第 2 节课

§ 1.2　概　率

一、 频 率 的定义与性质

1. 定义 在相同的条件下，进行了n次试验，在这 n 次试验中，

事件 A 发生的次数 n_A 称为 事件 A 发生的频数。

比值 n_A / n 称为 事件 A 发生的频率，并记成 $f_n(A)$ 。

2. 它具有下述性质：

1° $0 \le f_n(A) \le 1$ ；

2° $f_n(\Omega) = 1$;

3° 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容事件 ,则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

掷硬币实验

n=500次（7组） n_A：正面出现的次数 $f_n(A)$：正面出现的频率

n_A	251	249	256	253	251	246	244
$f_n(A)$	0.502	0.498	0.512	0.506	0.502	0.492	0.488

所以频率具有不确定性。

实验者	n	n_H	$f_n(H)$
德•摩根	2048	1061	0.5181
蒲 丰	4040	2048	0.5096
K •皮尔逊	12000	6019	0.5016
K •皮尔逊	24000	12012	0.5005

所以频率具有稳定性

事件发生
的频繁程度

事件发生
的可能性的大小

频　率 → 稳定性 → 概　率

频率的性质 → 概率的公理化定义

$1^\circ \quad 0 \le f_n(A) \le 1$;

$2^\circ \quad f_n(\Omega) = 1$;

$3^0 \quad f_n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i)$

$1^\circ \quad 0 \le P(A) \le 1$;

$2^\circ \quad P(\Omega) = 1$;

$3^0 \quad P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

二 概率的定义和性质

1.定义 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一个实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率，要求集合函数 $P(\bullet)$ 满足下列条件：

1^0 (非负性) $0 \le P(A)$；

2^0 (归一性) $P(\Omega) = 1$；

3^0 (可列可加性) 若$A_1, A_2, \cdots$是两两互不相容事件,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

2. 概率的性质

$$\boxed{P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots}$$

性质 1 $P(\varnothing) = 0$;

$A_1, A_2, \cdots, A_n, \phi, \phi, \cdots$

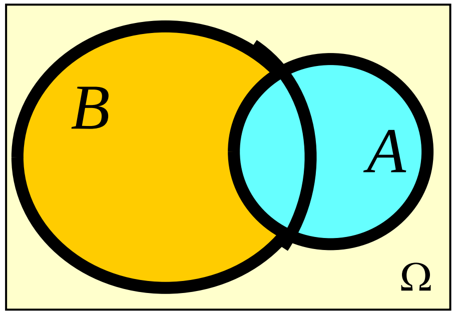
性质 2 若$A_1, A_2, \cdots, A_n$是两两互不相容事件,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

性质 3 $P(B - A) = P(B) - P(AB)$ $\boxed{= P(\overline{A}B)}$

$$\overset{A \subset B}{=\!=\!=} P(B) - P(A)$$

(单调性) $A \subset B \Rightarrow P(B) \geq P(A)$



$$B = (B - A) \cup AB$$

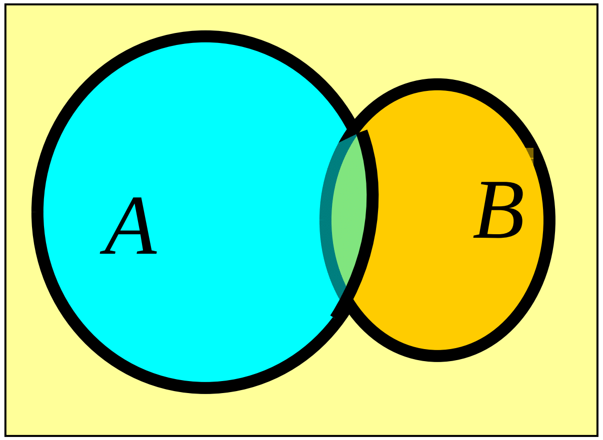
$$P(B) = P(B - A) + P(AB)$$

性质 4 $P(A) \leq 1$;

性质 5 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

性质 6 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$



$$A \cup B = A \cup B\overline{A}$$

$$A \cup B \cup C = A \cup B\overline{A} \cup C\overline{A}\overline{B}$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) = {} & P(A) + P(B) + P(C) \\ & - P(AB) - P(AC) - P(BC) \\ & + P(ABC) \end{aligned}$$

加单

减双

例1．设事件 A,B 的概率分别为1/2和1/3, 下列三种情况下

1) $P(AB)=1/4$; 2) $AB=\phi$; 3) $B\subset A$, 求：$P(A-B), P(A\cup B)$

解 $P(A)=\dfrac{1}{2}$ $P(B)=\dfrac{1}{3}$

1) $P(A-B)=P(A)-P(AB)$

2) $P(A-B)=P(A)$

3) $P(A-B)=P(A)-P(B)$ $B\subset A$

1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

3) $P(A\cup B)=P(A)$

例2． 已知 $P(A)=0.5, P(B)=0.4, P(A-B)=0.3$ ，求$P(\bar{A}\cup\bar{B}), P(A\cup\bar{B})$ 。

解 1) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(AB)$ $\boxed{=0.8}$

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$$

$$P(AB)=0.2$$

2) $P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})$

$$=P(A)+P(\bar{B})-(P(A)-P(AB))$$

$$\boxed{=0.6+0.2=0.8}$$

(1) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)$

$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$

$\therefore P(\bar{A}\cup\bar{B})=0.8$

(2) $P(A\cup\bar{B})=P(A)+P(\bar{B})-P(A\bar{B})$

$=0.8$

例3．设 A、B、C 为三个事件

$$P(A)=P(B)=P(C)=1/4, P(AB)=P(BC)=1/8, P(AC)=0$$

求：A、B、C 都不发生的概率。

解 $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C) - P(AB)-P(BC)-P(CA)+P(ABC)$$

$$P(ABC)=0$$

$P(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$