§5.2 贝努里试验

主　题

贝努里试验

n重贝努里试验

1. 贝努里(Bernoulli,伯努利)试验 只有两种实验结果

$$P(A)=p,\quad P(\overline{A})=1-p,\quad 0<p<1$$

2. *n*重贝努里试验（*n*次**重复独立**试验）：

把贝努里试验重复独立的进行了n次。

随机试验的独立性:
各次试验结果互不影响

性质：在*n*重贝努里试验中，求事件A发生k次的概率

$$\boxed{P(B_k)=C_n^k\,p^k(1-p)^{n-k},\qquad k=0,1,\cdots,\ n}$$

重复独立实验

证

$$C_n^k,\ E_{i_1}, E_{i_2}, \cdots, E_{i_k}, E_{i_{k+1}} \cdots E_n$$

$$\underbrace{p\quad p\quad \ldots\quad p}_{p^k}$$

例 5 假设某次考试卷出了20道单项选择题，每道题都是4个备选答案，若某同学不学习，求他考试能及格的概率

解： $n=20$，$p=\dfrac{1}{4}$，设C={及格}={至少答对了12道题目} $=\bigcup_{k=12}^{20}B_k$，

$B_k=\{$**这位同学在这20道题目中答对了**k**道**$\}$，$k=0,\cdots,20$，

$$P(C)=\sum_{k=12}^{20}P(B_k)=\sum_{k=12}^{20}C_{20}^{k}(\frac{1}{4})^{k}(1-\frac{1}{4})^{20-k}$$

例6 甲、乙两人比赛，每局甲赢的概率为p，没有和局，比赛规则是3局2 胜 以及5局3胜，求甲最终获胜的概率。

解： 设C={3局2胜规则下甲获胜}，B={5局3胜规则下甲获胜}，则

$$P(\text{甲最终获胜}) = P(C) + P(B),$$

$$P(C) = p^2 + C_2^1 p(1-p)p \qquad P(B) = p^3 + C_3^2 p^2(1-p)p + C_4^2 p^2(1-p)^2 p$$

比赛共进行了2次

比赛共进行了3次

$$P(\text{甲最终获胜}) = P(C) + P(B) = 6p^5 - 15p^4 + 8p^3 + 3p^2.$$

例7.甲、乙两人比赛，每局甲赢的概率为p，没有和局，比赛规则是：每局赢者得1分输的得0分，一人超过对方2分者胜出，求甲胜出的概率 。

解：设C={甲胜出}　　B_i={前两局中甲赢i次}, i=0, 1, 2, 则

全概率

$$P(C)=P(B_0)P(C\mid B_0)+P(B_1)P(C\mid B_1)+P(B_2)P(C\mid B_2)$$

$$=(1-p)^2\times 0+C_2^1 p(1-p)P(C)+p^2\times 1$$

互不影响

$$P(C)=\frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}$$

例8 设事件 $A_1, A_2, \cdots A_n$ 是样本空间 Ω 的划分，且$P(A_m) = p_m > 0, m = 1,\dots, n$

求事件 A_i比A_j 先发生的概率。

解：设C={A_i比A_j先发生}， C_1={第一次实验A_i发生}；

C_2={第一次实验A_j发生}； C_3={第一次实验A_i, A_j先都不发生}，

$$P(C) = \sum_{k=1}^{3} P(C_i)P(C \mid C_i)$$

$$= p_i + (1 - p_i - p_j)P(C)$$

$$P(C) = \frac{p_i}{p_i + p_j}$$

$$P(C_1) = p_i \qquad P(C \mid C_1) = 1$$

$$P(C_2) = p_j \qquad P(C \mid C_2) = 0$$

$$P(C_3) = 1 - p_i - p_j \qquad P(C \mid C_3) = P(C)$$

设D_k={A_i在k次试验中首次发生}，k =1,2,......

$$D_k = \underbrace{\overline{A} \cdots \overline{A}}_{(k-1)次} \underbrace{A}_{第k次}$$

D_1, D_2,......**两两不相容，且**$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = \Omega$，

$$P(C) = P(C\Omega) = P(C(\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k)) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} CD_k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(CD_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (1 - p_i - p_j)^{k-1} p_i = p_i \times \frac{1}{1 - (1 - p_i - p_j)} = \frac{p_i}{p_i + p_j}$$