第二章 随机变量及分布

随机变量函数的分布（二）

例 6 设随机变量 $X \sim U[0,\pi]$ 求 $Y=\sin X$ 的概率密度.

$$f_X(x)=\frac{1}{\pi} \quad x\in[0,\pi]$$

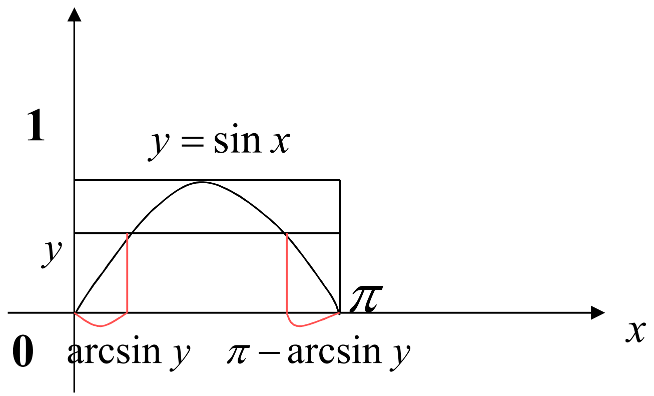
解：Y 的取值范围是 $Y\in[0,1]$

当$y<0$时，$F_Y(y)=0.$

当$y\geq 1$时，$F_Y(y)=1.$

当$0\leq y<1$时，

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=P\{Y\leq y\}\\&=P\{\sin X\leq y\}\\&=P\{0\leq X\leq \arcsin y\}\\&\quad+P\{\pi-\arcsin y\leq X\leq \pi\}\\&=\frac{2\arcsin y}{\pi}\end{aligned}$$



$$\boxed{f_Y(y)=\frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} \quad y\in[0,1]}$$

定理 设随机变量 X 具有概率密度 $f_X(x)$，$-\infty < x < \infty$,

又设函数 $g(x)$ 是处处可导单调函数， 反函数存在，设为 $x = h(y)$

则 $Y = g(X)$ 是一个连续型随机变量，其概率密度为

$$\boldsymbol{f_Y(y) = f_X\big(h(y)\big)|h'(y)|}$$

证明

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\{g(X) \le y\}$$

单增 $= P\{X \le h(y)\}$ 或 $(P\{X \ge h(y)\})$ 单减

$= F_X(h(y))$ 或 $(1 - F_X(h(y)))$

$\boxed{f_Y(y) = F_Y'(y) = f_X(h(y))h'(y)}$ $\boxed{\text{或}\ (-f_X(h(y))h'(y))}$

例7 设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，试证明X的线性函数$Y = aX + b$ $(a \neq 0)$也服从正态分布.

证 X的概率密度为：

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

$$y = g(x)\text{的反函数为：} x = h(y) = \frac{y-b}{a}, \text{且} h'(y) = \frac{1}{a}.$$

$$f_Y(y) = f_X[h(y)]\,|h'(y)| = f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)\frac{1}{|a|}$$

$$= \frac{1}{|a|}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\left(\frac{y-b}{a}-\mu\right)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma|a|)} e^{-\frac{[y-(a\mu+b)]^2}{2(a\sigma)^2}}$$

由于一个正态分布
它的线性函数
也服从正态分布

即有$Y = aX + b \sim N\left(a\mu + b, (a\sigma)^2\right)$.

例8　设随机变量$X \sim e(\lambda)$，求$Y = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda X}$的密度函数。

解　X的概率密度为：$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$

即有$Y \sim U(0,1)$.

$y = g(x)$的反函数为：$x = h(y) = -\dfrac{\ln(1-y)}{\lambda}$　$h'(y) = \dfrac{1}{\lambda(1-y)}$

当$y \in (0,1)$时，$f_Y(y) = f_X[h(y)]\,|h'(y)| = \lambda e^{-\lambda\left(\frac{-\ln(1-y)}{\lambda}\right)} \dfrac{1}{\lambda(1-y)} = 1$

(0,1)上的均匀分布

定理　设随机变量 X 具有分布函数为 $F_X(x)$，$Y = F_X(X)$，则有$Y \sim U(0,1)$.

证明　$F_Y(y) = P(Y \le y) = P\{F_X(X) \le y\}$

$$= P\{X \le F_X^{-}(y)\} = F_X(F_X^{-}(y)) = y$$

$$\boxed{f_Y(y) = F_Y'(y) = y' = 1, \quad y \in (0,1)}$$

例9　设随机变量$X \sim e(\lambda)$，求：1) $Y = [X] + 1$的分布列。

2) $Y = \min\{2, X\}$的分布

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x>0)$$

解　1）Y的可能取值为：　$1, 2, \cdots$

$$P(Y = k) = P([X] = k - 1)$$

$$= P(k - 1 \le X < k)$$

$$= F_X(k) - F_X(k - 1) = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k}$$

$$= e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda}) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k = 1,2,\cdots$$

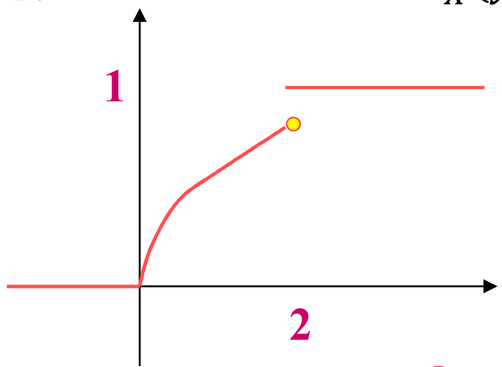
→ 几何分布

2）Y的可能取值为：$[0, 2]$

当$y \le 0$时，$F_Y(y) = 0$；当$y \ge 2$时，$F_Y(y) = 1$

当$0 < y < 2$时，$F_Y(y) = P(\min\{2, X\} \le y) = P(X \le y) = F_X(y) = 1 - e^{-\lambda y}$

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda y} & 0 < y < 2 \\ 1 & y \ge 2, \end{cases}}$$

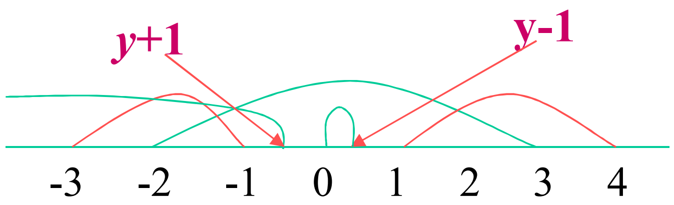


如果$X>2$，则 min $=2$ 矛盾 ∴ $X<2$

例 10 设随机变量 $X \sim U[-2,3]$

$$Y=\begin{cases} X+1 & X>0 \\ X-1 & X\le 0 \end{cases}$$ 求 Y 的概率密度.

$$\boxed{f_Y(y)=\frac{1}{5} \quad (y\in[-3,-1]\cup(1,4])}$$



解：Y 的取值范围为：$Y\in(1,4]\cup[-3,-1]$

当$X>0$时，　$Y=X+1 \in (1,4]$

当$X\le 0$时，　$Y=X-1 \in [-3,-1]$

当 $y\in[-3,-1]$时

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{\{X+1\le y, X>0\}\cup\{X-1\le y, X\le 0\}\}$$
$$=P\{\{X\le y+1, X\le 0\}\}=\frac{y+3}{5}=\frac{y+1-(-2)}{5}$$

当$y\in(-1,1)$时

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{\{X+1\le y, X>0\}\cup\{X-1\le y, X\le 0\}\}$$
$$=P(-2\le X\le 0)=\frac{2}{5}$$

?

当 $y\in[1,4]$时

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P\{\{X+1\le y, X>0\}\cup\{X-1\le y, X\le 0\}\}$$
$$=\mathrm{P}(0<\mathrm{X}\le y-1)+P(-2\le X\le 0)=\frac{2}{5}+\frac{y-1}{5}=\frac{y+1}{5}$$

例 11 设随机变量 $X \sim P(\lambda)$，求$P(X为偶数)$

解：

$$P(X为偶数)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=2k)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda}$$

$$P(X为奇数)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=2k+1)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda}$$

$$P(X为偶数)+P(X为奇数)=1$$

$$P(X为偶数)-P(X为奇数)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{2k}}{(2k)!}e^{-\lambda}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-\lambda}$$

?

$$=\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^{k}}{k!}e^{-\lambda}}=e^{-\lambda}e^{-\lambda}=e^{-2\lambda}$$

?

$$\boxed{P(X为偶数)=\frac{1+e^{-2\lambda}}{2}}$$