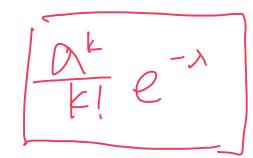
4) Poisson 分布 (本) (本) (本)



$$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$
 ( $k=0$ , 1, 2, ...) (其中 $\lambda > 0$ 为常数)

则称随机变量 X 服从参数为 $\lambda$ 的泊松(Poisson )分布.记为:  $X \sim P(\lambda)$ 

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

泊松分布的应用:单位时间内出现的次数(一天收到电话次数, 商场一天的顾客数),稀有事件发生次数(每年发生洪水次数), 显微镜下某区域中的细胞数量等。

例 已知  $X \sim P(\lambda)$ ,问 k 取何值时 P(X = k) 最大? 最大值是多少?

$$P(X = k - 1) \leq P(X = k) \geq P(X = k + 1)$$

$$k \leq \lambda \iff \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} \leq \frac{\lambda^{k}}{k!} e^{-\lambda} \geq \frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!} e^{-\lambda} \iff \lambda \leq k + 1$$

$$\implies \lambda - 1 \leq k \leq \lambda$$
总结
$$\begin{cases} \exists \lambda \text{ 为整数值时, } k = \lambda, \ \lambda - 1 \\ \exists \lambda \text{ 为非整数值时, } k = \lceil \lambda \rceil \end{cases}$$

## Poisson 定理:

已知 
$$X_n \sim B(n, p_n)$$
, 若  $\lim_{n \to \infty} np_n = \lambda, (\lambda > 0)$ 

则有  $\lim_{n \to \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ 
证明: 令  $np_n = \lambda_n$ ,  $\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \lambda$ 

$$C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} (\frac{\lambda_n}{n})^k (1 - \frac{\lambda_n}{n})^{n-k}$$

$$= \frac{\lambda_n^k}{k!} \bullet \frac{n}{n} \bullet \frac{n-1}{n} \cdots \bullet \frac{n-k+1}{n} \bullet (1 - \frac{\lambda_n}{n})^{n-k} \qquad \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad \lim_{n \to \infty} (1 - \frac{\lambda_n}{n})^{n-k} = e^{-\lambda}$$

## JEN. D UDEZ

上述定理表明当 n很大, p很小 $(np \le 5)$ 时有如下近似式

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}\qquad (\sharp \psi \lambda=np).$$

Poisson 定理表明: 当n很大,p很小时,二项分布 B(n, p) 可以用泊松分布 P(np) 来近似。 此结论常用于二项分 布概率的近似计算。

家路次数多。 P行外,Poisson 22二级



在一个盒中装**100**支签,含**10**支好签,从盒中有放回随机取出**30**支。 求至少取到两只好签的概率。

解: 设取到好签的个数为 
$$X$$
,则  $X \sim B$  (30, 0.1)  $\longrightarrow$   $P(3)$   $P(X \ge 2) = 0.8 \longrightarrow 0.9$ 

如果要是这个概率达到0.9,至少需加进多少只好签?

$$X \sim B(30, \frac{10+a}{100+a}) \longrightarrow P(\frac{30(10+a)}{100+a})$$

$$P(X \ge 2) \ge 0.9 \longrightarrow \lambda = \frac{30(10+a)}{100+a} \ge 4$$

$$\downarrow a = 5 \longrightarrow a \ge 4.13$$

$$\binom{n}{k} p^{k} (1-p)^{n-k} \approx \frac{\lambda^{k} e^{-\lambda}}{k!}$$

5) 几何分布 如果随机变量 X 的分布律为  $P(X=k) = (PP)^{k_1} \cdot P$ 

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$$
  $(k=1,2,...)$  (其中 $0 为常数)$ 

则称随机变量 X 服从参数为 p 的几何分布(Geometric). 记为:  $X \sim G(p)$ 

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} = p \frac{1}{1-(1-p)} = 1$$
独立重复试验中,首次成功次数的分布律

在多次重复的伯努利试验中,试验一直进行到某种结果第一次出现为 止,此时试验的总次数服从几何分布

例 某射手向一目标独立地进行连续射击,每次命中的概率都是p,以X表示首次命中时的射击次数,则X的分布律为:

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$$
  $(k=1,2,\dots)$  也即 $X \sim G(p)$ 

## 几何分布的无记忆性

设X服从参数为p的几何分布,则对任何正整数m,n,都有:

$$P(X > n + m/X > m) = P(X > n)$$

证明: 已知  $X \sim G(p)$  X 的分布律为  $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$   $(k=1,2,\cdots)$  P(X>n+m/X>m)=P(X>n)

$$\frac{P(X > n + m)}{P(X > m)} = \frac{(1-p)^{n+m}}{(1-p)^m} = (1-p)^n$$

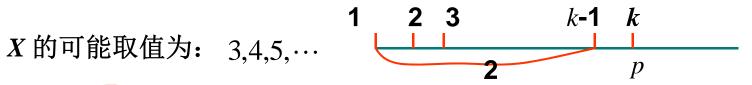
$$P(X > m) = \sum_{k=m+1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p = p \frac{(1-p)^m}{1-(1-p)} = (1-p)^m$$

## 理解:

 $\{X > n\}$  表示首次命中时的射击次数次数X > n次,也即前n次都没有命中P(X > n + m/X > m) = P(X > n) 表示在已知前m次没有命中的条件下,再射击n次也没有命中的概率等于前n次射击没有命中的概率,相当于前m次没有命中的信息被遗忘了。

例

某人向一个目标独立射击,每次击中的概率都是0.6,直到第3次击中 目标时就停止射击。设停止射击时的射击次数为 X, 求 X 的分布律



$$P(X = k) = 0.6 C_{k-1}^2 0.6^2 (1-0.6)^{k-3}$$
  $k = 3,4,5,\cdots$ 

P(X=k)=0.6  $C_{k-1}^20.6^2(1-0.6)^{k-3}$   $k=3,4,5,\cdots$  按照上述规则,假设这个人连续进行了**10**组实验,求恰有两组 射击次数不超过5次的概率

$$P(X \le 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$
$$= 0.6^{3} + C_{3}^{2} \cdot 0.6^{3} \times 0.4 + C_{4}^{2} \cdot 0.6^{3} \times 0.4^{2} = 0.68$$

设Y表示10组实验中射击次数不超过5次的组数

则 
$$Y \sim N(10,0.68)$$
 
$$P(Y=k) = C_{10}^{k} 0.68^{k} (1-0.68)^{10-k} \qquad (k=0, 1, \dots, n)$$
 求出 $P(Y=2)$ 則可