

第二章 随机变量及分布



随机变量函数的分布

随机变量的函数

设 X 为一个随机变量，其分布已知， $g(x)$ 为一个一元函数。

令 $Y=g(X)$ 。则 Y 也是一个随机变量。

1. 离散型随机变量的函数

若离散型随机变量 X 的分布列如下

$$X \sim \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots \end{bmatrix}$$

求随机变量函数 $Y=g(X)$ 的分布列。

设 $y_k = g(x_k)$ 。

(1) $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ 两两不等

$$P(Y = y_k) = P(g(X) = y_k) = P(X = x_k) = p_k$$

离散型随机变量函数的分布

相同的取值事件
概率求和

(2) $y_1, y_2, \dots, y_k, \dots$ 中有相等的:

$$P(Y = y_k) = P(g(X) = y_k)$$

$$= P\left\{ \bigcup_{g(x_{k_j})=y_k} \{X = x_{k_j}\} \right\} = \sum_{g(x_{k_j})=y_k} P(X = x_{k_j})$$

例1 设随机变量 X 具有以下的分布列。

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

试求 1. $Y = 2X + 1$ 的分布列.

2. $Y = (X - 1)^2$ 的分布列.

解: 1. $Y = 2X + 1$

					X	-1	0	1	2
Y	-1	1	3	5					
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4		0.2	0.3	0.1	0.4

2. $Y = (X-1)^2$

Y	4	1	0
p_k	0.2	0.3+0.4	0.1

$$\begin{aligned}
 P(Y = 1) &= P((X-1)^2 = 1) \\
 &= P(X = 0) + P(X = 2)
 \end{aligned}$$

总结:

X	x_1	x_2	\cdots	x_n	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_n	\cdots
$Y = g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	\cdots	$g(x_n)$	\cdots
p_k	p_1	p_2	\cdots	p_n	\cdots

取值重复，概率合并！

例2 已知

X	1	2	...	n	...
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$...	$\frac{1}{2^n}$...

$$P(X = n) = \frac{1}{2^n}$$

求 $Y = \sin\left(\frac{\pi}{2}X\right)$

$$1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, \dots$$

解 $Y: 0, 1, -1$

$$P(Y = 0) = \sum_{k=1}^{\infty} P(X = 2k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = 4k + 1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{4k+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{16}} = \frac{8}{15}$$

$$P(Y = -1) = \frac{2}{15}$$

二. 连续型随机变量函数的分布

设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$, $Y = g(X)$.

若 Y 也是连续型随机变量, 则求 Y 的密度函数一般步骤如下:

(1). 确定 $Y = g(X)$ 的取值范围, $Y \in D$

(2). 在 D 内求 Y 的分布函数

$$\begin{aligned} y \in D \text{ 时, } \quad F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) \\ &= P(X \in G) \quad G = \{x | g(x) \leq y\} \\ &= \int_{g(x) \leq y} f(x) dx \end{aligned}$$

$$(3) f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$$

$$\text{记住: } \mathcal{G}(a) = \int_{h(a)}^{g(a)} f(x, a) dx$$

$$\mathcal{G}'(a) = \int_{h(a)}^{g(a)} f'_a(x, a) dx + f(g(a), a)g'(a) - f(h(a), a)h'(a)$$

二. 连续型随机变量函数的分布

例 3 设随机变量 X 具有概率密度:

$$f_X(X) = \begin{cases} \frac{x}{8}, & 0 < x < 4, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases} \quad \text{试求 } Y=2X+8 \text{ 的概率密度.}$$

解: (1) Y 的取值范围为 $(8, 16)$

当 $y < 8$ 时, $F_Y(y) = 0$;

当 $y \geq 16$ 时, $F_Y(y) = 1$;

当 $8 \leq y < 16$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{2X + 8 \leq y\} = P\left\{X \leq \frac{y-8}{2}\right\} = \int_0^{\frac{y-8}{2}} \frac{x}{8} dx \\ &= \frac{(y-8)^2}{64} \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8 < y < 16, \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

例 4 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 求 $Y = X^2$ 的概率密度.

解: Y 的取值范围是 $Y \in [0, \infty)$

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$.

当 $y \geq 0$ 时,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\} \\ &= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\} = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}). \end{aligned}$$

当 $y < 0$ 时, $f_Y(y) = 0$.

当 $y \geq 0$ 时,

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d(F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}))}{dy}$$

$$e^x = \exp\{x\}$$

密度函数
在 y 处
的取值

$$\begin{aligned} &= \frac{dF_X(\sqrt{y})}{d\sqrt{y}} (\sqrt{y})' - \frac{dF_X(-\sqrt{y})}{d(-\sqrt{y})} (-\sqrt{y})' \\ &= \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}} \exp\left\{-\frac{(\sqrt{y}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} + \frac{1}{2\sigma\sqrt{2\pi y}} \exp\left\{-\frac{(\sqrt{y}+\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \end{aligned}$$

例 5 设随机变量 $X \sim U[-2,3]$ 求 $Y=X^2$ 的概率密度.

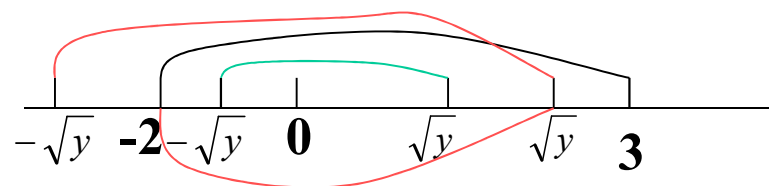
解: Y 的取值范围是 $Y \in [0,9]$

$$f_X(x) = \frac{1}{5} \quad x \in [-2,3]$$

当 $y < 0$ 时, $F_Y(y) = 0$.

当 $y \geq 9$ 时, $F_Y(y) = 1$.

当 $0 \leq y < 9$ 时,



$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{X^2 \leq y\}$$

$$= P\{-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}\}$$

$$= \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x) dx.$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5\sqrt{y}} & 0 \leq y < 4 \\ \frac{1}{10\sqrt{y}} & 4 \leq y < 9 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

$-\sqrt{y}$ 可能
小于 -2

当 $0 \leq y < 4$ 时, $F_Y(y) = \frac{2\sqrt{y}}{5}$

当 $4 \leq y < 9$ 时, $F_Y(y) = \frac{\sqrt{y} + 2}{5}$