例题：　设(X,Y)服从$N(1,1,4,9,0.5)$。试求如下问题。

(1). $Cov(X,Y)$, $E(XY)$, $Cov(X,2X-3Y)$, $D(X-2Y)$

(2). 求k使得$X+kY$与$X-Y$相互独立

(3). 求X-3Y的分布

(4). 求概率$P(3X-2Y<1)$.

解：二维正太分布的性质 ρ表示相关系数。

$$Cov(X,Y)=\rho\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} = 0.5*2*3 = 3$$

$$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

$$E(XY)=Cov(X,Y)+E(X)E(Y)=3+1*1 = 4$$

(1). $Cov(X,Y)$, $E(XY)$, $Cov(X,2X-3Y)$, $D(X-2Y)$

$$Cov(X,2X-3Y) = 2Cov(X,X)-3Cov(X,Y)$$
$$= 2D(X)-3Cov(X,Y)$$
$$= 2*4-3*3=-1$$

$$D(X-2Y)=D(X)+4D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,-2Y)$$
$$=D(X)+4D(Y)-4\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$=4+4*9-4*3=28$$

(2). 求k使得$X+kY$与$X-Y$相互独立

二维正态分布(X,Y)中X和Y的线性组合为正态分布

正太分布独立，等价于不相关。

独立$\Leftrightarrow Cov(X+KY,X-Y)=0$

$$Cov(X+kY,X-Y)$$

$$=Cov(X,X)-Cov(X,Y)+Cov(kY,X)-Cov(kY,Y)$$

$$=D(X)-Cov(X,Y)+kCov(Y,X)-kD(Y)$$

$$=4-3+3k-9k$$

$$k=1/6$$

(3). 求X-3Y的分布

二维正态分布(X,Y)中X和Y的线性组合为正态分布

$$(X\text{-}3Y) \sim N(E(X-3Y), D(X-3Y))。$$

$$E(X-3Y)=E(X)-3E(Y)=-2$$

$$D(X-3Y)=D(X)+9D(Y)-2\mathrm{Cov}(X,-3Y)$$

$$=67$$

(4). 求概率$P(3X-2Y<1)$.

类似求的$3X-2Y \sim N(1,36)$

例题：从区间[0, 1]上任取n个点，

求最大值点与最小值点之间距离的数学期望.

解：设$X_1,\cdots X_n$为从区间[0,1]任取的n个点，则$X_1,\cdots X_n$相互独立.

令$Y=\max\{X_1,\cdots X_n\}$ $\quad X=\min\{X_1,\cdots X_n\}$

则X与Y分别为最大值点与最小值点 $\quad$ 距离为$Y-X$

$$E[Y-X]=E[Y]-E[X]$$

Y的分布函数为

$$F_{\max}(y)=F_{X_1}(y)\cdot F_{X_2}(y)\cdots F_{X_n}(y)$$

X的分布函数为

$$F_{\min}(x) = 1-(1-F_{X_1}(x))\cdot(1-F_{X_2}(x))\cdots(1-F_{X_n}(x))$$

$X_1,\cdots X_n$为[0,1]上均匀分布

$$f_{\max}(y) = \begin{cases} ny^{n-1}, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$f_{\min}(x) = \begin{cases} n(1-x)^{n-1}, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$E[Y-X] \ = E[Y]-E[X] \ = \frac{n-1}{n+1}$$

例题： 设(X,Y)服从$N(1,1,4,9,0.5)$。 求$E[\max(X,Y)]$

解：

$$\max(X,Y)=\frac{1}{2}(X+Y+|X-Y|)$$

$$E[\max\{X,Y\}] \ =\frac{1}{2}(E[X]+E[Y]+E[|X-Y|])$$

只需求$E[|Y-X|]$。

$$X-Y \sim N(\mu,\sigma^2)$$

$$\mu=1-1=0$$

$$\sigma^2=D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2Cov(X,Y)$$
$$=D(X)+D(Y)-2\rho\sqrt{D(X)D(Y)}=7$$

$$Z := X - Y \sim N(0,7)$$

$$E[|Y - X|] = E[|Z|]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{7}} e^{(\frac{-z^2}{2*7})} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{14\pi}} e^{(\frac{-z^2}{14})} dz$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} z \frac{1}{\sqrt{14\pi}} e^{(\frac{-z^2}{14})} dz$$

$=$（分部积分）$\dfrac{14}{\sqrt{14\pi}}$

所以 $E[\max\{X,Y\}] = \dfrac{1}{2}(E[X] + E[Y] + E[|X - Y|]) = \dfrac{1}{2}(1+1+\dfrac{14}{\sqrt{14\pi}})$

例题：

n个球随机的放到N个盒子中。假设每个球落入各个盒子是等可能的，求有球盒子个数学期望。

解：

$$令X_i = \begin{cases} 1, & 第i个盒子有球 \\ 0, & 第i个盒子没球 \end{cases}$$

则$X = \sum_{i=1}^{N} X_i$表示有球盒子数。 X_i，i=1,…N服从0-1分布

X_i	0	1
p_k	$1-p$	p

X_i	0	1
p_k	$1-p$	p

$$p = 1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}$$

$$E[X] = E\left[\sum_{\mathrm{i}=1}^{N} X_{\mathrm{i}}\right]$$

$$= NE[X_{\mathrm{i}}] = N\left(1 - \frac{(N-1)^n}{N^n}\right)$$

例题：

将编号为$1,2,\cdots n$ 的 n个球随机的放n个盒子中。

每个盒子只能装一个球。如果第i号球恰好放到了第i个盒子，称为一个配对。求配对数的数学期望和方差。

解：

$$令X_i=\begin{cases}1, & 第i个盒子配对\\ 0, & 第i个盒子没配对\end{cases}$$

X_i， $i=1,\ldots n$服从0-1分布

X_i	**0**	**1**
p_k	$1-p$	p

X_i	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$
p_k	$\mathbf{1-p}$	$\boldsymbol{p}$

$$p = \frac{1}{n}$$

$$E[X] = E\left[\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} X_{\mathrm{i}}\right] = 1$$

$$D(X) = D\left(\sum_{\mathrm{i}=1}^{n} X_{\mathrm{i}}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} D(X_i) + \sum_{i \neq j} Cov(X_i, X_j)$$

$$Cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E\left(X_i\right)E(X_j)$$

X_iX_j服从0-1分布

X_iX_j	**0**	**1**
$\boldsymbol{p_k}$	$\boldsymbol{1-p}$	$\boldsymbol{p}$

p为第i号盒子和第j号盒子同时配对的概率$=\dfrac{1}{n}\dfrac{1}{(n-1)}=\dfrac{1}{n(n-1)}$

$$Cov(X_i,X_j)=E(X_iX_j)-E\left(X_i\right)E(X_j)=\frac{1}{n(n-1)}-\frac{1}{n^2}$$