第二章：随机变量及其分布

常见的离散型随机变量

$X \sim B(1,p)$

常见的离散型随机变量

1) $"0-1"$分布　如果随机变量 X 的分布律为

$$P\{X=0\}=1-p\text{，}\quad P\{X=1\}=p \qquad (\text{其中}\,0<p<1\text{为参数})$$

或

X	0	1
P	$1-p$	p

则称随机变量 X 服从参数为 p 的 0—1分布（伯努利分布).

记为：$X\sim"0-1"$分布　$X\sim 0-1_{(p)}$　$X\sim B(1,p)$

$$P\{X=k\}= p^k(1-p)^{1-k}, \qquad k=0,1 \quad (0<p<1),$$

常用于描述：两状态的现象（电闸开与关，是与否，非此即彼）

X服从退化分布：若 $P(X=c)=1$

如果一个随机试验的样本空间只包含两个元素，

即$\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$，我们总能在$\Omega$上定义一个

服从(0—1)分布的随机变量来描述这个随机试验的结果.

$$X=X(\omega)=\begin{cases}0, & \text{当}\omega=\omega_1,\\ 1, & \text{当}\omega=\omega_2.\end{cases}$$

一个随机试验，设A是一随机事件，且 $P(A)=p$， $P(\overline{A})=1-p$

若仅考虑事件A是否发生，就可以定义一个服从参数为 p 的 0—1 分布的随机变量来描述此随机试验的结果。

$$\text{令}\quad X=\begin{cases}1 & \text{若事件}A\text{发生}\\ 0 & \text{若事件}A\text{不发生}(\text{即}\overline{A}\text{发生})\end{cases}$$

只有两个可能结果 (A及$\overline{A}$)的试验，称为伯努利实验.

0—1分布也称**伯努利分布**

例　抛一枚硬币观察正、反两面情况.

$$X = X(\omega) = \begin{cases} 1, & 当\omega = 正面 \\ 0 & 当\omega = 反面, \end{cases}$$

其分布律为

X	0	1
p_k	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$$P\{X = k\} = (\frac{1}{2})^k (\frac{1}{2})^{1-k}, \qquad k = 0,1 \qquad (0<p<1),$$

即$X \sim 0-1_{\left(\frac{1}{2}\right)}$

X也可看成抛一次硬币正面出现的次数

2）二项分布

二项分布的概率背景 n重伯努利试验

设试验E只有两个可能结果：A及$\overline{A}$，则称E为**伯努利实验**.

已知$p(A)=p\,(0<p<1)$,则$P(\overline{A})=1-p$现将E独立重复进行n次,

则称这一串重复独立的试验为n重伯努利试验。

令 X = n重伯努利试验中事件A发生的次数，则X所有可能的取值为：

0,1,2,3，…，n.

当$X=k\,(0\le k\le n)$时，即 A 在 n 次试验中发生了 k 次.

$$\underbrace{A\ A\cdots A}_{k\text{次}}\ \underbrace{\overline{A}\ \overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-k\text{ 次}},$$

$$\underbrace{A\ A\cdots A}_{k-1\text{ 次}}\ \overline{A}\ A\ \underbrace{\overline{A}\ \overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-k-1\text{ 次}}\qquad \cdots\cdots$$

得 A 在 n 次试验中发生 k 次的方式共有 $\binom{n}{k}$ 种，

因此 A在 n 次试验中发生 k 次的概率为 $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$

$$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}\qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

二项分布的定义

$X \sim B(n,p)$

如果随机变量 X 的分布律为

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

则称随机变量 X 服从参数为$(n,\ p)$的二项分布$(Binomial)$.

记作 $X \sim B(n,\ p)$ （其中n为自然数，$0<p<1$为参数）

n重伯努利试验中，若令X=n重伯努利试验中事件A发生的次数， 则 $X \sim B(n,\ p)$

例：抛n次硬币，观察正面出现的次数。

n重伯努利

有放回

当 n=1 时，“0-1” 分布 $= B(1,\ p)$

分布律的验证

（1）由于 $0 \le p \le 1$ 以及 n 为自然数，可知

$$C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ge 0 \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

（2）又由二项式定理，可知

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = [p+(1-p)]^n = 1$$

所以 $P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \quad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

是分布律.

例 对同一目标进行400次独立射击，设每次射击时的命中率均0.02，试求400次射击至少击中两次的概率是多少？

解 令： X：400次射击中命中目标的次数.

则由题意 $X \sim B(400,\ 0.02)$.

$$P\{X=k\}=\binom{400}{k}(0.02)^k(0.98)^{400-k}, k=0,1,\ldots,400.$$

于是所求概率为：

$$P\{X \geq 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}$$

$$=1-(0.98)^{400}-400(0.02)(0.98)^{399}=0.9972$$

例　已知100件产品中含有10件次品，从中随机取出5件，分有放回和不放回两种情况。设 X 表示5件中所含次品个数，求 X 分布律。

解：　有放回取.　X 的可能取值为：　0,1,2,3,4,5　　$X \sim B(5,0.1)$.

$$P\{X=k\}=C_5^k\left(\frac{10}{100}\right)^k\left(1-\frac{10}{100}\right)^{5-k}$$

不放回取.　X 的可能取值为：　0,1,2,3,4,5

$$P\{X=k\}=\frac{C_{10}^k C_{90}^{5-k}}{C_{100}^5}$$

3）超几何分布

如果随机变量 X 的分布律为　（其中 $N>n, N>M$ ）

$$P(X=k)=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}\quad \left(k=0,\ 1,\ \cdots,\ \min\{M,n\}\right)$$

则称随机变量 X 服从参数为 n, M, N 的超几何分布.

记作 $X \sim H(n, M, N)$

不放回

假定在N件产品中有M件次品，在产品中随机抽n件（不放回）做检查，发现次品的个数 $X \sim H(n, M, N)$

$X \sim H(n.M.N)$