

4) Poisson 分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad (k=0, 1, 2, \dots) \quad (\text{其中 } \lambda > 0 \text{ 为常数})$$

则称随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松 (Poisson) 分布. 记为: $X \sim P(\lambda)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

泊松分布的应用: 单位时间内出现的次数 (一天收到电话次数, 商场一天的顾客数), 稀有事件发生次数 (每年发生洪水次数), 显微镜下某区域中的细胞数量等。

单位时间次数
稀有事件
细胞

$$X \sim P(\lambda)$$

$$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

例 已知 $X \sim P(\lambda)$, 问 k 取何值时 $P(X = k)$ 最大? 最大值是多少?

$$P(X = k - 1) \leq P(X = k) \geq P(X = k + 1)$$

$$k \leq \lambda \quad \leftarrow \quad \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \leq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geq \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} \quad \rightarrow \quad \lambda \leq k + 1$$

$$\rightarrow \lambda - 1 \leq k \leq \lambda$$

总结 $\begin{cases} \text{当 } \lambda \text{ 为整数值时, } k = \lambda, \lambda - 1 \\ \text{当 } \lambda \text{ 为非整数值时, } k = \lceil \lambda \rceil \end{cases}$

Poisson 定理:

已知 $X_n \sim B(n, p_n)$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} np_n = \lambda, (\lambda > 0)$

$$\text{则有 } \lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

证明: 令 $np_n = \lambda_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \lambda$

$$\begin{aligned} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{\lambda_n^k}{k!} \bullet \frac{n}{n} \bullet \frac{n-1}{n} \cdots \cdots \bullet \frac{n-k+1}{n} \bullet \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} = e^{-\lambda}$$

$$\lambda = n \cdot p \quad np \leq 5$$

上述定理表明当 n 很大, p 很小 ($np \leq 5$) 时有如下近似式

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (\text{其中 } \lambda = np).$$

Poisson 定理表明: 当 n 很大, p 很小时, 二项分布 $B(n, p)$ 可以用泊松分布 $P(np)$ 来近似。此结论常用于二项分布概率的近似计算。

实验次数多.

p 很小, Poisson \approx 二项

例

在一个盒中装100支签，含10支好签，从盒中有放回随机取出30支。
求至少取到两只好签的概率。

解： 设取到好签的个数为 X ，则 $X \sim B(30, 0.1)$ $\Rightarrow P(3)$

$$P(X \geq 2) = 0.8 \Rightarrow 0.9$$

如果要是这个概率达到0.9，至少需加进多少只好签？

$$X \sim B(30, \frac{10+a}{100+a}) \Rightarrow P(\frac{30(10+a)}{100+a})$$

$$\lambda = n \cdot p$$

$$P(X \geq 2) \geq 0.9 \Rightarrow \lambda = \frac{30(10+a)}{100+a} \geq 4$$

$$a = 5 \leftarrow a \geq 4.13$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

5) 几何分布

如果随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p \quad (k=1, 2, \dots) \quad (\text{其中 } 0 < p < 1 \text{ 为常数})$$

则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布 (Geometric) . 记为: $X \sim G(p)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$

$$X \sim G(p)$$

首次成功

※ 独立重复试验中, 首次成功次数的分布律

在多次重复的伯努利试验中, 试验一直进行到某种结果第一次出现为止, 此时试验的总次数服从几何分布

例 某射手向一目标独立地进行连续射击, 每次命中的概率都是 p , 以 X 表示首次命中时的射击次数, 则 X 的分布律为:

$$P(X=k) = (1-p)^{k-1} p \quad (k=1, 2, \dots) \quad \text{也即 } X \sim G(p)$$

几何分布的无记忆性

设 X 服从参数为 p 的几何分布，则对任何正整数 m, n ，都有：

$$P(X > n + m | X > m) = P(X > n)$$

证明：已知 $X \sim G(p)$ X 的分布律为 $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$ ($k=1, 2, \dots$)

$$P(X > n + m | X > m) = P(X > n)$$

//

||

$$\frac{P(X > n + m)}{P(X > m)} = \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^m} = (1-p)^n$$

$$P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \frac{(1-p)^m}{1-(1-p)} = (1-p)^m$$

理解：

$\{X > n\}$ 表示首次命中时的射击次数 $X > n$ 次，也即前 n 次都没有命中

$P(X > n + m | X > m) = P(X > n)$ 表示在已知前 m 次没有命中的条件下，再射击 n 次也没有命中的概率等于前 n 次射击没有命中的概率，相当于前 m 次没有命中的信息被遗忘了。

例

某人向一个目标独立射击，每次击中的概率都是 0.6，直到第 3 次击中目标时就停止射击。设停止射击时的射击次数为 X ，求 X 的分布律

解

X 的可能取值为：3, 4, 5, ...



最后一定命中

$$P(X = k) = 0.6 C_{k-1}^2 0.6^2 (1-0.6)^{k-3} \quad k = 3, 4, 5, \dots$$

按照上述规则，假设这个人连续进行了 10 组实验，求恰有两组射击次数不超过 5 次的概率

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 0.6^3 + C_3^2 0.6^3 \times 0.4 + C_4^2 0.6^3 \times 0.4^2 = \mathbf{0.68} \end{aligned}$$

设 Y 表示 10 组实验中射击次数不超过 5 次的组数

则 $Y \sim B(10, 0.68)$

$$P(Y = k) = C_{10}^k 0.68^k (1-0.68)^{10-k} \quad (k = 0, 1, \dots, 10)$$

求出 $P(Y = 2)$ 即可