第二章：随机变量及其分布

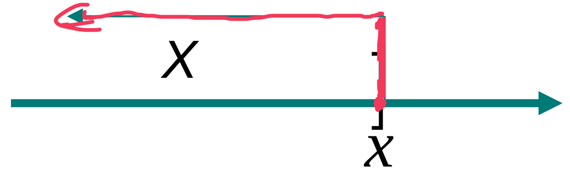
分布函数

1. 分布函数的概念

定义 设 X 是一个随机变量，x 是任意实数，函数

$$F(x)=P\{X\le x\}$$

称为 X 的分布函数.

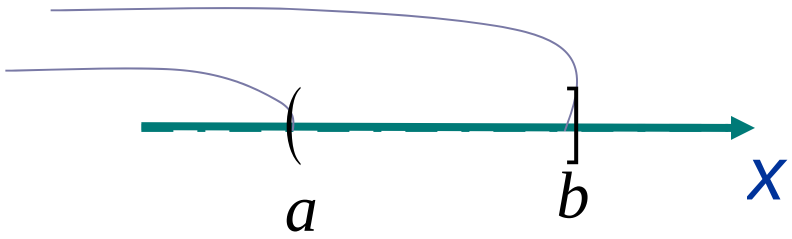


$$F(x)=P\big(X\in(-\infty,x]\big)$$

2. 分布函数的应用

对于任意的实数 a, b (a< b)，有：

$$P\{a<X\le b\}=P\{X\le b\}-P\{X\le a\}=F(b)-F(a).$$



证明：

因为 $\{X\le b\}=\{X\le a\}\bigcup\{a<X\le b\}$,

$$\{X\le a\}\bigcap\{a<X\le b\}=\varnothing,$$

所以 $P\{X\le b\}=P\{X\le a\}+P\{a<X\le b\}$,

故 $P\{a<X\le b\}=F(b)-F(a)$.

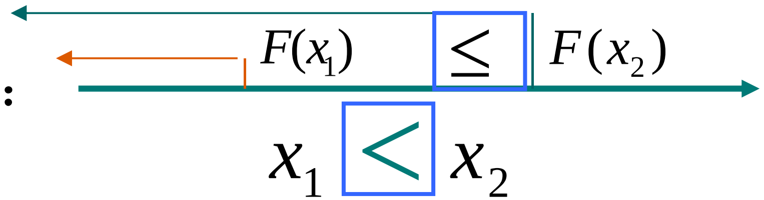
3. 分布函数的性质

1) $x \in R, \quad 0 \le F(x) \le 1$

2) $F(x)$ 是一个不减的函数.

对于任意的实数 x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$，有：

$$F(x_2) - F(x_1) = P\{x_1 < X \le x_2\} \ge 0.$$



不可能事件

3) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} P(X \le x) = P(X \le -\infty) = 0$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty} P(X \le x) = P(X \le +\infty) = 1$$

必 4) $F(x+0) = F(x)$, 即 $F(x)$是右连续的. 右连续

例 设***X***是一个随机变量， 分布函数为：

$$F(x)=\begin{cases} A-Be^{-2x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

求 1）参数 A,B

2）$P\{-1<X\le 5\}$

解

$$F(-\infty)=0 \quad =F(0)=\lim_{x\to 0^+}F(x)=A-B$$

$$F(+\infty)=1=\lim_{x\to+\infty}F(x)=A$$

得 $A=1,\quad B=1$

$$P\{-1<X\le 5\} \quad =F(5)-F(-1) \quad =1-e^{-10}.$$

3. 利用分布函数计算某些事件的概率

前面已讲：$P\{a < X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X \le a\} = F(b) - F(a)$

设 $F(x) = P\{X \le x\}$ 是随机变量 X 的分布函数，则

$$P\{X < a\} = F(a-0) \qquad (-\infty, x] \xrightarrow{x \to a^-} (-\infty, a)$$

转

$$P\{a \le X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X < a\} = F(b) - F(a-0)$$

$$P\{a \le X < b\} = P\{X < b\} - P\{X < a\} = F(b-0) - F(a-0)$$

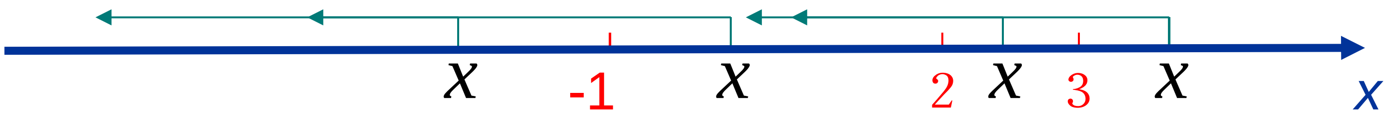
$$P\{X \ge b\} = 1 - P\{X < b\}$$

$$P\{X = x\} = P\{X \le x\} - P\{X < x\} = F(x) - F(x-0)$$

例 已知随机变量 X 的分布律如下，求 X 的分布函数.

X	-1	2	3
p_k	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

解：



当 $x < -1$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P(\phi) = 0$$

当 $-1 \le x < 2$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{4}.$$

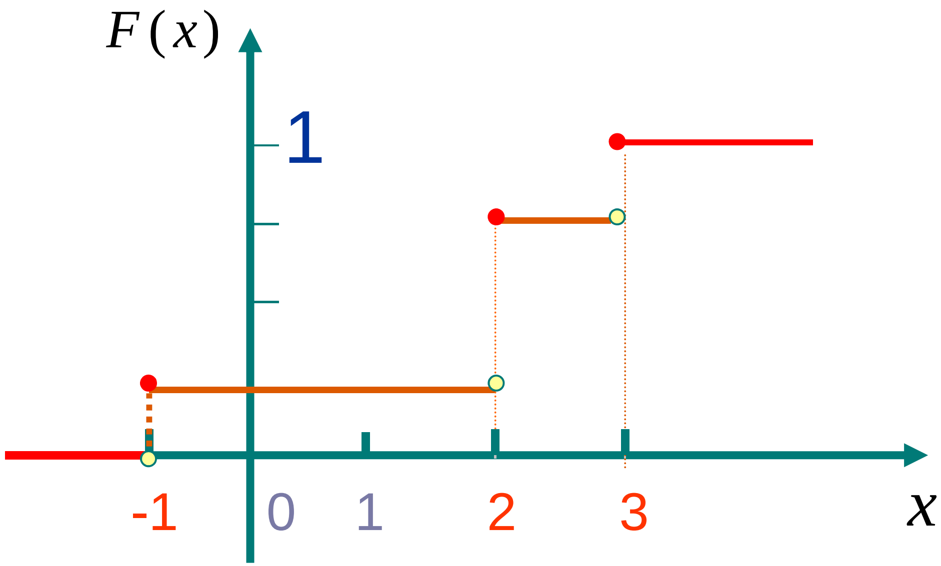
当 $2 \le x < 3$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P(X = -1) + P(X = 2) = \frac{3}{4}$$

当 $x \ge 3$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = 1$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{4}, & -1\le x<2,\\ \frac{3}{4}, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$



可以看出：（以$x=2$处为例)

$P\{X=2\}=F(x)$在$x=2$处的跳跃值

$P\{X<2\}=F(2-0)$ 左极限

$P\{X\le 2\}=F(2+0)=F(2)$ 右极限

说明

1）离散型随机变量的分布函数 $F(x)$ 是阶梯型跳跃函数。

2） 分布函数 $F(x)$ 在 $X=x_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ 处有跳跃，跳跃值p_k为

$$p_k=P\{X=x_k\}.$$

3）分布律与分布函数相互确定。

X	$x_{(1)}$	$x_{(2)}$	$\cdots$	$x_{(n)}$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

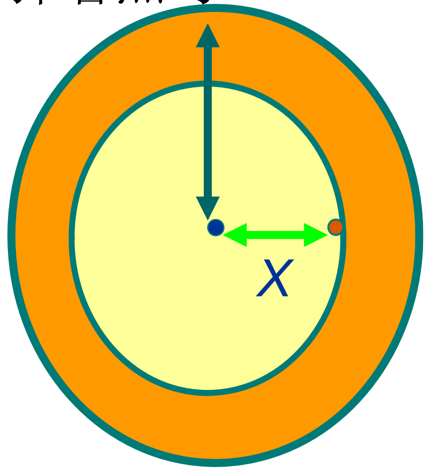
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<x_{(1)} \\ p_1, & x_{(1)}\le x<x_{(2)} \\ \cdots\cdots & \\ p_1+\cdots+p_k & x_{(k)}\le x<x_{(k+1)} \\ \cdots\cdots & \end{cases} =\sum_{x_i\le x} p_i$$

例

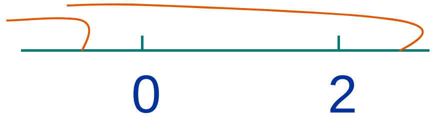
$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<-5 \\ 1/6, & -5\le x<0 \\ 1/2, & 0\le x<3 \\ 2/3, & 3\le x<5 \\ 1, & x\ge 5 \end{cases}$$

X	-5	0	3	5
p_k	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

例 一个靶子是半径为 2 米的圆盘，假设击中靶上任一同心圆盘上的点的概率与该圆盘的面积成正比，并假设射击都能中靶，以 X 表示弹着点与圆心的距离. 试求随机变量 X 的分布函数.



解： X 的取值范围为【0,2】



（1）若 $x<0$, $F(x)=P\{X\le x\}=0.$

（2）若 $x\ge 2$, $F(x)=P\{X\le x\}=1.$

（3）若 $0\le x\le 2$, 由题意，$F(x)=P\{X\le x\}=k\pi x^2$

取 $x=2$, 由已知得 $P\{X\le 2\}=1=4\pi k$ 得 $k=\dfrac{1}{4\pi}$, 即 $F(x)=\dfrac{x^2}{4}.$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{4}, & 0\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$