_2.\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，则 X 与 Y 相互独立的充要条件是 $\rho=0$。

例 3.3.4 设 X 和 Y 是两个相互独立的随机变量，X 在 $(0,1)$ 上服从均匀分布，Y 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布。求关于 a 的二次方程 $a^2+2Xa+Y=0$ 有实根的概率.

解　$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$，又 X 与 Y 相互独立，故 X 与 Y 的联合密度函数为

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}, & 0<x<1, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因{方程有实根}={判别式$\Delta^2=4X^2-4Y\ge 0$}=$\{X^2\ge Y\}$，所求概率为随机点落入图 3-5 所示阴影部分的概率.

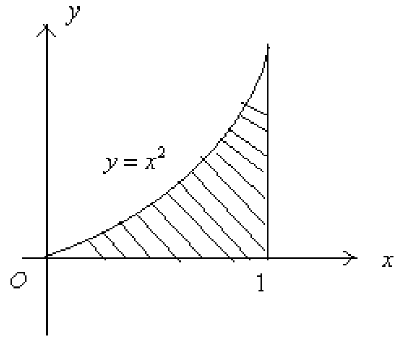


图 3-5

则 $P(\text{方程有实根})=P(Y\le X^2)=\iint\limits_{y\le x^2} f(x,y)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}\frac{1}{2}e^{-\frac{y}{2}}dy$

$$=\int_0^1 dx(-e^{-\frac{y}{2}})\Big|_0^{x^2}=\int_0^1(1-e^{-\frac{x^2}{2}})dx$$

$$=1-\int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}dx=1-\sqrt{2\pi}(\Phi(1)-\Phi(0))\text{。}$$

3.3.3 二维连续随机变量的条件密度

在上一节中，我们曾经讨论过二维离散随机变量的条件分布列，那么对于二维连续随机变量，我们是否可以类似地定义条件密度函数呢？大家知道，如果(X,Y)是二维连续随机变量，X和Y都是一维连续随机变量，那么对任意的x,y，有

$$P(X=x)=P(Y=y)=0$$

所以$\dfrac{P(X=x,Y=y)}{P(X=x)}$与$\dfrac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)}$毫无意义！注意到这两个式子都是 0 比 0，所以我们可以借用罗比达法则的思想，先来定义条件分布函数。

定义 3.3.3 设(X,Y)是二维连续随机变量，对$x,y\in R$，称

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P(X\le x,y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P(X\le x,y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)}{P(y-\varepsilon<Y\le y+\varepsilon)}$$

为给定$Y=y$的条件下X的**条件分布函数**。类似地，称

$$F_{Y|X}(y|x)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}P(Y\le y,x-\varepsilon<X\le x+\varepsilon)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{P(Y\le y,x-\varepsilon<X\le x+\varepsilon)}{P(x-\varepsilon<X\le x+\varepsilon)}$$

为给定$X=x$的条件下Y的**条件分布函数**。

利用上述定义，可知

$$F_{X|Y}(x|y)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{F(x,y+\varepsilon)-F(x,y-\varepsilon)}{F_Y(y+\varepsilon)-F_Y(y-\varepsilon)}=\frac{\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\dfrac{\partial F_Y(y)}{\partial y}}$$

$$=\frac{1}{f_Y(y)}\int_{-\infty}^{x}f(u,y)du=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(u,y)}{f_Y(y)}du\text{。}$$

类似地可得

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(u,y)}{f_X(x)}du\text{。}$$

于是，按照密度函数的定义，我们可以给出条件密度的定义。

定义 3.3.4 设二维连续随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)$，对于给定的y，如果$f_Y(y)>0$，则称

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\tag{3.3.11}$$

为给定$Y=y$的条件下X的**条件密度函数;**

对于给定的x，如果$f_X(x)>0$，则称

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\tag{3.3.12}$$

为给定$X=x$的条件下Y的**条件密度函数.**

给定$Y=a$的条件下X的条件密度函数$f_{X|Y}(x|a)$可以理解为将二维随机点(X,Y)限制在平行于x轴的直线$y=a$上之后，这条直线上的质量线密度。

例 3.3.5 已知二维连续随机变量(X,Y)的联合密度为$f(x,y)=\begin{cases}9e^{-3y}, & 0<x<y\\ 0, & 其它\end{cases}$，试求条件密度$f_{X|Y}(x|y)$与$f_{Y|X}(y|x)$。

解 (X,Y)的联合密度的非零区域为第一象限内分角线的上方如图 3-6.

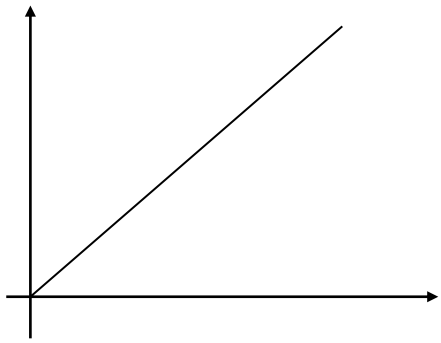


图 3-6

容易求的X的边际密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & 0<x\\ 0, & x\le 0\end{cases},$$

Y的边际密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}9ye^{-3y}, & 0<y\\ 0, & y\le 0\end{cases}。$$

所以

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1}{y}, & 0<x<y\\ 0, & 其它\end{cases};$$

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}3e^{-3(y-x)}, & 0<x<y\\ 0, & 其它\end{cases}。$$

其中，在给定$Y=y$的条件下X服从区间$[0,y]$上的均匀分布。

例 3.3.6 已知连续随机变量$X\sim e(\theta)$，且对$x>0$，当$X=x$时，$Y\sim e(x)$。设$a>0$，求概率$P(XY<a)$。

解 为了求概率$P(XY<a)$，必须求(X,Y)的联合密度$f(x,y)$。由题意知给定$X=x$时，Y的条件密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} xe^{-xy}, & y>0 \\ 0, & y\le 0 \end{cases},$$

又 $f_X(x)=\begin{cases} \theta e^{-\theta x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$，所以 (X,Y) 的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases} \theta xe^{-\theta x-xy}, & x,y>0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases},$$

概率 $P(XY<a)$ 的积分区域就是第一象限中双曲线 $xy=a$ 的下方，故

$$P(XY<a)=\int_0^{\infty}dx\int_0^{\frac{a}{x}}\theta xe^{-\theta x-xy}dy=\int_0^{\infty}\theta e^{-\theta x}dx\int_0^{\frac{a}{x}}xe^{-xy}dy$$

$$=\int_0^{\infty}\theta e^{-\theta x}dx(1-e^{-a})=1-e^{-a}\text{。}$$

本例中出现的公式

$$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x) \qquad (3.3.13)$$

称为二维连续随机变量的乘法公式。

利用例 3.3.3，读者可以证明，如果 $(X,Y)\sim N(\mu_1.\mu_2.\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，那么

在给定 $Y=y$ 的条件下 X 服从正态分布 $N(\mu_1+\rho\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2))$，

在给定 $X=x$ 的条件下 Y 服从正态分布 $N(\mu_2+\rho\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2))$。

数学家简介 维纳 (Norbert Wiener，1894-1964)，美国数学家，控制论的创始人。维纳在其 50 年的科学生涯中，先后涉足哲学、数学、物理学和工程学，最后转向生物学，在各个领域中都取得了丰硕成果，称得上是恩格斯颂扬过的、本世纪多才多艺和学识渊博的科学巨人。他一生发表论文 240 多篇，著作 14 本。由他首先研究的一类随机过程—维纳过程至今仍然是概率论的核心问题。

3.3.4 习题

1．设 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} ke^{-2x-y}, & x>0,y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（1）求常数 k；（2）$P(Y\le X)$；（3）$P(X+Y\le 1)$；

（4）$F(x,y)$；（5）$P(Y=X)$.

2.设二维随机变量（X，Y）的概率密度为

$$f（x，y）=\begin{cases} 4.8y(2-x), & 0\le x\le 1, 0\le y\le x, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求边缘概率密度.

3．设 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} c(R-\sqrt{x^2+y^2}), & x^2+y^2<R^2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$

（1）求常数 c；（2）求 (X,Y) 落在圆 $x^2+y^2\le r^2(0<r<R)$ 内的概率.

4. 已知 (X,Y) 在 $D=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\right\}$ 上服从均匀分布

（1）　求 (X,Y) 的密度函数；（2）$P(X+Y\le 1)$；（3）X 与 Y 是否独立？

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且均服从区间[0,3]上的均匀分布，求 $P(\max\{X,Y\}<1)$.

6．设随机变量 X,Y 相互独立，X 服从 $[0,0.2]$ 上的均匀分布，Y 服从参数为5的指数分布，求 (X,Y) 的联合密度函数及 $P(X\ge Y)$.

7.设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{2x^2y}, & 1<x<\infty, \dfrac{1}{x}<y<x \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{X|Y}(x\,|\,y)$ 及 $f_{Y|X}(y\,|\,x)$.

§3.4 二维随机变量函数的分布

设(X,Y)为二维随机变量，$g(x,y)$为一个二元函数，由此可得到二维随机变量(X,Y)的函数 $Z=g(X,Y)$，这是一个一维随机变量. 本节讨论二维随机变量函数的分布问题，即已知(X,Y)的联合分布，如何函数$Z=g(X,Y)$的分布的问题。首先讨论(X,Y)为二维离散随机变量的情形.

3.4.1 二维离散随机变量函数的分布

例 3.4.1（泊松分布的可加性） 已知X与Y相互独立，且分别服从参数为λ_1和λ_2的泊松分布. 证明：$Z=X+Y$服从参数为$\lambda_1+\lambda_2$的泊松分布。.

证明 $Z=X+Y$的可能取值为$0,1,2,\cdots$. 对任何非负整数k，有

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^{\,i}}{i!}e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_2^{\,k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda_2}=\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^{\,i}\lambda_2^{\,k-i}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)},$$

即

$$Z=X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2).$$

例 3.4.2 已知X与Y相互独立，且都服从参数为p的几何分布. 求$Z=X+Y$的分布列。

解 $Z=X+Y$的可能取值为$2,3,\cdots$. 对任何非负整数$k\ge 2$，有

$$P(Z=k)=P(X+Y=k)=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i,Y=k-i)$$

$$=\sum_{i=1}^{k-1}P(X=i)P(Y=k-i)=\sum_{i=1}^{k-1}p(1-p)^{i-1}p(1-p)^{k-i-1}$$

$$=p^2\sum_{i=1}^{k-1}(1-p)^{k-2}=(k-1)p^2(1-p)^{k-2}。$$

3.4.2 二维连续随机变量函数的分布

设(X,Y)为二维连续型随机变量，其联合密度函数为$f(x,y)$， $g(x,y)$是一个已知的连续函数，由此得到的二维随机变量$Z=g(X,Y)$仍是连续型的随机变量. 为求其密度函数 $f_Z(z)$，可先求Z的分布函数$F_Z(z)$，然后对$F_Z(z)$求导数，则得到随机变量Z的密度函数 $f_Z(z)=F_Z'(z)$。

一般地Z的分布函数为

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)=P((X,Y)\in D_z)=\iint_{D_z} f(x,y)dxdy \qquad (3.4.1)$$

其中区域$D_z=\{(x,y)\,|\,g(x,y)\le z\}$，然后对$F_Z(z)$求导就可得随机变量$Z$的密度函数。

从上面的推导过程中可以看到：理论上显然可以计算任意的$Z=g(X,Y)$的密度函数。一定要先求Z的取值范围，但最关键的是要在密度函数$f(x,y)$的非零区域中去找准区域 $D_z=\{(x,y)\,|\,g(x,y)\le z\}$.

例 3.4.3 设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim e(\alpha),Y\sim e(\beta)$。试求下列随机变量的密度函数

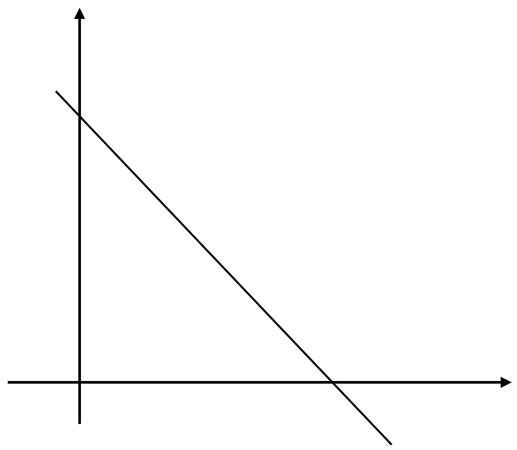
（1） $Z_1=X+Y$；（2） $Z_2=\dfrac{Y}{X}$；（3） $Z_2=\dfrac{Y}{X+Y}$。

解 因为X与Y相互独立，所以(X,Y)的联合密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\alpha\beta e^{-\alpha x-\beta y}, & x>0,y>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}。$$

（1）显然Z_1的取值范围为$[0,+\infty)$，所以，

当$z<0$时， $F_{Z_1}(z)=0$；



当 $z \geq 0$ 时，

$F_{Z_1}(z) = P(Z_1 \leq z) = P(X + Y \leq z)$ （积分区域为第一象限中直线 $x + y = z$ 的下方）

$$= \int_0^z dx \int_0^{z-x} \alpha\beta e^{-\alpha x - \beta y} dy$$

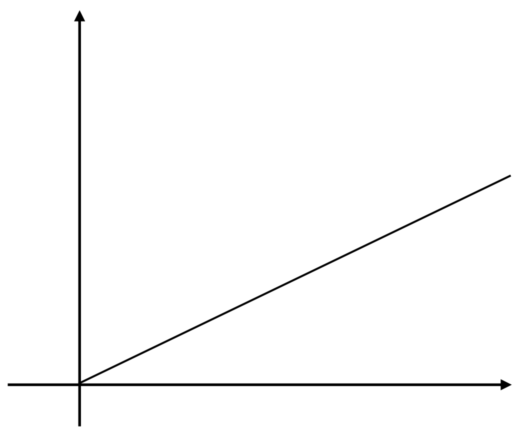
$$= 1 - e^{-\alpha z} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta}(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z})$$ 。

所以

$$f_{Z_1}(z) = \begin{cases} \dfrac{\alpha\beta}{\alpha - \beta}(e^{-\beta z} - e^{-\alpha z}), & z \geq 0 \\ 0, & z < 0 \end{cases}$$ 。

（2） Z_2 的取值范围为 $[0,+\infty)$，所以，

当 $z < 0$ 时， $F_{Z_2}(z) = 0$；



当 $z \geq 0$ 时，

$F_{Z_2}(z) = P(Z_2 \leq z) = P(\dfrac{Y}{X} \leq z)$ （积分区域为第一象限中直线 $y = zx$ 的下方）

$$=\int_0^{\infty}dy\int_{\frac{y}{z}}^{\infty}\alpha\beta e^{-\alpha x-\beta y}dx=\int_0^{\infty}\beta e^{-\beta y}dy\int_{\frac{y}{z}}^{\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\beta e^{-\beta y}dye^{-\alpha\frac{y}{z}}=\int_0^{\infty}\beta e^{-y(\beta+\frac{\alpha}{z})}dy$$

$$=\frac{\beta z}{\alpha+\beta z}。$$

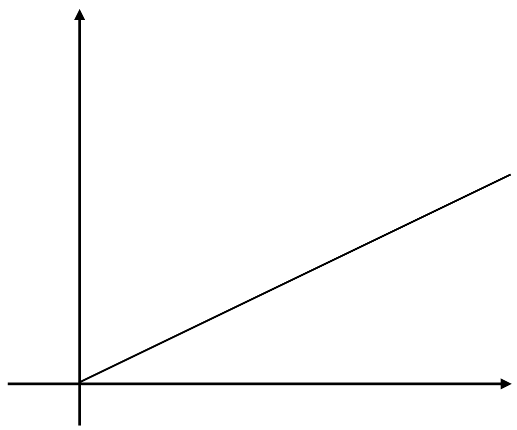
所以

$$f_{Z_2}(z)=\begin{cases}\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta z)^2}, & z\ge 0\\ 0, & z<0\end{cases}。$$

（3） Z_3的取值范围为$[0,1]$，所以，

当$z<0$时， $F_{Z_3}(z)=0$；

当$z\ge 1$时， $F_{Z_3}(z)=1$；



当$0\le z<1$时，

$F_{Z_3}(z)=P(Z_3\le z)=P(\frac{Y}{X+Y}\le z)$ （积分区域为第一象限中直线$y=\frac{z}{1-z}x$的下方）

$$=\int_0^{\infty}dy\int_{\frac{(1-z)y}{z}}^{\infty}\alpha\beta e^{-\alpha x-\beta y}dx=\int_0^{\infty}\beta e^{-\beta y}dy\int_{\frac{(1-z)y}{z}}^{\infty}\alpha e^{-\alpha x}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\beta e^{-\beta y}dye^{-\alpha\frac{(1-z)y}{z}}=\int_0^{\infty}\beta e^{-y(\beta+\alpha\frac{1-z}{z})}dy$$

$$=\frac{\beta z}{\beta z+\alpha(1-z)}。$$

所以

$$f_{Z_3}(z)=\begin{cases}\dfrac{\alpha\beta}{(\beta z+\alpha(1-z))^2}, & 0\le z<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}。$$

例 3.4.4 设二维随机变量(X,Y)服从区域D上的均匀分布，其中

$$D=\{(x,y)\,|\,0<x<2,0<y<2\}$$

求 $Z=X-Y$ 的分布函数及密度函数.

解 (X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 0<x<2,0<y<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

因为$Z=X-Y$，所以Z的取值范围为$[-2,2]$，所以

当$z<-2$时，$F_Z(z)=0$；（图 a）

当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=1$，（图 d）

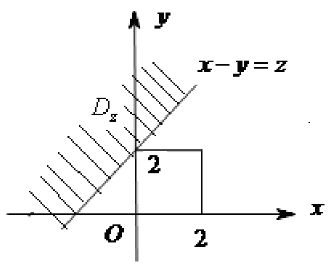


图 a

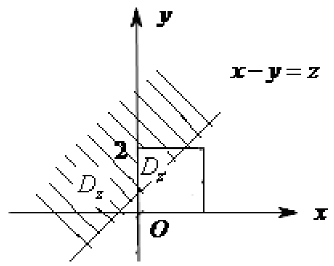


图 b

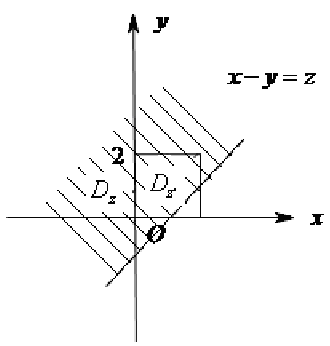


图 c

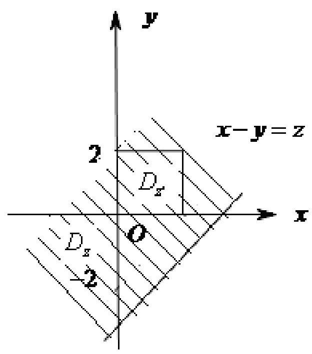


图 d

图 3-7

当$-2\le z<0$时，积分区域见图3-7（b），

$$F_Z(z)=\iint_{D_z}\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}S_{D_{z'}}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}(2+z)^2=\frac{1}{8}(2+z)^2\text{；}$$

当$0\le z<2$时，积分区域见图 3-7（c），

$$F_Z(z)=\iint_{D_z}\frac{1}{4}dxdy=\frac{1}{4}S_{D_{z'}}=\frac{1}{4}[4-\frac{1}{2}(2-z)^2]=1-\frac{1}{8}(2-z)^2\text{；}$$

于是

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<-2,\\ \frac{1}{8}(2+z)^2, & -2\le z<0,\\ 1-\frac{1}{8}(2-z)^2, & 0\le z<2,\\ 1, & z\ge 2.\end{cases}$$

所以

$$f_Z(z)=F_Z{}'(z)=\begin{cases}\frac{1}{4}(2+z), & -2<z<0,\\ \frac{1}{4}(2-z), & 0\le z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.4.5 设(X,Y)服从区域$\{(x,y):0<x<1,0<y<2-2x\}$上的二维均匀分布，求$Z=Y+2X$的密度函数。

解 (X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 0<x<1,0<y<2-2x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}\text{。}$$

Z的取值范围为[0,2]，所以，

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$；

当$z\ge 2$时，$F_Z(z)=1$；

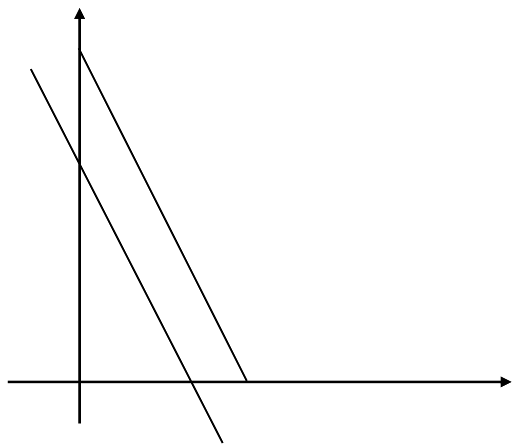


图 3-8

当 $0 \le z < 2$ 时，

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(Y + 2X \le z)$$ （积分区域为第一象限中直线 $y + 2x = z$ 的下方）

$$= \frac{z^2}{4}。$$

所以

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{z}{2}, & 0 \le z < 2 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

例 3.4.6 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且都服从正态分布 $N(0, \sigma^2)$，求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的密度函数。

解 由题知 (X, Y) 的联合密度为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\{-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\}, x, y \in R$$

显然 Z 的取值范围为 $[0, +\infty)$，所以，

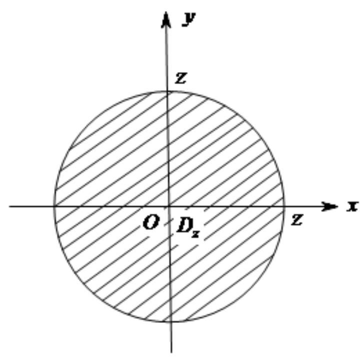


图 3-9

当 $z<0$ 时，$F_Z(z)=0$；　（积分区域为园 $x^2+y^2=z^2$ 的内部）

当 $z\ge 0$ 时，$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(X^2+Y^2\le z^2)$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2<z^2}\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\}dxdy$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^z\frac{r}{2\pi\sigma^2}\exp\{-\frac{r^2}{2\sigma^2}\}dr$$

$$=1-\exp\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\}。$$

所以

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{z}{\sigma^2}\exp\{-\dfrac{z^2}{2\sigma^2}\}, & 0\le z\\ 0, & z<0\end{cases}。$$

通常称此分布为瑞利分布。

3.4.3 极大极小分布

例 3.4.7 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 X_i 的分布函数为 $F_{X_i}(x)$，$i=1,2,\cdots$。令 $Y=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$，$Z=\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$。那么有

（1）Y 的分布函数为 $F_{\max}(x)=\prod\limits_{i=1}^{n}F_{X_i}(x)$；

（2）Z 的分布函数为 $F_{\min}(x)=1-\prod\limits_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(x))$。

证明

$$F_{\max}(x)=P(Y\le x)=P(\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}\le x)$$

$$=P(X_1\le x,X_2\le x,\cdots,X_n\le x)$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P(X_i\le x)=\prod_{i=1}^{n}F_{X_i}(x)。$$

$$F_{\min}(x)=1-P(Z>x)=1-P(\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}>x)$$

$$=1-P(X_1>x,X_2>x,\cdots,X_n>x)$$

$$=1-\prod_{i=1}^{n}P(X_i > x)=1-\prod_{i=1}^{n}(1-F_{X_i}(x)) 。$$

特别地，如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 具有相同的分布函数 $F(x)$，则

$$F_{\max}(x)=F(x)^n ；$$

$$F_{\min}(x)=1-(1-F(x))^n 。$$

例 3.4.8 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且 X_i 都服从区间 $[0,1]$ 的均匀分布，求 $Y=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 与 $Z=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的密度函数。

解　X_i 的分布函数均为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}，$$

所以由例 3.4.7 知

$$F_{\max}(x)=F(x)^n=\begin{cases}0, & x<0\\ x^n, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}，$$

$$F_{\min}(x)=1-(1-F(x))^n=\begin{cases}0, & x<0\\ 1-(1-x)^n, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}。$$

得

$$F_{\max}(x)=\begin{cases}nx^{n-1}, & 0\le x<1\\ 0, & 其它\end{cases}，$$

$$F_{\min}(x)=\begin{cases}n(1-x)^{n-1}, & 0\le x<1\\ 0, & 其它\end{cases}。$$

3.4.4 习题

1．设 (X,Y) 的联合分布律为

$X \backslash Y$	-1	1	2

-1	0.1	0.1	0.1
2	0.2	0.3	0.2

（1） 求 $X+2Y$ 的分布律；

（2） 求 X^2Y 的分布律；

（3） 求 $\min(X,Y)$ 的分布律.

2. 设 (X,Y) 的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0\le x\le 1, y\ge 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

（1）问 X,Y 是否独立?

（2）求 $Z=2X+Y$ 的密度函数 $f_Z(z)$；

（3）求 $P(Z>3)$.

3. 设 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布，Y 服从参数 $\lambda=1$ 的指数分布，X,Y 相互独立，

$Z=X+Y$，求 Z 的概率密度函数.

4. 设 X 和 Y 分别表示两个不同电子器件的寿命（以小时计），并设 X 和 Y 相互独立，且服从同一分布，其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1000}{x^2}, & x>1000, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度.

5. 设某种型号的电子管的寿命（以小时计）近似地服从 N（160，20^2）分布. 随机地选取 4 只，求其中至少有一只寿命小于 180 的概率.

6. 已知 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 λ_1 和 λ_2 的泊松分布，求

$P(X=k\mid X+Y=n)$。其中 $k\le n$。

§3.5 综合例题

例 3.5.1 设随机变量 X 与 Y 相互独立，且分别服从参数为 p_1 与 p_2 的几何分布，试求 $Z=\min\{X,Y\}$ 的分布列。

解 先求 $\{Z\geq n\}$ 的概率，其中 $n\geq 1$。

$$P(Z\geq n)=P(X\geq n,Y\geq n)=P(X\geq n)P(Y\geq n)$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}P(X=k)\sum_{k=n}^{\infty}P(Y=k)$$

$$=\sum_{k=n}^{\infty}p_1(1-p_1)^{k-1}\sum_{k=n}^{\infty}p_2(1-p_2)^{k-1}$$

$$=(1-p_1)^{n-1}(1-p_1)^{n-1}\text{。}$$

所以

$$P(Z=n)=P(Z\geq n)-P(Z\geq n+1)$$

$$=p(1-p)^{n-1}\text{。}$$

其中 $p=p_1+p_2-p_1p_2$。Z 也服从几何分布。

例 3.5.2 设离散随机变量 X 的分布列为 $P(X=i)=\dfrac{1}{3},\quad i=1,2,3$，连续随机变量 $Y\sim U(0,1)$，且 X 与 Y 相互独立。求 $Z=X+Y$ 的密度函数。

解 本题是一个离散随机变量加上一个连续随机变量的问题，处理方法与以往的方法都不一样。

由题可知 Z 的取值范围为 $[1,4]$，所以

当 $z<1$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $z\geq 4$ 时，$F_Z(z)=1$；

当 $1\leq z<4$ 时，

$$F_Z(z)=P(Z\leq z)=P(X+Y\leq z)$$

由于 X 的可能取值为 1,2,3，所以 $A_i=\{X=i\},i=1,2,3$ 为样本空间的一个划分，于是

对事件$\{X+Y\le z\}$用全概率公式可得

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\sum_{i=1}^{3}P(X=i)P(X+Y\le z\mid X=i)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}P(Y\le z-i\mid X=i)$$

$$=\frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3}P(Y\le z-i)$$

$$=\frac{1}{3}(F_Y(z-1)+F_Y(z-2)+F_Y(z-3))\text{。}$$

所以

$$f_Z(z)=\frac{1}{3}(f_Y(z-1)+f_Y(z-2)+f_Y(z-3))$$

注意到 $f_Y(y)=\begin{cases}1, & 0<y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，经过简单的讨论可得

$$f_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{3}, & 1<z<4\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

即Z服从区间$[1,4]$上的均匀分布。

一般地，可以证明一个离散随机变量与一个连续随机变量的和，在二者独立的情况下仍然是连续随机变量。这一点可能与许多人的感觉相反。

例 3.5.3 （正态分布的可加性）设随机变量X与Y相互独立，且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。则$Z=X+Y$服从正态分布$N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$。

证明 由于X与Y相互独立，所以联合密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\},x,y\in R$$

$Z=X+Y$的分布函数为

$$F_Z(z)=P(X+Y\le z)=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{z-x}f(x,y)dy,$$

所以$Z=X+Y$的密度函数为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}-\frac{(z-x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\}dx$$

令 $s=x-\mu_1, b=z-\mu_1-\mu_2$，则

$$\frac{(x-\mu_1)}{\sigma_1^2}+\frac{(z-x-\mu_2)}{\sigma_2^2}=\frac{s^2}{\sigma_1^2}+\frac{(b-s)^2}{\sigma_2^2}=\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}s^2-\frac{2bs}{\sigma_2^2}+\frac{b^2}{\sigma_2^2}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}s-\frac{\sigma_1 b}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\right)^2++\frac{b^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}$$

再令 $t=\frac{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}{\sigma_1\sigma_2}s-\frac{\sigma_1 b}{\sigma_2\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$，那么

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\{-\frac{b^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{t^2}{2}\}dt$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\exp\{-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}\}\text{。}$$

所以 Z 服从正态分布 $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$。

其实我们可以证明更加一般的结论。

（**正态分布的可加性续**）设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，且 $X_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n$，那么对于任意常数 a_i，$i=1,2,\cdots,n$ 及常数 c，有

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} a_i X_i+\mathrm{c}\sim N(\sum_{i=1}^{n}a_i\mu_i+c,\sum_{i=1}^{n}a_i^2\sigma_i^2)\text{。}$$

复习题

1. 设 X 与 Y 是相互独立的随机变量，且 $X\sim B(n,p)$ 与 $Y\sim B(m,p)$．证明 $X+Y\sim B(n+m,p)$。

2. 设 (X,Y) 的联合密度为 $f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(1+xy), & -1<x,y<1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，证明 X 与 Y 不独立，但是

X^2与Y^2独立。

3. 设(X,Y)的联合密度为$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\exp\{-\frac{x^2+y^2}{2}\}(1+\sin x\sin y), x,y\in R$，证明：

（1）X与Y都服从标准正态分布，但(X,Y)不是二维正态分布；

（2）X与Y不独立，但是$|X|$与$|Y|^2$独立。

4. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，且具有相同的分布函数$F(x)$与密度函数$f(x)$，试求$Z=\max\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}-\min\{X_1,X_2,\cdots,X_n\}$的密度函数。

5. 已知(X,Y)的联合分布列为

$$P(X=n,Y=m)=\frac{(p\lambda)^m(q\lambda)^{n-m}}{m!(n-m)!}e^{-\lambda},$$

其中$\lambda>0,q=1-p,n=0,1,2,\cdots,m=0,1,\cdots,n$。

（1）求$Z=X-Y$的分布列；（2）证明Y与Z相互独立。

6. 设$X\sim U(0,1)$，且对$0<x<1$，当$X=x$时，$Y\sim U(0,x)$，（1）求$P(X>2Y)$；（2）求$Z=X-Y$的密度函数。

7.设随机变量X和Y独立，其中X的概率分布为$X\sim\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，而$Y$的概率密度为$f(y)$，求随机变量$Z=Y-X^2$的概率密度。

8. 设随机变量X和Y独立，其中X的概率分布为$X\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0.3 & 0.7\end{pmatrix}$，而$Y\sim U(0,2)$。求随机变量$Z=XY$的分布函数。